Formule de trace semi-classique sur une variété riemannienne avec un potentiel de Dirac

Luc HILLAIRET

Prépublication de l'Institut Fourier n° 504 (2000)

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

Introduction

On considère l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte, et on note $E(t,x,y)$ le noyau de la solution fondamentale. Il est alors intéressant d'étudier la distribution $S(t) = \int E(t,x,x)dx$. En utilisant les valeurs propres λ_n du laplacien et le calcul fonctionnel, on établit l'égalité :

$$S(t) = \sum \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Comme on sait de plus que E est un opérateur intégral de Fourier, on arrive à lier les singularités de S aux longueurs des géodésiques périodiques de la variété ([1]). Plus précisément, on montre l'inclusion suivante :

$$\text{supp. sing.}(S) \subset \mathbb{L},$$

avec

$$\mathbb{L} = \{ \ L_\gamma \mid \gamma \text{ géod. pér. } \},$$

où L_γ représente la longueur de la géodésique γ. Une telle formule permet donc d'étudier les relations entre la géométrie de la variété et la distribution des valeurs propres du laplacien.

Classification math. : 35A08, 35L05, 35P20.
Mots-clés : équation des ondes, paramétrix d'Hadamard, potentiel de Dirac, formule de trace.

En étudiant l'équation de Schrödinger, ou de la chaleur et en suivant sensiblement la même démarche, on arrive au même genre de formule, qu'on appelle ici *formule de trace semi-classique.* On renvoie à [2], [3], [1], [4] pour des exemples de *formule de trace* ou de leur utilisation (la liste n'est pas exhaustive). Le terme *formule de trace semi-classique* qu'on emploie ici, peut se trouver dans la littérature sous d'autres noms : *formule de Poisson, de Gutzwiller ....* On a gardé l'adjectif *semi-classique* pour insister sur la filiation entre la formule qu'on établit ici et celles qu'on trouve sous ce nom dans la littérature mathématique et physique. De plus, on sait que l'étude du comportement de la solution fondamentale de l'équation des ondes aux grandes énergies donne les mêmes renseignements que la limite *semi-classique* proprement dite.

On aimerait étendre ce type de formule aux cas où la variété présente des singularités coniques, par exemple, le cas d'un billard polygonal. On s'attend alors à ce que l'existence des singularités (ou du coin) fasse apparaître dans la formule de trace la contribution d'orbites diffractives passant par le point singulier. On va ici étudier un cas plus simple, mais dans lequel de telles orbites diffractives apparaissent. On se place dans le cadre des *pseudo-laplaciens* (cf. [5]) sur une variété M, riemannienne, compacte, de dimension 3. Ce cadre est en effet moins singulier que le cadre général d'une singularité conique, car on a un opérateur de référence : le laplacien riemannien standard.

Soit $p \in M$, le laplacien défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(M\backslash\{p\})$ n'est pas un opérateur essentiellement autoadjoint. En utilisant une décomposition en coordonnées polaires, et la théorie des extensions autoadjointes de Von Neumann dans les cas à points et cercles limites (cf. [6] pp. 146 et suivantes), on montre que si M est de dimension 2 ou 3, il existe un cercle d'extensions autoadjointes. Celles-ci sont caractérisées par leur domaine, et paramétrées par $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; on note Δ_β l'extension correspondante. Δ_∞ est le laplacien riemannien standard (cf. [4]), avec la convention de signe telle que ses valeurs propres soient positives, c'est-à-dire qu'on a :

$$\Delta_\infty = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2},$$

dans le cas euclidien. Le domaine de Δ_β est caractérisé par :

$$\mathrm{dom}(\Delta_\beta) = \{f \in H^2(M\backslash\{p\}), f \text{ vérifie } C^\beta \text{en } p\}.$$

La condition C^β signifie qu'au voisinage de p, on a :

$$(C^\beta) \qquad \exists A \in \mathbb{R} \mid f(x) = A(\frac{1}{xp} + \beta) + o(1),$$

où $\overline{xp}$ désigne la distance riemannienne entre x et p (cf. [5], [7]). On trouvera dans [8] une étude très complète de ces opérateurs appelés aussi *potentiels de Dirac* ou *interactions ponctuelles.*

On s'intéresse ici à l'équation des ondes relative à Δ_β, c'est à dire :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_\beta.$$

On cherche à écrire le noyau de $\frac{\sin(\sqrt{\Delta_\beta} t)}{\sqrt{\Delta_\beta}}$, pour en déduire une formule de trace. On espère notamment voir apparaître les contributions des géodésiques "brisées" en p. On va tout d'abord écrire un développement en diffractions multiples, c'est-à-dire une expression du type :

$$E_\beta = E_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} K_n,$$

où E_β (resp. E_∞) désigne la solution fondamentale de l'équation des ondes relative aux extensions Δ_β (resp. Δ_∞) (voir la section 1 pour les notations) et K_n est un opérateur qui prend en compte n diffractions. On peut espérer un tel résultat du fait de la propagation à vitesse 1. La deuxième partie du travail consiste à montrer qu'on peut prendre la trace (au sens des distributions) de ces opérateurs et à localiser leurs singularités. On obtient alors le résultat attendu :

$$\text{supp sing}(\text{Tr}(E_\beta)) \subset \text{supp sing}(\text{Tr}(E_\infty)) \cup \Lambda,$$

avec

$$\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{L}_n,$$

$$\mathbb{L}_n = \{L \mid \exists n \geq 1, \exists \gamma_1 \dots \gamma_n, \text{ lacet géod. joignant } p \text{ à } p, \ L = \sum L_{\gamma_i}\}.$$

On appelle géodésique brisée en p le fait de suivre un lacet géodésique qui revient en p (éventuellement en faisant un angle), puis d'en suivre un second et ainsi de suite. Les éléments de $\mathbb{L}_n$ correspondent donc aux longueurs des géodésiques brisées formées de n lacets géodésiques.

Pour calculer de plus le premier terme du développement de $\text{Tr}(E_\beta)$ au voisinage de chaque singularité, on fera deux hypothèses supplémentaires : une concernant la géométrie de M (p n'est pas conjugué à lui même, voir partie 2.1.1), et l'autre concernant le nombre de manières d'écrire $L = \sum L_{\gamma_j}$, voir partie 2.1.4. Dans le cas du tore, on peut mener des calculs explicites du début à la fin et on obtient le développement total de la trace.

Remarque : il y a deux étapes bien distinctes dans l'établissement du résultat annoncé. Dans un premier temps on peut mener des calculs formels qui aboutissent, mais dans un deuxième temps il faut justifier ces calculs. Une telle justification, indispensable, est parfois fastidieuse et apporte peu à la compréhension générale. On a donc préféré rejeter les calculs les plus lourds en appendice, pour qu'ils ne nuisent pas trop à la lisibilité de la démarche.

REMERCIEMENTS: je tiens à remercier Yves Colin de Verdière qui m'a incité à travailler sur ce problème. Il a toujours été disponible pour discuter de ce travail (entre autres).

Table des matières

1 Développement en diffractions multiples

Dans tout ce papier, M désignera une variété riemannienne, compacte de dimension 3, et β un nombre réel fixé. Δ désignera le laplacien riemannien pris au sens des distributions, avec la convention de signe donnée dans l'introduction, Δ_∞ sera l'extension autoadjointe à l'espace de Sobolev H^2 et Δ_β celle correspondant à la condition C^β, cf. [5], [7].

Principe

Le principe du développement en diffractions multiples est de partir de $v_\infty(t,x)$, solution de l'équation des ondes relative à Δ_∞ pour la donnée initiale u,(voir ci-dessous système 1) . Si u est à support loin de p, la solution libre est nulle en p jusqu'à un temps t_0, elle coïncide donc avec la solution perturbée. Quand elle n'est plus nulle en p, la condition C^β n'est alors plus vérifiée. Il faut donc rajouter une fonction $v_1(t,x)$ pour forcer la condition C^β en p. La fonction v_1 doit aussi vérifier l'équation des ondes en dehors de p et être nulle tant que la solution libre convient. Il est donc naturel de chercher cette fonction sous la forme d'une solution de l'équation des ondes inhomogène dont le second membre est de la forme $a_1(t)\delta_{x=p}$. Le fait de vérifier la condition C^β va déterminer $a_1(t)$ en fonction des valeurs de la solution libre en p. Plus précisément, a_1 sera solution d'une équation de Volterra dont le second membre est $v_\infty(t,p)$. Pour établir l'équation de Volterra, on utilisera la paramétrix d'Hadamard (cf. prop 1) qui n'est valable que pour des temps petits. Cette restriction nous amènera à écrire v_1 comme la somme de deux fonctions w_1 et r_1 telles que $v_\infty + w_1$ vérifie C^β en p, pour tout temps. Il suffira alors de montrer qu'on peut faire jouer à r_1 le rôle de la solution libre pour itérer le processus et faire ainsi apparaître ce qu'on appelle le développement en diffractions multiples.

On va tout d'abord introduire quelques notations : on notera $E_\beta(t,x,y) = \frac{\sin(\sqrt{\Delta_\beta} t)}{\sqrt{\Delta_\beta}}\delta_y$, de sorte que $E_\beta(t,x,y)$ est le noyau distribution de l'opérateur E_β caractérisé par :

$$\forall u, \quad E_\beta u \quad \text{vérifie} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) E_\beta u = 0, \ \ \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times M\backslash\{p\}) \\ \lim\limits_{t\to 0} E_\beta u(t,\cdot) = 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial E_\beta u}{\partial t} = u, \\ \forall t, \ \ E_\beta u(t,\cdot) \ \ \text{vérifie} \ \ C^\beta \ \ \text{en} \ \ p. \end{cases} \tag{1}$$

On notera de la même manière E_∞ solution fondamentale de l'équation des ondes relative à Δ_∞, c'est-à-dire que dans le système précédent la dernière condition est remplacée par :

$$\forall t, \ \ E_\infty u(t,\cdot) \text{ est } H^2,$$

où H^2 est l'espace de Sobolev. Cette dernière condition peut être remplacée par :

$$E_\infty u(t,\cdot) \ \ \text{est continue en } p.$$

On notera ϕ_n une base orthonormée de fonctions propres de Δ_∞, et λ_n les valeurs propres associées.

On notera aussi $\overline{xy}$ la distance riemannienne entre x et y, et R_i le rayon d'injectivité de M.

On choisit $r < R_i/2$, et on prend deux fonctions χ et ρ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ telles que $\chi + \rho = 1$, et $\chi(s)$ vaut 1 si $s < r$ et 0 si $s > 2r$.

On veut maintenant suivre la construction expliquée ci-dessus. On se donne une condition initiale u dans $\mathcal{C}_0^\infty(M\backslash\{p\})$, on note $v_\beta(t,x) = (E_\beta u)(t,x)$, et $v_\infty(t,x) = (E_\infty u)(t,x)$. Pour des temps inférieurs à $t_0 = \mathrm{dist}(p,\mathrm{supp}(u))$, on a $v_\beta = v_\infty$ car, grâce à la propagation à vitesse 1, $v_\infty(t,p) = 0$. On va rajouter v_1 à v_∞ pour forcer la condition C^β tout en continuant à vérifier l'équation des ondes en dehors de p. Pour cela, on cherche v_1 solution du système suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) v_1 = a_1(t)\delta_{x=p} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times M) \\ \lim\limits_{t\to 0} v_1(t,\cdot) = 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

où a_1 est à déterminer. On peut alors écrire (cf. [9]) :

$$v_1(t,x) = \int_0^\infty E_\infty(s,x,p)a_1(t-s)ds.$$

On va tout de suite séparer ce qui se passe pour les s petits, et ce qui se passe pour les s grands. On note donc :

$$w_1(t,x) = \int_0^\infty \chi(s)E_\infty(s,x,p)a_1(t-s)ds, \tag{3}$$

$$r_1(t,x) = \int_0^\infty \rho(s)E_\infty(s,x,p)a_1(t-s)ds. \tag{4}$$

Remarque : on va chercher à exprimer le noyau de E_β en fonction d'expressions plus ou moins compliquées de E_∞, on va donc oublier l'indice ∞. À partir de maintenant : E désigne la solution fondamentale de l'équation des ondes non perturbée.

1.1 Un opérateur auxiliaire

On va chercher dans cette partie à déterminer a_1 en fonction de $v_\infty(t,x)$. En fait on n'a besoin que des valeurs de v_∞ en p. On va noter $r_0(t) = v_\infty(t,p)H(t)$, où H est la fonction de Heaviside. Comme $v_\infty(t,p)$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times M)$ et est nulle pour $t < t_0$ (t_0 =dist(supp u,p) du fait de la propagation à vitesse 1), r_0 est $\mathcal{C}^\infty$. Pour relier a_1 à r_0 il faut avoir le développement de $w_1(t,x)$ au voisinage de p. Dans la définition de w_1 (cf. 3), le noyau de l'équation des ondes n'intervient que pour des temps petits. On peut donc utiliser la paramétrix d'Hadamard. Celle-ci nous est donnée par la proposition suivante déduite de [10] pp. 254–257. Avant de l'énoncer, on va rappeler quelques notations. On note $\Theta(x,y)$ la fonction telle que :

$$\int_M \phi(y)dv_g(y) = \int_{T_xM} \phi \circ \exp_{|x}(m)\Theta(x, \exp_{|x}(m))dm,$$

pour toutes les fonctions ϕ à support dans la boule de centre x et de rayon R_i. On a noté $\exp_{|x}$ l'application exponentielle en x (qui est un difféomorphisme sur le support de ϕ), dv_g la mesure riemannienne, et dm la mesure de Lebesgue euclidienne dans l'espace tangent en x à M (noté T_xM) cf. [4].

Proposition 1 *Pour $\overline{xy} \leq t < r < R_i$, R_i rayon d'injectivité de M*

$$E(t,x,y) = u_0(x,y)\delta(\overline{xy}^2 - t^2) + \sum_{k=1}^{N} u_k(x,y)(\overline{xy}^2 - t^2)_-^{k-1} + R_N(t,x,y),$$

R_N est $\mathcal{C}^N([0;r[\{\overline{xy} < r\})$, et les u_i sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{xy} < R_i$. De plus on a :

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\Theta(x,y)^{-\frac{1}{2}},$$

Remarque : si N est une variété riemannienne et $F \quad : \quad N \to \mathbb{R}$ une submersion on note $\delta(F(x))$ la distribution $F^*\delta$ (cf. [11] p. 40). Si on note S_0 l'hypersurface $F^{-1}(0)$ et $d\mu_0$ la mesure riemannienne induite par N sur S_0, on a :

$$\forall \chi \in \mathcal{C}_c(N) \quad \int_N \delta(F(x))\chi(x) = \int_{S_0} \chi \frac{d\mu_0}{|\text{grad } F|}.$$

Si on considère le feuilletage par les hypersurfaces $F(x) = a$, on a aussi la décomposition suivante de la mesure riemannienne $|dx|$:

$$\int f(x)|dx| = \int \left[\int_{N_a} f(x)\delta(F(x) - a)\right] da.$$

On a donc, dans le cas qui nous intéresse : si f est $\mathcal{C}^\infty(M)$ à support dans la boule de centre x et de rayon r_i :

$$\int_M \delta(\overline{xy}^2 - t^2) f(y) dv_g(y) \quad = \quad \frac{1}{2} t \tilde{f}(t,x), \tag{5}$$

avec :

$$\tilde{f}(t,x) = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} f \circ \exp_{|x}(t\omega) \Theta(x, \exp_{|x}(t\omega)) d\omega.$$

L'expression de la paramétrix d'Hadamard est l'ingrédient principal du développement en diffractions multiples. On peut donc traiter le cas de la dimension 2 en prenant la paramétrix correspondante et en suivant la même démarche.

On appellera $E_r(t,x,y) = E(t,x,y) - u_0(x,y)\delta(\overline{xy}^2 - t^2)$, d'après la proposition $E_r(t,p,p)$ est bien définie et continue sur $[0,r[$.

On peut maintenant décrire le comportement de w_1 au voisinage de p.

Lemme 1 *Au voisinage de $x = p$, on a le développement suivant :*

$$w_1(t,x) = u_0(x,p) \frac{a_1(t - \overline{xp})}{2\overline{xp}} + \int_0^\infty \chi(s) E_r(s,p,p) a_1(t-s) ds.$$

Preuve : c'est une conséquence directe de l'expression du noyau de l'équation des ondes aux temps petits. □

Il ne reste plus qu'à écrire la condition C^β pour $w_1 + r_0$ pour obtenir la proposition suivante :

Théorème 1 *Étant donnée $r_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times M)$, nulle au voisinage de $t = -\infty$, il existe z_β distribution sur $\mathbb{R}$ telle que si on pose :*

$$a_1 = z_\beta * r_0(.,p),$$

alors w_1 définie par

$$w_1(t,x) = \int_0^\infty \chi(s) E(s,x,p) a_1(t-s) ds,$$

est telle que $w_1(t,x) + r_0(t,x)$ vérifie C^β en p. De plus, z_β est unique si on impose la condition suivante :

$$(r_0 = 0 \quad \forall t < t_0) \Rightarrow (a_1 = 0 \quad \forall t < t_0)\,.$$

La distribution z_β est alors nulle pour les temps négatifs, $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0. Au voisinage de 0, on a le développement suivant :

$$z_\beta(t) = 4\pi H(t) + R_\beta(t),$$

avec R_β continue, et H la fonction de Heaviside.

Preuve : on écrit ce que veut dire la condition C^β. On a, au voisinage de p :

$$w_1(t,x) + r_0(t,x)) = \frac{1}{4\pi \overline{xp}} a_1(t) - \frac{1}{4\pi} a_1'(t) \\ + \int_0^\infty \chi(s) E_r(s,p,p) a_1(t-s) ds + r_0(t,p)) + o(1),$$

car $\Theta(x,p) = 1 + o(\overline{xp}^2)$ (cf. [4] pp. 99–100). Pour vérifier la condition C^β, on doit donc avoir :

$$\beta \frac{1}{4\pi} a_1(t) - \frac{1}{4\pi} a_1'(t) + \int_0^\infty \chi(s) E_r(s,p,p) a_1(t-s) ds + r_0(t,p) = 0.$$

Cette équation se réécrit sous la forme :

$$a_1'(t) - \beta a_1(t) - 4\pi \int_0^\infty \chi(s) E_r(s,p,p) a_1(t-s) ds = 4\pi r_0(t,p).$$

Il suffit de résoudre avec δ comme second membre, car on aura le résultat pour un second membre quelconque par convolution. On résout par approximations successives (le fait que le processus converge est un résultat classique de la théorie des équations de type Volterra cf. [12]). La condition supplémentaire sert à fixer la constante d'intégration. On trouve donc

$$z_\beta(t) = 4\pi \exp(\beta t) H(t) + \tilde{R}_\beta(t),$$

avec $\tilde{R}_\beta$ continu, ce qui donne le même début de développement que celui donné dans la proposition. □

Dans l'optique du développement en diffractions multiples, on va vouloir faire jouer à r_1 le rôle de r_0. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2 *Si a_1 est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ nulle pour $t < t_0$ alors $r_1(t,x)$ définie par :*

$$r_1(t,x) = \int_0^\infty \rho(s) E(s,x,p) a_1(t-s) ds,$$

est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times M)$ et est nulle pour $t < t_0 + r$.

Preuve : la nullité est obtenue en regardant les supports respectifs de ρ et a_1. Pour la régularité, on peut par exemple décomposer r_1 suivant les ϕ_n :

$$r_1(t,x) = \sum \left(\int_0^\infty \rho(s) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} s)}{\sqrt{\lambda_n}} a_1(t-s) ds \right) \phi_n(x) \phi_n(p).$$

Les dérivations par rapport à t porteront uniquement sur a_1, et en intégrant par partie, il est clair que :

$$\forall K \text{ compact en } t, \forall k, \ \forall d, \ \exists A \in \mathbb{R}$$

telle que

$$\Big|\int_0^\infty \rho(s)\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}s)}{\sqrt{\lambda_n}} \ \partial_t^k a_1(t-s)ds\Big| \leq A|\lambda_n|^{-d}.$$

Par ailleurs, on a $|\phi_n(p)| \leq \tilde{A}(1+\lambda_n)$ car H^2 s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0$. On voit donc qu'uniformément localement en t les coefficients décroissent plus vite que toutes les puissances négatives de λ_n ce qui donne le résultat annoncé. □

1.2 Développement en diffractions multiples

Tout ce qui a été montré dans la partie précédente nous permet de construire les objets suivants :

Proposition 2 *Étant donnée $u \in \mathcal{C}_0^\infty(M\backslash\{p\})$, on peut construire, pour tout n, les objets suivants par récurrence :*

$$\begin{aligned} a_n(t) &= (z_\beta * r_n(.,p))\,(t), \\ w_{n+1}(t,x) &= \int \chi(s)E(s,x,p)a_n(t-s)ds, \\ r_{n+1}(t,x) &= \int \rho(s)E(s,x,p)a_n(t-s)ds, \\ v_n &= w_n + r_n, \end{aligned}$$

avec comme condition initiale : $r_0 = v_\infty$, et z_β est donné par le théorème 1.

Preuve : la seule chose à vérifier est que $r_n(s,p)$ peut prendre la place de r_0 dans le théorème 1. D'après le lemme 2, r_n est $\mathcal{C}^\infty$, et est nulle au voisinage de $-\infty$. □

De plus la propagation à vitesse 1 nous permet d'affirmer le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Pour tout n, v_n est nulle au moins jusqu'à $t_0+(n-1)r$, et r_n jusqu'à t_0+nr.*

On peut maintenant énoncer le théorème principal :

Théorème 2 (Développement en diffractions multiples) *Avec les notations de la proposition précédente, on a :*

$$v_\beta(t,x) = v_\infty(t,x) + \sum_{n\geq 1} v_n(t,x).$$

Preuve : il faut montrer que la somme de droite vérifie les propriétés qui caractérisent v_β. Il y a donc trois choses à examiner :

• **L'équation des ondes en dehors de p :**
C'est clair car tous les termes de la somme la vérifient.

• **La condition C^β :**
On réécrit la somme comme :

$$v_\beta(t,x) = v_\infty(t,x) + w_1(t,x) + \sum_{n\geq 2} \left(w_n(t,x) + r_{n-1}(t,x)\right).$$

Par construction, w_1 et les w_n sont tels que $v_\infty + w_1$ ainsi que $w_n + r_{n-1}$ vérifient C^β en p.

• **La condition initiale :**
La propagation à vitesse 1 ainsi que la condition de support mise sur u nous ont permis de montrer que, pour $t < t_0$, tous les termes sauf v_∞ sont nuls. De plus, v_∞ vérifie la bonne condition initiale par construction. $\square$

Remarque : d'après le corollaire 1, localement en temps, la somme est toujours finie.

Dans la suite, on appellera K_n l'opérateur qui permet de passer de u à v_n. Intuitivement, il correspond à n diffractions au sens où v_n a besoin des valeurs de tous les $r_i, \ i < n$ pour se construire.

Remarque : d'après la construction, K_n va dépendre du choix de la fonction de troncature ρ. Ce choix n'influence bien sûr pas v_β, mais seulement la manière de l'écrire comme une somme. Les résultats des parties suivantes dépendront de ρ chaque fois qu'on traitera K_n individuellement, cette dépendance disparaîtra en sommant sur n.

1.3 Écriture des noyaux

Il suffit en fait d'examiner la manière dont sont définis les a_n, r_n, v_n. On peut noter $U(t) = E(t,p,p)$, où on a noté $E(t,p,p) = i^*E$ avec i l'application qui à t associe (t,p,p). Comme β est fixé, on va oublier l'indice β. On note donc simplement z la fonction z_β. D'après la partie précédente, on a l'expression :

$$a_n = z * \rho U * z * \rho U ... * z * r_0.$$

On note z_n la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0 = z, \\ z_{n+1} = z * \rho U * z_n. \end{array} \right. \tag{6}$$

Cette distribution auxiliaire nous est utile puisqu'on a la proposition suivante :

Proposition 3

$$K_n(t,x,y) = \int_{s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0} E(s_1,x,p) z_n(t - s_1 - s_2) E(s_2,p,y) ds_1 ds_2.$$

Preuve : on écrit $K_n u$ pour u dans $\mathcal{C}_0^\infty(M \backslash \{p\})$ et on identifie ainsi le noyau. □

Jusqu'ici, on n'a construit des solutions que pour des conditions initiales $\mathcal{C}_c^\infty(M \backslash \{p\})$, si on peut prolonger à L^2 la construction, on aura bien construit l'opérateur $\frac{\sin(t\sqrt{\Delta_\beta})}{\sqrt{\Delta_\beta}}$ (on sait qu'il est continu par le calcul fonctionnel). Cette vérification est faite dans l'appendice A.

2 Singularités de la trace

Dans tout ce qui suit, la trace est entendue au sens des distributions. Les égalités sont donc aussi au sens des distributions.

Avant de commencer à parler de la trace des opérateurs K_n, il faut montrer que cette dernière existe. On reporte cette démonstration un peu lourde à l'appendice B. Le but est maintenant de localiser les singularités de la trace de K_n. Pour cela on va d'abord exprimer cette trace sous une forme plus simple à étudier. De façon formelle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Tr(K_n)(t) &= \int_M K_n(t,x,x) dx \\ &= \int_{s_1,s_2 \geq 0} z_n(t - s_1 - s_2) \left[\int_M E(s_2,p,x) E(s_1,x,p) dx \right] ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

On voit alors apparaître le noyau de $\frac{\sin(\sqrt{\Delta_\infty}s_1)}{\sqrt{\Delta_\infty}} \circ \frac{\sin(\sqrt{\Delta_\infty}s_2)}{\sqrt{\Delta_\infty}}$ pris entre p et p. Grâce au calcul fonctionnel on peut réécrire cette distribution :

$$\frac{1}{2}\left[V(s_1 - s_2) - V(s_1 + s_2)\right],$$

où on a noté $V(s) = \left(\frac{\cos(\sqrt{\Delta_\infty}s)-1}{\Delta_\infty}\right)(p,p)$.

Remarque : on a $V'(t) = -U(t)$, où U est définie au début de la partie 1.3.

On va un peu continuer ce calcul formel que l'on justifiera, par régularisation à la fin de cette section.

$$S_n(t) = Tr(K_n)(t) = \frac{1}{2}\int_{s_1,s_2\geq 0} z_n(t-s_1-s_2)\left[V(s_1-s_2)-V(s_1+s_2)\right]ds_1ds_2.$$

On fait le changement de variable $r = s_1 + s_2,\ \ s = s_1 - s_2$:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{4}\int_{r\geq 0, r\geq s\geq -r} z_n(t-r)\left[V(s) - V(r)\right]drds \\ &= \frac{1}{2}\int_{r\geq 0} z_n(t-r)\left[\int_0^r V(s)ds - rV(r)\right]dr. \end{aligned}$$

Il faut remarquer que V est paire. On fait une intégration par parties, en posant $Z_n(t) = \int_{-\infty}^t z_n(r)dr$, de sorte que $Z_n(0)$ est toujours nul. On obtient finalement :

$$S_n(t) = \frac{1}{2}\int_{r\geq 0} Z_n(t-r)rU(r)dr.$$

On veut maintenant justifier cet enchaînement de calculs. Pour cela on va régulariser.

On va noter P_m, le projecteur sur les m premiers ϕ_j. Le noyau de $P_mK_nP_m$ est alors :

$$\sum_{i,j\leq m}\int z_n(t-s_1-s_2)\frac{\sin(s_1\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}}\frac{\sin(s_2\sqrt{\lambda_j})}{\sqrt{\lambda_j}}ds_1ds_2\phi_i(x)\phi_i(p)\phi_j(p)\phi_j(y),$$

que l'on peut réécrire

$$\int_{s_1,s_2} z_n(t-s_1-s_2)E_m(s_1,x,p)E_m(s_2,p,y)ds_1ds_2,$$

avec $E_m = P_mEP_m$. Comme $P_mK_nP_m$ est de rang fini, c'est un opérateur à trace. Comme son noyau est $\mathcal{C}^\infty$ on obtient sa trace en faisant $x = y$ et en intégrant sur M (ici, tous les calculs sont faits au sens des distributions en t, il faut donc penser qu'on a utilisé une fonction test avant de faire ces calculs). On a donc :

$$Tr(P_m K_n P_m) = \int_{s_1,s_2} z_n(t-s_1-s_2)\left(\int_M E_m(t,x,p)E_m(t,p,y)dv_g(x)\right)ds_1 ds_2.$$

Mais maintenant tous les calculs présentés dans le début de cette section sont légitimes, et on trouve donc :

$$Tr(P_m K_n P_m) = \frac{1}{2}\int_{s\geq 0} Z_n(t-s)sU_m(s)ds, \tag{7}$$

où

$$U_m(s) = E_m(s,p,p) = \sum_{i\leq m} \frac{\sin(s_1\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}}\phi_i(j)^2 \ .$$

On veut maintenant faire tendre m vers l'infini. Il faut tout d'abord s'assurer que $P_m K_n P_m$ tend vers K_n dans les opérateurs à trace. C'est ce qu'implique la proposition suivante :

Proposition 4 *Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on considère $(A_m)_m$ une approximation de l'identité, et T un opérateur à trace alors :*

$$A_m T A_m^* \to T \quad \textit{dans les opérateurs à trace.}$$

Preuve : on appelle ici approximation de l'identité une suite A_m telle que :

$$\forall x \in \mathcal{H},\ \ A_m x \to x \text{ (fortement)}.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, cela implique l'existence d'une constante M telle que :

$$\forall m,x \quad \|A_m x\| \leq M\|x\|.$$

T est à trace, donc s'écrit

$$T_m = \sum a_n \langle x_n, \cdot\rangle y_n,$$

avec $\sum |a_n| < \infty$ et $\|x_n\| = \|y_n\|_2 = 1$. $T_m = A_m T A_m^*$ s'écrit alors :

$$T_m = \sum a_n \langle A_m x_n, \cdot\rangle A_m y_n.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} T_m &= R_m + S_m, \text{ avec} \\ R_m &= \sum a_n \langle A_m x_n - x_n, \cdot \rangle A_m y_n, \text{et} \\ S_m &= \sum a_n \langle x_n, \cdot \rangle (A_m y_n - y_n). \end{aligned}$$

On va montrer que cette somme converge vers 0 dans $\mathcal{I}_1$:

$$\|R_m\|_{\mathcal{I}_1} \leq \sum |a_n| \|A_m x_n - x_n\| \|y_n\|,$$

qui tend vers 0 par convergence dominée. Le terme S_m se traite de la même manière, ce qui conclut la proposition. □

On applique cette proposition pour $A_m = P_m$ (P_m est autoadjoint).

On veut maintenant passer à la limite dans l'égalité 7 pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 5 *La trace de K_n est donnée par la formule :*

$$Tr(K_n)(t) = \frac{1}{2} \int_{s \geq 0} sU(s) Z_n(t-s) ds, \tag{8}$$

avec $U(s) = E(s,p,p)$, et $Z_n(s) = \int_{-\infty}^{s} z_n(r) dr$.

Preuve : le passage à la limite dans est un peu plus délicat qu'il n'y paraît, et cela à cause de la borne de l'intégrale. Pour le faire proprement, on découpe encore une fois avec les fonctions χ et ρ. On réécrit donc l'égalité (7) en deux morceaux. Pour le terme loin de 0 : on choisit une fonction test f et on note

$$\tilde{f}(s) = \int Z_n(t-s) f(s) ds. \tag{9}$$

On s'intéresse donc à la convergence de :

$$c_m = \int_{s \geq 0} s\rho(s) E_m(s,p,p) \tilde{f}(s) ds.$$

On peut dans cette intégrale faire autant d'intégrations par parties que l'on veut de sorte qu'on obtient :

$$c_m = \int [E_m]^{(-k)}(s,p,p) [s\rho(s)\tilde{f}]^{(k)}(s) ds,$$

où
$$E_m^{(-k)}(s,\cdot,\cdot) = -\int_0 s[E_m]^{(-k+1)}(s_1,\cdot,\cdot)ds_1.$$
En examinant cette opération sur le développement en fonctions propres, on voit que pour tout n, on peut trouver un k de sorte que
$$E_m^{(-k)}(s,\cdot,\cdot) \to E^{(-k)}(s,\cdot,\cdot) \ \text{ dans } \ H^n(M\times M).$$
On choisit le n suffisant pour que le passage à la limite se passe bien, et on fait ensuite les intégrations par parties dans l'autre sens.

Pour le terme avec χ on est obligé de faire plus attention. Ce sera l'objet d'un calcul ultérieur. Pour l'instant on note abusivement :
$$\int_{s\geq 0} s\chi(s)E(s,p,p)Z_n(t-s)ds,$$
sa limite. □

Finalement, on se rend compte que pour analyser les singularités de $Tr(K_n)$ on a besoin de connaître les singularités d'une part de $U(t)$, et d'autre part de Z_n.

2.1 Singularités des différents opérateurs

On va commencer par ρU, qui sert à construire tous les autres opérateurs.

2.1.1 Singularités de ρU

Il faut pour cela examiner $E(t,x,y)$. On sait déjà (cf. [9]) que $E(t,x,y)$ est un opérateur intégral de Fourier (OIF) associé à :
$$\Lambda^+\cup\Lambda^-,$$
où
$$\Lambda^\varepsilon = \left\{ (t,\tau,x,\xi,y,-\eta) \quad \begin{matrix} \Phi_t(y,\eta/|\eta|) = (x,\xi/|\xi|) \\ \\ |\xi| = |\eta| = \varepsilon\tau \end{matrix} \right\},$$
Φ est le flot géodésique. Dans ce qui suit, on va se placer au voisinage d'une géodésique γ. La contribution de γ à E peut s'écrire : $I^+ + I^-$, I^ε étant un OIF associé à Λ^ε et localisé au voisinage de γ. Lorsque x et y ne sont pas conjugués le long de γ, on peut écrire :
$$I^\varepsilon = \int_0^\infty \exp[-i\varepsilon\theta(d_\gamma(xy)-t)]a_\varepsilon(t,x,y,\theta)d\theta,$$

d_γ représente la distance comptée le long de γ.

On ne va plus maintenant s'intéresser qu'à la partie principale de I^ε. Grâce à la paramétrix d'Hadamard, on peut écrire :

$$I^\varepsilon(t,x,y) = \int_0^\infty \exp[-i\varepsilon\theta(d_\gamma(xy) - t)] \frac{1}{4\pi} \frac{u_0(x,y)}{d_\gamma(xy)} d\theta,$$

car ainsi, en faisant la somme $I^+ + I^-$, on retrouvera bien :

$$u_0(x,y)\delta(\overline{xy}^2 - t^2).$$

On utilise les propriétés de transport du symbole principal pour calculer la partie scalaire. On trouve qu'au dessus du point $(t,\gamma(t),y)$ le symbole principal est $\frac{1}{2\pi}|\det D \exp_y(t\dot\gamma(0))|^{-\frac{1}{2}}$ (quand t est petit, on retrouve bien u_0). Il reste à calculer la phase. Elle ne peut changer qu'au passage d'un point conjugué. On utilise ici le résultat de [13] : *pour un OIF associé à Λ^+, le symbole principal est multiplié par i^{-n} au passage d'un point conjugué d'indice n.*

Remarque : les OIF I^ε sont complexes conjugués l'un de l'autre.

Après un point conjugué d'indice n, on a donc l'expression :

$$\begin{aligned} E(t,x,y) = \quad & \frac{1}{4\pi} \frac{u_0(x,y)}{d_\gamma(xy)} \Big[i^{-n} \int_0^\infty \exp(-i\theta(d_\gamma(xy) - t) d\theta \\ & \qquad + i^n \int_0^\infty \exp(i\theta(d_\gamma(xy) - t) d\theta \Big]. \end{aligned}$$

Si n est pair on trouve donc :

$$E(t,x,y) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{u_0(x,y)}{2d_\gamma(xy)} \delta(d_\gamma(xy) - t).$$

Si n est impair, on trouve alors :

$$E(t,x,y) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{u_0(x,y)}{2d_\gamma(xy)} \frac{1}{2\pi} T(d_\gamma(xy) - t),$$

avec

$$T = -2 \ \mathrm{Im}(\int_0^\infty \exp(i\theta s) d\theta).$$

La distribution T est classique (cf. [14]) :

$$T(s) = -2 v.p.(\frac{1}{s}).$$

On a noté $v.p.(\frac{1}{s})$ la valeur principale de $\frac{1}{s}$(cf. [14]). Pour passer à U, il faut faire $x = p = y$, cela va faire apparaître les lacets géodésiques qui joignent p à p. Pour pouvoir utiliser les expressions données ci-dessus, il faut faire l'hypothèse suivante :

($\mathcal{H}_1$) *p n'est pas conjugué de lui-même le long d'aucun lacet géodésique.*

On va noter Γ l'ensemble des lacets qui joignent p à p. On aura aussi besoin des notations suivantes :

- L_γ est la longueur de γ,
- μ_γ est la somme des indices des points conjugués le long de γ ,
- $\theta_\gamma = |\det D \exp_p(L_\gamma \dot\gamma(0))|^{-\frac{1}{2}}$.

Remarque : μ_γ est l'indice de Morse du lacet γ pour le problème du plus court chemin à extrémités fixées. (cf. [13])

Proposition 6

$$WF(\rho U) \subset \{(L_\gamma,\lambda) \quad | \quad \gamma \in \Gamma\}.$$

De plus, sous l'hypothèse ($\mathcal{H}_1$), on a :

$$\rho U(t) = \sum_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma(t),$$

avec :

$$F_\gamma(t) = (-1)^{\frac{\mu_\gamma}{2}} \frac{1}{4\pi} \frac{\theta_\gamma}{L_\gamma} \delta(t - L_\gamma) \qquad \textit{si } \mu_\gamma \textit{ est pair,}$$

$$F_\gamma(t) = (-1)^{\frac{\mu_\gamma - 1}{2}} \frac{1}{4\pi^2} \frac{\theta_\gamma}{L_\gamma} v.p.(\frac{1}{t - L_\gamma}) \quad \textit{si } \mu_\gamma \textit{ est impair,}$$

Preuve : la première partie résulte d'un calcul classique de *Wave-Front* (car $U = i * E$, cf. 1.3), quant à la deuxième, elle découle du calcul précédent. □

2.1.2 Singularités de z_n

On peut grâce à un calcul de *Wave-Front* localiser les singularités :

$$WF(z_n) \subset \{(L,\lambda) \mid L = \sum_1^n L_{\gamma_i}\}.$$

Notations :

- $[\gamma]_n = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ en tenant compte de l'ordre,

- $L_{[\gamma]_n} = \sum_{i=1}^n L_{\gamma_i}$,
- $\mu_{[\gamma]_n} = \sum_{i=1}^n \mu_{\gamma_i}$,
- $a_{[\gamma]_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\theta_{\gamma_i}}{L_{\gamma_i}}$

Pour calculer maintenant la singularité principale, il suffit dans l'expression de z_n de remplacer tous les ρU par la singularité principale en L_{γ_i}. Il nous faut donc calculer les distributions qui s'écrivent :

$$z * F_{\gamma_1} * z * F_{\gamma_2} \dots F_{\gamma_n} * z,$$

où les F_γ sont donnés dans la proposition 6. Pour les γ_i qui donnent une masse de Dirac (μ_{γ_i} pair), la convolution ne pose pas de problème. Il faut travailler un peu plus pour les autres. On multiplie d'abord par une fonction g qui tronque la distribution. Plus précisément on remplace $F_{\gamma_i}(s)$ par $F_{\gamma_i}(s)g(s-L_{\gamma_i})$ où g est $\mathcal{C}_0^\infty$ et identiquement 1 au voisinage de 0. Ceci ne change pas la singularité.

On pose $T_0(s) = g(s)v.p.(\frac{1}{s})$ et $T_L(s) = T_0(s-L)$. Pour avoir la singularité principale de z_n on est amené à faire des convolutions de T_{L_1} avec T_{L_2}. Le résultat nous est donné par le lemme suivant :

Lemme 3 *Pour toutes les valeurs de L_1 et L_2, on a :*

$$T_{L_1} * T_{L_2}(t) = -\pi^2 \delta\left(t - (L_1 + L_2)\right).$$

Preuve : on va noter $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier (normalisée comme dans [14]), et f la fonction telle que : $\mathcal{F}(f) = g$, c'est à dire :

$$\int \exp(ix\sigma) f(x) dx = g(\sigma).$$

Avec cette définition, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} &= \tfrac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}, \\ \mathcal{F}a * b &= \mathcal{F}a \times \mathcal{F}b, \\ \mathcal{F}ab &= \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}a * \mathcal{F}b, \\ \mathcal{F}H(\sigma) &= iv.p.(\frac{1}{\sigma}) + \pi\delta(\sigma), \end{aligned}$$

on renvoie à [14] pour ces résultats.

On note $F = f * H$ de sorte que F est la primitive de f s'annulant en $-\infty$. On va écrire de deux manières $\mathcal{F}[2\pi \exp(-iL_1 x) F \exp(-iL_2 x) F]$.

D'une part on a :

$$\mathcal{F}[2\pi\exp(-iL_1x)F\exp(-iL_2x)F] = \mathcal{F}[\exp(-iL_1x)F] * \mathcal{F}[\exp(-iL_2x)F]$$
$$= \pi^2\delta(\cdot - L_1 - L_2) - T_{L_1} * T_{L_2} + 2i\pi T_{L_1+L_2}$$

et d'autre part, on peut écrire :

$$\mathcal{F}[2\pi\exp(-iL_1x)F\exp(-iL_2x)F] = \mathcal{F}\left[2\pi\exp[-i(L_1+L_2)x]F^2\right]$$
$$= \mathcal{F}[H * 4\pi fF]\left(\cdot - (L_1+L_2)\right)$$

$$\mathcal{F}[H * 4\pi fF](\sigma) = 4i\pi\mathcal{F}[fF](\sigma)v.p.(\frac{1}{\sigma}) + 4\pi^2\mathcal{F}[fF](0)\delta(\sigma).$$

On vérifie à l'aide d'une intégration par partie que $\mathcal{F}[fF](0) = \frac{1}{2}g(0)^2 = \frac{1}{2}$. Il suffit alors d'identifier parties réelles et imaginaires pour avoir le résultat. □

On peut maintenant énoncer la proposition relative aux singularités de z_n.

Proposition 7

$$WF(z_n) \subset \{(L,\lambda) \mid L = \sum_1^n L_{\gamma_i}\},$$

de plus, au voisinage d'un point $L = \sum_1^n L_{\gamma_i}$*, la contribution apportée par* $[\gamma]_n$ *est :*

$$\begin{array}{ll} \frac{4\pi}{n!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}}{2}}a_{[\gamma]_n}(t-L)_+^n & \textit{si } \mu_{[\gamma]_n} \textit{ est pair,} \\ \frac{4}{n!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-1}{2}}a_{[\gamma]_n}(t-L)^n Ln|t-L| & \textit{si } \mu_{[\gamma]_n} \textit{ est impair} \end{array}$$

Preuve : on calcule d'abord la convolution $F_{[\gamma_n]} = F_{\gamma_1} * F_{\gamma_2} * \dots F_{\gamma_n}$, on va noter k le nombre de γ_i dont l'indice est impair, il y a alors deux formules suivant la parité de k.

Si k est pair $F_{[\gamma_n]}(t) = C_p\delta(t-L)$ et si k est impair, $F_{[\gamma_n]}(t) = C_i v.p.(\frac{1}{t-L})$, où C_p et C_i sont des constantes à déterminer.

$$\begin{aligned} C_p &= (-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-k}{2}}\frac{1}{(4\pi)^n\pi^k}a_{[\gamma]_n}(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^k \\ &= (-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}}{2}}\frac{1}{(4\pi)^n}a_{[\gamma]_n}, \\ C_i &= (-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-k}{2}}\frac{1}{(4\pi)^n\pi^k}a_{[\gamma]_n}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\pi^{k-1} \\ &= (-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-1}{2}}\frac{1}{(4\pi)^n\pi}a_{[\gamma]_n}. \end{aligned}$$

On fait ensuite $n+1$ convolutions avec z, ce qui revient, du point de vue de la singularité principale, à intégrer $n+1$ fois et à multiplier par $(4\pi)^{n+1}$. Ce qui donne le résultat annoncé pour la singularité principale. □

2.1.3 Singularité de S_n

On va utiliser la formule donnée dans la proposition 5. On a deux types de contribution :

- celle apportée par $\int s\rho(s)U(s)Z_n(t-s)ds$,
- celle apportée par $\int s\chi(s)U(s)Z_n(t-s)ds$.

La première contribution n'a des singularités qu'aux points $L = \sum_{i=1}^{n+1} L_{\gamma_i}$. En un tel point L, la contribution apportée par $[\gamma]_{n+1}$ (on rappelle que l'ordre est important) est :

$$(sF_{\gamma_{n+1}}(s)) * H * z * F_{\gamma_n} * z * \cdots * F_{\gamma_1} * z.$$

Le fait de remplacer $sF_{\gamma_{n+1}}(s)$ par $L_{\gamma_{n+1}}F_{\gamma_{n+1}}(s)$ ne change pas la singularité principale. On doit donc calculer :

$$L_{\gamma_{n+1}}F_{\gamma_{n+1}} * H * z * F_{\gamma_n} * z * \cdots * F_{\gamma_1} * z.$$

Ce calcul est le même que celui fait dans la partie précédente, exceptée la dernière convolution qui est par H et non par z. Ce qui change le résultat d'un facteur 4π. La singularité principale est donc finalement :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{L_{\gamma_{n+1}}}{(n+1)!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_{n+1}}}{2}} a_{[\gamma]_{n+1}}(t-L_{[\gamma]_{n+1}})_+^{n+1} & \text{si } \mu_{[\gamma]_{n+1}} \text{ est pair,} \\ \dfrac{L_{\gamma_{n+1}}}{\pi(n+1)!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_{n+1}}-1}{2}} a_{[\gamma]_{n+1}}(t-L_{[\gamma]_{n+1}})^{n+1}\mathrm{Ln}|t-L_{[\gamma]_{n+1}}| & \text{si } \mu_{[\gamma]_{n+1}} \text{ est impair} \end{array}$$

Remarque : l'ordre de la singularité est le nombre de lacets géodésiques suivis.

Il reste la singularité apportée par la borne de l'intégrale. On rappelle que $\int s\chi(s)U(s)Z_n(t-s)ds$ a été définie comme :

$$\lim_{m\infty} \int s\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)ds.$$

On calcule directement cette limite grâce au lemme suivant :

Lemme 4

$$\lim_{m\infty} \int s_+\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)ds = \frac{1}{4\pi}Z_n(t).$$

Preuve : on calcule d'abord la singularité principale de $U_m(t)$ au voisinage de 0. On part de la définition de E_m :

$$E_m(t,x,y) = \int E(t,x,z)P_m(z,y)|dz|.$$

On se place au voisinage de $x = p$, et de $t > 0$ petit. On remplace alors dans l'égalité précédente $E(t,x,y)$ par le premier terme de la paramétrix d'Hadamard (les autres donneront des contributions plus régulières). En utilisant la formule 5, on trouve donc (en écrivant abusivement que E_m est égal à son premier terme) :

$$E_m(t,p,y) = \frac{t}{2}\int_{\omega\in\mathbb{S}^2} u_0(p,t\omega)P_m(t\omega,y)\Theta(t\omega,y)d\omega.$$

On évalue en $y = p$, comme $E_m(t,p,p) = U_m(t)$ doit être impaire on trouve :

$$U_m(t) = \frac{t}{2}\int_{\omega\in\mathbb{S}^2} u_0(p,|t|\omega)P_m(|t|\omega,p)\Theta(|t|\omega,p)d\omega.$$

Maintenant, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ à support près de 0, on veut la limite de :

$$\int s_+\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)f(t)dsdt.$$

(on a utilisé la notation intégrale pour l'évaluation d'une distribution).

$$\int s_+\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)f(t)dsdt = \int s_+\chi(s)U_m(s)\tilde{f}(s)ds,$$

où la définition de $\tilde{f}$ est la même qu'au 9, on a donc :

$$\begin{aligned}\int s_+\chi(s)U_m(s)\tilde{f}(s) &= \tfrac{1}{2}\int_{s>0,\omega\in\mathbb{S}^2}\tilde{f}(s)u_0(p,s\omega)P_m(s\omega,p)\Theta(s\omega,p)s^2d\omega ds \\ &= \int_M P_m(p,y)g(y)dv_g(y),\end{aligned}$$

avec

$$g(y) = \frac{u_0(p,y)}{2}\chi(\overline{yp})\tilde{f}(\overline{yp}).$$

Il faut maintenant faire tendre m vers l'infini, mais comme $P_m(p,y)$ tend vers $\delta(y = p)$ on trouve :

$$\int s_+\chi(s)U(s)\tilde{f}(t) = g(p) = \frac{1}{4\pi}\tilde{f}(0).$$

Comme $\tilde{f}(0) = \int Z_n(t)f(t)dt$, ceci achève la preuve du lemme. $\square$

On a donc montré que $\int s_+\chi(s)U(s)Z_n(t-s)ds$ a ses singularités aux points L qui s'écrivent $\sum_{i=1}^n L_{\gamma_i}$ et que la contribution principale est :

$$\frac{1}{(n+1)!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})_+^{n+1} \qquad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,}$$

$$\frac{1}{\pi(n+1)!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-1}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})^{n+1}\mathrm{Ln}|t-L_{[\gamma]_n}| \quad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair}$$

Par rapport à l'expression donnée pour z_n, on intègre une fois et on divise par 4π.

Remarque : l'ordre de la singularité est le nombre de lacets géodésiques suivis plus 1.

Finalement, pour revenir à S_n, on a montré que ses singularités étaient localisées aux points L qui s'écrivent soit $\sum_{i=1}^n L_{\gamma_i}$, soit $\sum_{i=1}^{n+1} L_{\gamma_i}$. Et on peut résumer cette partie dans la proposition suivante :

Proposition 8 *Un élément $[\gamma]_n$ apporte une contribution à la singularité en $L_{[\gamma]_n}$ dans S_n mais aussi dans S_{n-1} Cette contribution est :*

$$\text{dans } S_n \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})_+^{n+1} & \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2\pi(n+1)!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-1}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})^{n+1} Ln|t-L_{[\gamma]_n}| & \\ & \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\text{dans } S_{n-1} \begin{cases} \dfrac{L_{\gamma_n}}{2n!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})_+^{n} & \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,} \\ \dfrac{L_{\gamma_n}}{2\pi n!}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-1}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})^{n} Ln|t-L_{[\gamma]_n}| & \\ & \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair} \end{cases}$$

2.1.4 Singularité de la trace totale

Tout ce qui a été fait dans les parties précédentes va nous permettre d'établir le théorème principal concernant les singularités de $S(t)$. Concernant la localisation de ces singularités, on a montré qu'elles se trouvaient aux points L qui peuvent s'écrire $\sum_{j=1}^n L_{\gamma_j}$. On s'aperçoit aussi que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ ne sert pas pour établir ce fait. On n'a besoin de cette hypothèse que pour calculer la contribution dominante. On va noter :

$$\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{L}_n,$$

et pour $L \in \Lambda$ on posera :

$$n(L) = \inf\{n \mid L \in \mathbb{L}_n\},$$

de sorte que L intervient la première fois comme singularité de $S_{n(L)-1}$. De plus, d'après la proposition 8 les contributions venant des S_n, pour $n \geq n(L)$ sont forcément plus régulières. On va rajouter une hypothèse qui permettra de calculer la singularité de L dans $S_{n(L)}$:

$(\mathcal{H}_2)$ *: pour* $L \in \Lambda$, *il y a une seule manière d'écrire* $L = \sum^{n(L)} L_{\gamma_i}$ *(modulo l'ordre des facteurs).*

On pourrait utiliser l'hypothèse $\mathcal{H}_2'$: $(\mathcal{H}_2')$ *: les* L_γ *sont indépendants sur* $\mathbb{Z}$. qui est toutefois un peu plus forte.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3

$$supp.sing(S_\beta(t)) \subset supp.sing(S_\infty(t)) \cup \Lambda.$$

De plus sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ *(*cf. *2.1.1) et* $(\mathcal{H}_2)$, *au voisinage d'un point* L *de* Λ, *la singularité principale de* $S_\beta - S_\infty$ *est :*

$$\begin{array}{ll} \dfrac{L}{2n}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n)}}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L)_+^n & si\ \mu_{[\gamma]_n}\ est\ pair, \\ \frac{L}{2\pi n}(-1)^{\frac{\mu_{[\gamma]_n}-1}{2}} a_{[\gamma]_n}(t-L)^n Ln|t-L| & si\ \mu_{[\gamma]_n}\ est\ impair, \end{array}$$

où on a noté $n = n(L)$ *et* $[\gamma]_n$ *le n-uplet tel que* $L = L_{[\gamma]_n}$.

Preuve : il reste à sommer les contributions données dans la proposition 8. Dans cette proposition, l'ordre est important. D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ il n'y a qu'une seule manière d'écrire $L = L_{[\gamma]_n}$ si on tient pas compte de l'ordre. Il y a donc $n!$ contributions à considérer. On remarque dans la proposition 8, le terme qui nous intéresse dépend de γ_n. On a n choix pour le dernier lacet, et il y a $(n-1)!$ contributions une fois le dernier lacet fixé. Il suffit ensuite de faire la somme. $\square$

Remarque : les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $\mathcal{H}_2'$ sont vraies "génériquement". Lever l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ revient à décrire la singularité de $E(t,p,p)$ lorsque p est son propre conjugué. On peut le faire au prix d'une complication certaine des calculs. En revanche, lever l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ semble assez difficile : sur le tore cela correspondrait à être capable de dénombrer les polygones dont les sommets sont sur un réseau, dont le nombre de faces et le périmètre sont fixés.

3 Cas du tore de dimension 3

Dans ce cas, tout se calcule plus ou moins facilement, car la paramétrix d'Hadamard est exacte pour tout temps, et $\Theta = 1$. On peut calculer les noyaux des K_n explicitement et prendre la trace. Le cadre est celui d'un tore T quotient de $\mathbb{R}^3$ euclidien par un réseau Γ. On note $|ab|$ la distance. Le point diffractant sera placé en 0. L'ensemble des longueurs des géodésiques qui joignent p à p s'identifie à $\Gamma\backslash\{0\}$. La première chose à faire est de transporter le problème dans $\mathbb{R}^3$. Quelques notations simplifiant les expressions :

- $(\gamma)_n$ désignera un n-uplet $(\gamma_1 \dots \gamma_n) \in \Gamma^n$ tel que $\forall i < n-1\ \gamma_{i+1} \neq \gamma_i$ (l'ordre est important),
- $D_{(\gamma)_n}(x,y) = |x-\gamma_n| + |y| + \sum_1^{n-1} |\gamma_{i+1} - \gamma_i|$,
- $P_{(\gamma)_n}(x,y) = |x-\gamma_n||y| \prod_1^{n-1} |\gamma_{i+1} - \gamma_i|$.

On va donc relever p en 0, et considérer que tous les points $\gamma \in \Gamma$ diffractent avec la même constante. On cherche alors dans un premier temps des opérateurs $K_{(\gamma)_n}$ qui consistent à faire n diffractions successives aux points γ_j qui doivent donc être différents.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 9

$$K_{(\gamma)_n}(t,x,y) = \frac{1}{4\pi(n-1)!} \mathbb{1}_{D_{(\gamma)n}(x,y)<t} \exp(\beta(D_{(\gamma)_n}(x,y)-t)) \times \frac{(t-D_{(\gamma)_n}(x,y))_+^{n-1}}{P_{(\gamma)_n}(x,y)}.$$

On établit cette proposition en suivant exactement la même démarche que le cas général. L'équation de Volterra est ici une équation différentielle ordinaire puisque la paramétrix d'Hadamard est exacte.

Pour revenir au tore il faut d'une part périodiser les $K_{(\gamma)_n}$, et d'autre part faire la somme sur tous les n-uplets possibles. Il reste alors à intégrer pour trouver la trace. En utilisant la périodicité pour regrouper des termes, on se ramène à calculer les intégrales suivantes (sur $\mathbb{R}^3$) :

$$I_{n,u}(t) = c_n(u) \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{|x-u_n|+|x|+\sum^{n-1}|u_i|<t} \exp(\beta(|x-u_n| + |x| + \sum^{n-1} |u_i| - t)) \times \frac{(t - |x-u_n| - |x| - \sum |u_i|)_+^{n-1}}{|x-u_n||x|} |dx|,$$

où $u \in \Gamma^n$ et les $n-1$ premiers u_j ne sont pas nuls. De plus on a $c_n(u) = [4\pi(n-1)!|u_1||u_2| \dots |u_{n-1}|]^{-1}$. Les u_i sont formés à partir des points diffractants, et apparaissent du fait de la périodisation. Quand u_n est nul, l'intégrale se calcule directement par un passage en polaire, s'il ne l'est pas un changement de variable utilisant les ellipsoïdes de foyer 0 et u_n permet de calculer l'intégrale. Ces deux calculs différents donnent des singularités différentes (cf. 8).

On arrive finalement à écrire la trace sous la forme suivante :

Proposition 10

$$supp\ sing\ S = \{0\} \cup \Lambda,$$

et plus précisément :

$$S(t) = \sum_{L\in\Lambda} \sum_{n\geq 1} \sum_{\sigma\in\sigma_n(L)} [A_n(\sigma)F_{n-1}(t-L) + B_n(\sigma)F_n(t-L)],$$

avec

$$\Lambda_n = \{L \mid L = \textstyle\sum^n |\gamma_i|\},$$

$$\Lambda = \textstyle\bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n,$$

$$\sigma_n(L) = \{\textit{nombre de manières d'écrire } L = \textstyle\sum^n |\gamma_i|\},$$

$$\sigma(L) = \textstyle\bigcup_n \sigma_n(L),$$

$$A_n(\sigma) = \tfrac{L}{2}(\textstyle\prod_1^n |\gamma_i|)^{-1} \quad \sigma \quad \textit{correspond à l'écriture } L = \textstyle\sum_{i=1}^n |\gamma_i|,$$

$$B_n(\sigma) = \tfrac{1}{2}(\textstyle\prod_1^n |\gamma_i|)^{-1} \qquad\qquad , \quad '' \quad '' \quad ''$$

$$F_n(x) = H(x)\int_0^x e^{-\beta z} z^n dz.$$

Remarques :

- Dans $\sigma_n(L)$, on a levé la dégénérescence liée à l'ordre des facteurs, mais pour décrire $\sigma(L)$, il faudrait être capable de dénombrer les polygones à sommets sur un réseau et de les regrouper en fonction de leur périmètre.
- La formule générale est compatible avec ce cas particulier car on a : $F_{n-1}(x) \sim \frac{1}{n}x_+^n$ quand $x \to 0$.

Conclusion

Pour arriver à cette formule de traces, on aurait sans doute pu opérer de manière différente. Comme les opérateurs considérés ont une différence à trace (de rang 1!), on pourrait sans doute se placer dans un contexte de scattering, et chercher une formule de type *Krein − Milmann*. On aurait pu aussi partir de l'expression des noyaux de la chaleur ou de Schrödinger donnée dans [15]. Toutefois, on a trouvé que l'approche "développement en diffractions multiples" était assez naturelle, et permettait de bien voir l'influence du point singulier. Cette idée, consistant à chercher le propagateur d'une équation des ondes perturbée comme une série dont le premier terme est une "solution libre", est relativement classique. Elle a par exemple été utilisée dans le contexte des formules de trace dans la série d'articles [16]. C'est l'absence de cet opérateur de référence qui rend moins immédiat le passage à une singularité conique. On n'a traité ici que le cas d'un seul point diffractant, l'étude se généralise à plusieurs potentiels dirac en des points distincts. Suivant l'extension autoadjointe choisie, il faudra écrire l'analogue du théorème 1 pour un système d'équations de Volterra. Pour étendre les résultats à la dimension 2, on peut suivre la même démarche car la paramétrix d'Hadamard est connue (mais elle fait intervenir des puissances demi-entières qui compliquent encore le travail).

Appendice A : prolongement à L^2

On fait dans cette partie des estimations de norme. Comme souvent, différentes manipulations ne sont autorisées que pour des fonctions $\mathcal{C}_0^\infty$, mais l'estimation finale permet de prolonger à l'espace choisi.

La première estimation concerne la valeur d'une solution de l'équation des ondes en un point de la variété. On va travailler avec l'exponentielle plutôt que le sinus pour pouvoir utiliser la propriété de groupe.

Lemme 5

$$\forall v_0 \ \in \ L^2(M), \ \ [\exp(it\sqrt{\Delta})v_0](p) \ \ est \ \ H^{-1}_{loc}(\mathbb{R})$$

Preuve : grâce à la propriété de groupe de l'exponentielle, il suffit de le montrer sur un intervalle I fixé. On sait de plus (cf. [1] pp. 247–248, ou [10] pp. 251–252) que $\exp(it\sqrt{\Delta})$ est un O.I.F. associé à la variété Λ^+ (cf. 2.1.1). On va choisir I un intervalle en temps sur lequel on peut prendre la fonction phase :

$$[t-\overline{xy}]\theta,$$

on peut donc écrire la partie principale :

$$\exp(it\sqrt{\Delta})[x,y] = f(t-\overline{xy}) \int \exp(i[t-\overline{xy}]\theta)a(x,y)g(\theta)\theta d\theta,$$

où f est un fonction de troncature qui vaut 1 au voisinage de 0 et g une fonction qui vaut 0 au jusqu'à $\theta = 1$ et 1 au voisinage de $+\infty$.

Pour v_0 on veut donc étudier (sur I) :

$$A(t) = \int f(t-\overline{py}) \exp(i[t-\overline{py}]\theta)a(p,y)g(\theta)\theta v_0(y)d\theta dy.$$

On passe en coordonnées polaires autour de p et on pose

$$w_0(r) = \int_{\mathbb{S}^2} a(p,r)v_0(r\omega)r^2 d\omega,$$

de sorte que :

$$A(t) = \int \exp(i[t-r]\theta)f(t-r)g(\theta)\theta w_0(r)d\theta dr.$$

Pour avoir $A(t)$ sur I il suffit d'avoir $w_0(r)$ sur $\tilde{I}$, et on peut choisir I et f de sorte que $\tilde{I}$ ne s'approche ni de 0 ni du rayon d'injectivité en p. La formule donnant $A(t)$ en fonction de w_0 est un opérateur pseudo différentiel d'ordre 1 qui envoie donc $L^2_{comp}(\mathbb{R}_r)$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}_t)$. Notamment il envoie $L^2(\tilde{I})$ dans $H^{-1}(I)$. Comme $\tilde{I}$ ne s'approche pas de 0 on a :

$$\forall v_0, \;\; \|w_{0|\tilde{I}}\|_2 \leq M\|u_0\|_2.$$

Cette estimation achève la démonstration du lemme.

Ce qui nous intéresse vraiment est :

$$a(t) = H(t)\left[\frac{\sin(\sqrt{\Delta}t)}{\sqrt{\Delta}}v_0\right](p).$$

Par rapport à l'estimation du lemme précédent, il faut donc prendre la partie imaginaire et intégrer par rapport à t. On a donc :

$$\forall v_0, \;\; a \in L^2_{loc,+}(\mathbb{R}_t).$$

□

On doit maintenant examiner ce qui se passe quand on convole avec z_n. Comme on fait agir un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $n+1$, on a immédiatement le lemme :

Lemme 6

$$\forall a \in L^2_{loc,+} \quad z_n * a \in H^1_{loc,+}.$$

Il reste à examiner le régularité de $v(t,x) = \int E(s,x,p)a(t-s)ds$ lorsque a est dans $H^1_{loc,+}$.

Proposition 11

$$\forall a \in H^1_{loc,+}, \;\; t \to \int E(s,x,p)a(t-s)ds,$$

est continue à valeurs dans $L^2(M)$, *et*

$$\sup_{t\in K}\|\int E(s,x,p)a(t-s)ds\|_2 \leq M_K\|a\|_{H^1}.$$

Preuve : le principe est de faire une intégration par parties. On va la faire sur le développement en fonctions propres.

$$v(t) = \sum\int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda_n}s)a(t-s)ds\frac{\phi_n(p)}{\sqrt{\lambda_n}}\phi_n(x).$$

On obtient donc :

$$\int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda_n}s)a(t-s)ds = \frac{a(t)}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda_n}s)a'(t-s)ds.$$

On peut donc écrire (modulo la partie suivant ϕ_0, i.e. la constante)

$$v(t) = \sum_{n \geq 1} [a(t) - v_n(t)] \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n} \phi_n(x),$$

avec

$$v_n(t) = \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda_n} s) a'(t-s) ds.$$

Comme $(\dfrac{\phi_n(p)}{\lambda_n})_n$ est ℓ^2 (car $\delta(x-p)$ est H^{-2}) il faut montrer que $v_n(t)$ est continue en t borné par rapport à n.

$$\begin{aligned}
v_n(t) &= \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda_n} s) a'(t-s) ds \\
&= \int_{-\infty}^t \cos(\sqrt{\lambda_n}(t-s)) a'(s) ds \\
&= \cos(\sqrt{\lambda_n} t) \int_{-\infty}^t \cos(\sqrt{\lambda_n} s) a'(s) ds \\
&\quad - \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \int_{-\infty}^t \sin(\sqrt{\lambda_n} s) a'(s) ds.
\end{aligned}$$

La dernière expression rend claire les propriétés que l'on cherchait. Toutes ces estimations permettent de prolonger K_n à $L^2(M)$. □

Remarque : en examinant le cas du tore, on voit qu'on ne peut pas obtenir plus de régularité en x (il y a $\frac{1}{|x|}$ en facteur, cf. prop 9). Pour la régularité en t, il faut examiner non seulement la régularité des v_n (ces fonctions sont H^1) mais aussi la croissance par rapport à n ; si on dérive v_n, on fait sortir un $\sqrt{\lambda_n}$ en facteur qui empêche de conclure sur le caractère L^2 en x.

Appendice B : K_n est à trace

Le but de cette partie est de montrer que les noyaux K_n représentent des opérateurs à trace au sens des distributions. C'est-à-dire que pour toute fonction test ψ de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, l'opérateur définie par

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(t)\psi(t)dt$$

est dans $\mathcal{I}_1$, ensemble des opérateurs à trace. On part de l'expression :

$$K_n(t,x,y) = \int_{s_1,s_2\geq 0} E(s_1,x,p)z_n(t-s_1-s_2)E(s_2,p,y)ds_1ds_2.$$

Les difficultés proviennent de deux types de singularités : la première, habituelle dans le contexte des formules de trace, vient des singularités de E, et se traite classiquement par des considérations de *Wave-Front*, cf. [1, 3]. La deuxième vient des bords de l'intégrale et on va la traiter en utilisant la paramétrix d'Hadamard.

Soit $\psi(t)$, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on cherche à estimer :

$$\int K_n(t)\psi(t)dt = \int_{s_1,s_2\geq 0} E(s_1,x,p)\check{z}_n * \psi(s_1+s_2)E(s_2,p,y)ds_1ds_2.$$

On appelle $\Psi = \check{z}_n * \psi$. On utilise la paramétrix d'Hadamard qui nous dit que :

$$\chi(t)E(t,x,p) = \left[u_0(x,p)\delta(t^2-\bar{x}p^2) + \sum u_i(x,p)(t^2-\bar{x}p^2)_+^2 + R_n(t,x)\right]\chi(t),$$

et on a la même expression pour $\chi(t)E(t,p,y)$. L'intégrale se découpe en termes de 16 différentes sortes qu'on examine séparément :

$$CC_{00}(x,y) = \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta(s_1^2-\overline{xp}^2)\Psi(s_1+s_2)\delta(s_2^2-\overline{xp}^2)u_0(p,y)\chi(s_2)ds_1ds_2,$$

$$CC0i(x,y) = \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta(s_1^2-\overline{xp}^2)\Psi(s_1+s_2)(s_2^2-\overline{xp}^2)_+^i u_i(p,y)\chi(s_1)ds_1ds_2,$$

$$CC_{i0}(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1,s_2,\ \ (x,p),(p,y),$$

$$CC_{0r}(x,y) = \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta(s_1^2-\overline{xp}^2)\Psi(s_1+s_2)R(s_2,p,y)\chi(s_2)ds_1ds_2,$$

$$RR_{r0}(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1,s_2,\ \ (x,p),(p,y),$$

$$CC_{ir}(x,y) = \int \chi(s_1)u_i(x,p)(s_1^2 - \overline{xp}^2)_+^i \Psi(s_1+s_2)R(s_2,p,y)\chi(s_2)ds_1ds_2,$$

$$CC_{ri}(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1,s_2,\ \ (x,p),(p,y),$$

$$CCij(x,y) = \int \chi(s_1)u_i(x,p)(s_1^2 - \overline{xp}^2)_+^i \Psi(s_1+s_2)(s_2^2 - \overline{xp}^2)_+^j u_j(p,y)\chi(s_2)ds_1ds_2,$$

$$RR_{rr}(x,y) = \int \rho(s_1)R(s_1,x,p)\Psi(s_1+s_2)R(s_2,p,y)\rho(s_1)ds_1ds_2,$$

$$CR_0(x,y) = \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta(s_1^2 - \overline{xp}^2)\Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)ds_1ds_2,$$

$$RC_0(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1,s_2,\ \ (x,p),(p,y),$$

$$CR_i(x,y) = \int \chi(s_1)u_i(x,p)(s_1^2 - \overline{xp}^2)_+^i \Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)ds_1ds_2,$$

$$RC_i(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1,s_2,\ \ (x,p),(p,y),$$

$$CR_r(x,y) = \int \chi(s_1)R(s_1,x,p)\Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)ds_1ds_2,$$

$$RC_r(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1,s_2,\ \ (x,p),(p,y),$$

$$RR(x,y) = \int \rho(s_1)E(s_1,x,p)\Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)ds_1ds_2.$$

On peut calculer tous ces termes de manière à mettre en évidence le fait qu'ils représentent des opérateurs à trace. On rappelle que pour N suffisamment grand, un noyau $\mathcal{C}^N$ est à trace.

$$CC_{00}(x,y) = u_0(x,p)\frac{\Psi(\overline{xp}+\overline{yp})}{\overline{xp}.\overline{yp}}u_0(p,y)\chi(\overline{xp})\chi(\overline{yp}),$$

avec $\Psi(s) \in \mathcal{C}^\infty$. On va montrer qu'un tel noyau est à trace : en effet, on peut écrire :

$$\Psi(r_1+r_2) = \sum r_1^i a_i(r_2) + r_1^N e_N(r_1,r_2),$$

avec les a_i, et e_N $\mathcal{C}^\infty$, on fait le même développement pour e_N, mais par rapport à r_2 et on trouve que $\Psi(r_1+r_2)$ s'écrit :

$$\Psi(r_1+r_2) = \sum r_1^i a_i(r_2) + r_2^i b_i(r_1) + r_1^N r_2^N e_1(r_1,r_2).$$

Mais alors si on remplace r_1 par $\overline{xp}$ et r_2 par $\overline{yp}$, on est de la forme "rang fini + $\mathcal{C}^n$ ", donc à trace.

$$CC_{0i}(x,y) = \chi(\overline{xp})\frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}\int_{\overline{yp}} \Psi(\overline{xp}+s_2)(s_2+\overline{yp})^i u_0(p,y)\chi(s_2)ds_2,$$

qui après réduction se met sous la forme :

$$CC_{0i}(x,y) = \chi(\overline{xp})\frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}\sum^{2i} \overline{yp}^j G_j(\overline{xp},\overline{yp}),$$

avec (à un coefficient près)

$$G_j(r_1,r_2) = \int_{r_2} \Psi(s+r_1)s^{2(i-j)}ds \quad \in \mathcal{C}^\infty.$$

On décompose chaque G_j comme ci-dessus, et on conclut de même. Les termes RR_{i0} se traitent de même par symétrie.

$$CC_{0r} = \chi(\overline{xp})\frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}\int \Psi(\overline{xp}+s_2)\chi(s_2)R(s_2,y)ds_2 = \frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}G_{0r}(\overline{xp},y).$$

$G_{0r}(r_1,y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la première variable, et $\mathcal{C}^n$ par rapport à la deuxième (par convergence dominée). On décompose suivant la première jusqu'à ce que le reste soit C^n de x,y quand on fait $r_1 = \overline{xp}$, ce qui montre le caractère "à trace". Le terme symétrique RR_{r0} se traite de la même façon.

Les termes CC_{ij}, CC_{rr}, CC_{ri}, et CC_{ir} ne présentent pas de difficultés nouvelles, et se traitent donc en utilisant les mêmes méthodes.

Pour les termes où la troncature en χ intervient, il nous faut de plus un argument de *Wave Front* pour affirmer que :

$$\int \Psi(s_1+s_2)\rho(s_1)E(s_1,p,y)ds_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times M),$$

ce qui, combiné avec les techniques précédentes, permet de traiter les cas RC_0, RC_i, et RC_r de même que les symétriques CR_0, CR_i, CR_r.

Le dernier terme RR est directement $\mathcal{C}^\infty$ car son *Wave-Front* est vide. Tout ceci nous permet d'affirmer la proposition suivante :

Proposition 12 *Pour tout n, l'opérateur représenté par $K_n(t,x,y)$ est à trace au sens des distributions.*

Références

[1] J.J. Duistermaat et V.W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent.Math.*, 29:39–79, 1975.

[2] Y.Colin de Verdière. Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I et II. *Comp. math.*, 27:83–109, 159–184, 1973.

[3] J.Chazarain. Formule de poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent.Math.*, 24:65–82, 1974.

[4] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne.* Number 194 in Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, 1971.

[5] Y. Colin de Verdière. Pseudo-laplaciens I. *Ann. Inst. Fourier,Grenoble*, 32:275–286, 1982.

[6] M.Reed et B.Simon. *Functional Analysis II : Fourier Analysis and Self-adjoint Operators.* Wiley Interscience, 1990.

[7] L. Hillairet. Propagation des ondes sur un cône. *Mémoire de DEA, Grenoble*, 1996.

[8] S.Albeverio, F.Gesteszy, et R.Hoegh-Krohn. *Solvable models in quantum mechanics.* Springer, 1990.

[9] J.J. Duistermaat. *Fourier Integral Operators.* Prog. in Math. Birkhäuser, 1996.

[10] P. Bérard. On the wave equation on a compact riemannian manifold whithout conjugate points. *Math. Zeit.*, 155:249–276, 1977.

[11] J.Chazarain et A.Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.* Gauthier-Villars, 1981.

[12] Ram P. Kanwal. *Linear integral equations, 2nd ed.* Birkhäuser, 1997.

[13] Y. Colin de Verdière. Paramétrix de l'équation des ondes et intégrales sur l'espace des chemins. . *Sémin. Goulaouic-Lions-Schwartz 1974-1975, Equat. deriv. part. lin. non-lin., Expose XX*, 1975.

[14] I. Gelfand et G. Shilov. *Generalized functions I.* New York : Academic Press, 1964.

[15] S. Albeverio, Z. Brzezniak et L. Dabrowski. Fundamental solution of the heat and schrödinger equations with point interaction. *J. Funct. Anal.*, 130:220–254, 1995.

[16] R. Balian et C. Bloch. Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. I.: Three-dimensional problem with smooth boundary surface. *Ann. Phys.*, 60:401–447, 1970.

Luc HILLAIRET
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
B.P 74
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail : Luc.Hillairet@ujf-grenoble.fr