Problème du bord dans les variétés q-convexes et phénomène de Hartogs-Bochner

Vincent Koziarz et Frédéric Sarkis *

Prépublication de l'Institut Fourier n° 499 (2000).

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

Résumé Soient E un fibré vectoriel holomorphe au dessus d'une variété q-complète X et M une sous-variété réelle de dimension $2p-1$ ($p \geq q$) de E. Nous montrons que le problème du bord pour M est résoluble si et seulement si M est maximalement complexe. Dans le cas où $X = P_n(\mathbb{C})\backslash P_{n-q}(\mathbb{C})$ nous retrouvons le théorème de Harvey et Lawson [16]. Comme conséquence nous obtenons une généralisation du théorème de Hartogs-Bochner pour les applications CR-méromorphes à valeurs dans une variété q-convexe et une généralisation au cas CR-méromorphe du théorème d'extension de Chazal [5].

Abstract Let E be a holomorphic vector bundle over a q-complete manifold X and M be a real submanifold of dimension $2p-1$ ($p \geq q$) of E. We prove that M has a solution to the boundary problem in X if and only if M is maximally complex. In the case $X = P_n(\mathbb{C})\backslash P_{n-q}(\mathbb{C})$, this is a result of Harvey and Lawson [16]. As a consequence, we obtain a generalization of the Hartogs-Bochner theorem for CR-meromorphic maps taking their values in q-convex manifolds and a generalization to the CR-meromorphic case of a theorem of Chazal [5].

*Cet article a été écrit alors que les deux auteurs étaient au sein de l'Institut Fourier à Grenoble. Nous remercions les membres de l'Institut pour leur hospitalité. En particulier, nous remercions Jean-Pierre Demailly pour avoir posé la question qui a été à l'origine de ce travail et Christine Laurent-Thiébaut pour de nombreuses discussions sur le sujet.

Classification mathématique par sujets (1991): 32F25, 32F10, 32C16, 32A20, 32C30

Mots-clés: Problème du bord, courants rectifiables, variétés q-convexes et q-complètes, théorème de Hartogs-Bochner, application CR-méromorphe, extension méromorphe

1 Variétés q-convexes

Nous rappelons ici les définitions de variétés q-convexes et q-complètes, et nous citons quelques résultats tirés du livre de G.M. Henkin et J. Leiterer [18] qui nous seront utiles.

Soit X une variété réelle C^∞ de dimension m, et soit $\varphi \in C^2(X,\mathbb{R})$. Si x est un point critique de φ (i.e. $\mathrm{d}\varphi(x) = 0$), on dit que x est un *point critique non dégénéré* de φ si pour tout système de coordonnées C^∞ $x_1, \ldots, x_m$ dans un voisinage de x,

$$\det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right)_{1 \leq j,k \leq m} \neq 0.$$

Sinon, x est appelé un *point critique dégénéré* de φ.

Nous avons les résultats suivants (voir [18] pages 241 et 242) :

Proposition 1 *Dans la situation précédente,*

(i) les points critiques non dégénérés de φ sont isolés;

(ii) si on suppose de plus que φ est sans point critique dégénéré, si $K \subset X$ est compact, et si $\psi \in C^2(X,\mathbb{R})$ a des dérivées des premier et second ordres suffisamment petites, uniformément sur K, alors $\varphi + \psi$ n'a pas de point critique dégénéré sur K;

(iii) si on suppose de plus que X est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$, alors, pour presque toute forme $\mathbb{R}$-linéaire L sur $\mathbb{R}^n$, $\varphi + L_{|X}$ est sans point critique dégénéré sur X.

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Une fonction $\varphi \in C^2(X,\mathbb{R})$ est dite *fortement q-convexe* en $x \in X$ ($q \geq 1$), si $i\mathrm{d}'\mathrm{d}''\varphi(x)$ a au moins $(n - q + 1)$ valeurs propres strictement positives (convention d'Andreotti-Grauert [2]). Si $q = 1$, on dit aussi que φ est *strictement plurisousharmonique* (st. psh) en x.

Une fonction $\varphi \in C^0(X,\mathbb{R})$ est une *exhaustion* si pour tout $c \in \mathbb{R}$, les ouverts $\{\varphi < c\}$ sont relativement compacts dans X.

La variété X est dite *q-convexe* s'il existe un compact $K \subset X$ (appelé *compact exceptionnel*), et une exhaustion $\varphi \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ tels que φ est fortement q-convexe en tout point de $X \backslash K$. Si $K = \emptyset$, X est dite *q-complète*. Les variétés de Stein sont donc exactement les variétés 1-complètes.

Un exemple simple d'espace q-complet est l'espace projectif complexe de dimension n privé d'un $(n - q)$-plan, que nous notons $P_n(\mathbb{C}) \backslash P_{n-q}(\mathbb{C})$. Si

$[z_0 : \ldots : z_n]$ sont des coordonnées homogènes sur $P_n(\mathbb{C})$, et si $P_{n-q}(\mathbb{C}) = \{[z] \in P_n(\mathbb{C})\,;\, z_q = \ldots = z_n = 0\}$, alors on voit facilement qu'une exhaustion φ strictement q-convexe de $P_n(\mathbb{C})\backslash P_{n-q}(\mathbb{C})$ est donnée par

$$\varphi([z]) = \frac{\sum_{k=q}^{n} |z_k|^2}{\sum_{j=0}^{q-1} |z_j|^2}$$

Signalons aussi que d'après un résultat de Greene et Wu [12], si X est sans composante irréductible compacte, alors elle est n-complète.

Proposition 2 *Soit $\varphi \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ une exhaustion fortement q-convexe hors de $K = \{\varphi \leq 1\}$. Alors il existe une suite décroissante de compacts $(K_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que $\cap_{k\in\mathbb{N}} K_k = K$, et une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ exhaustives, fortement q-convexes hors de K_k et sans point critique dégénéré.*

Si $K = \emptyset$, il existe une exhaustion $\varphi_0 \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ fortement q-convexe sur X et sans point critique dégénéré.

Preuve. On peut supposer que X est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^m$, $m > 0$, et on fixe une suite $(U_j)_{j\geq 0}$ d'ouverts de X tels que $K \subset U_0 \subset\subset X$, $U_j \subset\subset U_{j+1}$ pour tout $j \geq 0$, et $\cup_{j\geq 0} U_j = X$. Soit, pour tout $j \geq 0$, $\chi_j \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ à support compact dans $U_{j+1}\backslash\overline{U}_{j-2}$, telle que $0 \leq \chi_j \leq 1$, et $\chi_j = 1$ sur $\overline{U}_j\backslash U_{j-1}$ (on considère que U_{-1} et U_{-2} sont vides).

Nous allons construire, par récurrence sur j, des fonctions φ_k^j sans point critique dégénéré sur $\overline{U}_j$, fortement q-convexes hors de compacts K_k vérifiant les hypothèses de la proposition, et nous poserons $\varphi_k = \lim_{j\longrightarrow\infty} \varphi_k^j$.

D'après la proposition 1 (iii), il existe des formes linéaires L_k^0 sur $\mathbb{R}^m$ telles que $\varphi_k^0 := \varphi + \chi_0\, L_{k|X}^0$ est sans point critique dégénéré sur $\overline{U}_0$, et (si L_k^0 est de norme assez petite) φ_k^0 est fortement q-convexe sur le complémentaire de $K_k := \{\varphi_k^0 \leq 1 + 1/k\}$. On peut faire en sorte que $\cap_{k\in\mathbb{N}} K_k = K$.

Supposons maintenant que φ_k^j est construite pour tout k, et pour tout $j \leq j_0 - 1$ où $j_0 \geq 1$. D'après la proposition 1, (ii) et (iii), il existe des formes linéaires $L_k^{j_0}$ sur $\mathbb{R}^m$ telles que

$$\varphi_k^{j_0} := \varphi_k^{j_0-1} + \chi_{j_0}\, L_{k\ |X}^{j_0}$$

est sans point critique dégénéré sur $\overline{U}_{j_0}$, et $\varphi_k^{j_0}$ est fortement q-convexe sur $\{\varphi_k^0 > 1 + 1/k\}$. Ceci achève la preuve dans le cas q-convexe (l'exhaustivité des φ_k est garantie si les L_k^j sont de norme assez petite).

Si X est q-complète, on ne fait la construction que pour $k=0$, en posant $K_0=\emptyset$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Nous notons $z_1,\dots,z_n$ les coordonnées dans $\mathbb{C}^n$, $||z||^2=\sum_{j=1}^n |z_j|^2$, et $\Delta^n=\{z\in\mathbb{C}^n\,;\,\sup_{1\le j\le n}|z_j|<1\}$. Si $K\subset\mathbb{C}^n$ est un compact, on notera

$$\widehat{K}=\{z\in\mathbb{C}^n\,;\,\forall P\in\mathbb{C}[X_1,\dots X_n],|P(z)|\le\sup_{w\in K}|P(w)|\}$$

l'enveloppe polynomialement convexe de K. Nous aurons besoin du lemme bien connu suivant.

Lemme 1 *Soit K un compact polynomialement convexe de $\mathbb{C}^n$. Alors il existe des fonctions $\varphi_k\in C^\infty(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$ telles que pour tout k,*

(i) φ_k est une exhaustion st. psh de $\mathbb{C}^n$ sans point critique dégénéré;

(ii) les complémentaires dans $\mathbb{C}^n$ des ensembles $V_k:=\{z\in\mathbb{C}^n\,;\,\varphi_k(z)\ge 1\}$ forment une base de voisinage de K.

Preuve. Le compact K étant polynomialement convexe, il admet une base de voisinages par des polyèdres polynomiaux de la forme

$$U_l=\{z\in\mathbb{C}^n\,;\,|P_{1,l}(z)|<1,\dots,|P_{n_l,l}(z)|<1\}$$

avec $n_l>n$, $P_{1,l}(z)=\lambda_1z_1,\dots,P_{n,l}(z)=\lambda_nz_n$ et $\lambda_i>0$ pour chaque $i\in\{1,\dots,n\}$. Il suffit donc de montrer le lemme pour de tels polyèdres polynomialement convexes. L'application

$$\Psi_l:U_l\to\Delta^{n_l},\Psi(z_1,\dots,z_n)=(P_{1,l}(z),\dots,P_{n_l,l}(z))$$

est par construction injective et propre. La fonction $\chi_l\in C^0(\mathbb{C}^{n_l},\mathbb{R})$ définie par $\chi_l(z)=\sup_{1\le j\le n_l}|z_j|^2$ est plurisousharmonique. Soit $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante de fonctions sur $\mathbb{C}^{n_l}$, et soit $\psi_{lm}:=\rho_m*\chi_l\in C^\infty(\mathbb{C}^{n_l},\mathbb{R})$. Les fonctions ψ_{lm} sont plurisousharmoniques et, comme elles convergent vers χ_l uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^{n_l}$, il existe deux suites (α_k) et (ε_k) de réels strictement positifs (tendant chacune vers 0) telles que, en posant $\varphi_k:=(\psi_{lm}/(1+\varepsilon_k)+\alpha_k\,||z||^2)\circ\Psi_l$, les ensembles V_k vérifient (ii) (où m est assez grand, dépendant de l). La condition (i) s'obtient alors grâce à la proposition 1.

2 Problème du bord

Soient X une variété complexe de dimension n et $[\Gamma]$ un courant rectifiable de dimension $2p-1$ de X (on notera Γ le support de $[\Gamma]$). On appellera *p-chaîne holomorphe* toute combinaison linéaire localement finie à coefficients entiers de sous-ensembles analytiques de dimension pure p de $X \backslash \Gamma$. Elle définit un courant d'intégration fermé de bidimension (p,p) de $X \backslash \Gamma$. On appelle *volume* de la p-chaîne holomorphe $[T] = \sum n_i [T_i]$, l'expression

$$\text{Vol } [T] = \sum |n_j| \text{Vol } V_j$$

où Vol V_j (ou encore $\mathcal{H}_{2p}(V_j)$) est le volume de Hausdorff $2p$-dimensionnel de l'ensemble analytique V_j; Vol $[T]$ est aussi la masse du courant $[T]$. On notera T le support de la p-chaîne holomorphe $[T]$ (i.e. $T = \cup_{\{j; n_j \neq 0\}} V_j$). Si une p-chaîne holomorphe est de volume localement fini dans X, elle définira un courant d'intégration dans X, non fermé en général. La recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour que $[\Gamma]$ soit le bord au sens des courants d'une p-chaîne holomorphe de $X \backslash \Gamma$ de masse localement finie dans X est appelée *le problème du bord*.

Par exemple, soient $X = \mathbb{C}$, $[S_1]$ (resp. $[S_2]$) le courant d'intégration sur le cercle S_1 (resp. S_2) orienté positivement, de centre l'origine et de rayon 1 (resp. de rayon 2), $[\Delta]$ le courant d'intégration sur le disque unité Δ de $\mathbb{C}$ et $[\mathrm{C}(1,2)]$ le courant d'intégration sur la couronne $\mathrm{C}(1,2) = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z| < 2\}$. Comme les sous-ensembles analytiques Δ et $\mathrm{C}(1,2)$ de $\mathbb{C} \backslash (S_1 \cup S_2)$ sont de volume localement fini dans $\mathbb{C}$, les courants d'intégration $[\Delta]$ et $[\mathrm{C}(1,2)]$ définis dans $\mathbb{C} \backslash (S_1 \cup S_2)$ admettent une extension simple à $\mathbb{C}$. Les courants d'intégration $[S_1]$ et $[S_2] - [S_1]$ admettent des solutions au problème du bord qui sont des courants d'intégration sur des sous-ensembles analytiques car $[S_1] = \mathrm{d}[\Delta]$ et $[S_2] - [S_1] = \mathrm{d}[\mathrm{C}(1,2)]$. Le courant d'intégration $[S_2] + [S_1]$ n'admet pas de telle solution au problème du bord. Par contre, on a $[S_2] + [S_1] = [S_2] - [S_1] + 2[S_1] = \mathrm{d}[\mathrm{C}(1,2)] + 2\mathrm{d}[\Delta] = \mathrm{d}([\mathrm{C}(1,2)] + 2[\Delta])$ et donc $[S_2] + [S_1]$ admet une solution au problème du bord qui est une 1-chaîne holomorphe.

Pour qu'un courant rectifiable $[\Gamma]$ admette une solution au problème du bord, il faut nécessairement que $[\Gamma]$ soit la somme de deux courants de bidimension $(p,p-1)$ et $(p-1,p)$, (un tel courant sera dit *maximalement complexe*) et qu'il soit fermé. En effet, supposons que $[\Gamma] = \mathrm{d}[A]$ où $[A]$ est une p-chaîne holomorphe de $X \backslash \Gamma$ et de masse localement finie dans X. Alors

nécessairement
$$\mathrm{d}[\Gamma] = \mathrm{d}(\mathrm{d}[A]) = 0.$$
De plus, comme $[A]$ est un courant de bidimension $(p{,}p)$,
$$[\Gamma] = \mathrm{d}[A] = (\partial + \overline{\partial})[A] = \partial[A] + \overline{\partial}[A]$$
est maximalement complexe.

Dans le cas où $X = P_n(\mathbb{C})\backslash P_{n-q}(\mathbb{C})$ et $[\Gamma]$ est un courant maximalement complexe et d'intégration sur une variété réelle orientée fermée de classe C^1 et de dimension $2p-1$ ($p \geq q+1$), R. Harvey et B. Lawson [15, 16] ont prouvé que le problème du bord est toujours résoluble pour $[\Gamma]$. Dans [6], ce résultat est étendu au cas où $X = \mathbb{C}^n\backslash K$ où K est un compact polynomialement convexe. Ces deux résultats sont les seuls cas connus où la seule complexité maximale de $[\Gamma]$ permet de résoudre le problème du bord. Par exemple, dans les variétés projectives ou kählériennes, le problème du bord n'est pas toujours résoluble pour les variétés maximalement complexes (voir [9, 7, 26]). Un des points importants dans la démonstration du théorème de Harvey-Lawson est la résolution du $\overline{\partial}$ pour le courant $[\Gamma]$. Ceci explique la restriction sur la dimension de $[\Gamma]$ dans le cas où $X = P_n(\mathbb{C})\backslash P_{n-q}(\mathbb{C})$. En effet, X est alors q-complète, et le théorème d'Andreotti-Grauert montre que la dimension imposée sur $[\Gamma]$ est précisemment celle nécessaire pour pouvoir résoudre le $\overline{\partial}$.

Dans ce paragraphe, nous donnons une réponse affirmative à la question naturelle (posée par Jean-Pierre Demailly) de savoir si le théorème de Harvey-Lawson est encore valide dans les variétés q-convexes.

Le point de vue que nous allons adopter est celui de T.C. Dinh [7]. En particulier, comme on le verra lors de la démonstration, on ne pourra pas se restreindre au cas où $[\Gamma]$ est un courant d'intégration sur une variété Γ de classe C^1 mais on va être amené à considérer le cas où $[\Gamma]$ est un courant rectifiable dont le support Γ est de classe A_{2p-1} (i.e. Γ est $\mathcal{H}_{2p-1}$-rectifiable et en presque tout point, son cône tangent géométrique est un espace linéaire de dimension réelle $2p-1$, voir [7]). Nous rappelons le théorème de tranchage des courants : soient $X{,}Y$ deux variétés réelles lisses, Y de dimension $p \leq m$, $f : X \to Y$ une application C^∞ et Γ un courant plat de dimension m de X (en particulier les courants rectifiables sont plats). Alors pour $\mathcal{H}_p$-presque tout $y \in Y$, la tranche $[\Gamma{,}f{,}y]$ est un courant plat de dimension $m-p$ de X

de support inclus dans $\Gamma \cap f^{-1}(y)$ vérifiant :

$$\int_Y \Phi(y)([\Gamma,f,y],\Psi)\Omega = ([\Gamma],f^*(\Phi\Omega) \wedge \Psi)$$

où Ψ est une $(m-p)$-forme à support compact de X, Φ une fonction à support compact et Ω est la forme volume de Y (voir [10]).

Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable dont le support Γ est de classe A_{2n+1} de $\mathbb{C}^{n+m}$. Alors, pour presque tous les m-plans affines $\mathbb{C}^n_\nu \subset \mathbb{C}^{n+m}$ et pour presque tous les points $z \in \mathbb{C}^n_\nu$, la tranche $[\Gamma,\pi_\nu,z]$ (où π_ν est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}^n_\nu$) est un courant rectifiable dont le support est de classe A_1 (voir [7] Lemme 1.4).

Proposition 3 ([7, 26]) *Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable maximalement complexe, fermé, de dimension $2p-1$ ($p \geq 2$) de $\Delta^{p-1} \times \mathbb{C}^m$, dont le support est de classe A_{2p-1} et est inclus dans $\Delta^{p-1} \times \overline{\Delta^m}$. Soit W un ouvert non vide de Δ^{p-1}. Supposons que pour tout $\nu \in W$, la tranche $[\Gamma,\pi,\nu]$ de $[\Gamma]$ par la fibre de la projection $\pi : \Delta^{p-1} \times \mathbb{C}^m \to \Delta^{p-1}$ au-dessus de ν est bien définie et est un 1-courant rectifiable fermé dont le support est de classe A_1. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $\nu \in W$, il existe une 1-chaîne holomorphe $[S_\nu]$ de masse finie de $(\Delta^{p-1} \times \overline{\Delta^m})\backslash\Gamma$ telle que $\mathrm{d}[S_\nu] = [\Gamma,\pi,\nu]$.*
2. *Il existe une p-chaîne holomorphe $[T]$ de $(\Delta^{p-1} \times \overline{\Delta^m})\backslash\Gamma$, de volume 2p-dimensionnel localement fini dans $\Delta^{p-1} \times \overline{\Delta^m}$ et telle que $\mathrm{d}[T] = [\Gamma]$.*

Dans le cas où il existe un ouvert U de Δ^{p-1} tel que $\Gamma \cap (U \times \mathbb{C}^m) = \emptyset$ alors la condition 1. est toujours vérifiée et $[\Gamma]$ admet une solution au problème du bord dans $\Delta^{p-1} \times \mathbb{C}^m$.

Notre résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 1 *Soient E un fibré holomorphe au dessus d'une variété X q-convexe, $\pi : E \to X$ la projection sur la base et $\varphi : X \to \mathbb{R}$ l'exhaustion associée à X. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $\{\varphi \leq c\}$ contient le compact exceptionnel de φ. Notons U l'ouvert $\pi^{-1}(\{\varphi > c\})$. Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable maximalement complexe, fermé, de dimension $2p-1$ ($p \geq q+1$) de U dont le support Γ est un compact de classe A_{2p-1} de E. Alors il existe une unique p-chaîne holomorphe $[T]$ de $U\backslash\Gamma$, de volume localement fini dans U, de support relativement compact dans E et telle que $[\Gamma] = \mathrm{d}[T]$ dans U.*

En fait, si E est une fibration localement triviale (mais non nécessairement vectorielle) telle que les fibres soient r-complètes, le théorème 1 est encore valide pour $p \geq q + r$.

Soit X une variété q-convexe, en prenant Y le fibré trivial $X \times \{0\}$, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Soient X une variété q-convexe et $\varphi : X \to \mathbb{R}$ l'exhaustion associée. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $\{\varphi \leq c\}$ contient le compact exceptionnel de φ. Notons U l'ouvert $\{z \in X\, ; \varphi(z) > c\}$. Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable maximalement complexe, fermé, de dimension $2p-1$ ($p \geq q+1$) de U dont le support Γ est un compact de classe A_{2p-1} de X. Alors il existe une unique p-chaîne holomorphe $[T]$ de $U \backslash \Gamma$, de volume localement fini dans U, de support relativement compact dans X et telle que $[\Gamma] = \mathrm{d}[T]$ dans U.*

D'après le lemme 1, en utilisant l'unicité de la solution au problème du bord, ce résultat généralise le théorème de Chirka [6] dans $\mathbb{C}^n \backslash K$ (où K est polynomialement convexe) au cas des variétés q-convexes.

Dans le cas où X est q-complet (i.e. $K = \emptyset$) nous obtenons l'énoncé suivant qui généralise le théorème de Harvey-Lawson dans $P_n(\mathbb{C}) \backslash P_{n-q}(\mathbb{C})$.

Corollaire 2 *Soient X une variété q-complète et $[\Gamma]$ un courant rectifiable maximalement complexe, fermé, de dimension $2p-1$ ($p \geq q+1$) de X et dont le support est un compact de classe A_{2p-1}. Alors il existe une unique p-chaîne holomorphe $[T]$ de $X \backslash \Gamma$, de volume fini, de support compact et telle que $[\Gamma] = \mathrm{d}[T]$ dans X.*

3 Démonstration du théorème 1

Dans un premier temps, montrons l'unicité de la solution du problème du bord si elle existe :

Proposition 4 *Il y a unicité de la solution au problème du bord pour $[\Gamma]$. De plus si Γ est inclus dans un ouvert de la forme $\pi^{-1}(\{\varphi < t\})$ alors le support de la solution au problème du bord pour Γ l'est aussi.*

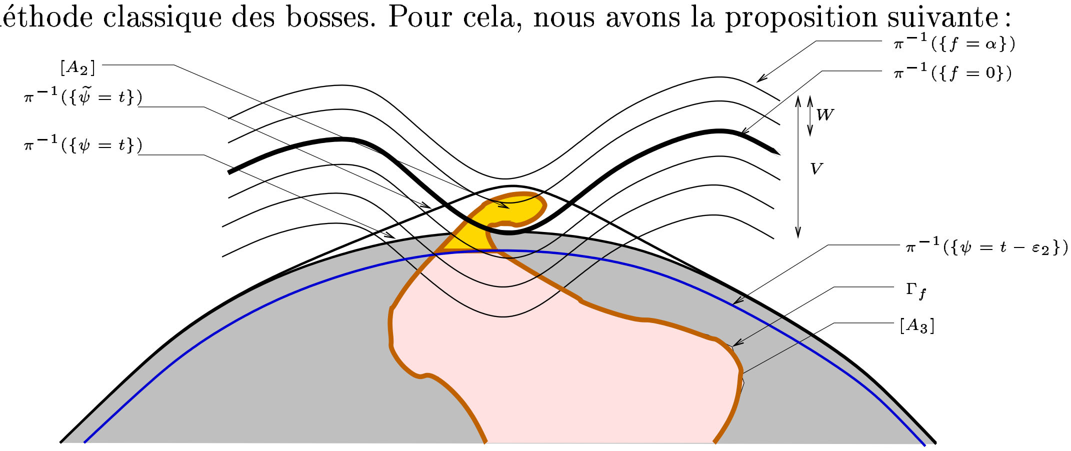
Preuve. Soient $[A_1]$ et $[A_2]$ deux solutions au problème du bord pour $[\Gamma]$. Alors le courant $[A] = [A_1] - [A_2]$ est une p-chaîne holomorphe fermée d'après [17] et s'écrit donc $[A] = \sum_{i=1}^{k} n_i [A_i]$ où $n_i \in \mathbb{Z}$ et les $[A_i]$ sont les courants d'intégration sur des sous-ensembles analytiques de U, relativement compacts dans E. Montrons par l'absurde que $[A] = 0$. Supposons qu'il existe

$i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $n_i \neq 0$. Par définition, $[A_1]$ et $[A_2]$ sont des solutions à support relativement compact dans E et donc $[A]$ est aussi à support relativement compact dans E. En particulier, pour tout $x \in \pi(U)$, $\pi^{-1}(x) \cap A_i$ est un sous-ensemble analytique relativement compact dans l'espace vectoriel $\pi^{-1}(x)$ et est donc de dimension 0. Par conséquent, $\pi(A_i)$ est un sous-ensemble analytique de $\pi(U)$ de dimension p. Soient

$$r = \sup\{t \in \mathbb{R};\ \pi(A_i) \subset \{\varphi < t\}\},$$

$x \in A_i \cap \{\varphi = r\}$, et V_x un voisinage de x biholomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (où $n = \dim X$) (on identifiera pas la suite V_x et ce voisinage) et soit $\mathbb{C}_x^{n-q+1}$ un $(n-q+1)$-plan de U passant par x et dans la direction des valeurs propres strictement positives de φ (i.e. tel que la restriction de φ à $\mathbb{C}_x^{n-q+1}$ soit st. psh au voisinage de x dans $\mathbb{C}_x^{n-q+1}$). Quitte à bouger légèrement $\mathbb{C}_x^{n-q+1}$, $\pi(A_i) \cap \mathbb{C}_x^{n-q+1}$ est un sous-ensemble analytique S de dimension supérieure ou égale à 2. Par construction, la restriction de φ à S est st. psh et admet un maximum local au voisinage de x ce qui donne la contradiction recherchée et prouve l'unicité. Le deuxième point se montre exactement de la même manière. $\square$

D'après la proposition 2 et l'unicité de la solution au problème du bord, on peut supposer sans perte de généralité que l'exhaustion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est positive, sans point critique dégénéré et que φ est fortement q-convexe sur l'ensemble $\{\varphi \geq c\}$. Si Y est un ouvert de X tel que le théorème 1 est valide dans $\pi^{-1}(Y)$, nous dirons que le problème du bord est toujours résoluble au dessus de Y. Nous allons montrer le théorème 1 en nous inspirant de la méthode classique des bosses. Pour cela, nous avons la proposition suivante :



Proposition 5 *Soit $\psi : X \to \mathbb{R}$ une exhaustion sans point critique dégénéré et fortement q-convexe sur l'ensemble $\{\varphi \geq c\}$. Supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que le problème du bord soit toujours résoluble au-dessus de l'ouvert $U_t = \{\psi < t\}$. Alors pour tout $z \in \{\psi = t\}$, il existe un voisinage V_z de z dans X tel que le problème du bord soit toujours résoluble au-dessus de $U_t \cup V_z$.*

Dans la suite, $z_1, \ldots z_n$ désigneront les coordonnées dans $\mathbb{C}^n$. Pour tous réels r, s tels que $r > s > 0$, nous notons

$$\mathrm{B}(0,r) = \{z \in \mathbb{C}^n \, ; \, ||z|| < r\}, \;\; \mathrm{C}(s,r) = \mathrm{B}(0,r) \backslash \overline{\mathrm{B}(0,s)}.$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et $\varphi \in C^2(X,\mathbb{R})$, nous notons pour tous j et k compris entre 1 et n,

$$\varphi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}, \;\; \varphi_{jk} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_k}, \;\; \varphi_{j\overline{k}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}.$$

Pour le lemme suivant, nous utilisons une idée issue du livre de R.C. Gunning et H. Rossi [13] (la démonstration du cas où φ n'est pas singulière à l'origine se trouve dans [18]).

Lemme 2 *Soit U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, et soit $\varphi \in C^2(U,\mathbb{R})$, fortement q-convexe sur U, telle que $\varphi(0) = 0$. Alors, il existe deux réels $r > s > 0$, une application holomorphe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^q$ (en fait, les composantes de f sont des polynômes de degré un ou deux), et un voisinage connexe V de 0 dans $\mathbb{C}^q$ tels que,*

(i) les sous-ensembles analytiques $Y_\alpha := \{f = \alpha\} \cap \mathrm{B}(0,r)$ sont de dimension $(n-q)$ pour tout $\alpha \in V$;

(ii) $Y_0 \cap \{\varphi = 0\} = \{0\}$ (en particulier, $f(0) = 0$);

(iii) pour tout $\alpha \in V$, $Y_\alpha \cap \{\varphi > 0\} \cap \mathrm{C}(s,r) \neq \emptyset$;

(iv) $Y_\alpha \subset \{\varphi > 0\}$ pour tout α dans un ouvert W non vide de V.

Preuve. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $(n-q+1)$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\varphi_{|E\cap U}$ soit st. psh en 0. Si $r > 0$ est assez petit, tel que $\mathrm{B}(0,r) \subset\subset U$, $\varphi_{|E\cap \mathrm{B}(0,r)}$ est st. psh. Nous pouvons supposer que $E = \{z \in U \, ; \, z_1 = \ldots = z_{q-1} = 0\}$.

On effectue un développement de Taylor de $\psi = \varphi_{|E\cap U}$ à l'ordre 2, en 0. Pour tout $z \in E \cap U$,

$$\psi(z) = 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{q\leq j\leq n} \varphi_j(0) z_j + \sum_{q\leq j,k\leq n} \varphi_{jk}(y) z_j z_k\Big) + \sum_{q\leq j,k\leq n} \varphi_{j\overline{k}}(y) z_j \overline{z}_k$$

avec y sur le segment $[0,z]$. Comme ψ est st. psh, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\sum_{q \leq j,k \leq n} \varphi_{j\overline{k}}(t) a_j \overline{a}_k \geq M\,||a||^2 \quad \text{pour tous } t \in \mathrm{B}(0,r),\ a \in \mathbb{C}^n.$$

En outre, par continuité des fonctions φ_{jk}, $q \leq j,k \leq n$, si r est assez petit, on a

$$\psi(z) \geq 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{q \leq j \leq n} \varphi_j(0) z_j + \sum_{q \leq j,k \leq n} \varphi_{jk}(0) z_j z_k\Big) + \frac{M}{2}||z||^2.$$

Nous posons $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_q(z))$, avec

$$f_j(z) = z_j \text{ si } 1 \leq j \leq q-1$$
$$f_q(z) = \textstyle\sum_{q \leq j \leq n} \varphi_j(0) z_j + \sum_{q \leq j,k \leq n} \varphi_{jk}(0) z_j z_k.$$

Le polynôme f_q n'est jamais nul, sauf si 0 est un minimum local isolé de ψ. Mais dans ce cas, tout polynôme holomorphe en les variables $z_q, \ldots, z_n$, de degré 1 et nul en 0, convient. Si V est un voisinage connexe de $0 \in \mathbb{C}^q$ suffisamment petit, le point (i) est vérifié (i.e. les Y_α sont tous non vides). Par ailleurs, si $f(z) = 0$, alors $\varphi(z) \geq M/2\,||z||^2$, donc on a (ii). En outre, si $s = r/2$, pour tout $z \in Y_0 \cap \mathrm{C}(s,r)$, $\varphi(z) \geq Mr^2/8$. En prenant V assez petit, autour de 0, on a directement (iii) par continuité de φ. Enfin, si $\varepsilon > 0$ est tel que $v_\varepsilon := (0,0,\ldots,0,\varepsilon)$ appartient à V, alors pour tout $z \in Y_{v_\varepsilon}$, $\varphi(z) \geq 2\varepsilon$, d'où $V_\alpha \subset \{\varphi > 0\}$ si α est proche de v_ε, ce qui donne (iv) et termine la démonstration du lemme. □

Preuve de la proposition 5. Soit $z \in \{\psi = t\}$, et soit U_z un voisinage de z biholomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que z s'envoie sur l'origine (on supposera que U_z est inclus dans un ouvert de trivialisation du fibré E). Par la suite, nous identifierons U_z à cet ouvert. Soient r,s les réels donnés par le lemme 1 appliqué à U_z et $\psi - \psi(z)$. Soit χ_z une fonction plateau positive, valant 1 dans $\mathrm{B}(0,\frac{s}{2})$ et dont le support est inclus dans $\mathrm{B}(0,s)$. Soit $\lambda_z > 0$ tel que $\widetilde{\psi} = \psi - \lambda_z \chi_z$ soit encore fortement q-convexe et sans point critique dégénéré. Posons $V_z = \mathrm{B}(0,s) \cap \{\widetilde{\psi} < t\}$ et montrons que le problème du bord est toujours résoluble au-dessus de $U_t \cup V_z$. Soit $[\Gamma]$ un courant rectifiable maximalement complexe, fermé, de dimension $2p-1$ ($p \geq q+1$) de $\pi^{-1}(U_t \cup V_z) \cap U$ dont le support Γ est un fermé de classe A_{2p-1} relativement compact dans $\pi^{-1}(U_t \cup V_z)$.

Lemme 3 *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que le problème du bord pour $[\Gamma]$ admet une solution $[A_2]$ au-dessus de l'ouvert $V_z \cap \{\psi > t - \varepsilon\}$.*

Preuve. Nous rappelons que V et W sont les ouverts définis dans le lemme 2. Soit $Y = \{(y,x) \in V \times \pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r))\,;\, y = f \circ \pi(x)\}$ et $[\Gamma_f]$ l'image directe de $[\Gamma]$ par l'application injective $\Psi : \pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r)) \to V \times \pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r))$ définie par $\Psi(x) = (f \circ \pi(x),x)$. L'application Ψ étant un biholomorphisme entre $\pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r))$ et Y, le courant $[\Gamma_f]$ est encore un courant rectifiable, maximalement complexe, fermé et dont le support Γ_f est de classe A_{2p-1}. Or, pour tout $y \in W$, $\Gamma_f \cap (\{y\} \times \pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r))) = \emptyset$ et donc, d'après la proposition 3, $[\Gamma_f]$ admet une solution au problème du bord dans $V \times \pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r))$ qui est incluse dans Y d'après le principe du maximum. Par conséquent, en projetant cette solution sur $\pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r))$, on montre que $[\Gamma]$ admet lui aussi une solution au problème du bord dans $\pi^{-1}(\mathrm{B}(0,r)) \cap \pi^{-1}(f^{-1}(V))$ qui contient l'ouvert $\pi^{-1}(V_z \cap \{\psi > t - \varepsilon\})$ pour ε assez petit. D'après la proposition 4, la solution ainsi trouvée pour $[\Gamma]$ est bien au-dessus de $V_z \cap \{\psi > t - \varepsilon\}$ ce qui termine la preuve du lemme. □

Soit ε_2 un réel vérifiant $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ et tel que ε_2 soit une valeur régulière au sens du théorème de Sard pour ψ. Alors la restriction de $[A_2]$ à l'ouvert $\pi^{-1}(V_z \cap \{\psi > t - \varepsilon_2\})$ est une p-chaîne holomorphe de $\pi^{-1}(V_z \cap \{\psi > t - \varepsilon_2\}) \setminus \Gamma$ admettant une extension simple à $\pi^{-1}(V_z)$ dont le bord $[\Gamma_2]$ est un courant rectifiable fermé, maximalement complexe, de dimension $2p-1$ dont le support est de classe A_{2p-1} et est égal à $[\Gamma]$ dans l'ouvert $\pi^{-1}(V_z \cap \{\psi > t - \varepsilon_2\})$. Le courant $[\Gamma_3] = [\Gamma] - [\Gamma_2]$ est un courant rectifiable maximalement complexe, fermé, de dimension $2p-1$ dont le support est de classe A_{2p-1} et est inclus dans $\pi^{-1}(\{\psi \leq t - \varepsilon_2\})$, donc relativement compact dans $\pi^{-1}(U_t)$. D'après l'hypothèse faite sur U_t, $[\Gamma_3]$ admet une solution au problème du bord au-dessus de U_t que l'on notera $[A_3]$. Le courant $[A] = [A_2] + [A_3]$ est alors la p-chaîne holomorphe solution au problème du bord pour $[\Gamma]$ ce qui termine la preuve de la proposition 5. □

Fin de la preuve du théorème 1. Soit F l'ensemble des $s \in \mathbb{R}$ tels que le problème du bord soit toujours résoluble au-dessus de la variété q-convexe $Y = \{\varphi < s\}$. D'après la proposition 4, F est un intervalle de la forme $[c,t]$ où $t \geq c$. Pour montrer le théorème 1, il faut montrer que $F = [c,+\infty[$. Pour cela, procédons par l'absurde et supposons que $t < +\infty$. Pour tout point $z \in \{\varphi = t\}$, associons l'ouvert V_z défini dans la proposition 5 pour $\psi = \varphi$. L'ensemble $\{\varphi = t\}$ étant compact, nous pouvons extraire un recouvrement fini de $\{\varphi = t\}$ par des ouverts $V_{z_1}, \ldots, V_{z_k}$ (où $z_1, \ldots, z_k \in \{\varphi = t\}$). D'après la proposition 5 appliquée à $\psi = \varphi$, le problème du bord est toujours résoluble au dessus de $\{\varphi < t\} \cup V_{z_1}$ (nous noterons $\widetilde{\varphi}_{z_1}$ la déformation de φ ainsi obtenue). En appliquant à nouveau la proposition 5 pour $\psi = \widetilde{\varphi}_{z_1}$ (nous noterons $\widetilde{V}_{z_2}$ (resp. $\widetilde{\varphi}_{z_2}$) l'ouvert (resp. la déformation de $\widetilde{\varphi}_{z_1}$) ainsi obtenu), on obtient que le problème du bord est résoluble au dessus de l'ouvert $\{\varphi < t\} \cup V_{z_1} \cup \widetilde{V}_{z_2}$. En itérant le même processus, on montre que le problème du bord est résoluble au dessus d'un ouvert de la forme $L = \{\varphi < t\} \cup V_{z_1} \cup_{j=2}^{k} \widetilde{V}_{z_j}$. Or, en remarquant que dans la proposition 5, la taille de l'ouvert V_z ne dépend que de φ et de son développement de Taylor à l'ordre 2, on montre que si les ouverts V_z sont choisis assez petits au départ, les ouverts $\widetilde{V}_z$ construits après les déformations successives de φ peuvent être choisis aussi proches que l'on veut des ouverts V_z. On en déduit que l'ouvert L contient un voisinage ouvert de $\{\varphi \leq t\}$ ce qui montre que F est ouvert et donne la contradiction recherchée. $\square$

4 Théorème de Hartogs-Bochner

Une des applications classique du problème du bord consiste à montrer le théorème de Hartogs-Bochner en appliquant la résolution du problème du bord pour le graphe de la fonction CR considérée. Plus généralement, la résolution du problème du bord permet d'obtenir le théorème de Hartogs-Bochner pour les fonctions CR-méromorphes (voir [15, 25]). Nous rappelons qu'un sous-ensemble Γ, fermé et de mesure de Hausdorff k-dimensionnelle localement finie d'une variété métrique X est dit *variété à singularité négligeable de classe C^1 et de dimension k* s'il existe un sous-ensemble $\tau \subset \Gamma$ de mesure de Hausdorff k-dimensionnelle nulle tel que $\Gamma \backslash \tau$ soit une sous-variété de classe C^1, fermée et de dimension k de $X \backslash \tau$.

Définition 1 *Soient M une sous-variété réelle maximalement complexe de dimension m d'un ouvert W de $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) et Y une variété complexe. On appellera application CR-méromorphe définie sur M et à valeurs dans Y la donnée d'une application CR f définie et de classe C^1 sur un ouvert dense U de M, à valeurs localement bornées dans Y (i.e. pour tout compact $K \subset M$, il existe un compact $L \subset Y$ tel que $f(K \cap U) \subset L$) et dont l'adhérence du graphe dans $W \times Y$ est une variété à singularités négligeables de classe C^1, de dimension m, fermée et maximalement complexe.*

On remarquera que dans le cas où m est pair, M est analytique et f est méromorphe au sens habituel d'après [20].

Contrairement aux applications CR classiques, les applications CR-méromorphes peuvent avoir des points d'indétermination comme le montre l'exemple suivant : soit $f : \mathbb{C}^2 \to P_1(\mathbb{C})$ définie par $f(z_1,z_2) = [z_1 : z_2]$. La restriction de f sur la sphère S de centre le point $(-1;0)$ et de rayon 1 n'est pas une application CR sur S mais est une application CR-méromorphe ayant un point d'indétermination à l'origine.

Par la même méthode que pour le théorème 1, nous obtenons le résultat d'extension méromorphe suivant :

Théorème 2 *Soient m,n,p,q,r des entiers naturels tels que $p \geq 1$, $q \geq 1$ et $m \geq p + q$. Soient X une variété complexe de dimension $m + r$, p-convexe et Y une variété complexe q-complète et de dimension n. Soit φ l'exhaustion associée à X et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\{\varphi \leq c\}$ contienne le compact exceptionnel de φ. Notons $K = \{\varphi \leq c\}$. Soit M une sous-variété de classe C^1, connexe, de dimension $2m - 1$, orientée, fermée, maximalement complexe de $X \backslash K$ et relativement compacte dans X. Supposons que M est le bord au sens des courants d'un sous-ensemble analytique A de $X \backslash (K \cup M)$ qui est relativement compact dans X. Alors les applications CR-méromorphes $f : M \to Y$ admettent une extension méromorphe à A.*

Preuve. Nous notons ψ l'exhaustion fortement q-convexe sur Y et nous la choisissons strictement positive. Nous ne pouvons pas appliquer directement le théorème 1, car $X \times Y$ n'est pas $(p + q - 1)$-convexe. Cependant, si $\varepsilon > 0$, l'exhaustion $\varphi + \varepsilon\psi$ de $X \times Y$ est fortement $(p+q-1)$-convexe hors de $K \times Y$.

Soit Γ_f l'adhérence du graphe de f dans $X \times Y$. La sous-variété M étant orientée et de dimension $2m - 1$, $[\Gamma_f]$ l'est aussi et définit un courant d'intégration $[\Gamma_f]$, maximalement complexe, fermé et de dimension $2m - 1$ de $(X \backslash K) \times Y$. Pour étendre méromorphiquement f, nous allons résoudre le problème du bord pour $[\Gamma_f]$. Par unicité du problème du bord (voir proposition 4), il suffit de montrer que pour tout $c' > c$, le problème du bord est résoluble pour la restriction de $[\Gamma_f]$ à l'ouvert $\{\varphi > c'\} \times Y$.

Soit $c' > c$, et choisissons $\varepsilon > 0$ et un réel d, $c' > d > c$, tels que $\Gamma_f \cap (\{\varphi > c'\} \times Y) \subset\subset \Gamma_f \cap \{\varphi + \varepsilon\psi > d\}$. Ceci est possible car (par définition de f), il existe un compact $L_{c'}$ de Y tel que $f(U \cap \{\varphi > c'\}) \subset \{\varphi > c'\} \times L_{c'}$ (où U est l'ouvert dense de M sur lequel f est de classe C^1).

En procédant comme pour le théorème 1, on montre qu'il existe une m-chaîne holomorphe $[T]$ de masse localement finie dans $V = \{\varphi > c'\} \times Y$, solution au problème du bord pour $[\Gamma_f]$ dans V. La variété M étant connexe, Γ_f l'est aussi. D'après la proposition 4.7 de [15], $[T]$ est le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique irréductible de $V \backslash \Gamma_f$. Soit π : $V \to \{\varphi > c'\}$ la projection sur le premier membre du produit. Sa restriction à T est propre, et on a :

$$\mathrm{d}(\pi_*[T]) = \pi_*(\mathrm{d}[T]) = \pi_*([\Gamma_f]|_V) = [M]|_{\pi(V)} = (\mathrm{d}[A])|_{\pi(V)}$$

et donc $\pi_*([T]) = [A]|_{\pi(V)}$ par unicité du problème du bord pour $[M]$. On en déduit alors que $\pi_{|T} : T \to A$ est un revêtement à un feuillet de A et donc que π^{-1} définit une application méromorphe à valeurs dans Y qui coïncide avec f sur M. □

Dans le cas $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}$ et K est polynomialement convexe, nous retrouvons le résultat de Lupacciolu [22].

Dans le cas où $K = \emptyset$ (i.e. X est p-complète) et $r = 0$, on obtient le théorème d'extension de Hartogs-Bochner suivant :

Corollaire 3 *Soit X (resp. Y) une variété complexe p-complète (resp. q-complète) et de dimension $m \geq p + q$ (resp. de dimension n). Soit Ω un domaine de X à bord $\partial\Omega$ connexe et de classe C^1. Alors les applications CR-méromorphes $f : \partial\Omega \to Y$ admettent une extension méromorphe à Ω.*

Dans le cas $p = 1$ et $q = 1$, X et Y sont de Stein et nous retrouvons le résultat de Hartogs-Bochner classique.

Dans le cas où Y est de Stein, et X est une variété $(m-1)$-complète nous retrouvons un résultat de A. Andreotti et D. Hill [3].

De la même manière que précédemment, en considérant le graphe d'une section CR d'un fibré holomorphe et en appliquant le théorème 1, nous retrouvons le résultat de C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer [21] suivant :

Corollaire 4 *Soient E un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété X $(m-1)$-convexe (où $m = \dim_{\mathbb{C}} X$), φ l'exhaustion associée à X et $c \in \mathbb{R}$ tel que le compact $\{\varphi \leq c\}$ contienne le compact exceptionnel de φ. Soit Ω un domaine de $\{\varphi > c\}$ à bord $\partial\Omega$ connexe et de classe C^1. Alors les sections CR à valeurs dans E, de classe C^1 et définies sur $\partial\Omega$ admettent une extension holomorphe à Ω.*

Dans le cas où X est une variété de Stein de dimension m et Y une variété complexe quelconque de dimension $n = m-1$, F. Chazal [5] a montré que les applications méromorphes dans un voisinage connexe d'un domaine $\Omega \subset X$ et à valeurs dans Y admettent une extension méromorphe à Ω. Si $\partial\Omega$ est de classe C^2, on en déduit que le théorème de Hartogs-Bochner est valide pour les applications CR lisses $f : \partial\Omega \to Y$. En effet, d'après [19], $\partial\Omega$ est alors une variété CR globalement minimale de X. Par conséquent, les applications CR sur $\partial\Omega$ admettent une extension holomorphe à un voisinage à un côté de $\partial\Omega$ et on est alors ramené au résultat de F. Chazal (voir [24, 25]). Si on suppose de plus que $m = 2$ (et donc que Y est une surface de Riemann), ce dernier résultat a été montré dans le cas lisse dans [9, 24] et dans [25] pour le cas général des applications CR-méromorphes. La démonstration de [25], consiste à se ramener au cas où f évite un point de Y et donc au cas où f est à valeurs dans une surface de Riemann ouverte. Cette même démonstration s'applique ici dans toute sa généralité et permet de retrouver le résultat de F. Chazal, et même d'étendre le théorème de Hartogs-Bochner au cas des applications CR-méromorphes.

Théorème 3 *Soient X une variété de Stein et M une sous-variété orientée, connexe, de dimension $2m-1$ $(m \geq 2)$, maximalement complexe, compacte, de classe C^1 de X, et bord (au sens des courants) d'un sous-ensemble analytique A de volume $2m$-dimensionnel fini de $X \backslash M$. Soit Y une variété complexe de dimension inférieure ou égale à $(m-1)$. Alors les applications CR-méromorphes $f : M \to Y$ de classe C^1 admettent une extension méromorphe à A.*

Preuve. On plonge la variété X dans un espace numérique $\mathbb{C}^n$. On peut supposer que Y est connexe, car la variété M étant connexe, l'adhérence de l'image de f dans Y est incluse dans une composante connexe de Y. Si Y n'est pas compacte, ou si $\dim Y < p-1$, le théorème 2 nous donne immédiatement le résultat recherché puisque Y est alors p-complète d'après [23]. Dans le cas où Y est compact et de dimension $p-1$, il suffit d'appliquer la démonstration de [25] en remplaçant juste l'utilisation du théorème de Chirka par notre théorème 1. Pour plus de clarté, nous donnons l'idée de la démonstration :

Dans un premier temps, supposons que f est une application CR de classe C^1 définie sur M. Nous rappelons (voir [7]) que si γ est une courbe C^1 à singularités négligeables, alors $\widehat{\gamma} \backslash \gamma$ est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 et de volume fini de $\mathbb{C}^n \backslash \gamma$ (où $\widehat{\gamma}$ est l'enveloppe polynomialement convexe de γ). D'après le théorème de Sard, pour presque tout $c \in Y$, $\gamma_c = f^{-1}(c)$ est une réunion finie de courbes de classe C^1 de M. Soient a et b deux points réguliers de f. Le sous-ensemble analytique $S_a = \widehat{\gamma}_a \backslash \gamma_a$ de $\mathbb{C}^n \backslash \gamma_a$ est de dimension pure 1. La restriction de f à $M \backslash \gamma_a$ est une application CR-méromorphe à valeurs dans $Y \backslash \{a\}$ qui n'est pas compacte. D'après

le théorème 2, f admet une extension méromorphe à $A\backslash\widehat{\gamma}_a$. En faisant de même pour le point b, on montre que f admet une extension méromorphe sur $A\backslash(\widehat{\gamma}_a \cap \widehat{\gamma}_b)$. Or γ_a et γ_b étant disjoints et S_a et S_b étant des sous-ensembles analytiques de dimension 1, $\widehat{\gamma}_a \cap \widehat{\gamma}_b$ est un ensemble fini de points. La démonstration du théorème s'obtient alors par application de la proposition ci-après pour $Z = \widehat{\gamma}_a \cap \widehat{\gamma}_b$.
Dans le cas où f est une fonction CR-méromorphe, le même raisonnement est encore valide à la différence que $\gamma_a \cap \gamma_b$ peut ne pas être vide et par conséquent, on obtient une extension méromorphe de f dans $A\backslash(\widehat{\gamma}_a \cap \widehat{\gamma}_b)$ qui cette fois est un sous-ensemble analytique de A non nécessairement isolé. Là encore, la proposition ci-après permet de conclure. $\square$

Proposition 6 *Soient A, M, Y et f comme dans l'énoncé du théorème* 3, *$Z \subset A$ un sous-ensemble analytique de codimension au moins* 1. *Supposons que f admet une extension méromorphe F sur $A\backslash Z$. Alors f admet une extension méromorphe à A.*

Preuve. Soient Γ_f l'adhérence du graphe de f dans $M \times Y$ et $\pi : \mathbb{C}^n \times Y \to Y$ la projection canonique sur le deuxième membre du produit. Dans le cas où $\pi(\Gamma_f) \neq Y$ ou que $\dim Y < m-1$, la proposition est une conséquence du théorème 2. Par la suite, nous supposerons donc que $\pi(\Gamma_f) = Y$ et que $\dim Y = m-1$. Soit ω une (1,1)-forme kählérienne sur $\mathbb{C}^n$ et γ une 1-forme sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\omega = \mathrm{d}\gamma$. Par définition de F, il existe un sous-ensemble analytique H de $A\backslash Z$ tel que F soit une application holomorphe sur $A\backslash(Z \cup H)$. Comme $\pi(\Gamma_f) = Y$, il existe un sous-ensemble analytique G de $A\backslash(Z \cup H)$ tel que f soit de rang maximal sur $A\backslash(Z \cup G \cup H)$. Soit T l'adhérence du graphe de F dans $(A\backslash Z) \times Y$ et $\widetilde{T}$ son adhérence dans $A \times Y$. Il faut montrer que $\widetilde{T}$ est un sous-ensemble analytique de $A \times Y$. Pour cela, d'après le théorème de Bishop, il suffit de montrer que T est de volume de Hausdorff de dimension $2p$ fini dans $(A\backslash Z) \times Y$. Comme F est méromorphe au voisinage de G et H dans $A\backslash Z$, il suffit de montrer que la restriction (que l'on notera S) de T à $(A\backslash(Z \cup G \cup H)) \times Y$ est de volume de Hausdorff de dimension $2p$ fini. Soit Ψ une (1,1)-forme associée à une métrique hermitienne sur Y.

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S \frac{(\omega + \Psi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n!} \int_S \omega^k \wedge \Psi^{n-k} =$$

(Y etant de dimension $n-1$, $\Psi^n = 0$)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_n^{k+1}}{n!} \int_S \omega \wedge \omega^k \wedge \Psi^{n-k-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_S \omega \wedge \Psi^{n-1}$$

(car F est de rang maximal sur $A \backslash (Z \cup G \cup H)$). D'après le théorème de Fubini on a :

$$\int_S \omega \wedge \Psi^{n-1} = \int_{y \in Y} \left(\int_{\{F=y\}} \omega \right) \Psi^{n-1}$$

D'après le théorème de Sard, pour presque tout $y \in Y$, $\gamma_y = \{z \in M \,;\, (z,y) \in \Gamma_f\}$ est une courbe C^1 à singularités négligeables. Or, d'après [7], l'ensemble $\widehat{\gamma}_y \backslash \gamma_y$ est un sous-ensemble analytique de volume 2-dimensionnel fini de $\mathbb{C}^n \backslash \gamma_y$ et contient l'ensemble analytique $\{F = y\}$ défini sur $A \backslash (Z \cup G \cup H)$. Donc, d'après le théorème de Stokes, on a pour presque tout $y \in Y$,

$$\int_{\{F=y\}} \omega = \int_{\{F=y\}} \mathrm{d}\gamma = \int_{\gamma_y} \gamma$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}(n-1)! \operatorname{Vol}(S) &= \int_{y \in Y} \left(\int_{\{F=y\}} \omega \right) \Psi^{n-1} \\ &= \int_{y \in Y} \int_{\gamma_y} \gamma \wedge \Psi^{n-1} = \int_{\Gamma_f} \gamma \wedge \Psi^{n-1} < +\infty\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

Références

[1] Alexander H. *Polynomial approximation and hulls in sets of finite linear measure in $\mathbb{C}^n$*, Amer. J. Math., **93** (1971), 65-74.

[2] Andreotti A. et Grauert H. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 193-259.

[3] Andreotti A. et Hill D. *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part I: Reduction to vanishing theorems*, Ann. Scuola norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat.,**26** (1972), 325-363.

[4] Bishop E. *Condition for the analyticity of certain sets*, Michigan Math. J., **482** (1964), 289-304.

[5] Chazal F. *Un théorème de prolongement d'applications méromorphes*, Université de Bourgogne, Prépublication n°80.

[6] Chirka E.M. *Complex Analytic Sets*, Kluwer Academic Publishers.

[7] Dinh T.C. *Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable*, Acta Mathematica, **180** (1998), 31-67.

[8] Dinh T.C et Sarkis F. *Wedge removability of metrically thin sets and application to the CR-meromorphic extension*, A paraître dans Math. Z.

[9] Dolbeault P. et Henkin G. *Chaînes holomorphes de bord donné dans un ouvert q-concave de* $\mathbb{C}P^n$, Bull. Soc. Math. France, **125** (1997), 383-445.

[10] Federer H. *Geometric Measure Theory*, Grundlehren Math. Wiss., **153**, Springer-Verlag, New York, 1969.

[11] Grauert H. *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, Ann. Math., **68** (1958), 460-472.

[12] Greene R.E. et Wu H. *Embedding of open riemannian manifolds by harmonic functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **25** (1975), 215-235.

[13] Gunning R.C. et Rossi H. *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[14] Hartogs F. *Einige Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*, Münch. Ber., **36** (1906), 223-242.

[15] Harvey R. et Lawson B. *On boundaries of complex analytic varieties, I*, Ann. of Math., **102** (1975), 233-290.

[16] Harvey R. et Lawson B. *On boundaries of complex analytic varieties, II*, Ann. of Math., **106** (1977), 213-238.

[17] Harvey R. et Shiffmann B. *A characterization of holomorphic chains*, Ann. of Math., **99** (1974), 553-587.

[18] Henkin G.M. et Leiterer J. *Andreotti-Grauert theory by integral formulas*, Progress in Math. n°74, Birkhäuser, 1988.

[19] Jöricke B. *Some remarks concerning holomorphically convex hulls and envelopes of holomorphy.*, Math Z., **218** (1995), n°1, 143-157.

[20] King J. *The currents defined by analytic varieties*, Acta Math., **127** (1971), 185-220.

[21] Laurent-Thiébaut C. et Leiterer J. *On the Hartogs-Bochner extension phenomenon for differential forms*, Math. Ann., **284** (1989), 103-119.

[22] Lupacciolu G. *A theorem on holomorphic extensions of CR-functions*, Pacific J. Math., **124** 1986, 177-191.

[23] Ohsawa T. *Completeness of noncompact analytic spaces*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., **20** (1984), 683-692.

[24] Porten E. *A Hartogs-Bochner type theorem for continuous CR-mappings*, manuscrit, 1996.

[25] Sarkis F. *CR-meromorphic extension and the non embeddability of the Andreoti-Rossi CR-structure in the projective space*, Int. J. Math., **10** (1999), 897-915.

[26] Sarkis F. *Problème du bord dans les variétés kählériennes*, preprint.

[27] Stolzenberg G. *Uniform approximation on smooth curves*, Acta Math., **115** (1966), 185-198.

[28] Wermer J. *The hull of a curve in* $\mathbb{C}^n$, Ann. of Math., **68** (1958), 550-561.

Vincent Koziarz (e-mail: `koziarz@ujf-grenoble.fr`)
Frédéric Sarkis (e-mail: `sarkis@math.jussieu.fr`)
Institut Fourier, UFR de Mathématiques, UMR 5582
BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France