RÉSOLUTION DU $\overline{\partial}$ POUR LES COURANTS PROLONGEABLES

par Salomon SAMBOU

Prépublication de l'Institut Fourier n° 486 (1999)

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail à la résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables définis sur un domaine Ω d'une variété analytique complexe de dimension n. Un courant T défini sur un domaine Ω d'une variété X est dit prolongeable, si T est la restriction à Ω d'un courant $\widetilde{T}$ (non unique) défini sur X. D'après [MA] si le domaine Ω vérifie $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$, l'espace $\check{\mathcal{D}}'_{p,q}(\Omega)$ des courants de bidimension (p, q) définis sur Ω et prolongeables est le dual topologique de l'espace $D^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ des (p, q)-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X et à support dans $\overline{\Omega}$.

Sous l'hypothèse précédente sur Ω et sous une bonne condition de q-convexité sur Ω, on résoud le $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles appartenant à $D^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X) \cap \operatorname{Ker}\overline{\partial}$, (théorème 2.1 et corollaire 2.2). On résoud alors le $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables par dualité. On obtient le théorème principal de ce travail.

THÉORÈME. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse, $0 \leq q \leq n-1$.*

Alors, si T est un courant de bidimension $(n, n-r)$, prolongeable, $\overline{\partial}$ fermé sur Ω, il existe un courant S de bidimension $(n, n-r+1)$, prolongeable sur Ω tel que $\overline{\partial} S = T$ sur Ω, si $1 \leq n-q \leq r \leq n$.

Des résultats locaux ont été obtenus dans [NA-VA]. De ce théorème, on déduit le corollaire suivant :

Mots-clés : courants prolongeables, domaine complètement strictement q-convexe, équation de Cauchy-Riemann.
Classification math. : 32F10, 32F20.

COROLLAIRE. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement pseudoconvexe. Si f est une $(0,1)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}$-fermée sur Ω, possédant une trace ou valeur au bord au sens des courants sur $b\Omega$, alors il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω possédant une trace au sens des courants sur $b\Omega$ telle que :*

$$\overline{\partial} g = f \;\text{ sur } \Omega\,.$$

Deux applications sont tirées de ces résultats :

A. L'annulation du r-ième groupe $H^r(\Omega, \check{\mathcal{O}}_\Omega)$ de cohomologie à valeurs dans le faisceau $\check{\mathcal{O}}_\Omega$ des fonctions holomorphes sur Ω qui ont une valeur au bord sens des courants sur $b\Omega$ (corollaire 4.2). Une application analogue pour des formes différentielles qui vérifient une estimation de type "Hardy-Like" a été obtenue dans [BA].

B. Si $\gamma(U)$ désigne la valeur au bord au sens des courants de U, on a une résolution de l'équation

$$\begin{cases} \partial\overline{\partial} U = f \\ \gamma(U) = g \end{cases} \quad \text{sur } \Omega$$

où f est une $(1,1)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, $\overline{\partial}$ fermée, possédant une valeur au bod au sens des courants et g une distribution sur $b\Omega$ qui vérifie la condition de compatibilité.

Dans le cas où Ω est un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, ce résultats est prouvé dans [B].

1. Préliminaires

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Soit $\Omega \subset X$ un domaine. Un courant T défini sur Ω est dit *prolongeable*, si T est la restriction à Ω d'un courant (non unique) $\widetilde{T}$ défini sur X.

Pour $\Omega \subset\subset X$, on a les caractérisations suivantes des courants prolongeables.

1.1. THÉORÈME ([MA]). — *On a une équivalence entre les propriétés suivantes :*

i) T est prolongeable ;

ii) Le courant défini sur $X \setminus b\Omega$ par T sur Ω et 0 sur $\complement\overline{\Omega}$ est prolongeable à X ;

iii) Il existe une constante $C > 0$ et un entier m tels que : $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C|\varphi|_{m,\overline{\Omega}}$ pour toute forme différentielle φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω, $\;|\;,\;|_{m,\overline{\Omega}}$ désigne la norme de $C^m(\overline{\Omega})$;

iv) Il existe un monôme de dérivation D une forme différentielle continue g sur Ω (restriction d'une forme différentielle continue sur $\overline{\Omega}$) telle que $T = Dg$ sur Ω.

Supposons que Ω est un domaine borné à bord lisse.

On note $\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ l'espace des (p,q)-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur X à support dans $\overline{\Omega}$. Pour $p = q = 0$, on note par simplification $\mathcal{D}^{0,0}_{\overline{\Omega}}(X) = \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(X)$ · $\mathcal{D}^{p,q}(\Omega)$ (respectivement $\mathcal{D}(\Omega)$) désigne l'espace des (p,q)-formes différentielles (respectivement des fonctions) à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ est muni de la topologie de convergence uniforme des (p,q)-formes différentielles et de toutes leurs dérivées sur $\overline{\Omega}$.

$\mathcal{D}^{p,q}(\Omega) \subset \mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ est un sous-espace vectoriel dense dans $\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ (cf. [MA]).

Notons $\check{\mathcal{D}}'_{p,q}(\Omega)$ l'espace des courants de bidimension (p,q) sur Ω qui sont prolongeables.

Si le domaine $\Omega \subset\subset X$ est à bord lisse et vérifie en plus la propriété $\mathring{\overline{\Omega}} = \Omega$, alors (cf. [MA]) $\check{\mathcal{D}}'_{p,q}(\Omega) = \left[\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)\right]'$ dual topologique de $\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$.

Nous supposons dans toute la suite que $\mathring{\overline{\Omega}} = \Omega$. Ainsi l'espace des courants définis sur Ω et prolongeables est exactement le dual des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X à support dans $\overline{\Omega}$.

1.2. Définition. — *Soit $\Omega \subset X$ un domaine. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. f est une* fonction q-convexe, *$1 \leq q \leq n$, si la forme de Lévi de f admet en chaque point de Ω au moins q valeurs propres positives.*

1.3. Définition. — *Soit Ω' un domaine qui contient $\overline{\Omega}$, Ω' est une* extension q-convexe *de $\overline{\Omega}$, $1 \leq q \leq n-1$, s'il existe A, B des constantes avec $-\infty < A < B \leq +\infty$, une fonction $(q+1)$-convexe, $\rho : U \to]-\infty, B[$, où U est un voisinage de $\Omega' \setminus \Omega$, telle que $\overline{\Omega} \cap U = \{z \in U \mid \rho(z) \leq A\}$ et $\{z \in U \mid A \leq \rho(z) \leq t\}$ soit compact pour tout $t < B$.*

1.4. Définition. — *Soit Ω un domaine à bord lisse $b\Omega$ de X. $b\Omega$ est dit* strictement q-convexe, *s'il existe une fonction ρ, $(q+1)$-convexe dans un voisinage U de $b\Omega$ avec $\Omega \cap U = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}$.*

Si U est un voisinage de $\overline{\Omega}$, alors Ω est complètement strictement q-convexe.

1.5. Définition. — *Un domaine $\Omega \subset X$ est dit* q-convexe *si c'est l'extension q-convexe d'un compact. Il est dit complètement q-convexe s'il est l'extension q-convexe de l'ensemble vide.*

2. Résolution du $\overline{\partial}$ avec condition de support

Soit X une variété complexe de dimension n. Notons $H_c^{p,q}(X)$ le (p,q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault à support compact dans X. On a :

2.1. THÉORÈME. — *Soient $\Omega \subset\subset X$, un domaine à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse et q un entier tel que $0 \leq q \leq n-2$. On suppose que*

i) $H_c^{p,q+1}(X) = 0$ *;*

ii) Pour tout compact K de X, il existe un ouvert D tel que $\Omega \cup K \subset\subset D$ et l'application restriction : $H^{p,q}(X \smallsetminus \Omega) \to H^{p,q}(X \smallsetminus D)$ soit injective.

Alors si $f \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,q+1}(X)$ est $\overline{\partial}$-fermée, il existe $g \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,q}(X)$ telle que $\overline{\partial} g = f$ sur X.

Preuve. — Puisque $H_c^{p,q+1}(X) = 0$, il existe une (p,q)-forme différentielle h à support compact dans X, telle que $\overline{\partial} h = f$.

Soit K un compact qui contient le support de h, d'après l'hypothèse *ii)* du théorème, il existe un ouvert D tel que $\Omega \cup K \subset\subset D$ et l'application restriction $H^{p,q}(X \smallsetminus \Omega) \to H^{p,q}(X \smallsetminus D)$ soit injective.

$\overline{\partial} h\big|_{X \smallsetminus \Omega} = 0$, donc $h\big|_{X \smallsetminus \Omega}$ est $\overline{\partial}$-fermée. De plus $h\big|_{X \smallsetminus D} = 0$, donc $h\big|_{X \smallsetminus D}$ appartient à la classe nulle dans $H^{p,q}(X \smallsetminus D)$.

D'après l'injectivité de l'application restriction de $H^{p,q}(X \smallsetminus \Omega) \to H^{p,q}(X \smallsetminus D)$, h appartient à la classe nulle dans $H^{p,q}(X \smallsetminus \Omega)$. Il existe alors θ une $(p, q-1)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur $X \smallsetminus \Omega$ telle que $\overline{\partial}\theta = h$ sur $X \smallsetminus \Omega$. Soit $\widetilde{\theta}$ une extension $\mathcal{C}^\infty$ de θ à X. Posons $g = h - \overline{\partial}\widetilde{\theta}$. Alors g est une solution de $\overline{\partial} U = f$ et $g \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,q}(X)$. ∎

On peut déduire de ce théorème le corollaire suivant :

2.2. COROLLAIRE. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement $(q+1)$-convexe, $0 \leq q \leq n-2$, à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse alors si $f \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,r}(X)$ est $\overline{\partial}$-fermée $(0 \leq p \leq n)$, il existe $g \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,r-1}(X)$ telle que $\overline{\partial} g = f$ sur X pour $1 \leq r \leq q+1$.*

Preuve. — Soit ρ la fonction définissante de Ω. Il existe un voisinage ouvert U de $\overline{\Omega}$ pour lequel $\rho : U \to \mathbb{R}$ est $(q+2)$-convexe, $d\rho(z) \neq 0$ si $z \in b\Omega$ et $\Omega = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit $\Omega' = \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon\}$ est une extension $(q+1)$-convexe de Ω et $H_c^{p,r}(\Omega') = 0$ pour $1 \leq r \leq q+1$ et $0 \leq p \leq n$ (cf. [He-Le], th. 12-7).

Pour K un compact de Ω', $\Omega \cup K \subset\subset \Omega'$. Il existe $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tel que :

$$D = \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon_0\} \supset \Omega \cup K$$

$\Omega' \setminus \Omega$ est alors une extension $(q+1)$-concave stricte de $\Omega' \setminus D$.

De l'invariance de la cohomologie pour les extensions $(q+1)$-concaves, on a la restriction de $H^{p,r}(\Omega' \setminus \Omega) \to H^{p,r}(\Omega' \setminus D)$ qui est bijective si $0 \leq p \leq n$, $1 \leq r \leq q$, et en particulier elle est injective (cf. [He-Le], th. 15-11 et 16-1).

Donc Ω' vérifie les hypothèses de X dans le théorème 2.1 ce qui donne le corollaire. ■

Pour résoudre le $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables, on aura besoin de la caractérisation de $\overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ suivante :

2.3. Théorème. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse, p et q des entiers, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n-1$. On suppose que*

i) $H^{n-p,n-q}(X)$ est séparé.

ii) Pour tout compact K de X, il existe un domaine D tel que $\Omega \cup K \subset\subset D$ et l'application restriction $H^{p,q}(X \setminus \Omega) \to H^{p,q}(X \setminus D)$ est injective.

Alors

$$\overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,q+1}_{\overline{\Omega}}(X) \mid \int_X f \wedge g = 0,\ \forall g \in Z^{n-p,n-q-1}(X) \right\}.$$

Preuve. — À cause de l'hypothèse *i)* la dualité de Serre implique que si $f \in \mathcal{D}^{p,q+1}_{\overline{\Omega}}(X)$ vérifie $\int_X f \wedge g = 0$ pour toute forme différentielle $g \in Z^{n-p,n-q-1}(X)$, il existe h à support compact dans X telle que $\overline{\partial} h = f$ sur X. Donc on a : $f \in \overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}(X)$. D'après le théorème 2.1, il existe $h \in \mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ telle que $\overline{\partial} h = f$. D'où $\left\{ f \in \mathcal{D}^{p,q+1}_{\overline{\Omega}}(X) \mid \int_X f \wedge g = 0 \right\} \subset \overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$. De même, $\overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X) \subset \mathcal{D}^{p,q+1}_{\overline{\Omega}}(X)$.

Pour $\overline{\partial} h \in \overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X)$ et $g \in Z^{n-p,q-1}(X)$, on a $\int_X \overline{\partial} h \wedge g = \int_X \overline{\partial}(h \wedge g) = 0$ car h est à support compact. D'où

$$\overline{\partial}\mathcal{D}^{p,q}_{\overline{\Omega}}(X) \subset \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,q+1}_{\overline{\Omega}}(X) \mid \int_X f \wedge g = 0,\ \forall g \in Z^{n-p,n-q-1}(X) \right\}.$$ ■

2.4. Remarque. — L'hypothèse $\int_X f \wedge g = 0$, $\forall g \in Z^{n-p,n-q+1}(X)$ entraîne $\overline{\partial} f = 0$. En effet

$$\int_X \overline{\partial} f \wedge h = \int_X \overline{\partial}(f \wedge h) \pm \int_X f \wedge \overline{\partial} h\,,$$

$\int_X \overline{\partial}(f \wedge h) = 0$ car f est à support compact et $\int_X f \wedge \overline{\partial} h = 0$ à cause de l'hypothèse. $\int_X \overline{\partial} f \wedge h = 0$ pour toute forme différentielle h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, d'où $\overline{\partial} f = 0$.

On peut tirer du théorème 2.3 le corollaire suivant :

2.5. COROLLAIRE. — *Soit X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset \subset X$ un domaine strictement q-convexe, $0 \leq q \leq n-1$. Alors si $0 \leq r \leq q$ et $0 \leq p \leq n$*

$$\overline{\partial}\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,r}(X) = \left\{ f \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,r+1}(X) \mid \int_X f \wedge g = 0,\ \forall g \in Z^{n-p,n-r-1}(X) \right\}.$$

Preuve. — Considérons $\Omega' = \Omega \cup \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon\}$ où U est un voisinage de $b\Omega$ et ρ une fonction définissante $(q+1)$-convexe de Ω. Pour ε assez petit, Ω' est une extension strictement q-convexe de Ω.

On a alors $H^{n-p,n-q}(\Omega')$ est de dimension finie (cf. [He-Le], théorème 12-16), d'où $H^{n-p,n-q}(\Omega')$ est séparé.

Puisque pour $r \leq q$, on a Ω strictement q-convexe entraîne Ω strictement r convexe, $H^{n-p,n-r}(\Omega')$ est séparé.

Pour K compact de Ω', $\Omega \cup K \subset\subset \Omega'$. Il existe $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ tel que

$$D = \Omega \cup \{z \in U \mid \rho(z) < \varepsilon_0\} \supset \Omega \cup K\,,$$

alors $\Omega' \smallsetminus \Omega$ est une extension q-concave stricte de $\Omega' \smallsetminus D$ et d'après [La-Le], th. 2-1, $H^{p,r}(X \smallsetminus \Omega) \to H^{p,r}(X \smallsetminus D)$ est injective.

D'après le théorème 2.3, on a donc

$$\overline{\partial}\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,r}(X) = \left\{ f \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{p,r+1}(X) \mid \int_X f \wedge g = 0,\ \forall g \in Z^{n-p,n-r-1}(X) \right\}. \qquad \blacksquare$$

3. Résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables

Pour résoudre le $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables, on procède par dualité et l'on a le théorème suivant :

3.1. THÉORÈME. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement q-convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse, $0 \leq q \leq n-1$.*

Alors, si T est un courant de bidimension $(n, n-r)$, prolongeable, $\overline{\partial}$-fermé sur Ω, il existe un courant de bidimension $(n, n-r+1)$, prolongeable S sur Ω tel que $\overline{\partial}S = T$ sur Ω, si $1 \leq n-q \leq r \leq n$.

Preuve. — Considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} L_T : \overline{\partial}\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}^{n,n-r}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \overline{\partial}\varphi &\longmapsto \langle T, \varphi\rangle\,. \end{aligned}$$

Si $\psi = \overline{\partial}\varphi$ et $\psi' = \overline{\partial}\varphi'$ sont telles que $\overline{\partial}\varphi = \overline{\partial}\varphi'$, on a $\overline{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$ et par conséquent $\varphi - \varphi'$ est une $(n, n-r)$-forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée à support compact dans $\overline{\Omega}$. Pour $n - r \geq 1$, $\varphi - \varphi' = \overline{\partial}\theta$, $\theta \in \mathcal{D}^{n,n-r-1}_{\overline{\Omega}}(X)$ (cf. corollaire 2.2).

Puisque $\mathcal{D}^{n,n-r-1}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}^{n,n-r-1}_{\overline{\Omega}}(X)$, il existe une famille $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{n,n-r-1}(\Omega)$ telle que : $\overline{\partial}\theta_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\partial}\theta$ dans $\mathcal{D}^{n,n-r}(\Omega)$. Alors

$$\langle T, \overline{\partial}\theta\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T, \overline{\partial}\theta_j\rangle = 0$$

car $\overline{\partial}T = 0$. Donc $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi'\rangle$. Ainsi $L_T(\overline{\partial}\varphi) = L_T(\overline{\partial}\varphi')$.

Pour $n = r$, si $\overline{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$, $\varphi - \varphi'$ est une fonction holomorphe à support compact dans $\overline{\Omega}$. D'après le principe du maximum, $\varphi - \varphi'$ ne peut être que nulle. Donc $\varphi = \varphi'$ et $L_T(\overline{\partial}\varphi) = L_T(\overline{\partial}\varphi')$. L_T est bien défini et est linéaire.

D'après le corollaire 2.5,

$$\overline{\partial}\mathcal{D}^{n,n-r}_{\overline{\Omega}}(X) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{n,n-r+1}_{\overline{\Omega}}(X) \mid \int_X f \wedge g = 0,\ \forall g \in Z^{0,r-1}(X) \right\} .$$

Pour $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \overline{\partial}D^{n,n-r}_{\overline{\Omega}}(X)$ qui converge vers f, on a :

$$\int_X f \wedge g = \lim_{j\to+\infty} \int_X f_j \wedge g = \lim_{j\to+\infty} \int_X \overline{\partial}\theta_j \wedge g = 0,\ \forall g \in Z^{0,r-1}(X) .$$

Donc $\int_X f \wedge g = 0$, d'où $f \in \overline{\partial}\mathcal{D}^{n-n-r}_{\overline{\Omega}}(X)$.

Ainsi $\overline{\partial}\mathcal{D}^{n,n-r}_{\overline{\Omega}}(X) \subset \mathcal{D}^{n,n-r+1}_{\overline{\Omega}}(X)$ est fermé et par conséquent $L_T : \overline{\partial}\mathcal{D}^{n,n-r}_{\overline{\Omega}}(X) \to \mathbb{C}$ est aussi continue d'après le théorème de l'application ouverte de Banach. On peut donc étendre L_T en un opérateur $\widetilde{L}_T : \mathcal{D}^{n,n-r+1}_{\overline{\Omega}}(X) \to \mathbb{C}$ qui est linéaire et continu. $\widetilde{L}_T$ appartient au dual topologique de $\mathcal{D}^{n,n-r+1}_{\overline{\Omega}}(X)$ et peut être identifié à un courant prolongeable défini sur Ω,

$$(-1)^r\langle\overline{\partial}\widetilde{L}_T, \varphi\rangle = \langle\widetilde{L}_T, \overline{\partial}\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}^{n,n-r+1}_{\overline{\Omega}}(X) .$$

Donc $T = \overline{\partial}\big((-1)^r\widetilde{L}_T\big)$. $(-1)^r\widetilde{L}_T$ est solution de $\overline{\partial}S = T$ et est un courant prolongeable. ■

3.2. Corollaire. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine complètement strictement pseudoconvexe. Si f est une $(0,1)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}$-fermée sur Ω, possédant une trace au sens des courants sur $b\Omega$, alors il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω possédant une trace au sens des courants sur $b\Omega$ telle que :*

$$\overline{\partial}g = f \ \text{ sur } \ \Omega .$$

Preuve. — Puisque f admet une trace au sens des courants, f est prolongeable en un courant F de bidegré $(0,1)$ à support compact dans $\overline{\Omega}$, (cf. [LO-TO], th. II.1), donc f peut être vue comme un courant défini sur Ω qui est prolongeable et $\overline{\partial}$-fermé.

Ω est complètement strictement $(n-1)$-convexe donc d'après le théorème 3.1, il existe un courant S de bidegré $(0,0)$ sur Ω tel que : $\overline{\partial} S = f$ et S est prolongeable.

Ω est une variété de Stein, il existe une solution U de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\overline{\partial} U = f$ sur Ω.

On a alors $\overline{\partial}(S-U) = 0$. D'après le théorème 3.5 du chapitre III de [LA2]], il existe une fonction holomorphe h sur Ω telle que

$$S - U = h\,.$$

D'où $S = U + h$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω qui est prolongeable en tant que courant. ∎

Le corollaire est alors une conséquence immédiate du lemme suivant :

3.3. Lemme. — *Soient Ω un domaine à bord lisse de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété réelle X, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω qui est prolongeable au sens des courants alors f admet une valeur au bord au sens des courants.*

Preuve. — Nous devons montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\,d\sigma$ existe et définit une distribution pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(b\Omega)$, où Ω_ε est le domaine défini par : $\Omega\setminus\Omega_{-\varepsilon} = \{x\in\Omega - \varepsilon < \rho(x) < 0\}$, pour ρ une fonction définissante de Ω. Si $\widetilde{\varphi}$ est une extension de $\mathcal{C}^\infty$ de φ à Ω et $i_{-\varepsilon} : b\Omega_{-\varepsilon} \to \Omega$ est l'injection canonique alors $\varphi_{-\varepsilon} = i^*_{-\varepsilon}\widetilde{\varphi}$. On désigne par $d\sigma$ un élément de surface.

Comme f est une fonction prolongeable au sens des courants, il existe une distribution F à support compact dans $\overline{\Omega}$ qui prolonge f au sens des courants et qui est définie par : $\langle F,\theta\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\Omega_{-\varepsilon}}(f\theta)\,dv$ pour θ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans un voisinage de $\overline{\Omega}$.

Nous allons montrer que :

i) Si $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\,d\sigma$ existe, alors elle ne dépend de l'extension $\widetilde{\varphi}$ de φ choisie ;

ii) $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\,d\sigma$ existe ;

iii) L'application qui à $\varphi \in D(b\Omega)$ fait correspondre $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\,d\sigma$ est linéaire et continue.

Démonstration de i). — Soient $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\varphi}'$ deux extensions de φ. Posons $\psi = \widetilde{\varphi} - \widetilde{\varphi}'$, ψ s'annule à l'ordre infini sur $b\Omega$. D'après *iv)* du Théorème 1.1, $f = Dg$, où g est une fonction continue et D un monôme de dérivation.

$$\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\psi_{-\varepsilon}\,d\sigma = \int_{b\Omega_{-\varepsilon}} Dg\psi_{-\varepsilon}\,d\sigma = \pm\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} gD\psi_{-\varepsilon}\,d\sigma$$

$$\left|\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} gD\psi_{-\varepsilon}\,d\sigma\right| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}}|g(x)|\left|\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} D\psi_{-\varepsilon}\,d\sigma\right| \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,.$$

Car $\psi_{-\varepsilon}$ s'annule à l'ordre infini sur $b\Omega$.

Démonstration de ii).

$$\int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\, d\sigma = \int_{\Omega_{-\varepsilon}} df \wedge (\widetilde{\varphi}\, d\sigma) + \int_{\Omega_{-\varepsilon}} f d\widetilde{\varphi} \wedge\, d\sigma$$

$$\int_{\Omega_{-\varepsilon}} f d\widetilde{\varphi} \wedge\, d\sigma \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \langle F, d\widetilde{\varphi}\rangle$$

$$\int_{\Omega_{-\varepsilon}} df \wedge (\widetilde{\varphi}\, d\sigma) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \langle F', \widetilde{\varphi}\rangle\ ,$$

car si f est prolongeable au sens des courants, df l'est aussi ; d'où l'existence de

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\, d\sigma.$$

Démonstration de iii). — Puisque la limite si elle existe ne dépend pas de l'extension $\widetilde{\varphi}$ de φ choisie. Choisissons $\widetilde{\varphi}$ telle que $|\widetilde{\varphi}|_{k+1,\overline{\Omega}} \le C|\varphi|_{k+1,b\Omega}$ où $|\cdot|_{k+1,\overline{\Omega}}$ désigne la norme C^{k+1} sur $\overline{\Omega}$ et k l'ordre maximal de F et F'.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\, d\sigma = \langle F', \widetilde{\varphi}\rangle + \langle F, d\widetilde{\varphi}\rangle$$

d'où

$$\left| \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\, d\sigma \right| \le C'|\widetilde{\varphi}|_{k+1,\overline{\Omega}} \le C''|\varphi|_{k+1,b\Omega}\ .$$

De plus, l'application qui à $\varphi \in \mathcal{D}(b\Omega)$ fait correspondre $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{b\Omega_{-\varepsilon}} f\varphi_{-\varepsilon}\, d\sigma$ est linéaire. Elle définit donc une distribution sur $b\Omega$.

4. Applications

A. Soient X une variété analytique complexe, $\Omega \subset X$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^\infty$.

On considère le faisceau sur X des courants prolongeables défini par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}'^{0,r}_{X\smallsetminus\Omega} \longrightarrow \mathcal{D}'^{0,r} \longrightarrow \check{\mathcal{D}}'^{0,r}_{\Omega} \longrightarrow 0\ ,$$

où $\mathcal{D}'^{0,r}_{X\smallsetminus\Omega}$ est le faisceau des courants de bidegré $(0,r)$ à support dans $X \smallsetminus \Omega$, $\mathcal{D}'^{0,r}$ le faisceau des courants de bidegré $(0,r)$ sur X et $\check{\mathcal{D}}'^{0,r}_{\Omega}$ celui des courants de bidegré $(0,r)$ sur Ω qui sont prolongeables.

Notons par $\check{\mathcal{D}}'^{0,r}_{\Omega}|_{\overline{\Omega}}$ le faisceau induit sur $\overline{\Omega}$ par $\check{\mathcal{D}}'^{0,r}_{\Omega}$. C'est un faisceau de $\mathcal{E}_{\overline{\Omega}}$-modules.

Notons aussi $\check{\mathcal{O}}_\Omega$ le faisceau sur $\overline{\Omega}$ des fonctions holomorphes sur Ω possédant une trace au sens des courants sur $b\Omega$.

On a la proposition suivante :

4.1. Proposition. — $\left(\check{\mathcal{D}}'^{0,r}_\Omega|_{\overline{\Omega}}, \overline{\partial}\right)$ *est une résolution acyclique de* $\check{\mathcal{O}}_\Omega$ *et par conséquent :*

$$H^q(\Omega, \check{\mathcal{O}}_\Omega) \cong \frac{\mathrm{Ker}\left(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q+1}_\Omega|_{\overline{\Omega}})\right)}{\mathrm{Im}\left(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q-1}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q}_\Omega|_{\overline{\Omega}})\right)}.$$

Preuve. — Nous avons à montrer que :

$$0 \longrightarrow \check{\mathcal{O}}_\Omega \longrightarrow \check{\mathcal{D}}'^{0,0}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \check{\mathcal{D}}'^{0,n}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Soit U un ouvert de X et $T \in \check{\mathcal{D}}'^{0,0}_\Omega(U \cap \overline{\Omega})$ tel que $\overline{\partial} T = 0$ sur U, d'après le théorème 3.5 du chapitre III de [La2], T est un courant défini sur U par une fonction holomorphe h. Puisque h est prolongeable, alors h admet une valeur au bord au sens des courants d'après le lemme 3.3, donc $h \in \check{\mathcal{O}}_\Omega$. On a donc prouvé que

$$\mathrm{Ker}\left(\check{\mathcal{D}}'^{0,0}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \longrightarrow \check{\mathcal{D}}'^{0,1}_\Omega|_{\overline{\Omega}}\right) = \check{\mathcal{O}}_\Omega .$$

Pour montrer l'exactitude du restant de la suite, on a besoin d'un lemme de Dolbeault.

Pour un ouvert V de $\overline{\Omega}$ et $T \in \check{\mathcal{D}}'^{0,j}_\Omega(V \cap \Omega)$ tel que $\overline{\partial} T = 0$ sur V, il existe $U \subset V$ tel que $T\big|_U$,soit $\overline{\partial}$-exact. Si $V \cap b\Omega = \emptyset$, c'est le lemme de Dolbeault classique, il suffit de prendre pour U un ouvert complètement strictement pseudoconvexe continu dans V. Pour V tel que $V \cap b\Omega \neq \emptyset$, puisque Ω est strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^\infty$, il existe un ouvert $U \subset V \cap \Omega$ à bord lisse, complètement strictement pseudoconvexe tel que $bU \cap b\Omega \neq \emptyset$. $T\big|_U$ est $\overline{\partial}$-exact d'après le théorème 3.1.

Par conséquent, pour tout j, $1 \leq j \leq n$

$$\mathrm{Im}\left(\check{\mathcal{D}}'^{0,j-1}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \check{\mathcal{D}}'^{0,j}_\Omega|_{\overline{\Omega}}\right) = \mathrm{Ker}\left(\check{\mathcal{D}}'^{0,j}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \check{\mathcal{D}}'^{0,j+1}_\Omega|_{\overline{\Omega}}\right).$$

Ce qui donne l'exactitude de la suite.

L'isomorphisme

$$H^q(\Omega, \check{\mathcal{O}}_\Omega) \cong \frac{\mathrm{Ker}\left(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q+1}_\Omega|_{\overline{\Omega}})\right)}{\mathrm{Im}\left(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q-1}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,q}_\Omega|_{\overline{\Omega}})\right)};$$

résulte alors de la théorie classique de la cohomologie des faisceaux. ∎

On peut déduire de cette proposition le corollaire suivant :

4.2. Corollaire. — *Soit Ω un domaine complètement strictement pseudoconvexe à bord lisse d'une variété analytique complexe X, alors pour tout $r \geq 1$*

$$H^r((\Omega, \check{\mathcal{O}}_\Omega) = 0\,.$$

Preuve. — D'après le théorème 3.1, on peut résoudre le $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables sur Ω. Donc

$$\frac{\operatorname{Ker}\left(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,r}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,r+1}_\Omega|_{\overline{\Omega}})\right)}{\operatorname{Im}\left(\Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,r-1}_\Omega|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(\Omega, \check{\mathcal{D}}'^{0,r}_\Omega|_{\overline{\Omega}})\right)} = 0$$

et $H^r(\Omega, \check{\mathcal{O}}_\Omega) = 0$ grâce à la proposition 4.1. ■

B. Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse d'une variété analytique complexe X.

Soit $\mathfrak{J}_2$ le faisceau défini sur $\overline{\Omega}$ de la manière suivante : pour $V \subset \overline{\Omega}$ un ouvert, $f \in \Gamma(V, \mathfrak{J}_2)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) f est une 2-forme différentielle sur V, d-fermée.

ii) f admet une valeur au bord $\gamma(f)$ sur $V' = V \cap b\Omega$, pour tout $V \subset \overline{\Omega}$ tel que $V \cap b\Omega \neq \emptyset$.

Soient $\mathfrak{J}_0$ et $\mathfrak{J}_1$ les faisceaux sur $\overline{\Omega}$ définis comme suit : pour tout ouvert $V \subset \overline{\Omega}$ et $i = 0, 1$, $h \in \Gamma(V, \mathfrak{J}_i)$, si h est une i-forme différentielle sur V telle que $\gamma(h)$ et $\gamma(dh)$ existent sur $V' = V \cap b\Omega$ pour $V \cap b\Omega \neq \emptyset$.

Du lemme de Poincaré pour les formes différentielles d-fermée avec valeur au bord au sens des courants (voir lemme 2 de [B]), la suite

$$0 \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathfrak{J}_0 \xrightarrow{d} \mathfrak{J}_1 \xrightarrow{d} \mathfrak{J}_2 \longrightarrow 0$$

est exacte.

Notons $H^2(\Omega, \mathbb{C})$ le deuxième groupe de cohomologie De Rham à valeur dans $\mathbb{C}$, on a en conséquence

$$H^2(\overline{\Omega}, \mathbb{C}) = H^2(\Omega, \mathbb{C}) = \frac{\Gamma(\overline{\Omega}, \mathfrak{J}_2)}{d\Gamma(\overline{\Omega}, \mathfrak{J}_1)}\,.$$

On note $\overline{\mathcal{N}}^{p,q}(b\Omega) = \left\{\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega)/\alpha = \varphi \wedge \overline{\partial}\rho \text{ sur } b\Omega\right\}$, $q \geq 1$ et $\overline{\mathcal{T}}^{p,q}(b\Omega)$ son orthogonal par rapport à une métrique hermitienne (,) sur la variété X (il en existe toujours dès que X est paracompacte). On a alors la décomposition suivante :

$$\mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) = \overline{\mathcal{N}}^{p,q}(b\Omega) \oplus \overline{\mathcal{T}}^{p,q}(b\Omega).$$

On désigne par $\bar{\tau}$ la projection naturelle $\bar{\tau} : \mathcal{E}^{p,q}(b\Omega) \to \overline{\mathcal{T}}^{p,q}(b\Omega)$.

D'après la proposition (2.2) de [BA], si $b\Omega$ n'est pas Levi-plat il existe des opérateurs $R : \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega) \to \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega)$ et $A : \mathcal{E}^{1,1}(b\Omega) \to \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega)$ tels que $N(h) + \overline{N}(h) = R(h) + A(\overline{\partial}\partial h)$ où $N(h) = (\partial h, \partial\rho)$ et $\overline{N}(h) = (\overline{\partial} h, \overline{\partial}\rho)$. On définit un opérateur $\omega : \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega) \to \mathcal{E}^{1,0}(b\Omega)$ par $\omega(f) = \partial_b f + \big[N(f) - \overline{N}(f)\big]\partial\rho + R(f)\partial\rho$ et $B : \mathcal{E}^{0,0}(b\Omega) \to \mathcal{E}^{1,1}(b\Omega)$ par $B(f) = \overline{\tau}(f) - \overline{\partial}_b\big(A(f)\partial\rho\big)$.

Nous avons comme deuxième application la proposition suivante :

4.3. Proposition. — *Soit $\Omega \subset\subset X$, un domaine complètement strictement pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ lisse d'une variété analytique complexe de dimension n tel que $H^2(\Omega, \mathbb{C}) = 0$. Si f est une $(1,1)$-forme différentielle d-fermée sur Ω avec une valeur au bord au sens des courants, on a pour tout $g \in D'(b\Omega)$ qui vérifie $\overline{\partial}_b\omega(g) = B(f)$, une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ avec une valeur au bord au sens des courants $\gamma(u)$; qui vérifie*

$$\begin{cases} \partial\overline{\partial}u = f & \text{sur } \Omega \\ \gamma(u) = g\,. \end{cases}$$

Preuve. — Comme $H^2(\Omega, \mathbb{C}) = 0$; si $f \in \mathcal{E}^{1,1}(\Omega) \cap \operatorname{Ker} d$, il existe h une 1-forme différentielle sur Ω avec valeurs au bord au sens des courants telle que

$$dh = f\ .$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que h et f sont des formes différentielles réelles. Donc, $h = V + \overline{V}$ où V est une $(1,0)$-forme différentielle et $\overline{V}$ son conjugué et

$$dh = dV + d\overline{V} = \partial V + \overline{\partial} V + \overline{\partial}\overline{V} + \partial\overline{V} = f\ .$$

Puisque ∂V est une $(2,0)$-forme différentielle et $\overline{\partial}\overline{V}$ une $(0,2)$-forme différentielle on a : $\overline{\partial}\overline{V} = \partial V = 0$ et par conséquent

$$\overline{\partial} V + \partial\overline{V} = f\ .$$

De plus $\overline{V}$ est une $(0,1)$-forme différentielle $\overline{\partial}$-fermée avec une valeur au bord au sens des courants sur $b\Omega$. D'après le Corollaire 3.2, il existe donc une solution $\overline{w}$ avec valeur au bord au sens des courants de l'équation $\overline{\partial} U = \overline{V}$.

On a donc $\overline{\partial}\overline{w} = \overline{V}$ d'où $\partial w = V$, ce qui implique

$$\partial\overline{\partial}(\overline{w} - w) = \overline{\partial}\partial w + \partial\overline{\partial}\overline{w} = f\ .$$

Ainsi $\overline{w} - w$ est solution avec valeur au bord au sens des courants de $\partial\overline{\partial} u = f$.

On a $\overline{\partial}_b\omega\big(\gamma(\overline{w} - w) - g\big) = 0$. Il existe (cf. proposition 3.6 de [BA-TO]) une fonction pluriharmonique ℓ (c'est-à-dire telle que $\partial\overline{\partial}\ell = 0$) qui a $\gamma(\overline{w} - w) - g$ pour valeur au bord au sens des courants.

Posons $u' = \overline{w} - w - \ell$, alors u' vérifie $\begin{cases} \partial\overline{\partial} u' = f \\ \gamma(u') = g \end{cases}$. ∎

Bibliographie

[B] BARLETTA E. — *Un problema di Cauchy per operatore $\overline{\partial}\partial$*, Boll. Un. Mat. Ital. VI **Ser. B5** (1986), 329–344.

[BA] DE BARTOLOMEIS P. — *"Hardy-Like" estimates for the $\overline{\partial}$ operator and scripture theorems for functions in $\mathcal{H}^p$ in strictly pseudo-convex domains*, B.U.M.I. (3) **16-B** (1979), 430–450.

[BA-TO] DE BARTOLOMEIS P. and TOMASSINI G. — *Traces of pluriharmonic functions*, Lectures notes **798** (1979), 10–17.

[HA-PO] HARVEY R., POLKING J. — *Fundamental solutions in complex analysis, Part II: the induced Cauchy-Riemann operator*, Duke Math. J. **46** (2) (1979), 301–340.

[HE-LE] HENKIN G.M., LEITERER J. — *Andreotti-Grauert theory by integrals formulas*, in progress in Math., Birkhäuser, 1988.

[KYT] KYTMANOV A.M. — *The Bochner Martinelli integrals and its representations*, Birkhäuser, Verlag, 1995.

[LA1] LAURENT-THIÉBAUT CH. — *Transformation de Bochner-Martinelli dans une variété de Stein*, Lectures notes **1295** (1987), 96–131.

[LA2] LAURENT-THIÉBAUT CH. — *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Inter-Editions et CNRS Editions, 1997.

[LA-LE] LAURENT-THIÉBAUT CH. et LEITERER J. — *The Andreotti-Vesentini separation theorem with C^k estimates and extension of CR forms, several complex variables*, Proceeding of the Mittag-Leffler Institute, 1987–88, Mathematical Notes **38, (**Princeton University (1993), 416–436.

[LO-TO] LOJACIEWICZ S., TOMASSINI G. — *Valeurs au bord des formes holomorphes*, Several complex variables, 1978. Proceedings of international conferences. Cortonna. Italy, 1976–1977, Scuola normale superiore Pisa, 222–246.

[MA] MARTINEAU A. — *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, Œuvres Martineau, 631–652.

[NA-VA] NACINOVICH M., VALLI G. — *Tangential Cauchy-Riemann complexes on distributions*, Ann. di Matematica pura ed applicata (IV) vol. **CXLVI** (1987), 123–160.

[RU] RUDIN W. — *Analyse fonctionnelle*, Ediscience international, 1995.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(25 novembre 1999)