Sur les petites valeurs propres des surfaces de courbure moyenne constante

Philippe CASTILLON

Résumé. On s'intéresse dans cet article aux spectres du laplacien et de l'opérateur de stabilité des surfaces de courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique. Dans un travail précédent, l'auteur déterminait sous certaines hypothèses les spectres essentiels de ces deux opérateurs (cf. [Ca2]). Sous les mêmes hypothèses, on montre dans cet article que ces opérateurs n'ont qu'un nombre fini de valeurs propres sous leurs spectres essentiels.

Mots clés : Courbure moyenne constante, Courbure totale finie, Opérateur de stabilité, Théorie spectrale.

Classification mathématique : 53C42, 58G25.

Introduction

Soit $\mathbf{M}^3(c)$ un espace forme de courbure $c < 0$, et $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante h. On note $\mathcal{A}^0$ la seconde forme fondamentale à trace nulle ; la courbure totale est $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv$. La surface M est point critique d'une fonctionnelle d'aire pour les déformations qui préservent le volume. On associe à ce problème variationnel l'opérateur de stabilité S de M qui peut être vu comme la hessienne de la fonctionnelle d'aire (cf. par exemple [B-dC-E]). Dans cet article, on s'intéresse aux relations entre la géométrie de M et les propriétés spectrales du laplacien et de l'opérateur de stabilité. Dans ce cadre, la plupart des études relient l'indice de Morse de M (i.e. le nombre de valeurs propres négatives de S) à la courbure totale (cf. [FC], [dC-dS], [Be-dC-S1], [Ca1]).

On s'intéresse ici au cas où $h^2 + c < 0$ et où la courbure totale est finie. Dans ce cadre, l'auteur déterminait dans un travail précédent les spectres essentiels du laplacien et de S (cf. [Ca2]) : $\sigma_{\text{ess}}(\Delta) = [\frac{b^2}{4}, +\infty)$ et $\sigma_{\text{ess}}(S) = [\frac{9b^2}{4}, +\infty)$ où $b = \sqrt{-(h^2 + c)}$. En dehors du spectre essentiel, les spectres de Δ et S ne comprennent que des valeurs propres de multiplicités finies isolées dans le spectre ; par analogie avec la géométrie hyperbolique, on les appellera les petites valeurs propres de Δ et S.

Le problème naturel qui se pose est celui de la finitude du nombre de petites valeurs propres de Δ et S. On apporte la réponse suivante à cette question :

Théorème A. *Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante h telle que $h^2+c<0$ et soit $b=\sqrt{-(h^2+c)}$. Si $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv < \infty$, alors*

i. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\Delta) = [\frac{b^2}{4}, \infty)$ *et* $\mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta) < \infty$

ii. $\sigma_{\mathrm{ess}}(S) = [\frac{9b^2}{4}, \infty)$ *et* $\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S) < \infty$

où $\mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta)$ (resp. $\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S)$) est le nombre de valeurs propres de Δ (resp. de S) inférieures à $\frac{b^2}{4}$ (resp. à $\frac{9b^2}{4}$).

L'organisation de l'article est la suivante. La section 1 est consacrée aux résultats préliminaires et aux notations.

Dans la section 2, on traite d'abord le cas plus simple des surfaces de type anneaux (i.e. homéomorphes à $S^1 \times \mathbf{R}$) en utilisant des théorèmes de comparaison dans le revêtement universel et les propriétés du groupe fondamental. On obtient dans ce cadre un résultat plus fort que le théorème A (on détermine complètement le spectre du laplacien et on obtient un majorant de $\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S)$, cf. théorème 2.6).

Dans la section 3, on étudie la topologie et la géométrie de M. On montre que M se découpe en une partie compacte et un nombre fini de bouts. Chaque bout étant de type anneau, les résultats de la section 2 permettent d'obtenir des informations géométriques sur M.

Dans la section 4, on démontre le théorème A en utilisant le découpage précédent.

Remerciements. L'auteur tient à remercier le département de mathématiques de l'Université Fédérale du Ceará, Fortaleza, Brésil, où une partie de ce travail a été effectuée. Ses remerciements vont également à Pierre Bérard et Bruno Colbois pour les discussions autour des problèmes de petites valeurs propres sur les surfaces hyperboliques.

1. Préliminaires et notations

Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion isométrique où M est un surface complète et orientable, et où $\mathbf{M}^3(c)$ est un espace forme de courbure $c<0$ et de dimension 3. Certains des résultats connus cités dans cet article concernent le cas $c=-1$, mais s'étendent facilement au cas $c<0$.

On notera $\mathcal{A}$ la seconde forme fondamentale, H le vecteur courbure moyenne et $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A} - HId$ la seconde forme fondamentale à trace nulle. La courbure totale est $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv$.

Soit N un champ de vecteurs unitaire normal à M. La courbure moyenne s'écrit $H = hN$ où h est une fonction sur M. Dans la suite, on supposera que la fonction h est constante et on choisira N tel que $h \geq 0$. De plus, on supposera que $h^2 + c < 0$ et que la courbure totale est finie ; on notera $b = \sqrt{-(h^2+c)}$. Une conséquence importante de la finitude de la courbure totale est le résultat suivant dû à P. Bérard, M. do Carmo et W. Santos (cf. [Be-dC-S2]) :

Théorème 1.1. *Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante telle que $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv < \infty$. Alors $\lim_{x\to\infty} |\mathcal{A}^0|(x) = 0$.*

Une conséquence du théorème 1.1 est que $|\mathcal{A}^0|$ est bornée sur M ; on a donc $\int_M |\mathcal{A}^0|^\alpha dv < \infty$ pour tout $\alpha \geq 2$.

L'équation de Gauss sur M s'écrit

$$\mathcal{K}_M = (h^2 + c) - \frac{|\mathcal{A}^0|^2}{2} = -b^2 - \frac{|\mathcal{A}^0|^2}{2} \tag{1.1}$$

où $\mathcal{K}_M$ est la courbure sectionnelle de M. On a donc $\mathcal{K}_M \leq -b^2$, et cette inégalité a encore lieu dans le revêtement universel de M, ce qui permettra d'utiliser des théorèmes de comparaison "à la Rauch".

Les surfaces de courbure moyenne constante sont points critiques de l'aire pour les déformations qui préservent le volume. L'opérateur de stabilité associé à ce problème variationnel est $S = \Delta - 2(h^2+c) - |\mathcal{A}^0|^2$. Le fait que les déformations préservent le volume amène à considérer l'opérateur S agissant sur $\mathcal{D}(S) = \{f \in C_0^\infty(M) | \int_M f dv = 0\}$ (cf. [B-dC-E]).

Les propriétés spectrales dont il est question dans cet article portent sur des extensions auto-adjointes de Δ et S. L'opérateur $(\Delta, C_0^\infty(M))$ est essentiellement auto-adjoint. D'autre part, l'hypothèse de courbure totale finie implique que $(S, \mathcal{D}(S))$ est essentiellement auto-adjoint, et que son unique extension auto-adjointe est égale à celle de $(S, C_0^\infty(M))$ (la condition d'intégrale nulle est superflue dans le cadre de l'étude spectrale de S, cf. [Ca2] proposition 3.1). Dans la suite, on travaillera donc sur les extensions auto-adjointes de $(S, C_0^\infty(M))$ et $(\Delta, C_0^\infty(M))$, que l'on notera encore S et Δ.

Pour un opérateur auto-adjoint R, on notera $\sigma(R)$ le spectre de R, $\sigma_{\text{ess}}(R)$ son spectre essentiel, et $\mathcal{N}_a(R)$ le nombre de valeurs propres de R qui sont inférieures à a.

Les spectres essentiels de Δ et S

Les spectres essentiels de Δ et de S sont connus (cf. [Ca2] théorème A) :

Théorème 1.2. *Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante telle que $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv < \infty$. Alors $\sigma_{\text{ess}}(\Delta) = [\frac{b^2}{4}, \infty)$ et $\sigma_{\text{ess}}(S) = [\frac{9b^2}{4}, \infty)$.*

La preuve de ce théorème consiste à montrer d'abord un résultat de compactification (cf. [Ca2] théorème 2.1) qui permette d'étudier le comportement à l'infini de M. Les spectres essentiels de Δ et de S se déduisent alors des propriétés asymptotiques de la métrique.

Dans la suite de cet article, on utilisera des résultats de [Ca2] portant sur la géométrie à l'infini de M.

Le théorème de Lieb

Un outil important de la preuve est le théorème de Lieb. Ce théorème permet de majorer le nombre de valeurs propres négatives d'un opérateur de Schrödinger sur $\mathbf{R}^n$ par la norme $L^{\frac{n}{2}}$ du potentiel, lorsque $n \geq 3$ (cf. par exemple [Re-Si] théorème XIII.12). Dans la preuve, la géométrie de $\mathbf{R}^n$ intervient uniquement via l'expression du noyau de la chaleur. Il est donc aisé d'obtenir un résultat analogue pour une variété riemannienne satisfaisant une estimée du noyau de la chaleur.

Théorème 1.3. *Soit V une variété riemannienne, et soit $R^c = \Delta + Q$ un opérateur de Schrödinger sur V avec conditions ^{c} sur ∂V, où Q est une fonction continue sur V. Soit p_V^c le noyau de la chaleur sur V pour le laplacien avec conditions ^{c} sur ∂V. Supposons qu'il existe $a \geq 0$ et $\alpha > 1$ tels que :*

i. $p_V^c(t,x,x) \leq Bt^{-\alpha}\mathrm{e}^{-at}$;

ii. $Q \in L^\alpha(V)$.

Alors

$$\mathcal{N}_a(R^c) \leq C \int_V |Q_-|^\alpha dv < \infty$$

où $Q_-(x) = \max\{0, -Q(x)\}$.

Preuve. Soit $\Delta_a^c = \Delta^c - a$ et soit q_V^c le noyau de la chaleur pour l'opérateur Δ_a^c. On a en particulier $\mathcal{N}_a(R^c) = \mathcal{N}_0(\Delta_a^c + Q)$

La majoration de p_V^c implique que Δ_a^c est un opérateur positif, dont le noyau q_V^c vérifie $q_V^c(t,x,x) \leq Bt^{-\alpha}$. Ces deux propriétés permettent d'imiter la preuve du théorème de Lieb (cf. par exemple [Re-Si] théorème XIII.12) en remplaçant le laplacien par Δ_a^c. On en déduit que

$$\mathcal{N}_a(R^c) = \mathcal{N}_0(\Delta_a^c + Q) \leq C \int_V |Q_-|^\alpha dv < \infty$$

∎

Remarque 1.4. Dans l'énoncé de ce théorème, l'hypothèse $\alpha > 1$ est nécessaire. Par exemple, si $V = \mathbf{R}^2$ (on a alors $p_V(t,x,x) = (4\pi t)^{-1}$) la conclusion est fausse (cf. [Re-Si] théorème XIII.11). Ceci explique l'hypothèse portant sur la dimension dans l'énoncé original du théorème de Lieb.

Dans notre cas, bien qu'on s'intéresse à des variétés de dimension 2, les estimées obtenues sur les noyaux de la chaleur permettront d'utiliser le théorème 1.3 (cf. propositions 2.4 et 3.2).

2. Le cas des surfaces de type anneau

Avant de traiter le cas des surfaces de courbure moyenne constante, on va montrer deux résultats dans un cadre plus général.

Soit V une surface riemannienne ; on supposera dans cette section que V satisfait aux hypothèses (H_b) suivantes :

Hypothèses (H_b)

– *V est homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}$ (on dira que V est de type anneau) ;*

– *la courbure de V vérifie $\mathcal{K}_V \leq -b^2$ avec $b > 0$;*

– *chacun des deux bouts de V est de volume infini.*

Soit Γ le groupe fondamental de V, et soit $\pi : \widetilde{V} \to V$ son revêtement universel. La variété $\widetilde{V}$ munie du rappel de la métrique de V par π est une variété de Cartan-Hadamard dont la courbure vérifie $\mathcal{K}_{\widetilde{V}} \leq -b^2$. Par un théorème de comparaison "à la Rauch" on obtient l'inégalité suivante :

Lemme 2.1. *Pour tout $x \in \widetilde{V}$, notons ρ_x la fonction distance sur $\widetilde{V}$ centrée en x : $\rho_x(y) = d_{\widetilde{V}}(x, y)$. On a*

$$\mathrm{div}(\nabla \rho_x) \geq b \coth(b\rho_x) \tag{2.1}$$

Preuve. Ce résultat est classique, cf. par exemple [Ka]. ■

D'autre part, on déduit des hypothèses (H_b) qu'il existe sur V une plus petite géodésique périodique g ; on note λ la longueur de g. Soit $\tilde{g}$ un relevé de la géodésique g dans $\widetilde{V}$. Le groupe Γ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, il agit isométriquement sur $\widetilde{V}$ et il est engendré par une isométrie τ de $\widetilde{V}$ qui est de type hyperbolique et qui fixe $\tilde{g}$ globalement.

Lemme 2.2. *Pour tout $x \in \widetilde{V}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, on a*

$$d_{\widetilde{V}}(\tau^n x, x) \geq |n|\lambda$$

Preuve. Soit $x \in \widetilde{V}$, soit p_x sa projection orthogonale sur $\tilde{g}$, et soit k la géodésique de $\widetilde{V}$ orthogonale à $\tilde{g}$ passant par x.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la géodésique $\tau^n(k)$ intersecte orthogonalement $\tilde{g}$ en $\tau^n p_x$. Le minimum de la distance entre k et $\tau^n(k)$ est donc $d_{\widetilde{V}}(\tau^n p_x, p_x)$, et on a

$$d_{\widetilde{V}}(\tau^n x, x) \geq d_{\widetilde{V}}(\tau^n p_x, p_x) = |n|\lambda$$

■

Inégalité isopérimétrique et noyau de la chaleur

Les hypothèses (H_b) permettent d'obtenir l'inégalité isopérimétrique suivante sur V :

Proposition 2.3. *Pour tout domaine relativement compact $\Omega \subset V$ on a*

$$b\mathrm{Vol}(\Omega) \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega).$$

Preuve. Soit k une géodésique de V orthogonale à g, soit $\tilde{k}$ un relevé de k dans $\widetilde{V}$, et soit D le domaine de Dirichlet de l'action de Γ délimité par $\tilde{k}$ et $\tau(\tilde{k})$.

Soit Ω un domaine relativement compact de V et soit $\widetilde{\Omega}$ son relevé dans D. Le bord de $\widetilde{\Omega}$ se décompose en

$$\partial\widetilde{\Omega} = \widetilde{\partial\Omega} \cup B_\Omega \cup \tau(B_\Omega)$$

où $\widetilde{\partial\Omega}$ est le relevé de $\partial\Omega$ dans D et $B_\Omega = \tilde{k} \cap \widetilde{\Omega}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit

$$\widetilde{\Omega}_n = \cup_{j=0}^{n} \tau^j(\widetilde{\Omega}).$$

On a

$$\partial\widetilde{\Omega}_n = \cup_{j=0}^{n} \tau^j(\widetilde{\partial\Omega}) \cup B_\Omega \cup \tau^{n+1}(B_\Omega)$$

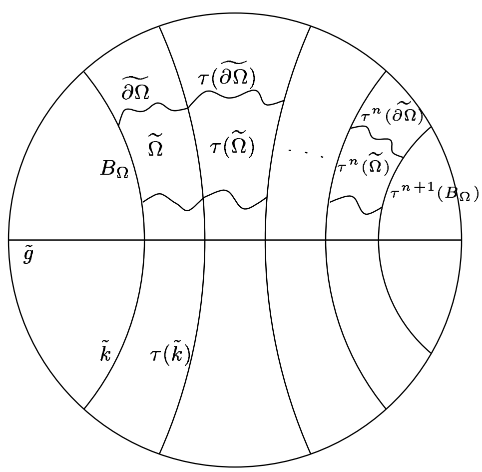

Figure 1.1

En intégrant l'inégalité (2.1) sur un domaine $E \subset \widetilde{V}$ et en utilisant la formule de Stokes on obtient

$$b\mathrm{Vol}(E) \leq \mathrm{vol}(\partial E)$$

pour tout domaine E relativement compact dans $\widetilde{V}$. On a donc

$$b\mathrm{Vol}(\widetilde{\Omega}_n) \leq \mathrm{vol}(\partial\widetilde{\Omega}_n)$$

d'où

$$(n+1)b\mathrm{Vol}(\Omega) \leq (n+1)\mathrm{vol}(\partial\Omega) + 2\mathrm{vol}(B_\Omega)$$

Le résultat s'obtient en divisant par $n+1$ et en faisant tendre n vers l'infini.
■

Notons p_V et $p_{\widetilde{V}}$ les noyaux minimaux de l'équation de la chaleur pour le laplacien sur V et $\widetilde{V}$. On a sur p_V l'estimée suivante :

Proposition 2.4. *Pour tout $x \in V$ et tout $t > 0$, on a*

$$p_V(t,x,x) \leq At^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}}$$

où A est une constante indépendante de x.

Preuve. Soit q_b le noyau de la chaleur sur $\mathbf{H}^2(-b^2)$, le plan hyperbolique de courbure $-b^2$. Pour des raisons de symétrie, on peut écrire

$$q_b(t,x,y) = G_b(t, \cosh(br_x(y)))$$

où $G_b(t,s)$ est une fonction sur $\mathbf{R}_+^2$, et r_x est la fonction distance sur $\mathbf{H}^2(-b^2)$ centrée en x. Comme q_b est solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{H}^2(-b^2)$, on a

$$\frac{\partial G_b}{\partial t} = 2b^2 s\frac{\partial G_b}{\partial s} + b^2(s^2-1)\frac{\partial^2 G_b}{\partial s^2}. \tag{2.2}$$

De plus, on a $\frac{\partial G_b}{\partial s} \leq 0$ et $\frac{\partial^2 G_b}{\partial s^2} \geq 0$ (cela se déduit par exemple de l'expression de q_b, cf. [Da]).

Soit I_b la fonction sur $\mathbf{R}_+ \times \widetilde{V} \times \widetilde{V}$ définie par

$$I_b(t,x,y) = G_b(t, \cosh(b\rho_x(y))).$$

où ρ_x est la fonction distance sur $\widetilde{V}$ centrée en x. On a

$$\Delta_y I_b + \frac{\partial I_b}{\partial t} = -\mathrm{div}(\nabla\cosh(b\rho_x))\frac{\partial G_b}{\partial s} - b^2(\cosh^2(b\rho_x)-1)\frac{\partial^2 G_b}{\partial s^2} + \frac{\partial G_b}{\partial t}.$$

De l'inégalité (2.1) et des propriétés de la fonction G_b on déduit que $\Delta_y I_b + \frac{\partial I_b}{\partial t} \geq 0$. Par un résultat classique (cf. par exemple [C-L-Y], proposition 1) on a alors $p_{\widetilde{V}} \leq I_b$, et par les majorations connues du noyau de la chaleur dans $\mathbf{H}^2(-b^2)$ (cf. [Da-Ma], théorème 3.1), on obtient pour $p_{\widetilde{V}}$ la majoration suivante :

$$p_{\widetilde{V}}(t,\tilde{x},\tilde{y}) \leq Ct^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}}(1 + b\, d_{\widetilde{V}}(\tilde{x},\tilde{y}))\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}d_{\widetilde{V}}(\tilde{x},\tilde{y})} \tag{2.3}$$

D'autre part, le noyau p_V se déduit de $p_{\widetilde{V}}$ (cf. [Bo] proposition 2.6) :

$$p_V(t,x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} p_{\widetilde{V}}(t,\gamma\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} p_{\widetilde{V}}(t,\tau^n\tilde{x},\tilde{y}) \tag{2.4}$$

où $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont des relevés de x et y dans $\widetilde{V}$. La majoration (2.3) donne alors

$$p_V(t,x,y) \leq Ct^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} (1 + b\, d_{\widetilde{V}}(\tau^n\tilde{x},\tilde{y}))\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}d_{\widetilde{V}}(\tau^n\tilde{x},\tilde{y})} \tag{2.5}$$

Notons $f(u) = (1+bu)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}u}$; soit $A_0 = \sup\{f(u)|u \in \mathbf{R}_+\}$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que f soit décroissante sur $[n_0\lambda, \infty[$. Par le lemme 2.2 on obtient

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} (1 + b\, d_{\widetilde{V}}(\tau^n\tilde{x},\tilde{x}))\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}d_{\widetilde{V}}(\tau^n\tilde{x},\tilde{x})} \leq (2n_0+1)A_0 + \sum_{|n|>n_0} (1+b|n|\lambda)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}|n|\lambda}$$

d'où

$$p_V(t,x,x) \leq At^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}}$$

où la constante A est indépendante de x. ■

Remarque 2.5. La constante A donnée par la proposition 2.4 pour la majoration de $p_V(t,x,x)$ n'est pas universelle ; elle dépend de la géométrie de M à travers λ. En particulier, A tend vers l'infini lorsque λ tend vers 0.

Spectres de S et du laplacien

Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante h telle que $h^2 + c < 0$ et $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv < \infty$. On suppose dans cette section que M est de type anneau et on montre un résultat annalogue aux théorèmes 4.1 et B de [Ca2].

L'équation de Gauss (1.1) implique en particulier que M est de courbure négative majorée par $-b^2$. De plus, chacun de deux bouts de M est de volume infini (c'est par exemple une conséquence de [Ca2] proposition 2.5).

La surface M satisfait donc aux hypothèses (H_b), et on peut utiliser les résultats précédents. De la propositions 2.3 et de l'inégalité de Cheeger on déduit que $\sigma(\Delta) \subset [\frac{b^2}{4}, \infty)$, et la proposition 2.4 permet d'appliquer le théorème 1.3 à l'opérateur $T = \Delta - |\mathcal{A}^0|^2$. En tenant compte du théorème 1.2, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.6. *Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante telle que $h^2 + c < 0$ avec M de type anneau ; on note $b = \sqrt{-(h^2+c)}$. Si $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv < \infty$ alors*

i. $\sigma(\Delta) = [\frac{b^2}{4}, \infty)$;

ii. $\sigma_{\mathrm{ess}}(S) = [\frac{9b^2}{4}, \infty)$ *et il existe une constante c_M telle que*

$$\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S) \leq c_M \int_M |\mathcal{A}^0|^3 dv < \infty.$$

Remarque 2.7. La constante c_M dépend de la géométrie de M à travers l'estimée du noyau de la chaleur obtenue à la proposition 2.4. Compte tenu de la remarque 2.5, c_M dépend de la longueur λ de la plus petite géodésique périodique de M.

Le théorème 2.6 s'applique en particulier aux surfaces de révolution de courbure moyenne constante $h < 1$ dans $\mathbf{H}^3$ (les surfaces de Delaunay). Pour h fixé, on a une famille à un paramètre de telle surfaces. Dans cette famille, la valeur de λ peut être rendue arbitrairement petite, et la valeur de la constante c_M peut donc être rendue arbitrairement grande.

3. Géométrie des bouts

Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante h telle que $h^2 + c < 0$ et $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv < \infty$. Dans cette section, on étudie la topologie de M et on utilise les résultats de la section 2 pour étudier la géométrie dans chaque bout de M.

Type topologique de M

La finitude de la courbure totale a des conséquences topologiques sur M : il existe un compact $K \subset M$ et un difféomorphisme

$$\Psi \left\{ \begin{array}{rcl} \partial K \times]0, \infty[& \to & M \setminus K \\ (y,t) & \mapsto & \Psi(y,t) \end{array} \right.$$

Cf. par exemple [Ca2] théorème 2.1 pour la construction de K et Ψ. On en déduit en particulier que M est homéomorphe à une surface compacte privée d'un nombre fini de disques.

De plus, dans les coordonnées (y,t), la métrique de M s'écrit

$$g_M = \mu^2 dy^2 + \nu^2 dt^2$$

où μ et ν sont des fonctions sur M qui vérifient $\lim_\infty \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 1$ et $\lim_\infty \nu^2 = -(h^2+c)$ (cf. [Ca2] proposition 2.5). On en déduit en particulier que chaque bout de M est de volume infini.

D'autre part, l'équation de Gauss (1.1) implique que M est de courbure négative. Il existe donc dans chaque bout une plus petite géodésique périodique, et en découpant M le long de ces géodésiques on a

$$M = D \cup E_1 \cup ... \cup E_n \tag{3.1}$$

où D est compact, chaque E_i est homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}_+$, et les bords de D et des E_i sont des géodésiques fermées de M.

Inégalité isopérimétrique et noyau de la chaleur dans les bouts

Soit E un bout de M et soit $\gamma = \partial E$. Considérons sur E les coordonnées de Fermi relatives à la géodésique γ : la première coordonnée de $x \in E$ est l'abscisse $s(x)$ de la projection de x sur γ, et la seconde coordonnée de x est la distance $r(x)$ entre x et γ.

On peut alors écrire $E = (S^1 \times \mathbf{R}_+, g_E)$, où g_E est la métrique de M restreinte à E exprimée dans les coordonnées (s, r). Soit $V = S^1 \times \mathbf{R}$, et soit $\sigma : V \to V$ définie par $\sigma(s, r) = (s, -r)$. On note g_V la métrique définie par

$$g_V = \begin{cases} g_E & \text{sur } S^1 \times \mathbf{R}_+ \\ \sigma^* g_E & \text{sur } S^1 \times \mathbf{R}_- \end{cases}$$

La métrique g_V ainsi définie est de classe C^2, et la surface V munie de cette métrique satisfait aux hypothèses (H_b).

En appliquant les résultats de la section précédente à la surface V, on obtient les deux propositions suivantes :

Proposition 3.1. *Soit E un bout de M. Pour tout domaine relativement compact $\Omega \subset E$ on a*

$$b\mathrm{Vol}(\Omega) \leq \mathrm{vol}(\partial\Omega)$$

Preuve. La preuve est une conséquence immédiate de la proposition 2.3 car $\Omega \subset V$. ■

Proposition 3.2. *Soit E un bout de M et Soit p_E^N le noyau de la chaleur sur E avec condition de Neumann sur ∂E. On a*

$$p_E^N(t, x, x) \leq B t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}}$$

où B est une constante indépendante de x.

Preuve. Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}_+ \times E \times E$ par

$$F(t, x, y) = p_V(t, x, y) + p_V(t, \sigma x, y).$$

Comme p_V satisfait à l'équation de la chaleur dans V, on a aussi

$$\Delta_y F + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{3.2}$$

sur E. Soit f une fonction définie sur E, en utilisant l'invariance de p_V par σ on obtient

$$\begin{aligned} \int_E F(t, x, y) f(y) dy &= \int_E p_V(t, x, y) f(y) dy + \int_E p_V(t, \sigma x, y) f(y) dy \\ &= \int_E p_V(t, x, y) f(y) dy + \int_{\sigma(E)} p_V(t, \sigma x, \sigma y) f(\sigma y) dy \\ &= \int_V p_V(t, x, y) \bar{f}(y) dy \end{aligned}$$

où $\bar{f}(y) = f(y)$ si $y \in E$ et $\bar{f}(y) = f(\sigma y)$ si $y \in \sigma(E)$. Soit $x \in E$, lorsque t tend vers 0, on obtient

$$\lim_{t \to 0} \int_E F(t, x, y) f(y) dy = \bar{f}(x) = f(x). \tag{3.3}$$

D'autre part, en utilisant l'invariance de p_V par σ, on obtient

$$\begin{aligned}\nabla_y F(t,x,y) &= \nabla_y p_V(t,x,y) + \nabla_y p_V(t,\sigma x,y)\\ &= \nabla_y p_V(t,x,y) + \sigma_*\big(\nabla_y p_V(t,x,\sigma y)\big)\end{aligned}$$

En tout point $y \in \partial E$, σ_* est la réflexion par rapport à l'espace tangent à ∂E ; on en déduit que la dérivée normale de F est nulle le long de ∂E. De cette condition au bord, et des équations (3.2) et (3.3) on déduit

$$p_E^N(t,x,y) = F(t,x,y) = p_V(t,x,y) + p_V(t,\sigma x,y).$$

Par la proposition 2.4, on a

$$p_V(t,x,x) \leq At^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}}$$

Soient $\tilde{x}$ et $\widetilde{\sigma x}$ des relevés de x et σx appartenant à un même domaine fondamental de $\widetilde{V}$. Les points $\tilde{x}$ et $\widetilde{\sigma x}$ appartiennent à une même géodésique orthogonale à $\tilde{g}$. Par une preuve similaire à celle du lemme 2.2, on a

$$d_{\widetilde{V}}(\tau^n \tilde{x}, \widetilde{\sigma x}) \geq |n|\lambda$$

et la majoration (2.5) donne

$$p_V(t,x,\sigma x) \leq At^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}}.$$

Finalement, on obtient

$$p_E^N(t,x,x) \leq 2At^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2 t}{4}}.$$

■

4. Preuve du théorème A

Soit $i : M^2 \hookrightarrow \mathbf{M}^3(c)$ une immersion de courbure moyenne constante h telle que $h^2 + c < 0$ et $\int_M |\mathcal{A}^0|^2 dv < \infty$. La preuve du théorème A repose sur la méthode d'encadrement Dirichlet-Neumann :

Proposition 4.1. *Soit V une variété riemannienne, et soit $R = \Delta + Q$ un opérateur de Schrödinger sur V, où Q est continue. Supposons qu'on ait un découpage de V :*

$$V = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup ... \cup \overline{\Omega}_n$$

où les Ω_i sont des ouverts disjoints. Notons $R^D_{\Omega_i}$ (resp. $R^N_{\Omega_i}$) l'opérateur R agissant sur Ω_i avec condition de Dirichlet (resp. de Neumann) sur $\partial\Omega_i$. On a

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{N}_a(R^D_{\Omega_i}) \leq \mathcal{N}_a(R) \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{N}_a(R^N_{\Omega_i})$$

Preuve. Ce résultat est classique, cf. par exemple [Re-Si] section XIII.15, où [Be] section III.C. ∎

Preuve du théorème A

Les spectres essentiels de Δ et S sont connus (cf. théorème 1.2). Pour le point i, on utilise le découpage (3.1). Pour un domaine $\Omega \subset M$, notons Δ_Ω^N le laplacien sur Ω avec condition de Neumann au bord. La méthode d'encadrement Dirichlet-Neumann donne

$$\mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta) \leq \mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta_D^N) + \mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta_{E_1}^N) + \ldots + \mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta_{E_n}^N)$$

Comme D est compact, $\mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta_D^N)$ est fini ; pour chaque E_i, $i = 1 \ldots n$, la proposition 3.1 et l'inégalite de Cheeger montrent que $\mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(\Delta_{E_i}^N) = 0$. Le point i est donc prouvé.

Pour le point ii, on a par la méthode d'encadrement Dirichlet-Neumann

$$\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S) \leq \mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S_D^N) + \mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S_{E_1}^N) + \ldots + \mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S_{E_n}^N)$$

Comme D est compact, $\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S_D^N)$ est fini. Sur chaque E_i, $i = 1 \ldots n$, la proposition 3.2 permet d'appliquer le théorème 1.3 à l'opérateur $T = \Delta - |\mathcal{A}^0|^2$. On en déduit que

$$\mathcal{N}_{\frac{9b^2}{4}}(S_{E_i}^N) = \mathcal{N}_{\frac{b^2}{4}}(T_{E_i}^N) \leq C \int_{E_i} |\mathcal{A}^0|^3 dv < \infty$$

Ceci termine la preuve du théorème A.

Références

[B-dC-E] Barbosa, J.L.; do Carmo, M.; Eschenburg, J.– Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.* **197** (1988), 123-138.

[Be] Bérard, P.– *Spectral geometry : direct and inverse problems*, Lecture Note in Math. **1207**, Springer Verlag 1986

[Be-dC-S1] Bérard, P.; do Carmo, M.; Santos, W.– The index of constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space. *Math. Z.* **222** (1997), 313-326.

[Be-dC-S2] Bérard, P.; do Carmo, M.; Santos, W.– Complete hypersurfaces with constant mean curvature and finite total curvature. *Ann. Global Analysis and Geom.* **16** (1998), 273-290.

[Bo] Bordoni, M.– Comparing heat operators through local isometries or fibrations, *Prépublication de l'E.N.S. Lyon n^o 190*, 1996.

[dC-dS] do Carmo, M.; da Silveira, A.M.– Index and total curvature of surfaces with constant mean curvature. *Proc. Amer.Math. Soc.* **110** (1990), 1009-1015.

[Ca1] Castillon, P.– Sur l'opérateur de stabilité des sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyperbolique, *manuscripta math.*, **94** (1997) 385-400.

[Ca2] Castillon, P.– Spectral properties of constant mean curvature submanifolds in hyperbolic space *Ann. Global Analysis and Geom.*, à paraître.

[C-L-Y] CHENG, S.S.; LI, P.; YAU, S.T.– Heat equations on minimal submanifolds and their applications. *Am. J. Math.* **106** (1984), 1033-1065.

[Da] DAVIES, E.B.– *Heat kernel and spectral theory*, Cambridge University Press 1989.

[Da-Ma] DAVIES, E.B.; MANDOUVALOS, N.– Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups, *Proc. London Math. Soc.* **57** (1988), 182-208.

[FC] FISCHER-COLBRIE, D.– On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifold. *Invent. Math.* **82** (1985), 121-132.

[Ka] KARCHER, H.– Riemannian comparison constructions. In: *Global Differential Geometry* vol. 27, MAA studies in Math. 2nd ed. 1989, pp.170-222

[Re-Si] REED, M.; SIMON, B.– *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press 1979 (vol. I to IV)

Philippe CASTILLON
Institut Fourier
UFR de Mathématiques, UMR 5582
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères Cedex
France

philippe.castillon@fourier.ujf-grenoble.fr