# DÉNOMBREMENT DE CARTES UNIFACIALES SUR LES SURFACES ORIENTABLES

Roland BACHER, Alexis MARIN et Alina VDOVINA

**Résumé**

On définit l'*avance* d'un sommet d'une carte unifaciale. Ces invariants, dont la demi-somme est le genre de la carte et qui déterminent l'introduction ou la suppression d'un sommet de valence trois, permettent de décrire les groupes agissant par automorphismes sur une forme de Wicks de genre $g$ et de donner les masses des classes d'isomorphismes correspondantes.

**Abstract**

Invariants of vertices of unifacial maps are defined, whose half-sum is the genus of the map. Determining the introduction or suppression of a three-valent vertex, they permit to give closed formulae for the masses of isomorphism classes of Wicks forms of genus $g$ with given symmetries.

## 1.

Une *carte unifaciale* orientée de genre $g$ est un couple $\mathscr{C} = (F, Y)$ où $F$ est une surface orientée fermée de genre $g$ et $Y$ un graphe dont on note $s$ et $a$ les nombres d'éléments des ensembles $S$ et $A$ de sommets et d'arêtes et qui découpe $F$ en une cellule orientée $F \setminus Y$. La caractéristique $\chi$ et le genre $g$ de la surface $F$, ou la carte $\mathscr{C}$, sont données par la formule d'Euler :

$$\chi = s - a + 1 = 2 - 2g \tag{1}$$

Une carte est dite *générique* si ses sommets sont de valence 1 ou 3, ses $n$ sommets libres (*i.e.* de valence 1) sont dits $(n_1,\ d_1;\ \cdots; n_k,\ , d_k)$*–coloriés* s'ils sont munis d'une partition en $p = n_1 + \cdots + n_k$ paquets, numérotés de 1 à $p$, de $d_1, \ldots, d_k$ éléments respectivement ($n = n_1\, d_1 + \cdots + n_k\, d_k$).

Une *forme de Wicks* est une carte unifaciale générique de graphe sans sommet libre.

La relation d'incidence $2a = 3s$ et la formule $(1)$ donnent alors les valeurs:

$$a = 3(2g - 1) \quad \text{et} \quad s = 2(2g - 1)\ . \tag{2}$$

*Classification math.* : 54C10.
*Mots-clés* : carte unifaciale de genre $g$, surface orientable, avance d'un sommet d'une carte unifaciale, revêtements ramifiés.

L'objet de cette note est le dénombrement de classes d'isomorphismes $\mathscr{H}_g$ de formes de Wicks de genre $g$. On trouvera dans au §5 d'autres approches à ce problème.

On définit au §2 pour chaque sommet $y$ de valence $v_y$ l'*avance* $\alpha_y$ de son ordre cyclique par rapport à l'≪ordre des aiguilles d'une montre≫ de la face, un entier naturel avec $0 \leqslant \alpha_y \leqslant (v_y - 2)$, et on y établira une ≪loi de décalage horaire≫ : par exemple, pour $v_y = 3$, un sommet est d'avance 0 ou d'avance 1, fig. 1.

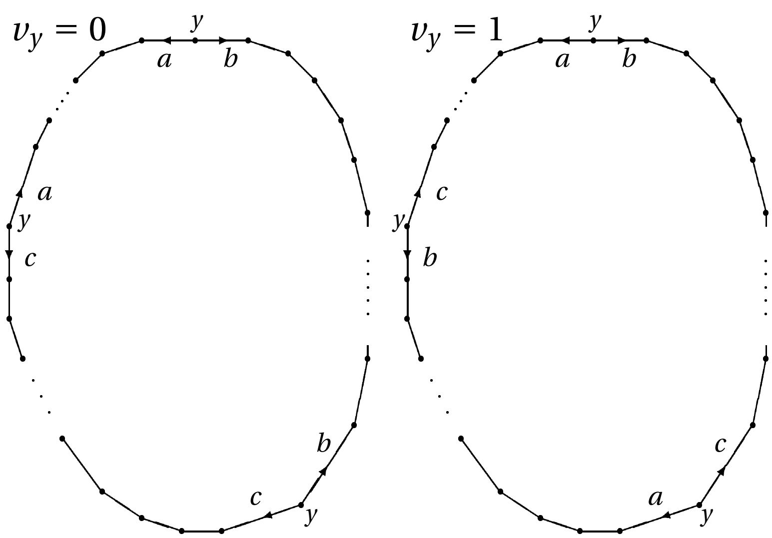


Fig. 1.

LEMME. *Soit* $(F,\ Y)$ *une carte unifaciale orientée, alors la somme des avances de ses sommets est le double de son genre :*

$$\sum_{y \in S} \alpha_y = 2g\,.$$

Dans le cas de valence 3 l'avance détermine complètement la suppression et l'introduction du sommet $y$. En particulier si $\alpha_y = 1$ alors le graphe $Y_y$, ayant trois extrémités libres de plus que $Y$, obtenu en en retirant de $Y$ les trois demi-arêtes issues de $y$, a un voisinage régulier dans $F$ homéomorphe au complémentaire d'un disque dans une surface $F_y$ orientée de genre $g-1$. La carte $\mathscr{C}_y = (F_y,\ Y_y)$ est dite *réduite* en $y$ de $\mathscr{C}$. Réciproquement étant donné un triplet $T = \{a,\ b,\ c\}$ d'extrémités libres du graphe $X$ d'une carte unifaciale $\mathscr{B} = (E,\ X)$ de genre $g-1$ il y a une unique manière d'identifier trois arcs disjoints centrés en $a,\ b$ et $c$ dans le bord d'un voisinage régulier relatif à $T$ de $X$ dans $E$ pour produire un voisinage régulier orienté à bord connexe du graphe $Y = X/T$ obtenu en identifiant les trois extrémités libres $a,\ b,\ c$ de $X$ en un sommet $y$ de valence 3. Dans la carte unifaciale $\mathscr{C} = (F,\ Y)$ de genre $g$ ainsi obtenue on a $\alpha_y = 1$.

Ceci permettra au §3 d'exprimer la *masse*, c'est-à-dire le nombre de classes d'isomorphismes pondéré par l'inverse des ordres de leurs groupes $\mathrm{Aut}\,(\mathscr{C})$ d'automorphismes

$$m^g = \sum_{[\mathscr{C}] \in \mathscr{H}_g} \frac{1}{\mathrm{Aut}\,\mathscr{C}}$$

des formes de Wicks de genre $g$, et plus généralement la masse $m^g\,(n_1,\ d_1;\ \ldots;\ n_k,\ d_k)$ des cartes génériques de genre $g$ à $n = n_1 d_1 + \cdots n_k d_k$ sommets libres $(n_1, d_1; \ldots; n_k, d_k)$-coloriés, en fonction de celle de certaines arbres planaires :

Proposition. *La masse des cartes génériques de genre* $0$ *et dont sommets libres sont* $(n_1, d_1; \cdots; n_k, d_k)$*-coloriés est*

$$m^0 (n_1, d_1; \cdots; n_k, d_k) = \frac{\prod_{i=1}^{n-2} 2 \cdot (2i-1)}{(d_1!)^{n_1} \cdots (d_k!)^{n_k}} = \frac{(2n-4)!}{(d_1!)^{n_1} \cdots (d_k!)^{n_k} \cdot (n-2)!} .$$

Corollaire 1. *La masse* $m^g (n_1, d_1; \cdots; n_k, d_k)$ *des cartes génériques de genre g dont les n sommets libres sont* $(n_1, d_1; \cdots; n_k, d_k)$*-coloriés est :*

$$\frac{1}{2^g g!} m^0 (g, 3; n_1, d_1; \cdots; n_k, d_k) = (\frac{1}{12})^g \frac{(6g + 2n - 4)!}{g! \cdot (d_1!)^{n_1} \cdots (d_k!)^{n_k} \cdot (3g + n - 2)!} ,$$

*en particulier*

$$m^g = \frac{(6g-4)!}{12^g g!(3g-2)!} .$$

Au §4 on remarquera que si $H \subset \mathrm{Aut}\,\mathscr{C}$ est un groupe d'automorphismes d'une carte orientée $\mathscr{C} = (F, Y)$ alors la paire quotient $\mathscr{D} = (F/H, Y/H)$ est une carte orientée. Les points de ramifications, le centre de la cellule et certaines extrémités libres de $Y/H$, et le genre sont déterminés par la formule de Hurewitz :

Remarque.

i) Le groupe d'automorphisme d'une carte orientée est cyclique d'ordre divisant le plus petit commun multiple de 2 et des valences de ses sommets.

ii) Le nombre $r$ de milieux d'arêtes fixées par une involution d'une carte orientée de genre $g$ est au plus égal, et congru modulo 4, à $2g + 1$.
Le nombre $n$ de points de ramification et le genre $f$ de la carte quotient sont :

$$n = r + 1 \quad \text{et} \quad f = \frac{2g + 1 - r}{4} .$$

Soit $\gamma$ un automorphisme d'ordre $h$ d'une forme de Wicks de genre $g$ alors.

iii) Si $h = 3$, les nombres $s$ et $t$ de sommets d'avance 0 et 1 fixés par $\gamma$ sont congrus modulo 3, à $2(g-1)$ et $2g$ respectivement et $s + t$ est au plus $g + 1$.
Le nombre $n$ de points de ramification et le genre $f$ de la carte quotient sont :

$$n = s + t + 1 \quad \text{et} \quad f = \frac{g + 1 - s - t}{3} .$$

iv) Si $h = 6$, alors $\gamma^3$ fixe $3r$ milieux d'arêtes et $\gamma^2$ fixe $2s$ sommets d'avance 0 et $2t$ sommets d'avance 1. On a les congruences $3r \equiv 2g + 1 \bmod 4$, $s \equiv g - 1 \bmod 3$ et $t \equiv g \bmod 3$ et $3r + 4s + 4t$ est au plus $2g + 5$.
Le nombre $n$ de points de ramification et le genre $f$ de la carte quotient sont :

$$n = r + s + t + 1 \quad \text{et} \quad f = \frac{2g + 5 - 3r - 4s - 4t}{12} .$$

COROLLAIRE 2. *La masse des formes de Wicks de genre g possédant un automorphisme d'ordre $h = 2,\ 3,\ 6$ décrits dans la* REMARQUE *est le produit par $h^{2f}$ de celle des carte quotients, de genre $f$, et dont les $n$ sommets libres sont coloriés selon le type de points fixe qu'ils représentent :*

$$\begin{aligned}
m_2^g(r) &= 2^{2f}\cdot m^f(1,\ r) = (\frac{2^2}{12})^f\,\frac{1}{r!}\,\frac{(6f-4+2n)!}{f!\,(3f-2+n)!}\\
m_3^g(s,\ t) &= 3^{2f}\cdot m^f(1,\ s;1,\ t) = (\frac{3^2}{12})^f\,\frac{1}{s!\,t!}\,\frac{(6f-4+2n)!}{f!\,(3f-2+n)!}\\
m_6^g(3r, 2s,\ 2t) &= 6^{2f}\cdot m^f(1,\ r;1,\ s;1,\ t) = (\frac{6^2}{12})^f\,\frac{1}{r!\,s!\,t!}\,\frac{(6f-4+2n)!}{f!\,(3f-2+n)!}.
\end{aligned}$$

*Soit*

$$\begin{aligned}
m_2^g &= \sum_{r\in\mathbf{N},\ (2g+1-r)/4\in\mathbf{N}} m_2^g(r)\ ,\\
m_3^g &= \sum_{s,t\in\mathbf{N},\ (g+1-s-t)/3\in\mathbf{N},\ t\equiv 2g \pmod 3} m_3^g(s,t)\ ,\\
m_6^g &= \sum_{r,s,t\in\mathbf{N},\ (2g+5-3r-4s-4t)/12\in\mathbf{N},\ t\equiv g \pmod 3} m_6^g(3r;2s,2t)\ .
\end{aligned}$$

THÉORÈME. *Le nombre $N(g)$ des formes de Wicks de genre g est*

$$N(g) = m^g + m_2^g + 2m_3^g + 2m_6^g\ .$$

## 2. Avance d'un sommet d'une carte unifaciale.

Soit $\mathscr{C} = (F, Y)$ une carte orientée unifaciale. Sa face $F \setminus Y$ s'identifie à l'intérieur d'un polygone régulier $P$ à un nombre pair $2a$ côtés. La surface $F$ est le quotient par une relation d'équivalence qui identifie les côtés de $P$ deux-à-deux.

Soit $y$ un sommet de $Y$ de valence $v_y$ et $x_y(1),\ \dots,\ x_y(v_y) = x_y(0)$ les sommets de $P$ correspondants aux secteurs autour de $y$ énumérés en tournant dans le sens trigonométrique autour de $y$. Pour $1 \leqslant i \leqslant v_y$, soit $2\,a\,\theta_s(i)$ le nombre de côtés de l'arc du bord de $P$ joignant dans le sens des aiguilles d'une montre le sommet $x_y(i)$ au sommet $x_y(i+1)$ et $\theta_y = \sum_{i=1}^{v_y}\theta_y(i)$. Si $v_y = 1$ alors $\theta_y = \theta_y(1) = 1$, sinon les $\theta_y(i)$ sont strictement compris entre 0 et 1 et $\theta_y$ est un entier positif inférieur à $v_y$ (voir fig.2).

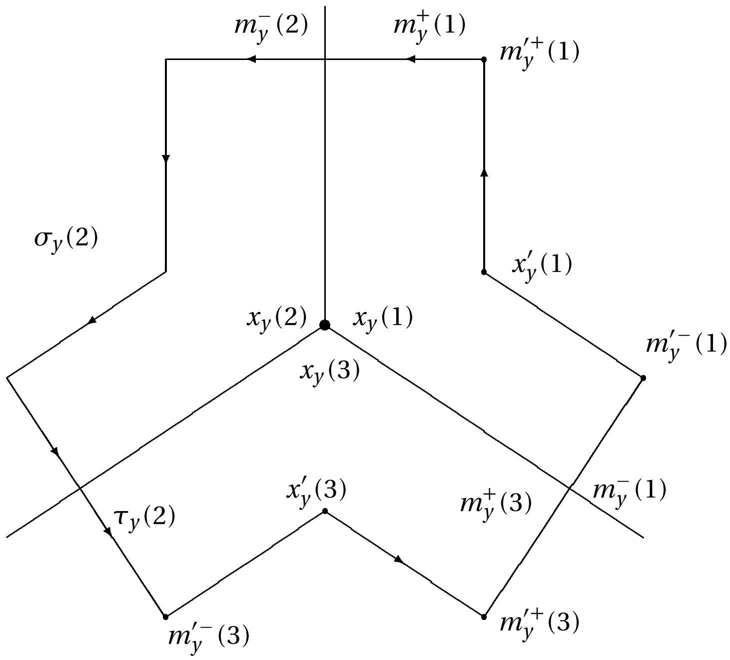


Fig. 2.

L'*avance* du sommet $y$ sur la face est $\alpha_y = \theta_y - 1$. Elle vaut 0 si $y$ est une extrémité libre et est un entier naturel inférieur à $v_y - 1$ sinon.

Soit $h : P \to P' = \frac{1}{2}P$, $x \mapsto x' = \frac{1}{2}x$ l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre le centre du polygone $P$. Pour chaque sommet $y \in S$ considérons la courbe simple fermée $\gamma_y$ entourant ce sommet, union pour $i = 1, \ldots, v_y \sim 0$ des arcs $\sigma_s(i)$ et $\tau_s^+(i)$ où $\sigma_s(i)$ est l'union des deux demi-arêtes $m_y'^-(i)\, x_y'(i)$ et $x_y'(i)\, m_y'^+(i)$ de $P'$ issues du milieu $x_y'(i) = \frac{1}{2}x_y(i)$ du rayon de $P$ passant par $x_y(i)$ et l'arc $\tau_y^+(i)$ est l'union des segments $m_y'^+(i)\, m_y^+(i)$ et $m_y^-(i+1)\, m_y'^-(i+1)$.

L'entier $\theta_y$ est alors l'opposé du degré de l' «application décroissante» $\pi_y : \gamma_y \to \partial P$ qui vaut $h^{-1}$ sur les arcs $\sigma_y(i)$ et, sur $\tau_y^+(i)$, est le plus court chemin joignant dans le sens trigonométrique le milieu $m_y^+(i)$ de l'arête finale du secteur correspondant à $x_y(i)$ à celui $m_y^-(i+1)$ de l'arête innitiale du secteur correspondant à $x_y(i+1)$.

Les images, pour $y \in S$ et $i = 1, \ldots, v_s$ des arcs $\sigma_y(i)$ recouvrent une fois exactement $\partial P$ et si $y_1, y_2$ sont les extrémités d'une arête $\eta$ de $Y$ et $x_{y_1}(i), x_{y_1}(i+1)$ et $x_{y_2}(j),\ x_{y_2}(j+1)$ sont les sommets de $P$ correspondant aux secteurs de $y_1$ et $y_2$ adjacents à cette arête alors les arcs $\tau_{y_1}^+(i)$ et $\tau_{y_2}^+(j)$ sont opposés et leurs images recouvrent une fois exactement $\partial P$. Ainsi

$$\sum_{y \in S} \alpha_y = \sum_{y \in S} (\theta_y - 1) = 1 + a - s = 2 - (1 - a + s) = 2 - (2 - 2g) = 2\,g$$

d'après la formule d'Euler (1), ce qui établit le LEMME.

## 3. Bouquets et masses des cartes génériques.

### Démonstration de la PROPOSITION

Il suffit d'établir la formule dans le cas de $(n,\ 1)$-coloriages, c'est à dire pour les arbres planaires, dits *bouquet à n feuilles*, dont les $n$ extrémités libres sont numérotées, et les sommets restant sont de valence 3. Les nombres $i$ de ces ≪sommets intérieurs≫ et $a$ d'arêtes, d'après les relations d'incidence $2\,a = n + 3\,i$ et d'Euler $n + i - a = 1$ valent $i = n - 2$ et $a = 2\,n - 3$.

Quand on efface l'arête issue de la dernière feuille d'un bouquet à $n$ feuilles on obtient un bouquet à $n-1$ feuilles dont une arête est munie de l'un de ses deux côtés dans le plongement planaire d'où la relation :

$$m^0\,(n,\ 1) = (2\,(n-1) - 3) \cdot 2 \cdot m^0\,(n-1,\ 1) = 2 \cdot (2\,(n-2) - 1) \cdot m^0\,(n-1,\ 1)$$

d'où, par récurrence, la formule de la PROPOSITION puisque $m^0\,(2,\ 1) = 1$.

### Démonstration du COROLLAIRE 1

Il suffit d'établir la formule dans le cas des $(m,\,3;\ n,\ 1)$-coloriages. Chaque choix d'un sommet $y$ de la carte $\mathscr{C}$ parmi ses $2\,g$ sommets d'avance 1 produit, comme expliqué dans l'introduction, une carte réduite $\mathscr{C}_y$ qui est générique de genre $g-1$ et dont les $n+3$ extrémités libres sont $(m+1,\ 3;\ n,\ 1)$-coloriées, $\mathscr{C}$. Cette correspondance conservant les masses d'où la relation de récurrence

$$2 \cdot g \cdot m^g\,(m,\ 3;\ n,\ 1) = m^{g-1}\,(m+1,\ 3;\ n,\ 1)$$

qui, par la PROPOSITION, donne la formule du COROLLAIRE 1 pour $m^g\,(m,\ 3;\ n,\ 1)$.

## 4. Automorphismes et revêtements ramifiés de cartes génériques.

### Démonstration de la REMARQUE

*i)*

Puisque le groupe $H$ agit en préservant l'orientation, l'application quotient $\pi : F \to F/H = E$ est un revêtement ramifié. On note $R \subset E$ l'ensemble des points de ramification, $f$ le genre de $E$ et $\nu_z$ l'indice de ramification des points au dessus de chaque point de ramification $z \in R$.

Comme $H$ préserve la face $F \setminus Y$, il est cyclique et le quotient $(F \setminus Y)/H = F/H \setminus Y/H$ est une cellule. Ainsi la paire quotient $\mathscr{D} = (F/H,\ Y/H)$ est une carte unifaciale dont le centre $z_0$ de la cellule est un point de ramification, dit *principal* avec $\nu_{z_0} = |H|$. Comme $H$ préserve $Y$ les autres points fixes de ses éléments sont des centres d'arêtes et des sommets. Les éléments correspondants de $R$ sont d'indice 2 dans le premier cas et un diviseur de la valence du sommet dans le second.

Dans $E \setminus R$, pour un choix de méridiens autour des points de ramification leur produit est produit de $f$ commutateurs. Ainsi, puisque $H$ est commutatif, le produit des monodromies correspondantes est nul. Le *i)* découle alors de ce que $H$ est cyclique et l'ordre de la monodromie d'un méridien autour de $z \in R$ est $\nu_z$.

*ii)*
Découle de la formule de Hurewitz galoisienne

$$2-2\,g=2\cdot(2-2\,f)-\sum_{z\in R}\frac{|H|}{\nu_z}\,(\nu_z-1) \tag{3}$$

qui dans le cas présent est $2-2\,g=2\cdot(2-2\,f)-(1+r)$.

*iii)* et *iv)* découlent aussi de (3) une fois remarqué que si un élément $\gamma$ de $H$ fixe $s$ sommets d'avance 0 (respectivement $t$ sommets d'avance 1), il est d'ordre 3 et, d'après le LEMME et la relation (2), permute librement les $2\,(g-1)-s$ (respectivement $2\,g-t$) sommets d'avance 0 (respectivement 1) restants.

### Démonstration du COROLLAIRE 2

Une action d'un groupe cyclique $H$ est entièrement déterminée par la monodromie $\rho$ : $\mathrm{H}_1\,(E\setminus R;\mathbb{Z})\to H$ du revêtement associé. Le COROLLAIRE 2 suit alors de ce que le nombre de telles monodromies est $h^{2\,f}$ car la monodromie est prescrite sur le sous-groupe engendré par les méridiens et ce sous-groupe a un supplémentaire libre de rang $2\,f$.

En effet si $u$ est l'entier premier à l'ordre $h$ de l'automorphisme $\gamma$ tel qu'au voisinage du centre de la cellule $\gamma^u$ agit par rotation de $\frac{2\pi}{h}$ alors les monodromies des méridiens autour des images des milieux d'arêtes et sommets d'avance 1 et 0 fixés par une puissance de $\gamma$ sont respectivement $\gamma^{\frac{hu}{2}}$, $\gamma^{\frac{hu}{3}}$ et $\gamma^{\frac{2hu}{3}}$ (le premier cas n'a lieu que si $h=2,6$ est pair et les deux autres que si $h=3,6$ est multiple de 3) et réciproquement le conditions de congruence de la REMARQUE et le fait que le produit des monodromies des méridiens est trivial assure que si la monodromie est donnée par ces valeurs sur les méridiens des points de ramifications non principaux, elle est d'ordre $h$ sur le point de ramification principal $z_0$.

## 5. Commentaires historiques

Le problème de l'énumération et de la classification des cartes unifaciales orientées dont tous les sommets sont de valence 3 était posé par J. Brenner, R. Lyndon [**?**]. Il a été repris en 1994 par L. Mosher [**?**]. Cependant ce problème était essentiellement résolu par des méthodes de série génératrices en 1972 par T.R.S.Walsh et A.B.Lehman puisque l'on peut obtenir la formule de masse $m^g$ à partir de la formule (9), page 207 de [**?**]

Deux démonstrations du LEMME, dans le cas où tous les sommets sont de valence 3 se trouvent dans [**?**], pages 12-15. Le fait que le groupe d'automorphisme d'une forme de Wicks est cyclique d'ordre 1, 2, 3 ou 6 est prouvé à l'aide de coloriages d'hypercartes par G. Brianchi et R. Cori dans [**?**].

## Bibliographie


[1] J.L.Brenner, R.C.Lyndon, *Permutations and cubic graphs*, Pacific Journal of Maths, v.104, 285-315,(1983)

[2] G.Brianchi, R.Cori, *Colorings of hypermaps and a conjecture of Brenner and Lyndon*, Pacific Journal of Maths, v.110, (1984),41-48

[3] L.Mosher, *A User's Guide to the Mapping Class Group: Once Punctured Surfaces*, DIMACS Series, Vol.25, 1994

[4] T.R.S.Walsh, A.B.Lehman, *Counting Rooted Maps by Genus*, J. Combinatorial Theory, Ser.B, v.13, 192–218, 1972

Roland BACHER, Alexis MARIN
Université Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
*bacher@mozart.ujf-grenoble.fr*
*marin@mozart.ujf-grenoble.fr*

Alina VDOVINA
Technological University of Podillia (Ukraine)
*alina@alpha.podol.khmelnitskiy.ua*