Quelques automorphismes et variables de $A[x, y]$

Stéphane VÉNÉREAU

Résumé. On montre comment construire certains automorphismes de $A[x, y]$ (A étant un anneau) non décomposables a priori en applications linéaires et triangulaires. Ceci nous permet de décrire des familles de variables de $A[x, y]$ et dans le cas où $A = \mathbb{C}[\bar{y}, z]$ on retrouve un résultat récent de E. Edo [E].

Classification mathématique : 14E09, 14L27, 11T06.
Mots-clés : Affine automorphisms, variables.

0. Introduction.

Si B est un anneau on notera $B[x_1, \cdots, x_n]$ ou parfois $B[\bar{x}]$, la B-algèbre des polynômes à n indéterminées et à coefficients dans B et $\mathrm{Aut}_B(B[\bar{x}])$ le groupe des automorphismes de $B-$algèbre de $B[x_1, \cdots, x_n]$. Donc si $\alpha \in \mathrm{Aut}_B(B[x_1, \cdots, x_n])$ on a

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & B[x_1, \cdots, x_n] & \xrightarrow{\sim} & B[x_1, \cdots, x_n] \\ & P(x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & P(\alpha(x_1), \cdots, \alpha(x_n)). \end{array}$$

On dit qu'un polynôme $P = P(x_1, \cdots, x_n)$ de $B[x_1, \cdots, x_n]$ est une *variable* de $B[x_1, \cdots, x_n]$ s'il existe un $B-$automorphisme α tel que $\alpha(x_1) = P(x_1, \cdots, x_n)$. Autrement dit, P est une variable de $B[x_1, \cdots, x_n]$ s'il existe $P_2, \cdots, P_n \in B[x_1, \cdots, x_n]$ tels que $B[x_1, \cdots, x_n] = B[P, P_2, P_3, \cdots, P_n]$, on dit aussi que l'hypersurface de B^n, $P^{-1}(0)$ est *rectifiable* ou *linéarisable.*
Remarquons que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, B)$ peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_B(B[x_1, \cdots, x_n])$ en identifiant chaque vecteur e_i de la base canonique à x_i, ainsi pour $\alpha \in \mathrm{GL}(n, B)$ si $\alpha(e_i) = \Sigma_{j=1}^n a_{ij} e_j$ alors $\alpha(x_i) = \Sigma_{j=1}^n a_{ij} x_j$ définit bien un automorphisme de $B[x_1, \cdots, x_n]$.
On dira qu'un automorphisme α est *triangulaire* s'il existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\alpha(x_i) = x_i$, $\forall i \neq k$ et $\alpha(x_k) = x_k + P(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$.
Dans tout l'article, A sera un domaine[1] et $K :=\mathrm{Fr}(A)$ son corps des fractions.

[1] Anneau commutatif unitaire et intègre.

En 1941, H.W.E. Jung [J] énonce une conjecture qui, dans le cas où B est un domaine, peut s'écrire ainsi :

CONJECTURE. — *Chaque $B-$automorphisme de $B[\bar{x}]$ se décompose en un produit d'automorphismes linéaires et triangulaires.*

Les travaux de Jung [J] et W. van der Kulk [vdK] montrent que c'est vrai si B est un corps et $n=2$ et en 1972 M. Nagata [N] trouve un contre-exemple lorsque B n'est pas un corps grace au $k[z]-$automorphisme (k est un corps) de $k[z][x,y]$, γ défini par :

$$\begin{cases} \gamma(x) = x - 2y(zx+y^2) - z(zx+y^2)^2 \\ \gamma(y) = y + z(zx+y^2). \end{cases}$$

En outre Nagata [N] met aussi en doute la conjecture pour le cas où B est un corps et $n=3$, en effet si on prolonge γ par $\gamma(z)=z$ on obtient un automorphisme de $k[x,y,z]$ dont on ignore, encore aujourd'hui, s'il admet une décomposition en applications linéaires et triangulaires.

D'autre part, dans [CD], A.D.R. Choudary et A. Dimca introduisent l'hypersurface $X_{d,a}$ de $\mathbb{C}^{2m}$ définie par l'équation $f(\bar{x})=0$ où

$$f(\bar{x}) = x_0^a x_1^{d-a} + x_1 x_2^{d-1} + \cdots + x_{2m-3}x_{2m-2}^{d-1} + x_{2m-2} + x_{2m-1}^d.$$

Elle est difféomorphe à $\mathbb{C}^{2m-1}$ et pour $a=1$ toutes les fibres $f^{-1}(t)$ aussi. Choudary et Dimca montrent avec des arguments topologiques que pour $m=2$, $X_{d,1}$ est rectifiable et remarquent que pour $d=3$, $f(\bar{x})$ coïncide avec la deuxième composante de l'automorphisme de Nagata. Dans [T] M. Tsuji donne les automorphismes de linéarisation pour d quelconque et $m=2$, de $X_{d,1}$. Dans [E], E. Edo fait apparaître le cas m et d quelconques comme une conséquence de son théorème principal.
Un cas particulier de ce théorème avait été énoncé indépendemment par l'auteur dans [Z](p.52) et démontré avec une technique différente, celle des modifications affines de S. Kaliman et M. Zaidenberg [KZ] (voir plus bas p.7). On propose ici une généralisation du théorème principal de [E] sous la forme suivante :

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Soit a,r et $p\in A$ avec a inversible mod(p) et r nilpotent mod(p). Alors, quels que soient $Q_0\in A[y]$ et $c\in A$, le polynôme $px+rQ_0(y)+ay+c$ est une variable de $A[x,y]$.*

La construction des automorphismes correspondants généralise en quelque sorte la construction de l'automorphisme de Nagata. L'idée est de composer des automorphismes de $A[x,y]$ et de $K[x,y]$ =Fr$(A)[x,y]$ pour finalement trouver un automorphisme de $A[x,y]$.

1. Résultats préliminaires.

Remarquons que l'inclusion $A[x,y] \subset K[x,y]$ induit l'inclusion des groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_A(A[x,y]) \subset \mathrm{Aut}_K(K[x,y])$.
En fait on a :

$$\mathrm{Aut}_A(A[\bar{x}]) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}_K(K[\bar{x}]) \text{ tel que } \alpha(A[\bar{x}]) = A[\bar{x}]\}.$$

Mais on peut caractériser $\mathrm{Aut}_A(A[\bar{x}])$ de manière plus pratique en utilisant le Jacobien dont on rappelle la définition :

DÉFINITION 1.1. — *Soit $p_1, \cdots, p_n$ n polynômes de $K[\bar{x}]$. On appelle Jacobien de $p_1, \cdots, p_n$ et on note $J(p_1, \cdots, p_n)$ le polynôme de $K[\bar{x}]$ défini par :*

$$J(p_1, \cdots, p_n) := \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Si $\alpha \in \mathrm{Aut}_K(K[\bar{x}])$ on appelle aussi Jacobien de α et on note $J(\alpha)$ le polynôme $J(\alpha) = J(\alpha(x_1), \cdots, \alpha(x_n))$.

On utilisera le lemme suivant :

LEMME 1.2. — *Soit α un K-automorphisme de $K[\bar{x}]$. α est un automorphisme de $A[\bar{x}]$ si et seulement si $\alpha(A[\bar{x}]) \subset A[\bar{x}]$ et $J(\alpha)$ est un élément inversible de A.*

Démonstration. — Supposons que $\alpha(A[\bar{x}]) \subset A[\bar{x}]$ et $J(\alpha)$ est un inversible de A et montrons par l'absurde que $\alpha \in \mathrm{Aut}_A(A[\bar{x}])$.
Si $\alpha \notin \mathrm{Aut}_A(A[\bar{x}])$ alors il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $\alpha^{-1}(x_i) \notin A[\bar{x}]$, i.e.

$$\alpha^{-1}(x_i) = \frac{q_i(\bar{x})}{d_i} \qquad (1)$$

avec $q_i(\bar{x}) \in A[\bar{x}]$ et $d_i \in A \setminus \{0\}$ tels que d_i ne divise pas $q_i(\bar{x})$ dans $A[\bar{x}]$.
Si on applique le K-automorphisme α à l'égalité (1) et qu'on appelle $p_1, \cdots, p_n \in A[\bar{x}]$ les images respectives de $x_1, \cdots, x_n$ par α on obtient :

$$d_i x_i = q_i(p_1, \cdots, p_n).$$

Soit M un idéal maximal de A tel que $d_i \in M$ et $q_i \notin M \cdot A[\bar{x}]$.
On a

$$q_i(p_1, \cdots, p_n) \in M \cdot A[\bar{x}],$$

donc si on appelle L le corps ${}^{A}/_{M}$ et qu'on note

$$\forall p \in A[\bar{x}], \qquad \hat{p} := p + M \cdot A[\bar{x}] \in L[\bar{x}]$$

on a

$$\hat{q}_i(\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_n) = \hat{0} \text{ avec } \hat{q}_i \neq \hat{0}$$

d'où $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_n$ sont algébriquement dépendants dans $L[x_1, \cdots, x_n]$.
Cette relation de dépendance algébrique donne, après dérivations, une relation de dépendance linéaire entre les gradients des $\hat{p}_j$ donc

$$J(\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_n) = \hat{0} = J(p_1, \widehat{\cdots}, p_n) \in L[\bar{x}].$$

Autrement dit,

$$J(p_1, \cdots, p_n) = J(\alpha) \in M$$

ce qui est impossible puisque, par hypothèses, $J(\alpha)$ est un inversible de A.
La réciproque est immédiate. □

Passons maintenant à la construction d'automorphismes bien particuliers : soit $d \in A \setminus \{0\}$ et $\sigma_d \in \mathrm{GL}(n+1, K)$ défini par

$$\begin{cases} \sigma_d(x) = dx \\ \sigma_d(P(\bar{y})) = P(\bar{y}) \quad \forall P \in A[\bar{y}]. \end{cases}$$

On a $\sigma_d^{-1}(x) = d^{-1}x$ donc si d n'est pas inversible σ_d n'est pas un automorphisme de $A[x, \bar{y}]$, cependant pour certains $A-$automorphismes γ, on a $\sigma_d \gamma \sigma_d^{-1} \in \mathrm{Aut}_A(A[x, \bar{y}])$; la proposition qui suit donne une caractérisation de ces automorphismes.

Proposition 1.3. — *Soit $\gamma \in Aut_A(A[x, \bar{y}])$ et $d \in A \setminus \{0\}$.*
Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\gamma(x)$ appartient à l'idéal (d, x) de $A[x, \bar{y}]$ engendré par d et x,
(ii) $\sigma_d \gamma \sigma_d^{-1} \in Aut_A(A[x, \bar{y}])$.

Démonstration. — Soit P et $Q_1, \cdots, Q_n$ dans $A[x, \bar{y}]$ tels que :

$$\begin{cases} \gamma(x) = P(x, y) = P(0, y) + xP_1(x, y) \\ \gamma(y_i) = Q_i(x, \bar{y}) & \forall i = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

Puisque $\gamma \in \mathrm{Aut}_A(A[x, \bar{y}])$ on a :

$$J(\sigma_d \gamma \sigma_d^{-1}) = J(\sigma_d) J(\gamma) J(\sigma_d^{-1}) = J(\gamma) \text{ est un élément inversible de } A.$$

Donc d'après le lemme 1.2 précédent,

$$\sigma_d \gamma \sigma_d^{-1} \in \mathrm{Aut}_A(A[x, \bar{y}]) \Longleftrightarrow \sigma_d \gamma \sigma_d^{-1}(A[x, \bar{y}]) \subset A[x, \bar{y}].$$

Or

$$\forall i = 1, \cdots, n, \; \sigma_d \gamma \sigma_d^{-1}(y_i) = \sigma_d \gamma(y_i) = \sigma_d(Q_i(x, \bar{y})) = Q_i(dx, \bar{y}) \in A[x, \bar{y}]$$

et

$$\sigma_d\gamma\sigma_d^{-1}(x) = \sigma_d\gamma(d^{-1}x) = d^{-1}\sigma_d\gamma(x) = d^{-1}\sigma_d(P(x,\bar{y})) = d^{-1}P(dx,\bar{y})$$

$$\sigma_d\gamma\sigma_d^{-1}(x) = d^{-1}P(0,\bar{y}) + xP_1(dx,\bar{y}).$$

Donc

$$\sigma_d\gamma\sigma_d^{-1}(A[x,\bar{y}]) \subset A[x,\bar{y}] \Longleftrightarrow d|P(0,\bar{y}) \Longleftrightarrow \gamma(x) = P(x,\bar{y}) \in (d,x).$$

On a montré $(i) \Longleftrightarrow (ii)$. □

On va donc pouvoir transformer certaines variables $\gamma(y_1) = Q(x,\bar{y})$ en $\sigma_d\gamma\sigma_d^{-1}(y_1) = Q(dx,\bar{y})$. Dans le cas le plus simple où $\bar{y} = y$ est une seule variable on a ainsi :

PROPOSITION 1.4. — *Soit $Q(x,y)$ une variable de $A[x,y]$ et $d \in A\setminus\{0\}$. Si $Q(0,y) + (d)$ est une variable de ${}^{A}/_{(d)}[y] = A_d[y]$ alors $Q(dx,y)$ est aussi une variable de $A[x,y]$.*

Démonstration. — Supposons que $Q(0,y) + (d)$ est une variable de $A_d[y]$ i.e.

$$A_d[y] = A_d[Q(0,y) + (d)]$$

on a alors

$$\begin{array}{l} A_d[x,y] = A_d[Q(x,y) + (d)] + (x) \\ A[x,y] = A[Q(x,y)] + (d,x). \end{array}$$

Or, par hypothèse, il existe un A−automorphisme γ de $A[x,y]$ tel que

$$\gamma(y) = Q(x,y).$$

Et d'après ce qui précède, en tant qu'élément de $A[x,y]$, $\gamma(x)$ vérifie :

$$\exists R \in A[Y] \text{ tel que } \gamma(x) \in R(Q) + (d,x).$$

Soit μ l'A−automorphisme triangulaire défini par :

$$\begin{cases} \mu(x) = x - R(y) \\ \mu(y) = y. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} \gamma\mu(x) = \gamma(x - R(y)) = \gamma(x) - R(Q) \in (d,x) \\ \gamma\mu(y) = \gamma(y) = Q(x,y). \end{cases}$$

La proposition 1.3 appliquée à $\gamma\mu$ prouve que $\sigma_d\gamma\mu\sigma_d^{-1}(y) = Q(dx,y)$ est encore une variable de $A[x,y]$. □

Remarque. — La proposition précédente et sa démonstration restent valables si on remplace y par $\bar{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, Q par $(Q_1, \cdots, Q_n)$ et *variable* par *n-uplet de variables associées à un même automorphisme.*

La proposition 1.4, utilisée en partant de variables simples, permet de montrer le théorème principal.

2. Résultats principaux.

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Soit a, r et $p \in A$ avec a inversible $\mathrm{mod}(p)$ et r nilpotent $\mathrm{mod}(p)$. Alors, quels que soient $Q_0 \in A[y]$ et $c \in A$, le polynôme $px + rQ_0(y) + ay + c$ est une variable de $A[x, y]$.*

Démonstration. — Vérifions que le polynôme $x + rQ_0(y) + ay + c$ et la constante p vérifient les conditions de la proposition 1.4 :
$x + rQ_0(y) + ay + c$ est composante d'un automorphisme triangulaire donc c'est une variable.
Dans $A_p[y]$, a est inversible et $rQ_0(y)$ nilpotent donc le polynôme $ay + rQ_0(y) + c$ est une variable de $A_p[y]$ (voir par exemple Proposition 3.1. de [N]).
On peut donc en conclure que $px + rQ_0(y) + ay + c$ est une variable. □

Le corollaire 2.1 ci-dessous généralise le théorème de Edo au cas où p est un polynôme de plusieurs variables :

COROLLAIRE 2.1. — *Ici $A = \mathbb{C}[\bar{y}, \bar{z}]$ et a,r et p vérifient les mêmes hypothèses qu'au théorème principal ci-dessus.*
Soit $px + q := p(\bar{z})x + r(\bar{z})q_1(\bar{y}, \bar{z}, y) + a(\bar{z})k(\bar{y}, \bar{z}, y) + c(\bar{z})$,
si $k(\bar{y}, \bar{z}, y)$ est une $\bar{z}-$variable, i.e. composante d'un automorphisme qui fixe $\bar{z}$, de $\mathbb{C}[\bar{y}, \bar{z}, y]$ alors $px + q$ est une $\bar{z}-$variable de $A[x, y] = \mathbb{C}[\bar{y}, \bar{z}, x, y]$.

Remarque. — Dans ce corollaire les hypothèses sur a, r et p peuvent se traduire par : r est le réduit de p et $V(p) \cap V(a) = \emptyset$.
On montre sans difficulté que la réciproque de ce corollaire est fausse. Cependant en changeant un peu les hypothèses la réponse n'est plus évidente, on en verra un exemple dans la proposition 3.1.

Démonstration. — Il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[\bar{z}]}(\mathbb{C}[\bar{z}][\bar{y}, y]) \subset Aut_{\mathbb{C}[x,\bar{z}]}(\mathbb{C}[x, \bar{z}][\bar{y}, y])$ tel que $\alpha(y) = k(\bar{y}, \bar{z}, y)$.
Si $\alpha^{-1}(q_1) = Q_0$ alors

$$\alpha^{-1}(px + q) = \alpha^{-1}(p(\bar{z})x + r(\bar{z})q_1(\bar{y}, \bar{z}, y) + a(\bar{z})k(\bar{y}, \bar{z}, y) + c(\bar{z}))$$

$\alpha^{-1}(px+q) = p(\bar z)x + r(\bar z)Q_0(\bar y, \bar z, y) + a(\bar z)y + c(\bar z) = px + rQ_0(y) + ay + c.$
Donc, d'après le théorème principal

$$\alpha^{-1}(px+q) = px + rQ_0(y) + ay + c$$

est une variable de $A[x,y] = \mathbb{C}[\bar y, \bar z][x,y]$ d'où $px+q$ est une variable de $\mathbb{C}[\bar z][\bar y, x, y]$ i.e. une $\bar z-$variable. $\square$

La section suivante donne quelques applications de ces résultats.

3. Applications et remarques.

Une conséquence assez simple du théorème ci-dessus est la proposition 8.1. de $[Z]$:

Proposition 3.1. — *Soit $q \in \mathbb{C}[\bar y, z]$ (où $\bar y = (y_1, \cdots, y_k)$) un polynôme tel que $p(\bar y) := q(\bar y, 0) \in \mathbb{C}[\bar y]$ est un polynôme non constant. Soit X_p et $Y_{q,n}$ les hypersurfaces définies par :*

$$X_p := \{p(\bar y) = 0\} \subset \mathbb{C}^k \text{ et } Y_{q,n} := \{z^n x - q(\bar y, z) = 0\} \subset \mathbb{C}^{k+2}.$$

Si l'hypersurface X_p est rectifiable dans $\mathbb{C}^k$ alors l'hypersurface $Y_{q,n}$ est aussi rectifiable dans $\mathbb{C}^{k+2}$.

Remarque 1. — Edo [E] a montré avec des arguments topologiques que la réciproque est vraie pour $k = 1$. Lorsque $k \geq 2$ la question reste posée.

Remarque 2. — Cette proposition permet de montrer par récurrence sur m que l'hypersurface de Choudary et Dimca[2] $X_{d,1}$ de $\mathbb{C}^{2m}$ est rectifiable.

Remarque 3. — Cette proposition avait été démontrée par l'auteur en utilisant, de façon récursive, un résultat sur les modifications affines de $[KZ]$ (Corollaire 2.2, p.10) :

Proposition 3.2 (Kaliman et Zaidenberg). — *Soit (A, I, f) un triplet affine et $A' := \Sigma_{(I,f)}(A)$ sa modification affine[3] avec le morphisme d'éclatement $\sigma_I : A \hookrightarrow A'$. Soit γ un automorphisme de A tel que $\gamma(I) = I$ et $\gamma(f) = uf$ où u est un inversible de A. Alors il existe une unique extension $\gamma' \in Aut(A')$ qui rende le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{cccc} & A' & \xrightarrow{\gamma'} & A' & \\ \sigma_I & \uparrow & & \uparrow & \sigma_I \\ & A & \xrightarrow{\gamma} & A & \end{array}$$

[2] voir introduction.

[3] i.e. A est un domaine affine $/\mathbb{C}$, I est un idéal de A, $f \neq 0$ et $f \in I$; $A' := A[It]/(1-ft)$.

Si on remplace A par $\mathbb{C}[x,\bar{y},z]$, I par (x,z) et f par z on a $\Sigma_{(I,f)}(\mathbb{C}[x,\bar{y},z]) = \mathbb{C}[x',\bar{y},z]$ où $x' = zx$. En fait σ_I peut être vu comme le $\mathbb{C}(z)-$automorphisme de $\mathbb{C}(x)[\bar{y},z]$ que l'on avait appelé σ_z : $\sigma_I(x) = \sigma_z(x) = zx$. Dans ce cas particulier, la conclusion de la proposition 3.2 (avec $u = 1$) et l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ de la proposition 1.3 coïncident.

On peut également utiliser la proposition 1.3 pour trouver des variables du type $d^{-1}P(dx,\bar{y})$. En effet, en posant $P(x,\bar{y}) = \gamma(x)$ dans la proposition 1.3 on obtient facilement le

Corollaire 3.3. — *Soit $P(x,\bar{y})$ une variable de $A[x,\bar{y}]$ et $d \in A \setminus \{0\}$. Si $P(0,\bar{y}) \in (d) = dA[x,\bar{y}]$ (autrement dit si $d^{-1}P(dx,\bar{y}) \in A[x,y]$) alors $d^{-1}P(dx,\bar{y})$ est aussi une variable.*

De même, en s'appuyant sur le lemme 1.2 et en choisissant les bons automorphismes de $K[\bar{x}]$ et de $A[\bar{x}]$ on peut montrer la :

Proposition 3.4. — *Soit $P(\bar{x})$ une variable de $A[\bar{x}] = A[x_1,\cdots,x_n]$ et $d \in A \setminus \{0\}$. Si $d^{-1}P(dx_1,\cdots,dx_n) \in A[\bar{x}]$ alors c'est encore une variable de $A[\bar{x}]$.*

Démonstration. — Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}_A(A[\bar{x}])$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(K[\bar{x}])$ tels que :

$$\gamma(x_1) = P(\bar{x}) \qquad \text{et} \qquad \sigma(x_i) = dx_i \quad \forall i = 1,\cdots,n.$$

A translation près on peut supposer :

$$\forall i = 2,\cdots,n \quad \gamma(x_i) \in (x_1,\cdots,x_n).$$

Dans ce cas l'automorphisme $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ vérifie bien les conditions du lemme 1.2 donc $\sigma\gamma\sigma^{-1}(x_1) = d^{-1}P(dx_1,\cdots,dx_n)$ est une variable de $A[\bar{x}]$. □

D'autre part, le théorème principal permet de montrer assez rapidement un cas particulier [4] du théorème de A. Sathaye $[S]$ suivant :

Théorème 3.5 (Sathaye). — *Soit $X = X_{p,q}$ une surface de $\mathbb{C}^3$ définie par l'équation $p(y,z)x + q(y,z) = 0$ où $p,q \in \mathbb{C}[y,z]$. Si $X \simeq \mathbb{C}^2$ alors X est rectifiable.*

D. Wright $[W]$ l'a généralisé en remplaçant x par x^n avec $n \geq 1$. Cette généralisation a été améliorée par S. Kaliman et M. Zaidenberg ($[KZ]$ Théorème 7.2.) en remplaçant $X \simeq \mathbb{C}^2$ par l'hypothèse moins forte : X est lisse, $e(X) = 1$ et $H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$ (et toujours n quelconque). Le théorème 3.6 ci-dessous implique ce résultat dans le cas où $n = 1$ et $p(y,z) = p(z) \in \mathbb{C}[z]$. Sa démonstration s'inspire de celle du Théorème 7.2. de $[KZ]$:

[4] voir le théorème 3.6 ci-dessus.

THÉORÈME 3.6. — *Soit $X = X_{p,q}$ une surface de $\mathbb{C}^3$ définie par l'équation $p(z)x + q(y,z) = 0$ où $p \in \mathbb{C}[z]$ et $q \in \mathbb{C}[y,z]$. Si $\mathbb{C}[X]$ vérifie la condition*[5] *:*
(i) $\mathbb{C}[X]$ est une $\mathbb{C}$-algèbre intègre factorielle dont les éléments inversibles sont uniquement dans $\mathbb{C}$,
alors X est rectifiable, autrement dit $p(z)x + q(y,z)$ est une variable de $\mathbb{C}[x,y,z]$.

Démonstration. — Soit $\zeta \in \mathbb{C}[X]$ donnée par $\zeta = z + (pz + q)\mathbb{C}[x,y,z]$. $\forall t \in \mathbb{C}$, soit $\mathbb{C}[X]_t$ la $\mathbb{C}$-algèbre quotient :

$$\mathbb{C}[X]_t := {}^{\mathbb{C}[X]}/\ {}_{(\zeta - t)}\ .$$

Soient $u, z_1, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ tels que :

$$p(u) = 1 \text{ et } p(z_1) = p(z_2) = \cdots = p(z_k) = 0.$$

En remplaçant z par u dans l'équation de X : $p(z)x + q(y,z) = 0$, on vérifie aisément que $\mathbb{C}[X]_u \simeq \mathbb{C}^{[1]}$ donc $\mathbb{C}[X]_u$ vérifie aussi (i) et $\zeta \notin \mathbb{C}$. Il est facile de montrer que, puisque $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[X]_u$ vérifient la condition (i), toutes les $\mathbb{C}$-algèbres quotient $\mathbb{C}[X]_t$ la vérifient aussi quelque soit $t \in \mathbb{C}$.
Or pour les racines z_i on a :

$$\mathbb{C}[X]_{z_i} \simeq {}^{\mathbb{C}[x,y]}/\ {}_{(q(y,z_i))}\ .$$

Donc, puisque $\mathbb{C}[X]_{z_i}$ est intègre $q(y,z_i)$ est irréductible. Supposons que $q(y,z_i) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ respectivement $c = 0$; on a alors $\mathbb{C}[X]_{z_i} \simeq \{0\}$ respectivement $\mathbb{C}[X]_{z_i} \simeq \mathbb{C}^{[2]}$ d'où $\zeta - z_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ respectivement $\zeta - z_i = 0$ pour des raisons de dimension. Donc $\zeta \in \mathbb{C}$ ce qui est impossible.
On a montré que pour toute racine z_i de p, $q(y,z_i)$ est irréductible et non constant c'est-à-dire de degré 1 donc q s'écrit :

$$q(y,z) = q(0,z) + a(z)y + r(z)Q_0(y,z) \text{ où } a(z_i) \neq 0 \text{ et } r(z_i) = 0,\ \forall i = 1, \cdots, k.$$

Alors on peut écrire :

$$p(z)x + q(y,z) = px + rQ_0(y) + ay + c \text{ avec } p, r, a \text{ et } c \in \mathbb{C}[z].$$

Et on a montré que les hypothèses du théorème principal sont vérifiées par p, r et a, donc X est rectifiable. □

Remerciements. Je remercie Eric Edo, à l'origine des travaux menés "parallèlement" qui ont permis cet article, ainsi que M. Zaidenberg dont les remarques et les conseils m'ont beaucoup aidé.

[5] on n'a pas besoin que X soit lisse.

Références.

[CD] A.D.R Choudary et A. Dimca, *Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces,* Kodai Math. J. **17**, N$^{\mathrm{O}}$2 (1994), 171-178.

[E] E. Edo, *Linéarisation explicite de certaines hypersurfaces,* manuscrit, Dép. Math. pures Université de Bordeaux I, 1998, 8p.

[J] H.W.E. Jung, *Über ganze birational Transformation der Ebene,* J. reine und angew. Math., **184** (1942), 161-174.

[KZ] S. Kaliman et M. Zaidenberg, *Affine modifications and affine varieties with a very transitive automorphism group,* Transformation Groups, 4:1 (1999), 53-95.

[N] M. Nagata, *On automorphisms group of* $k[x, y]$, Kinokuniya, Tokyo, 1972.

[S] A. Sathaye, *On linear planes*, Proc. Amer. Math. Soc **56** (1976), 1-7.

[T] M. Tsuji, *Dimca hypersurfaces and Nagata automorphisms,* Math.Nachr. (à paraître).

[vdK] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables,* Nieuw. Arch. Wisk. (3) **1** (1953), 33-41.

[W] D. Wright, *Cancellation of variables of the form* $bT^n - a$, J. Algebra **52** (1978), 94-100.

[Z] M. Zaidenberg, *On exotic algebraic structures on affine spaces,* (à paraître dans Algebra and Analysis. St. Petersbourg Mathem. J., 1999, 60p.) E-print math.AG/9801075.

Stéphane VÉNÉREAU
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail : Stephane.Venereau@ujf-grenoble.fr