Une nouvelle preuve de certaines inégalités de Littlewood-Paley

Lucien Chevalier

Abstract : The aim of the paper is to give a new proof of the L^p-inequalities for the Littlewood-Paley g_*-function. Our main tool is a pointwise equality relating a function f and the associated functional $g_*(f)$, which has the form $f^2 = h(f)+g_*^2(f)$, where $h(f)$ is an explicit function. We obtain this equality as a particular case of a more general one, which is reminiscent of a well-known identity in the stochastic calculus setting, namely the Itô formula. Once the above equality is proved, L^p-estimates for $g_*(f)$ are obviously equivalent to $L^{p/2}$-estimates for $h(f)$. We obtain these last estimates (more precisely, $H^{p/2}$-estimates for $h(f)$) by using a slight extension of the Coifman-Meyer-Stein theorem relating the so-called tent-spaces and the Hardy spaces. We observe that our methods clearly show that the restriction $p > \frac{2n}{n+1}$ is closely related to cancellation and size properties of the gradient of the Poisson kernel.

Mots-clés : Inégalités de Littlewood-Paley, espaces de Hardy.

Classification : 42B30.

1. — Introduction

Soit n un entier ≥ 1. Pour tout $p > 0$, on désigne par L^p l'espace usuel relatif à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, et la norme dans L^p est notée $\|\cdot\|_p$. Le but de cet article est de donner une nouvelle démonstration, dont les idées générales sont simples et naturelles, du résultat classique suivant, relatif à l'opérateur g_* de Littlewood-Paley (dont nous rappelons la définition plus loin) :

THÉORÈME 1. — *Pour tout $p > \frac{2n}{n+1}$, il existe un nombre $C(n,p)$ tel que, pour toute fonction $f \in L^p$, on ait*

$$\|g_*(f)\|_p \leq C(n,p)\|f\|_p \ . \tag{1}$$

L'étude systématique de l'opérateur g_* a été faite par A. Zygmund dans [13], dans le cas où $n = 1$, et les inégalités (1) ont été obtenues, en toute dimension, par E. M. Stein dans les années 60. Leur preuve classique ([11], pp. 91-94) est technique et assez difficile.

L'idée essentielle de notre démonstration consiste à utiliser une égalité *ponctuelle* qui correspond en analyse à la formule d'Itô des probabilistes, que nos récents résultats concernant une “formule de Tanaka” en analyse ([1], [2]) nous permettent d'obtenir facilement (§2). Cette égalité, qui présente par ailleurs un intérêt intrinsèque, fournit notamment une relation directe entre les fonctions f et $g_*(f)$ (dont on doit comparer les normes dans L^p pour certaines valeurs de p), de la forme

$$f^2 = h(f) + g_*^2(f) \ , \tag{2}$$

où $h(f)$ est une fonction explicite. Cette égalité précise nous permet de ramener la preuve de l'inégalité (1) à l'estimation de la norme de $h(f)$ dans $L^{p/2}$, pour laquelle on dispose de moyens d'étude assez naturels. En effet, comme nous le verrons au §3, une (légère) extension d'un résultat de R. R. Coifman, Y. Meyer et E. M. Stein concernant les “espaces de tentes” permet en fait de contrôler convenablement la norme de $h(f)$ dans l'espace de Hardy $H^{p/2}$.

Il est maintenant nécessaire de rappeler quelques définitions et notations. On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions définies dans $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à décroissance rapide. Comme dans [12], nous appellerons *distribution bornée* toute distribution tempérée f telle que $f * \varphi \in L^\infty$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$.

Pour toute fonction φ définie dans $\mathbb{R}^n$ et tout $y > 0$, on note φ_y la nouvelle fonction définie par

$$\varphi_y(x) = \frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \ .$$

On désigne par $\mathbb{R}_+^{n+1}$ le demi-espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, dont le point courant est systématiquement noté $z = (x, y)$.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x) = \frac{c_n}{(|x|^2+1)^{(n+1)/2}} \ ,$$

où c_n désigne la constante de normalisation habituelle. On vérifie ([12], pp. 89-90) que, si f est une distribution bornée, alors les distributions $f * q_y$ sont bien définies, et sont en fait des fonctions bornées de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elles permettent de définir l'*intégrale de Poisson* $P(f)$ de la distribution f par l'égalité

$$P(f)(z) = f * q_y(x) \ \ (z = (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}) \ .$$

Il est bien connu, et facile de vérifier, que cette fonction est harmonique dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Comme dans nos articles cités en référence, il sera commode de poser, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et tout $z = (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$,

$$p_\xi(z) = q_y(x - \xi) \ .$$

On a alors aussi

$$P(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) p_\xi(z)\, d\xi$$

pour toute fonction f telle que l'intégrale précédente soit absolument convergente, ce qui est le cas, notamment, si $f \in \bigcup_{1 \le p \le +\infty} L^p$.

A toute distribution bornée f sont associées, *via* l'intégrale de Poisson, un certain nombre de fonctionnelles quadratiques et de fonctions maximales. Nous rappelons maintenant la definition de celles que nous utiliserons. La *fonction de Littlewood-Paley* $g_*(f)$, l'*intégrale d'aire de Lusin-Calderón* $S(f)$ et la *fonction maximale non tangentielle* $N(f)$ sont définies dans $\mathbb{R}^n$ par les égalités (dans tout l'article, la notation ∇ désigne l'opérateur gradient dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$) :

$$g_*(f)(\xi) = \left(2 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2 \, dz\right)^{1/2} ,$$

$$S(f)(\xi) = \left(\int_{|x-\xi|<y} y^{1-n} |\nabla P(f)(z)|^2 \, dz\right)^{1/2}$$

et

$$N(f)(\xi) = \sup_{|\xi - x|<y} |P(f)(x,y)| \, .$$

Pour tout $p > 0$, l'espace de Hardy H^p est (par exemple) défini comme l'ensemble des distributions bornées f telles que $N(f) \in L^p$ (ou, de manière équivalente, telles que $S(f) \in L^p$), pour lesquelles on pose (par exemple) $\|f\|_{H^p} = \|N(f)\|_p$ ([7] ; [12], chap. III). Des résultats très classiques sur les fonctions maximales montrent que H^p s'identifie à L^p pour tout $p > 1$, et par suite les inégalités (1), dans lesquelles tous les exposants sont > 1, n'ont à priori pas grand chose à voir avec les espaces de Hardy. Néanmoins, la technique que nous avons choisi d'utiliser dans le §3 nous amènera à faire une incursion dans les "vrais" espaces de Hardy, c'est à dire dans des espaces H^p avec $p \leq 1$.

Dans tout l'article, la notation $C(\cdot)$ est employée pour désigner une "constante" dépendant uniquement des paramètres entre parenthèses, mais pouvant varier d'une ligne à l'autre.

2. — Une "formule d'Itô" en analyse harmonique

L'objet de ce paragraphe est de donner l'énoncé et une démonstration d'une égalité ponctuelle, qui est susceptible de jouer en analyse (au moins pour certaines applications) un rôle semblable à celui joué par la formule d'Itô en théorie des martingales. Il est commode d'introduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des éléments de L^2 pour lesquels

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = \|f\|_2 + \sup_{z \in \mathbb{R}_+^{n+1}} |\nabla P(f)(z)| < +\infty \, .$$

Il est clair que l'espace $\mathcal{E}$ contient tous les éléments de L^2 qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ et dont les dérivées partielles d'ordre ≤ 2 sont bornées, et notamment les éléments de la classe de Schwartz $\mathcal{S}$. En particulier, $\mathcal{E}$ est dense dans L^2. Notre version de la formule d'Itô est le

THÉORÈME 2. — *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, et presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a l'égalité*

$$\varphi \circ f(\xi) = \varphi(0) + 2 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y\varphi' \circ (P(f))(z) \nabla P(f)(z) \nabla p_\xi(z)\, dz$$
$$+ \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \varphi'' \circ (P(f))(z) y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2\, dz\ . \quad (3)$$

Avant d'entrer dans les détails de la preuve, donnons deux exemples simples, susceptibles d'avoir des applications intéressantes.

Notre premier exemple est le cas, en principe trivial, où φ est l'identité ; même dans ce cas, notre égalité n'est pas purement tautologique. Elle s'écrit en effet

$$f = 2 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y \nabla P(f)(z) \nabla p_x(\cdot, y)\, dz\ ,$$

et constitue donc un avatar de la célèbre "identité de Calderón"

$$f = \int_0^{+\infty} f * \psi_y * \psi_y \frac{dy}{y}\ ,$$

où ψ est une fonction convenable. Plus précisément, ceci provient du fait que $y\nabla p_\xi(z) = \phi_y(x - \xi)$, où ϕ est la fonction (vectorielle) définie par l'égalité (11).

Un autre exemple important en raison de sa simplicité et de ses applications (voir notamment le §3, et aussi [3]) est celui dans lequel on prend $\varphi(x) = x^2$. Dans ce cas la formule est

$$f^2 = 4 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y P(f)(z) \nabla P(f)(z) \nabla p_x(\cdot, y)\, dz + g_*^2(f), \quad (4)$$

qui correspond évidemment à l'égalité

$$M^2 = 2 \int M\, dM + \langle M, M \rangle$$

bien connue des martingalistes.

Démonstration du théorème 2:

Nous allons déduire cette égalité de la "formule de Tanaka" établie par l'auteur dans [1] ou [2]. Ceci nécessite le rappel de quelques définitions et propriétés relatives à la densité de l'intégrale d'aire.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $|P(f) - a|$ est sous-harmonique, donc son laplacien au sens des distributions est une mesure positive. On peut donc définir des fonctions $D_*^a(f)$ par

$$D_*^a(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z) \Delta |P(f) - a|(dz)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. L'application $a \mapsto D^a_*(f)$ est la *densité de l'intégrale d'aire associée à* f (il s'agit ici de l'intégrale d'aire complète, définie par l'opérateur g_*). On peut montrer que, pour toute fonction ψ définie dans $\mathbb{R}$, mesurable et à valeurs ≥ 0, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(a) D^a_*(f)(\xi)\, da = 2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \psi(P(f)(z)) y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2\, dz \tag{5}$$

(cf. [9], où le calcul est fait pour une autre variante de l'intégrale d'aire), ce qui justifie la terminologie employée.

Etant donné une fonction $f \in \mathcal{E}$, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, l'égalité

$$|f(\xi) - a| - |a| = \tilde{f}_a(\xi) + D^a_*(f)(\xi)\ , \tag{6}$$

où

$$\tilde{f}_a(\xi) = 2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y\, \mathrm{sgn}(P(f)(z) - a) \nabla p_\xi(z) \nabla P(f)(z)\, dz\ .$$

Ceci résulte du théorème 1 de [1] et du fait que l'intégrale précédente est absolument convergente. On a en effet, pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, $y|\nabla p_\xi(z)| \leq (n+1) p_\xi(z)$ et $|\nabla P(f)(z)| \leq C(n) \|f\|_{\mathcal{E}} \min(1, y^{-1-n/2})$.

On fixe un point $\xi \in \mathbb{R}^n$. On multiplie les deux membres de l'égalité (6) par $\varphi''(a)$ et on intègre sur l'intervalle $[-A, A]$ par rapport à la mesure de Lebesgue, où A est un nombre $\geq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |f(\xi)|$. On obtient ainsi, en utilisant la formule (5) pour calculer la seconde intégrale du second membre, l'égalité

$$\begin{aligned} 2(\varphi \circ f(\xi) - \varphi(0)) - f(\xi)(\varphi'(-A) + \varphi'(A)) &= \int_{-A}^{A} \tilde{f}_a(\xi) \varphi''(a)\, da \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \varphi'' \circ (P(f))(z) y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2\, dz\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Ensuite, on justifie facilement l'utilisation du théorème de Fubini pour obtenir l'égalité

$$\begin{aligned} &\int_{-A}^{A} \tilde{f}_a(\xi) \varphi''(a)\, da \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} (2\varphi' \circ (P(f))(z) - (\varphi'(-A) + \varphi'(A))) y \nabla P(f)(z) \nabla p_\xi(z)\, dz\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Enfin, on remarque que, puisque $f \in \mathcal{E}$,

$$2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y \nabla P(f)(z) \nabla p_\xi(z)\, dz = f(\xi)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ (Ceci résulte facilement de l'égalité (6) utilisée avec un nombre $a < \min(0, \inf(P(f)))$. On voit ainsi que les égalités (7) et (8) donnent le résultat désiré. Observons que la formule (3) et sa démonstration sont également valables, *mutatis mutandis*, lorsque la fonction φ est supposée convexe et plus nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$.

3. — Preuve des inégalités de Littlewood-Paley

Soit $p > \frac{2n}{n+1}$. Il suffit bien entendu d'établir l'inégalité (1) lorsque f appartient à une classe de fonction dense dans L^p. Nous supposerons, par exemple, que $f \in \mathcal{S}$. Si nous posons, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$h(f)(\xi) = 4 \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} yP(f)(z) \nabla P(f)(z) \nabla p_\xi(z)\, dz \tag{9}$$

(il est facile de voir que cette intégrale est absolument convergente), nous définissons une fonction $h(f)$ dans $\mathbb{R}^n$ qui réalise l'égalité (conséquence de (4))

$$f^2 = h(f) + g_*^2(f)$$

annoncée dans l'introduction. Il suffit donc d'établir une inégalité de la forme

$$\|h(f)\|_{p/2} \leq C(n,p) \left(\|f\|_p\right)^2 \ .$$

A fortiori, il suffit de prouver que

$$\|h(f)\|_{H^{p/2}} \leq C(n,p) \left(\|f\|_p\right)^2 \ , \tag{10}$$

et le but de ce qui suit est d'obtenir une estimation de cette forme. Le point-clé est (une légère variante d') un résultat de R. R. Coifman, Y. Meyer et E. M. Stein, qui relie les "espaces de tentes" et les espaces de Hardy. En vue d'énoncer ce résultat, nous devons rappeler quelques définitions.

Pour toute fonction borélienne F définie dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathfrak{S}(F)(\xi) = \left(\int_{|x-\xi|<y} |F(z)|^2 \frac{dz}{y^{n+1}} \right)^{1/2} \ .$$

Pour tout $p > 0$, on désigne par T^p *l'espace de tentes*, c'est à dire l'ensemble des fonctions boréliennes F définies dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ pour lesquelles

$$\|F\|_{T^p} = \|\mathfrak{S}(F)\|_p < +\infty \ .$$

Pour établir un lien entre les espaces T^p et H^p, on introduit dans [6] une fonction ϕ définie dans $\mathbb{R}^n$, possédant les propriétés suivantes :

(i) Le support de ϕ est compact.

(ii) Il existe $M \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$|\phi(x)| \leq M \ \text{ et } \ |\phi(x+h) - \phi(x)| \leq M(|h|/|x|)^\varepsilon \ .$$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 0$.

En outre, on supposera éventuellement satisfaite, pour un certain réel N, la propriété

(iii$_N$) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \phi(x)\, dx = 0$ pour tout multi-indice γ tel que $|\gamma| \le N$.

Une telle fonction ϕ permet de définir un opérateur π_ϕ sur T^p par la formule suivante[1] :

$$\pi_\phi(F) = \int_0^{+\infty} F(\cdot, y) * \phi_y \frac{dy}{y} \ .$$

Le résultat de Coifman-Meyer-Stein auquel nous avons fait allusion est le suivant ([6], th. 6) :

PROPOSITION 1. — *L'opérateur π_ϕ se prolonge en un opérateur continu*

(1) *de T^p dans L^p si $1 < p < +\infty$;*

(2) *de T^1 dans H^1 ;*

(3) *de T^p dans H^p si $p \le 1$, à condition que la propriété d'annulation* (iii$_N$) *soit satisfaite et que $p \le \frac{n}{N+n}$.*

Voyons maintenant pourquoi un résultat de ce type, convenablement étendu, donne l'estimation (10). Posons, pour $1 \le i \le n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi^i(x) = \frac{-(n+1)c_n x_i}{\left(|x|^2+1\right)^{(n+3)/2}}$$

et

$$\phi^{n+1}(x) = \frac{c_n(|x|^2 - n)}{\left(|x|^2+1\right)^{(n+3)/2}} \ ,$$

puis

$$\phi = \left(\phi^1, \cdots, \phi^{n+1}\right) \ . \tag{11}$$

Un calcul immédiat montre que $y \nabla p_\xi(z) = \phi_y(x - \xi)$, et par suite notre fonction $h(f)$ définie par l'égalité (9) peut aussi bien s'écrire

$$h(f) = \pi_\phi(F) \ , \tag{12}$$

où

$$F(z) = 4y P(f)(z) \nabla P(f)(z) \ . \tag{13}$$

Supposons un moment que notre fonction ϕ soit à support compact. Il est facile de voir qu'elle vérifie par ailleurs les conditions (ii) (avec $\varepsilon = 1$) et (iii$_N$) pour tout $N < 1$ (donc aussi (iii)), et par suite la proposition précédente fournirait, pour tout $N < 1$, une estimation de la forme

$$\|h(f)\|_{H^{p/2}} \le C(n, N, p) \|\mathfrak{S}(F)\|_{p/2}$$

1. Plus précisément, cette formule définit $\pi_\phi(F)$ lorsque F appartient à un sous-espace dense convenable de T^p ; nous renvoyons le lecteur à [6] pour les détails.

à condition que l'on ait $p/2 \geq n/(N+n)$. On obtiendrait ainsi

$$\|h(f)\|_{H^{p/2}} \leq C(n,p)\|\mathfrak{S}(F)\|_{p/2}$$

pour tout $p > 2n/(n+1)$. Il suffirait donc, pour achever la preuve de l'inégalité (10), de montrer que

$$\|\mathfrak{S}(F)\|_{p/2} \leq C(n,p)\|f\|_p^2 \, .$$

Mais on a évidemment $\mathfrak{S}(F) \leq N(f)S(f)$ (la définition des fonctionnelles N et S est rappelée à la fin du §1), et par suite

$$\|\mathfrak{S}(F)\|_{p/2} \leq \|N(f)\|_p \|S(f)\|_p \leq C(n,p)\left(\|f\|_p\right)^2$$

(conséquence du fait que $p > 1$ et d'inégalités bien connues), d'où le résultat. Il reste donc à s'assurer que la proposition 1 s'applique aussi au cas où ϕ est la fonction définie par (11). Les auteurs de [6] mentionnent une extension de cette proposition dans le cas où la condition de compacité (i) est remplacée par une condition de décroissance à l'infini convenable (qui se trouve vérifiée par notre fonction ϕ), mais l'extension mentionnée ne concerne que les points (1) et (2) (i. e. le cas où $p \geq 1$). Dans le double but de donner une preuve complète et de mieux comprendre les raisons de la limitation imposée à p dans les inégalités (1), nous énonçons et démontrons la[2]

PROPOSITION 2. — *L'opérateur π_ϕ associé à la fonction ϕ définie par l'égalité* (11) *se prolonge en un opérateur continu de T^q dans H^q si $n/(n+1) < q \leq 1$.*

Démonstration:

Rappelons qu'un T^q-*atome* associé à une boule B de $\mathbb{R}^n$ est une application borélienne $a : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}$ dont le support est inclus dans la tente $\widehat{B}$ au-dessus de B et telle que

$$\int_{\widehat{B}} |a(z)|^2 \frac{dz}{y} \leq |B|^{1-2/q} \, .$$

Le résultat de décomposition atomique de l'espace T^q ([6], prop. 5) montre qu'il suffit de prouver que l'ensemble des images par π_ϕ des T^q-atomes constitue une partie bornée de H^q, ce qui découlera facilement du fait que ces images sont des multiples bornés de "q-molécules" de Coifman et Weiss. Nous en rappelons la définition et la principale propriété ([10], p. 175) :

Une q-*molécule* de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$, de largeur $d > 0$ et de type $s > n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$ est une application borélienne $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés

$$\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)|^2 \left(1 + \frac{|x-x_0|}{d}\right)^{2s} dx \leq d^{n(1-2/q)}$$

2. Nous suivons les idées de la preuve du th. 3 de [5], qui traite le cas où $n = 1$ et $q = 1$.

et
$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha b(x)\, dx = 0 \ \text{ si } \ |\alpha| \le n\left(\frac{1}{q}-1\right) . \tag{14}$$
Comme l'ont montré R. R. Coifman et G. Weiss, ces molécules constituent une partie bornée de H^q. Plus précisément on a, pour de telles molécules b,
$$\|b\|_{H^q} \le C(n,s,q) ,$$
et par suite la proposition 2 découle immédiatement du

LEMME. — *Soient $q \le 2$, s un nombre vérifiant*
$$n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right) < s < \frac{n+2}{2} \tag{15}$$
et a un T^q-atome associé à une boule B, de centre x_0 et de rayon R. On a alors $\pi_\phi(a) = \lambda_a b_a$, où λ_a est un nombre vérifiant
$$|\lambda_a| \le C(n,q,s)$$
et b_a est une q-molécule de centre x_0, de largeur R et de type s.

Démonstration:

Remarquons pour commencer que l'existence d'un nombre s vérifiant l'hypothèse est équivalente à l'inégalité $q > n/(n+1)$. La condition d'annulation (14) (qui se réduit à la nullité de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \pi_\phi(a)(x)\,dx$ en raison de la condition $q > n/(n+1)$) est une conséquence directe de la propriété (iii) satisfaite par ϕ. Il reste donc à prouver qu'on a une inégalité de la forme
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\pi_\phi(a)(\xi)|^2 \left(1+\frac{|\xi-x_0|}{R}\right)^{2s} d\xi \le C(n,q,s) R^{n(1-2/q)} . \tag{16}$$
Pour cela, nous coupons l'intégrale ci-dessus en deux parties. On a d'une part, puisque $s \ge 0$,
$$\int_{|\xi-x_0|\le 2R} |\pi_\phi(a)(\xi)|^2 \left(1+\frac{|\xi-x_0|}{R}\right)^{2s} d\xi \le (1+2^s)^2 \|\pi_\phi(a)\|_2^2 .$$
En vue d'évaluer $\|\pi_\phi(a)\|_2$ par dualité, nous fixons une fonction $g \in L^2$ et nous posons $G(x,y) = g * \phi_y(x)$. On a
$$\int_{\mathbb{R}^n} \pi_\phi(a)(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} a(z)G(z)\frac{dz}{y} ,$$
et donc
$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \pi_\phi(a)(x)g(x)\, dx\right| \le C(n)\int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{S}(a)(x)\mathfrak{S}(G)(x)dx \le C(n)\|\mathfrak{S}(a)\|_2\|\mathfrak{S}(G)\|_2 .$$

Mais on a

$$\|\mathfrak{S}(a)\|_2^2 = C(n) \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |a(z)|^2 \frac{dz}{y} \leq C(n)|B|^{1-2/q}$$

puisque a est un T^q-atome associé à la boule B, et

$$\|\mathfrak{S}(G)\|_2^2 = C(n) \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y|\nabla P(g)|^2 \, dz = C(n)\|g\|_2^2 \; ,$$

en raison d'une propriété d'isométrie bien connue ([11], p. 83). On a donc $\|\pi_\phi(a)\|_2^2 \leq C(n)|B|^{1-2/q}$, ce qui achève de prouver que la première partie de l'intégrale considérée vérifie bien une estimation de la forme (16).

D'autre part, pour contrôler la deuxième partie de cette intégrale, nous avons besoin d'une estimation de la taille de $\pi_\phi(a)(\xi)$ lorsque ξ est loin de x_0. Par définition de ϕ, et du fait que a est un atome associé à la boule B de centre x_0 et de rayon R, on a

$$\pi_\phi(a)(\xi) = \int_{\widehat{B}} a(z) \nabla p_\xi(z) \, dz \; .$$

Pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a $|\nabla p_\xi(z)| \leq C(n) p_\xi(z)/y$, et par suite, si de plus $|\xi - x_0| > 2R$ et $|x - x_0| < R$, on a

$$|\nabla p_\xi(z)| \leq \frac{C(n)}{|\xi - x_0|^{n+1}} \; .$$

Par conséquent,

$$|\pi_\phi(a)(\xi)| \leq \frac{C(n)}{|\xi - x_0|^{n+1}} \int_{\widehat{B}} |a(z)| \, dz \tag{17}$$

pour tout ξ tel que $|\xi - x_0| > 2R$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{B}} |a(z)| \, dz &\leq \left(\int_{\widehat{B}} y \, dz \right)^{1/2} \left(\int_{\widehat{B}} |a(z)|^2 \frac{dz}{y} \right)^{1/2} \\ &\leq C(n,q) R^{1+\frac{n}{2}} R^{n\left(\frac{1}{2} - 1q\right)} \; , \end{aligned}$$

parce que a est un T^q-atome associé à la boule B. En combinant ces inégalités avec l'estimation (17), on voit que

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi - x_0| > 2R} |\pi_\phi(a)(\xi)|^2 \left(1 + \frac{|\xi - x_0|}{R}\right)^{2s} d\xi \\ &\qquad \leq C(n,q) R^{2+n-2s} R^{2n\left(\frac{1}{2} - 1q\right)} \int_{|\xi - x_0| > 2R} \frac{d\xi}{|\xi - x_0|^{2n+2-2s}} \; . \end{aligned}$$

Comme $n+2 > 2s$, cette dernière intégrale est finie et a pour valeur $C(n,s)R^{-n-2+2s}$. On a donc prouvé que

$$\int_{|\xi - x_0| > 2R} |\pi_\phi(a)(\xi)|^2 \left(1 + \frac{|\xi - x_0|}{R}\right)^{2s} d\xi \leq C(n,q,s) R^{n(1-2q)} \; ,$$

ce qui termine la preuve de l'inégalité (16), donc aussi celle du lemme.

Remarque. — Notre démonstration des inégalités relatives à l'opérateur g_* explique, d'un certain point de vue, l'origine de la limitation $p > \frac{2n}{n+1}$. En effet, elle repose en grande partie sur l'utilisation de la proposition 2, appliquée à la fonction $h(f)$, avec $q = p/2$. La démonstration de cette proposition (cf. lemme) montre que la condition $q > n/(n+1)$ provient de deux particularités du gradient du noyau de Poisson. L'une est une propriété d'annulation, et l'autre concerne sa taille à l'infini. En effet :

D'une part, notre fonction ϕ vérifie la condition d'annulation (iii) (ou, ce qui revient au même, (iii_N) pour $N < 1$). Mais, pour tout i, le moment d'ordre 1

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i \phi(x)\, dx$$

n'est pas nul ; par suite ϕ ne vérifie pas la propriété (iii_N) si $N \geq 1$, et donc l'image par π_ϕ d'un T^q-atome n'est plus en général le multiple d'une q-molécule si $q \leq n/(n+1)$, car la condition d'annulation (14), plus exigeante dans ce cas, n'est plus satisfaite. Cette première obstruction est donc liée aux propriétés d'annulation de gradient du noyau de Poisson.

D'autre part, la démonstration de la proposition 2 est aussi basée sur l'existence d'un nombre s vérifiant les inégalités (15), et cette existence est équivalente à la condition $q > n/(n+1)$. La partie gauche de (15), i. e. $n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) < s$, est une condition technique, nécessaire pour qu'une q-molécule appartienne à H^q. La partie droite, i. e. $s < (n+2)/2$, est équivalente, comme on l'a vu au cours de la preuve du lemme, à la finitude d'une certaine intégrale. On voit ainsi que c'est la taille du gradient du noyau de Poisson à l'infini qui crée la seconde l'obstruction.

Références

[1] L. Chevalier. — *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications.* Adv. in Math. **138**, 1 (1998).

[2] L. Chevalier. — *Mouvement brownien et formule de Tanaka en analyse.* Potential Anal. A paraître.

[3] L. Chevalier. — *Une renormalisation du produit.* Préprint.

[4] L. Chevalier et A. Dufresnoy. — *Densité de l'intégrale d'aire, Intégrales singulières et Changements de signe d'une fonction harmonique.* A paraître.

[5] R.R. Coifman, Y. Meyer and E. M. Stein. — *Un nouvel espace fonctionnel adapté à l'étude des opérateurs définis par des intégrales singulières.* Proceedings of a Conference in Harmonic Analysis held at Cortona. Lecture Notes in Math. **992** (1983), 1-15.

[6] R.R. Coifman, Y. Meyer and E. M. Stein. — *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis.* J. Funct. Analysis **62** (1985), 304-335.

[7] Ch. Fefferman and E. M. Stein . — *H^p spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[8] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983) 138-149.

[9] R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *The density of the area integral in $\mathbb{R}^{n+1}_+$.* Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 215-229.

[10] Y. Meyer. — *Ondelettes et Opérateurs I*, Hermann, Paris, 1990.

[11] E. M. Stein. — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1970.

[12] E. M. Stein. — *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1993.

[13] A. Zygmund. — *On certain integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 170-204.

Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
e-mail : lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr