SUR LES PRODUITS TRIPLES Λ-ADIQUES

par Yann-Henri LE BRAS, Alexei PANCHISHKIN

RÉSUMÉ. — Soit $p \geq 5$ un nombre premier et soit $\Lambda = \mathcal{O}[[T]]$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers p-adiques d'une extension finie $K/\mathbf{Q}_p$. Le but de ce travail est de décrire une construction qui associe à chaque triplet $(F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})$ de formes modulaires Λ-adiques ordinaires $F^{(i)} = \sum_{n>0} A_n(T)q^n \in \Lambda[[q]]$ (voir plus loin pour la définition), un produit triple de type de Garrett $L(T_0, T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_3$ où $\mathcal{L}_i$ est le corps des fractions de $\Lambda_i = \mathcal{O}[T_i]$, $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Introduction

Soit $p \geq 5$ un nombre premier et soit $\Lambda = \mathcal{O}[[T]]$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers p-adiques d'une extension finie $K/\mathbf{Q}_p$. On note par $\Lambda_i = \mathcal{O}[[T_i]]$, pour $i = 0, 1, 2, 3$. Le but de ce travail est de décrire une construction qui associe à chaque triplet $(F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})$ de formes modulaires Λ-adiques ordinaires $F^{(i)} = \sum\limits_{n>0} A_n(T)q^n \in \Lambda[[q]]$ (voir plus loin pour la définition), un produit triple de type de Garrett $L(T_0, T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_3$ où $\mathcal{L}_i$ est le corps des fractions de Λ_i. Plus précisément, après toute spécialisation de type

$$P_i : T_i \longmapsto (1+p)^{k_i - 1} - 1 \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

$$P_0 : T_0 \longmapsto (1+p)^m \chi(1+p) - 1$$

sous les conditions $k_1 \geq k_2 \geq k_3$, $k_1 \leq k_2 + k_3 - 2$, $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \bmod 2$ et $k_1 \leq m \leq k_2 + k_3 - 2$, on obtient essentiellement (à une période près), la valeur en m du produit triple de Garrett $L(f_{k_1}^{(1)} \otimes f_{k_2}^{(2)} \otimes f_{k_3}^{(3)}, m, \chi)$ associé aux spécialisations

$$f_{k_i}^{(i)} = F^{(i)}((1+p)^{k_i-1} - 1) = \sum_{n>0} A_n((1+p)^{k_i-1} - 1)q^n \in K[[q]].$$

Ces spécialisations sont des formes modulaires classiques de poids k_i, et la fonction $L(f_{k_1}^{(1)} \otimes f_{k_2}^{(2)} \otimes f_{k_3}^{(3)}, s, \chi)$ est un produit eulérien de degré 8. Il est connu [Ga-Ha], [Or], [PaPT] que les valeurs critiques aux points $s = m$ pour $k_1 \leq m \leq k_2 + k_3 - 2$ sont des nombres algébriques, à une période Ω près, $\Omega = \langle f_{k_1}^{(1)}, f_{k_1}^{(1)} \rangle \langle f_{k_2}^{(2)}, f_{k_2}^{(2)} \rangle \langle f_{k_3}^{(3)}, f_{k_3}^{(3)} \rangle$. De plus, pour k_1, k_2, k_3 fixés, il existe une fonction p-adique analytique (de l'argument

Mots-clés : formes modulaires, séries d'Eisenstein-Siegel, produit triple, formes Λ-adiques, familles p-adiques.
Classification math. : 11F03, 11F33, 11F46, 11F67, 11F70.

cyclotomique $\chi(x)x^m)\ \mathcal{D}_{k_1,k_2,k_3}$ qui interpole ces valeurs spéciales, voir [PaPT]. Les principaux moyens mis en œuvre sont d'une part, la théorie de Hida des formes modulaires Λ-adiques, en particulier sa construction d'un produit de Petersson algébrique, d'autre part la construction des séries Λ-adiques d'Eisenstein-Siegel et de leurs images inverses (le «pullback Λ-adique des formes modulaires» dû à Kitagawa et Panchishkin [Ki-Pa]).

Voici le contenu du travail :

Notations

1. Définition et propriétés analytiques du produit triple

2. Formes modulaires Λ-adiques

3. Forme modulaire Λ-adique de Siegel-Eisenstein

4. Le pullback des formes modulaires Λ-adiques

Les résultats du travail ont étés présentés au colloque international «p-adic aspects of the theory of automorphic representations» (the Hebrew University of Jerusalem, 17–21 février 1998) par le deuxième auteur.

Nous utilisons cette opportunité pour remercier les professeurs Haruzo Hida et Jacques Tilouine pour leur discussions très fructueuses, et les professeurs Ehud de Shalit et Jonathan Rogawski pour leur invitation au colloque à Jerusalem.

Notations

Dans toute la suite, on notera :

$G^3 = Sp_6(\mathbf{Q}) = \{\alpha \in GL_6(\mathbf{Q}) \text{ tels que } {}^t\alpha J_3 \alpha = J_3\}$ où $J_3 = \begin{pmatrix} 0_3 & -1_3 \\ 1_3 & 0_3 \end{pmatrix}$

$G^{1,1,1} = (Sp_2(\mathbf{Q}))^3$, $\Gamma_0^3(p^\alpha) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^3 \text{ telles que } c \equiv 0_3 \bmod (p^\alpha)\}$

$\Gamma_0^{1,1,1}(p^\alpha) = (\Gamma_0(p^\alpha))^3$

B_3 le semi-groupe des matrices 3×3 symétriques semi définies positives demi-entières, et $B_{1,1,1} = \mathbf{Z}^3$

$\Gamma_0^{1,1,1}(p^\alpha)$ agit sur l'ensemble des fonctions $f : H^3 \longrightarrow \mathbf{C}$ par

$$f(Mz) = I(M,z) f(\gamma_1 z_1, \gamma_2 z_2, \gamma_3 z_3)$$

où $M = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ et $I(M,z) = \prod_{j=1}^{3} (c_j z_j + d_j)^k$

On note

$M_k^{1,1,1}(\Gamma_0^{1,1,1}(p^\alpha))$ l'ensemble des fonctions invariantes par cette action et

$M_k^{1,1,1}(\Gamma_0^{1,1,1}(p^\alpha),\psi)) = \{f \in M_k^{1,1,1}(\Gamma_0^{1,1,1}(p^\alpha))$ telles que $f|_k(g_1,g_2,g_3) = \psi(d_1d_2d_3)f, \forall g \in \Gamma_0^{1,1,1}(p^\alpha)\}$.

1. Définition et propriétés analytiques du produit triple.

Le produit triple est défini comme la fonction L complexe (un produit eulérien de huitième degré)

$$L^S(f_1\otimes f_2\otimes f_3,s) = \prod_{p\notin S} L((f_1\otimes f_2\otimes f_3)_p, p^{-s}) \tag{1.1}$$

associée à un triplet

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)e(nz),\quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_2(n)e(nz),\quad f_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_3(n)e(nz),$$

de formes primitives de poids k_1, k_2, k_3, de conducteurs N_1, N_2, N_3, de caractères ψ_j mod N_j $(j = 1, 2, 3)$. Ici

$$\begin{aligned} &L((f_1\otimes f_2\otimes f_3)_p, X)^{-1}\\ &\quad = \det\left(1_8 - X\begin{pmatrix}\alpha_1^1(p) & 0\\ 0 & \alpha_1^2(p)\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\alpha_2^1(p) & 0\\ 0 & \alpha_2^2(p)\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\alpha_3^1(p) & 0\\ 0 & \alpha_3^2(p)\end{pmatrix}\right) \qquad (1.2)\\ &\quad = \prod_\eta (1-\alpha_1^{\eta(1)}\alpha_2^{\eta(2)}\alpha_3^{\eta(3)}X),\quad \eta:\{1,2,3\}\to\{1,2\}, \end{aligned}$$

$1 - a_j(p)X - \psi_i(p)p^{k_i-1}X^2 = (1-\alpha_j^1(p)X)(1-\alpha_j^2(p)X)$, $j = 1, 2, 3$, sont les p-polynômes de Hecke des formes f_i et le produit est étendu sur tous les nombres premiers $p \notin S$, $S = \mathrm{Supp}(N_1N_2N_3)$ l'ensemble des diviseurs premiers du produit $N_1N_2N_3$. On suppose toujours que

$$k_1 \geq k_2 \geq k_3. \tag{1.3}$$

Dans le cadre de la théorie des représentations automorphes la fonction $L^S(f_1\otimes f_2\otimes f_3, s)$ s'identifie à la fonction L automorphe $L^S(s-3/2,\pi,\rho_3)$, où $\pi = \pi_{f_1,f_2,f_3}$ est une certaine représentation automorphe du groupe $G = \mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(2)$, et $\rho_3 : {}^LG \to \mathrm{GL}(8,\mathbf{C})$ est la représentation naturelle du groupe de Langlands ${}^LG$ de G. Plus précisément, le groupe ${}^LG$ est le produit semi–direct de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})^3$ par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, et ρ_3 est l'extension unique de $\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}$, où $\mathrm{Id} : \mathrm{GL}(2)\to\mathrm{GL}(2)$ est la représentation standard [Ga-Ha].

Garrett a découvert une représentation intégrale pour $L^S(f_1\otimes f_2\otimes f_3, s)$ dans le cas $N_1 = N_2 = N_3 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ en utilisant les séries d'Eisenstein–Siegel de degré

3 et de poids k :

$$E_k(Z,s)=(\det\Im(Z))^s\sum_{C,D}\det(CZ+D)^{-k}|\det(CZ+D)|^{-2s},$$

où $Z=X+iY\in H_3=\{Z\in GL(3,\mathbf{C})\mid {}^tZ=Z,Y>0\}$ le demi-plan de Siegel de degré 3, $\begin{pmatrix} * & * \\ C & D\end{pmatrix}\in P(3,\mathbf{Z})\backslash\operatorname{Sp}(3,\mathbf{Z})$,

$$\operatorname{Sp}(3,\mathbf{Z})=\left\{g\in\operatorname{GL}(6,\mathbf{Z})\mid {}^tgJg=J\right\},\ \left(J=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}\right)$$

le groupe modulaire de Siegel,

$$P(3,\mathbf{Z})=\left\{g=\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & D\end{pmatrix}\mid g\in\operatorname{Sp}(3,\mathbf{Z}))\right\},P(3,\mathbf{Z})\subset\operatorname{Sp}(3,\mathbf{Z})$$

le sous–groupe parabolique maximal de $\operatorname{Sp}(3,\mathbf{Z})$.

Alors on a la représentation intégrale suivante: pour $\Re(s)\gg 0$

$$\begin{aligned}\int_{(\Gamma\backslash H)^3} & E_k(\operatorname{diag}(z_1,z_2,z_3),s)\overline{f_1(z_1)f_2(z_2)f_3(z_3)}dv_k \\ &= L(f_1\otimes f_2\otimes f_3,s+2k-2)\frac{i^k2^{6-4s-5k}\cdot\pi^{3-s-2k}\Gamma_\infty(s)}{\zeta(2s+k)\cdot\zeta(4s+2k-2)}\end{aligned}\tag{1.4}$$

où

$$\Gamma_\infty(s)=\frac{\Gamma(s+k-1)^3\Gamma(s+2k-2)}{\Gamma(s+k)\Gamma(2s+2k-2)}\tag{1.5}$$

$$dv_k=(y_1y_2y_3)^{k-2}dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,dx_3\,dy_3,\ z_j=x_j+y_j\ (j=1,2,3).$$

À l'aide de propriétés analytiques des séries $E_k(Z,s)$ par rapport à s on peut construire un prolongement analytique de $L(f_1\otimes f_2\otimes f_3,s)$, puis obtenir une équation fonctionnelle de type $s\mapsto 3k-2-s$ et une description de ses pôles, car $E_k(Z,s)$ satisfait une équation fonctionnelle de type $s\mapsto 2-k-s$. Plus précisément, écrivons

$$F_k(Z,s)=\pi^{-3s}\zeta(2s+k)\zeta(4s+2k-2)\Gamma(s+k)\Gamma(2s+2k-2)E_k(Z,s),\tag{1.6}$$

alors

$$F_k(Z,2-k-s)=F_k(Z,s).\tag{1.7}$$

Orloff [Or] a généralisé cette représentation intégrale dans le cas des poids arbitraires pairs en utilisant les opérateurs différentiels de Shimura

$$\delta_p=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{p}{2iy}+\frac{\partial}{\partial z}\right),\ D_p^{(r)}=\delta_{p+2r-2}\circ\ldots\circ\delta_{p+2}\circ\delta.\tag{1.8}$$

Une propriété importante de $D_p^{(r)}$ dit que pour une forme modulaire $f\in\mathcal{M}_k(N,\psi)$ la fonction (non–holomorphe) $D_k^{(r)}f$ est une C^∞–forme modulaire de poids $k+2r$,

$$D_k^{(r)}f\in\mathcal{M}^\infty_{k+2r}(N,\psi).$$

Alors pour $k_1 \geq k_2 \geq k_3$, $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \bmod 2$, on a

$$D_{k_2}^{((k_1-k_2)/2)} f_2 \in \mathcal{M}_{k_1}^{\infty}(N_2, \psi_2), \quad D_{k_3}^{((k_1-k_3)/2)} f_3 \in \mathcal{M}_{k_1}^{\infty}(N_3, \psi_3). \tag{1.9}$$

En supposant que $N_1 = N_2 = N_3 = 1$ il a obtenu une représentation intégrale qui exprime $L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s + 2k_1 - 2)$ en termes de l'intégrale

$$\int_{(\Gamma\backslash H)^3} E_k(\mathrm{diag}(z_1, z_2, z_3), s) \overline{f_1(z_1) D_{k_2}^{((k_1-k_2)/2)} f_2(z_2) D_{k_3}^{((k_1-k_3)/2)} f_3(z_3)}\, dv_k, \tag{1.10}$$

où

$$dv_k = (y_1 y_2 y_3)^{k-2} dx_1 dx_2 dx_3 dy_1 dy_2 dy_3,$$

$z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, 3$. Ceci permet d'obtenir un prolongement analytique de $L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s)$ et une équation fonctionnelle de type $s \mapsto k_1 + k_2 + k_3 - 2 - s$ à l'aide de propriétés analytiques des séries $E_k(Z, s)$ ci-dessus.

Plus précisément, si l'on pose $\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)$,

$$\begin{aligned} &\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s) \\ &\quad = \Gamma_{\mathbf{C}}(s)\Gamma_{\mathbf{C}}(s - k_3 + 1)\Gamma_{\mathbf{C}}(s - k_2 + 1)\Gamma_{\mathbf{C}}(s - k_1 + 1) L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s) \end{aligned} \tag{1.11}$$

alors

$$\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, k_1 + k_2 + k_3 - 2 - s) = -\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s). \tag{1.12}$$

De plus, selon des résultats récents de Rallis la fonction $\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s)$ est holomorphe (voir [PSh-R]).

2. Formes modulaires Λ-adiques.

Rappelons que l'algèbre d'Iwasawa [Iw] $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[T]] \cong \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ est l'anneau complété du groupe profini $\Gamma = 1 + p\mathbf{Z}_p = \langle 1 + p \rangle \subset \mathbf{Z}_p^{\times}$. Vu le théorème de Kubota-Leopoldt [Ku-Le], il existe un unique élément $g(T) \in \Lambda$ tel que pour tous $k \geq 1$, $k \equiv 1 \bmod (p-1)$

$$g((1+p)^k - 1) = \zeta^*(1-k)$$

où $\zeta^*(1-k)$ désigne la valeur spéciale en $s = 1 - k$ de la fonction zêta de Riemann avec le p-facteur d'Euler modifié : $\zeta^*(s) = (1 - (1+p)^{-s+1})(1 - p^{-s})\zeta(s)$.

Définition 2.1. — *L'anneau de Serre* $\Lambda[[q]]$ est l'anneau de tous les q-développements formels à coefficients dans Λ :

$$\Lambda[[q]] = \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(T) q^n \mid a_n(T) \in \Lambda \right\}.$$

DÉFINITION 2.2. — Le Λ-module $M(\Lambda) \subset \Lambda[[q]]$ de toutes les *formes modulaires Λ-adiques* (d'un niveau fixé N, $(N,p)=1$) est formé de tous les $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(T)q^n \in \Lambda[[q]]$ tels que pour $k \geq 5$, $k \equiv 1 \bmod (p-1)$ la spécialisation

$$f_k = f|_{T=(1+p)^k-1} \in \mathbf{Z}_p[[q]]$$

est une forme modulaire classique de poids k et de niveau Np.

Autrement dit f est donnée par une mesure p-adique μ_f sur $\mathbf{Z}_p^\times$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p[[q]]$ telle que les intégrales

$$\int_{\mathbf{Z}_p^\times} x_p^k \mu_f = f_k \tag{2.1}$$

sont des formes modulaires classiques (pour tout k).

Exemple 2.3. — La série Λ-adique d'Eisenstein $f \in M(\Lambda)$ (de niveau $N=1$) est donnée par

$$f_k = \frac{\zeta^*(1-k)}{2} + \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}^*(n)q^n, \quad \sigma_{k-1}^*(n) = (1-(1+p)^k) \sum_{d|n, p\nmid d} d^{k-1}. \tag{2.2}$$

Exemple 2.4. — Les familles de Hida $f = \{f_k\}$ sont éléments de

$$S^{\mathrm{ord}}(\Lambda) = eS(\Lambda), \quad e = \lim_{n\to\infty} U_p^{n!}$$

($U_p(\sum_{n\geq 0} a_n q^n) = \sum_{n\geq 0} a_{pn} q^n$ est l'opérateur d'Atkin (U-opérateur), $S(\Lambda)$ est le Λ-sous module de toutes les formes paraboliques Λ-adiques.

On note $\chi = \omega^a$ une puissance du caractère de Teichmüller,

$$\omega = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mu_{p-1}\,.$$

On appelle $\Gamma = \Gamma_0^{1,1,1}(p^\alpha)$, $G = G^{1,1,1}$ et $B = B^{1,1,1}$.

DÉFINITION 2.5. — Soit $\mathcal{P}$ un sous-espace Zariski-dense de Spec $\Lambda(\mathbf{Q}_p)$. On dit que $F \in \Lambda[[q^B]]$ est une forme Λ-adique sur G avec caractère χ par rapport à $\mathcal{P}$ si $F(\varepsilon(u)u^k-1)$ est le q-développement d'une forme modulaire de $M_k^{1,1,1}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)$ pour tout couple (k,ε) tel que $P_{(k,\varepsilon)} \in \mathcal{P}$.

Dans toute la suite, on prendra $\mathcal{P} = \mathcal{P}(5) = \{P_{(k,\varepsilon)}; k \geq 5\}$. On note alors $M(G,\chi;\Lambda)$ le Λ-sous-module de $\Lambda[[q^B]]$ engendré par les formes Λ-adiques sur G avec caractère χ.

Si A est une Λ-algèbre, il est clair qu'on a la décomposition suivante:

$$A[[q^B]] = A[[q]]\widehat{\otimes} A[[q]]\widehat{\otimes} A[[q]].$$

On note $T_i(p)$ l'opérateur de Hecke agissant sur $M_k^{1,1,1}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)$ par la variable z_i, et on écrit $e_i = \lim_{n\to+\infty} T_i(p)^{n!}$

On note alors $M_k^{1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma) = e_1e_2e_3M_k^{1,1,1}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)$, l'ensemble des formes ordinaires. On dit qu'une forme Λ-adique de $M^{1,1,1}(\chi,\Lambda)$ est *ordinaire* si sa spécialisation en tout $P_{(k,\varepsilon)} \in \mathcal{P}$ appartient à $M_k^{1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)$. On note $M^{1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$, l'ensemble des formes modulaires Λ-adiques ordinaires.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.6.

$$M^{1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda) = M^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)\otimes M^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)\otimes M^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda).$$

Démonstration. — La preuve découle presque immédiatement de la finitude de $M^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ démontrée par Hida [Hi93]. En effet, soit $\{g^{(i)}\}_{1\le i\le n}$ une base de $M^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$. Soit $P = P_{k,\varepsilon} \in \mathcal{P}$, $G \in M^{1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ et $G_P \in M_k^{1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)$ sa spécialisation au point P. On a

$$\begin{aligned} &M_k^{1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord},1-\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)\\ &\qquad = M_k^{\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)\otimes M_k^{\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)\otimes M_k^{\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma).\end{aligned}$$

Donc, comme toute forme de $M_k^{\mathrm{ord}}(\varepsilon\chi\omega^{-k},\Gamma)$ provient d'une spécialisation d'une forme ordinaire Λ-adique, on a

$$G_P = \sum_{1\le i,j,k\le n} f_P^{(i)}\otimes f_P^{(j)}\otimes f_P^{(k)}$$

où $f_P^{(\alpha)}$ est la spécialisation de $f^{(\alpha)}$ au point P. Et alors c'est terminé, on peut écrire

$$G = \sum_{1\le i,j,k\le n} f^{(i)}\otimes f^{(j)}\otimes f^{(k)}.$$

3. Forme modulaire Λ-adique de Siegel-Eisenstein.

L'idée est de construire un analogue des séries d'Eisenstein dans le cadre Λ-adique. Pour cela on suivra la route empruntée par Panchishkin et Kitagawa [Pa-Ki]. Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $N > 1$ tel que $\chi(-1) = (-1)^k$. Pour un entier n impair (plus loin, $n = 3$), on écrit :

$$\begin{aligned} G_k^+(z) &= G_k^-(z) = G_k^*(z)\\ &= i^{nk}2^{-n(k+1)}\pi^{-nk}\Gamma_n(k)L_n(k,\chi)\times\prod_{i=0}^{[n/2]}L_n(2k-2i,\chi^2)E|W(N)\end{aligned}$$

où $\Gamma_n(s) = \pi^{n(n-1)/4} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(s - (j/2))$ et où $W(N) = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ N1_n & 0_n \end{pmatrix}$ est l'involution principale de niveau N.

Maintenant, nous pouvons commencer la construction p-adique. On note $A_{n,p} = A_n \otimes \mathbf{Z}_p$ le $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang $n(n+1)/2$ des matrices demi-entières symétriques de taille n à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$. On construit alors une certaine mesure p-adique sur le groupe compact $Y = A_{n,p} \times \mathbf{Z}_p^*$, à valeurs dans l'anneau complété du semi-groupe multiplicatif q^{B_n}, $R = \mathcal{O}_p[[q^{B_n}]] \otimes \mathbf{Q}$, où $\mathcal{O}_p$ est l'anneau des entiers du corps de Tate. Cette mesure sera caractérisée par ses intégrales sur le sous-ensemble discret $Z_p \subset Y$ constitué des éléments de la forme $((k,\chi),\psi)$ où k est un entier suffisamment grand, χ un caractère de Dirichlet sur $\mathbf{Z}_p^*$, et ψ un caractère additif de $A_{n,p}$. Pour voir cela, on utilise une observation simple :

si pour un élément fixé $G(q) = \sum_{\xi \in B_n} g(\xi) q^{\xi} \in R$, et pour tout ouvert compact U de $A_{n,p}$, on pose $G(q,U) = \sum_{\xi \in B_n \cap U} g(\xi) q^{\xi}$, alors on obtient une mesure μ_G sur $A_{n,p}$, définie par $\mu_G(U) = G(q,U)$. Il faut alors se souvenir que les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein normalisées peuvent être représentées par certaines intégrales p-adiques. Regardons tout cela d'un peu plus près : sous les assertions précédentes sur k, les séries $G_k^+(z) = G^+(z,k,\chi,N)$ sont des formes modulaires holomorphes de Siegel à coefficients de Fourier cyclotomiques : $G^+(z,k,\chi,N) = \sum_{A_n \ni \xi > 0} b^+(\xi,k,\chi) e_n(\xi z)$, où

$$b^+(\xi,k,\chi) = 2^{-nk} \det(\xi)^{k-\kappa} M(\xi,\chi,k)$$

Ici, $\kappa = (n+1)/2$ et le facteur intégral $M(\xi,\chi,k) = \prod_{q \in P(\xi)} M_q(\xi,\chi(q)q^{-k})$ est un produit eulérien fini pris sur tous les diviseurs premiers de N et les diviseurs élémentaires de la matrice ξ. La forme explicite des facteurs locaux $M_q(\xi,\chi(q)q^{-k})$ n'est pas très intéressante ici, le seul point nous important pour la construction étant le fait que ce sont des polynômes à coefficients entiers. On pose alors $M = Np$ et

$$G_p^+(z,k,\chi,M) = \sum_{\substack{A_n \ni \xi > 0 \\ (\det \xi, M) = 1}} b^+(\xi,k,\chi) e_n(\xi z).$$

On a alors le théorème suivant dû à Panchishkin [PaSE] :

Théorème 3.1. — *Soit n un entier impair. Alors, il existe une mesure μ_{E-S} dite mesure d'Eisenstein-Siegel, sur Y à valeurs dans R uniquement déterminée par les propriétés suivantes : pour tous couples (k,χ) avec $k \in \mathbf{Z}$ suffisamment grand, $2k > n$, et χ un caractère de Dirichlet $\chi : \mathbf{Z}_p^* \longrightarrow \mathbf{C}_p^*$, $\bmod M$ avec M divisible par p, on a :*

$$\int_Y \det(\xi)^{k-\kappa} x_p^{k-(n/2)} \chi(x) \mu_{E-S}(\xi,x) = G_p^+(z,k,\chi^{-1},M) \in R.$$

Démonstration. — La démonstration de ce théorème peut se trouver dans [PaSE], et nous ne la donnerons pas ici. Tout ce qu'il importe de savoir est que la construction de cette mesure d'Eisenstein-Siegel est explicite.

On prend alors dans la suite $n = 3$. Les formules explicites des coefficients de Fourier montrent que cette mesure prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}_p[[q^{B_3}]]$ et que sa restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ identifié à $\Delta \times \Gamma$ définit un élément $E_\Lambda(\chi) \in M^3(\chi, \Lambda)$ appelé *forme modulaire* Λ*-adique d'Eisenstein-Siegel* qui vérifie :

$$E_\Lambda(\chi)(\varepsilon(u)u^k - 1) = G_p^+(z, k, \chi^{-1}\varepsilon^{-1}\omega^k, M), \text{ avec } M = p^\alpha.$$

4. Le pullback des formes modulaires Λ-adiques.

Soit π l'application définie par :

$$\pi : B_3 \longrightarrow B_{1,1,1}$$
$$\begin{pmatrix} \xi_1 & * & * \\ * & \xi_2 & * \\ * & * & \xi_3 \end{pmatrix} \longmapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

Il est facile de vérifier que pour tout $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in B_{1,1,1}$, la fibre $\pi^{-1}((\xi_1, \xi_2, \xi_3))$ est finie.

On peut alors définir l'application pullback, notée Φ :

$$\Phi : \Lambda[[q^{B_3}]] \longrightarrow \Lambda[[q^{B_{1,1,1}}]]$$
$$F \longmapsto \Phi(F)$$

où, si $F = \sum_{\xi \in B_3} a(\xi, F)q^\xi$, alors

$$a((\xi_1, \xi_2, \xi_3), \Phi(F)) = \sum_{\xi \in \pi^{-1}((\xi_1, \xi_2, \xi_3))} a(\xi, F)$$

Il est clair que Φ est un homomorphisme de Λ-modules, et on a la proposition suivante :

Proposition 4.1. — *Φ envoie $M^3(\chi, \Lambda)$ dans $M^{1,1,1}(\chi, \Lambda)$.*

Démonstration. — Soit $F = \sum_{\xi \in B_3} a(\xi, F)q^\xi \in M^3(\chi, \Lambda) \subset \Lambda[[q^{B_3}]]$ une forme Λ-adique de degré 3. En tant que fonction de la variable complexe Z, F peut s'écrire sous la forme suivante :

$$F = \sum_{\xi \in B_3} a(\xi, F) \exp\{2i\pi \mathrm{tr}(\xi Z)\}.$$

D'autre part,

$$\Phi(F) = \sum_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{Z}^3} \left(\sum_{\xi \in \pi^{-1}((\xi_1, \xi_2, \xi_3))} a(\xi, F) \right) q^{\xi_1} q^{\xi_2} q^{\xi_3}.$$

Si on s'intéresse aux spécialisations de ces deux fonctions au point $P_{k,\varepsilon} = \varepsilon(u)u^k - 1$ que l'on notera respectivement $f_{k,\varepsilon}$ et $\Phi(F)(P_{k,\varepsilon})$, on a alors

$$\begin{aligned}\Phi(F)(P_{k,\varepsilon}) &= \sum_{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbf{Z}^3} \left(\sum_{\xi\in\pi^{-1}((\xi_1,\xi_2,\xi_3))} a(\xi, F, \varepsilon(u)u^k - 1) \right) \\ &\qquad\qquad \times \exp\{2i\pi \mathrm{tr}(\xi \mathrm{diag}(z_1; z_2, z_3))\} \\ &= f_{k,\varepsilon}(\mathrm{diag}(z_1; z_2, z_3)).\end{aligned}$$

Et donc, $\Phi(F)(P_{k,\varepsilon}) \in M_k^{1,1,1}(\varepsilon\chi\omega^{-k}, \Gamma)$

On va maintenant s'intéresser à l'image par Φ de la série $E_\Lambda(\chi)$ d'Eisenstein-Siegel construite précédemment. Comme $E_\Lambda(\chi) \in M^3(\chi, \Lambda)$, $\Phi(E_\Lambda(\chi)) \in M^{1,1,1}(\chi, \Lambda)$. On peut alors écrire

$$L(T_0, T_1, T_2, T_3) = (\Phi(E_\Lambda(\chi)) = \sum_j G_j^{(1)} \otimes G_j^{(2)} \otimes G_j^{(3)}.$$

On voit bien que cette construction associe à chaque triplet $(F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})$ de formes modulaires Λ-adiques ordinaires $F^{(i)} = \sum_{n>0} A_n(T)q^n \in \Lambda[[q]]$, un produit triple de type de Garrett $L(T_0, T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_3$ où $\mathcal{L}_i$ est le corps des fractions de Λ_i . Nous appelons $L(T_0, T_1, T_2, T_3)$ *le produit triple* Λ*-adique* car la construction de $L(T_0, T_1, T_2, T_3)$ utilise des analogues Λ-adiques de représentations complexes de Garrett et du produit de Petersson [Hi90].

De plus, on espère aussi qu'après toute spécialisation de type

$$\begin{aligned} P_i : T_i &\longmapsto (1+p)^{k_i-1} - 1 \ \text{ pour } \ i = 1,2,3 \\ P_0 : T_0 &\longmapsto (1+p)^m \chi(1+p) - 1 \end{aligned}$$

sous les conditions $k_1 \geq k_2 \geq k_3$, $k_1 \leq k_2 + k_3 - 2$, $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \bmod 2$ et $k_1 \leq m \leq k_2 + k_3 - 2$, on obtient essentiellement (à une période près), la valeur en m du produit triple de Garrett $L(f_{k_1}^{(1)} \otimes f_{k_2}^{(2)} \otimes f_{k_3}^{(3)}, m, \chi)$ associé aux spécialisations

$$f_{k_i}^{(i)} = F^{(i)}((1+p)^{k_i-1} - 1) = \sum_{n>0} A_n((1+p)^{k_i-1} - 1)q^n \in K[[q]]$$

Ces spécialisations sont des formes modulaires classiques de poids k_i, et la fonction

$$L(f_{k_1}^{(1)} \otimes f_{k_2}^{(2)} \otimes f_{k_3}^{(3)}, s, \chi)$$

est le produit eulérien de Garrett de degré 8.

References

[Bl2] D. BLASIUS, *Appendix to Orloff "Critical values of certain tensor product L-functions*, Invent.Math. **90** (1987), 181–188.

[Co] J. COATES, *On p-adic L-functions*, Sem. Bourbaki, 40ème année, 1987–88, **701**, Astérisque (1989), 177–178.

[Co-PeRi] J. COATES, B. PERRIN-RIOU, *On p - adic L–functions attached to motives over* **Q**, Advanced Studies in Pure Math. **17** (1989), 23–54.

[De71] P. DELIGNE, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Sem. Bourb. 1968/69 ,exp. no 335. Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. **179** (1971), 139–172.

[De79] P. DELIGNE, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math. **33**, part 2 (1979), 313–342.

[Ga] P.B. GARRETT, *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products*, Ann. of Math. 125 (1987), 209–235.

[Ga-Ha] P.B. GARRETT, M. HARRIS, *Special values of triple product L–functions*, Amer. J. Math 115 (1993) 159–238.

[Hi86] H. HIDA, *Galois representations into $GL_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. 85 (1986) 545-613.

[Hi90] H. HIDA, *Le produit de Petersson et de Rankin p-adique*. Sémin. Théor. Nombres, Paris/Fr. 1988–89, Prog. Math. 91 (1990) 87-102.

[Hi91] H. HIDA, *On p-adic L-functions of $GL(2) \times GL(2)$ over totally real fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1991) 311–391.

[Hi93] H. HIDA, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts. 26 Cambridge: Cambridge University Press, 386 p., 1993.

[Hi96] H. HIDA, *On the search of genuine p–adic modular L–functions for* $\mathrm{GL}(2)$. Mém. Soc. Math. de France (N.S.), **67** (1996), 110 p.

[Iw] K. IWASAWA, *Lectures on p-adic L-functions*, Ann. of Math. Studies, **74** Princeton University Press, 1972.

[Ka76] N.M. KATZ, *p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series*, Ann. of Math. **104** (1976), 459–571.

[Ka77] N.M. KATZ, *The Eisenstein measure and p-adic interpolation*, Amer. J. Math. **99** (1977), 238–311.

[Ka78] N.M. KATZ, *p-adic L-functions for CM-fields*, Invent. Math. **48** (1978), 199–297.

[KiPa] K. KITAGAWA, A.A. PANCHISHKIN, *On the Λ-adic Klingen-Eisenstein series*, Prépublication de l'Institut Fourier n$^\circ$ 339, Grenoble, 1–11.

[Ku-Le] T. KUBOTA, H.-W. LEOPOLDT, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte*, J- reine angew. math. **214/215** (1964), 328–339.

[LB] Y.-H. LE BRAS, *Familles arithmétiques de fonctions L attachées aux courbes elliptiques*, UJF, Rapport de stage de DEA, 24.06.1994.

[Man] Yu.I.Manin, *Non-Archimedean integration and Jacquet-Langlands p-adic L-functions*, Russ. Math. Surveys **31**-1 (1976) 5–57.

[Or] T. Orloff, *Special values and mixed weight triple products* (with an Appendix by D.Blasius), Invent. Math. **90** (1987) 169–180.

[PaLNM] A.A. Panchishkin, *Non-Archimedean L-functions of Siegel and Hilbert modular forms*, Lecture Notes in Math., **1471**, Springer–Verlag, 1991, 166p.

[PaIF] A.A. Panchishkin, *Motives over totally real fields and p–adic L–functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) , **44** (1994) 989–1023.

[PaSE] A.A. Panchishkin, *On the Siegel-Eisenstein measure*, manuscript, 1994 (submitted to the Proc. of Sém. de la Théorie des Nombres, Paris, 1994).

[PaPT] A.A. Panchishkin, *Produits triples des formes modulaires et leur interpolation p-adique la méthode d'Amice-Vélu*, manuscript, 1994.

[PaViet] A.A. Panchishkin, *Non-Archimedean Mellin transform and p-adic L Functions*, Vietnam Journal of Mathematics, **3** (1997), 179–202.

[PSh-R] I.I. Piatetski-Shapiro, S. Rallis, *Rankin triple L functions*, Compos. Math. **64** (1987) 31–115.

[Ran39] R.A. Rankin, *Contribution to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions*, I.II.Proc. Camb. Phil. Soc **35** (1939) 351–372.

[Ran52] R.A. Rankin, *The scalar product of modular forms*, Proc. London math. Soc. **2** (1952) 198–217.

[Shi71] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton Univ. Press, 1971.

[Shi76] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976) 783–804.

[Shi77] G. Shimura, *On the periods of modular forms*, Math. Annalen **229** (1977) 211–221.

[Vi] M.M. Višik, *Non-Archimedean measures associated with Dirichlet series*, Mat. Sbornik **99** (1976) 248–26.

[Wa] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Springer-Verlag: N.Y. e.a., 1982.

[Wi88] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94**-3 (1988), 529–573.

[Wi95] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math., II. Ser. **141**-3 (1995) 443–551.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(9 novembre 1998)