Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques

José Bertin et Ariane Mézard

Abstract: In this paper we study formal moduli for wildly ramified Galois covering. We prove a local-global principle. We then focus on the infinitesimal deformations of the $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-covers. We explicitly compute a deformation of an automorphism of order p which implies a universal obstruction for $p > 2$. By deforming Artin-Schreier equations we obtain a lower bound on the dimension of the local versal deformation ring. At last, by comparing the global versal deformation ring to the complete local ring in a point of a moduli space, we determine the dimensions of the global and local versal deformation ring.

1 Introduction

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k. Soit $\pi : C \to \Sigma$ un revêtement défini sur k entre deux courbes algébriques complètes et lisses. Nous cherchons à relever ce revêtement à un anneau de valuation discrète complet R dominant $W(k)$. Des motivations pour aborder un tel problèmes peuvent être trouvées dans l'exposé de Oort ([Oo]) et dans les travaux récents de Green et Matignon ([GrMa1], [GrMa2]).
Nous nous limitons au cas où le revêtement est galoisien de groupe G. Le relèvement de π à R est équivalent au relèvement à R de la courbe C et de l'action du groupe G. Lorsque les groupes d'inertie sont d'ordre premier à p, autrement dit si la ramification est modérée, nous savons que le problème de relèvement a une solution ([Gro1], [Oo]). En revanche s'il y a de la ramification sauvage, ce problème peut conduire à des obstructions.
Ces obstructions sont de nature locales (voir notamment [Be], [GrMa1]). Par exemple elles peuvent porter sur le caractère d'Artin attaché à un point x de C dont le groupe d'inertie G_x a un ordre divisible par p. En général, elles s'expriment comme obstructions à la déformation d'un sous-groupe fini du groupe des automorphismes de $k[[T]]$. Sekiguchi,

Mots clés : anneau de déformation versel, obstruction, revêtement de courbes algébriques, ramification sauvage, équations d'Artin-Schreier, espaces de modules.

Oort et Suwa ([SeOoSu]) ont étudié le problème du relèvement de π en travaillant sur les déformations globales de C et G. Nous adoptons un autre point de vue : nous introduisons les déformations locales pour lesquelles la courbe C est remplacée par un voisinage formel d'un point fixe et G par le groupe d'inertie G_x (d'ordre divisible par p) correspondant.
Notre premier résultat (Théorème 3.3.6) est l'énoncé d'un principe local-global qui relie les déformations globales des déformations locales. Un résultat de cette nature avait déja été utilisé par Green et Matignon ([GrMa1]). D'après la théorie classique des déformations, les déformations locales (ou globales) sont décrites par un anneau local complet. Notons R_{G_x} l'anneau associé aux déformations locales. Grâce au principe local-global, nous ramenons l'étude du relèvement de π à l'étude de l'anneau R_{G_x}. Nous pouvons rapprocher le problème de la description de R_{G_x} à celui introduit par Mazur portant sur les anneaux de déformations universels de représentations galoisiennes ([Ma],[Mé]). Cette description est en général compliquée. Nous identifions l'espace tangent de R_{G_x} au groupe $H^1(G_x, \Theta)$, avec Θ le G_x-module des champs de vecteurs formels au point x. Puis nous montrons que les obstructions appartiennent à $H^2(G_x, \Theta)$. Lorsque G_x est un p-groupe cyclique, nous calculons les dimensions de ces groupes de cohomologies.
Notre second résultat porte sur la description de R_{G_x} pour G_x cyclique d'ordre p. Le relèvement en caractéristique zéro est alors possible ([GrMa1],[SeOoSu]). Notons m le conducteur de Hasse de G_x. En mettant en évidence une obstruction cohomologique non triviale universelle, nous prouvons que si $p > 2$ et si $(m, p) \neq (1, 3)$, alors R_{G_x} est toujours singulier. Par un argument de déformations des équations d'Artin-Schreier, nous minorons la dimension de Krull de R_{G_x}. Le principe local-global et un résultat de Harbater ([Ha]) permettent alors de prouver que cette borne inférieure est effectivement la dimension de Krull. Si le conducteur est $m = 1$, l'anneau R_{G_x} est décrit explicitement à l'aide d'une unique équation que nous identifions à un polynôme de Tchebychev. Enfin pour les petites valeurs de m ($m < p - 1$), nous observons que R_{G_x} est d'intersection complète.

2 Déformations locales et globales

Soit Λ un anneau de valuation discrète complet de caractéristique 0 de corps résiduel k ; nous pouvons choisir $\Lambda = W(k)$. Considérons la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les Λ-algèbres locales R noetheriennes complètes, avec $k \cong R/\mathcal{M}_R$ pour $\mathcal{M}_R$ idéal maximal de R ; les flèches sont les Λ-morphismes d'anneaux locaux. La catégorie $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ formée des objets qui sont de longueur finie comme Λ-modules. En particulier notons $k[\varepsilon]$, où $\varepsilon^2 = 0$, l'anneau de $\mathcal{C}$ des nombres duaux sur k. Une surjection $A' \to A$

dans $\mathcal{C}$ est une *petite extension* si son noyau $\mathfrak{a}$ est principal et vérifie $\mathfrak{a}\mathcal{M}_{A'} = 0$.

Soit $C \to C/G$ un *revêtement sauvagement ramifié*, que nous identifierons au couple (C, G), composé d'une k-courbe algébrique projective lisse C et d'un sous-groupe fini G de $\mathrm{Aut}_k(C)$ d'ordre divisible par p. Un point $x \in C$ est un *point de ramification sauvage* si le stabilisateur (le sous-groupe d'inertie) G_x au point x a un ordre divisible par p. Ces points vont jouer le rôle de points singuliers et vont contribuer aux déformations du revêtement.

Rappelons brièvement la terminologie usuelle ([DeMu],[La],[Sc]). Une *déformation de* (C, G) à A objet de $\mathcal{C}$ est une classe d'isomorphismes G-équivariants induisant l'identité sur C de couples (X, G) définis par
-un *relèvement de* C à A, i.e. une courbe propre et lisse $\mathfrak{p} : X \to \mathrm{Spec} A$ avec un isomorphisme $\mathfrak{p}^{-1}(0) \cong C$ (c'est-à-dire la fibre de X au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec} A$ est C).
-un relèvement de G à X en un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_A(X)$, tel que l'isomorphisme $C \cong \mathfrak{p}^{-1}(0) = X \otimes_A k$ soit G-équivariant.
Nous définissons ainsi un foncteur covariant

$$D_{\mathrm{gl}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, \quad A \mapsto \{\text{déformations de } (C, G) \text{ à } A\}$$

Ce foncteur est dit *foncteur des déformations de* (C, G). L'indice gl de D_{gl} indique que nous déformons globalement la courbe.
Soit deux foncteurs covariants $D, D' : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. Un morphisme de foncteurs $\phi : D \to D'$ est *lisse* si pour toute petite extension de $\mathcal{C}$ $A \to A'$, ϕ induit un morphisme surjectif

$$D'(A') \twoheadrightarrow D(A') \times_{D(A)} D'(A)$$

Le foncteur covariant D *admet une déformation verselle* si : ([Sc] §2) Il existe R objet de $\widehat{\mathcal{C}}$ tel que $D(k[\varepsilon]) \cong \mathcal{M}_R/\mathcal{M}_R^2$, et un morphisme lisse de foncteurs $\xi : D \to \mathrm{Hom}_\Lambda(R, \cdot)$. Le couple (R, ξ) est dit *déformation verselle* et l'anneau R est dit *anneau de déformations versel*. Si ξ est un isomorphisme de foncteur, alors (R, ξ) est dit *déformation universelle*, et l'anneau R est dit *anneau de déformations universel*.
Soit $\mathcal{T}_C$ le faisceau tangent à la courbe, dual du faisceau des différentielles $\Omega^1_{C/k}$. Comme $\mathcal{T}_C$ est un G-faisceau, les groupes de cohomologie $H^i(G, \mathcal{T}_C)$ sont naturellement des G-modules.

Théorème 2.1 Le foncteur des déformations D_{gl} de (C, G) admet une déformation verselle, et si $H^0(C, \mathcal{T}_C)^G = 0$, cette déformation est universelle.

PREUVE : Il suffit de reprendre la démonstration de Schlessinger ([Sc] §3.7) qui établit l'existence d'une déformation verselle du foncteur des déformations de C, en constatant que les constructions faites sont compatibles avec l'action de G. ■

L'hypothèse du théorème 2.1 est vérifiée par exemple si la courbe C est de genre $g \geq 2$, car alors $H^0(C, \mathcal{T}_C) = 0$ et dans ce cas D_{gl} admet une déformation universelle. Par le théorème d'algébrisation de Grothendieck (FGA, [Gro3]) le schéma formel qui pro-représente D_{gl} est algébrisable, donc est le complété formel d'une courbe propre et lisse sur $\mathrm{Spec}R$ uniquement définie. De plus l'action de G provient d'une action sur cette courbe. Nous allons à présent définir le foncteur des déformations infinitésimales. Soit $y \in C/G$ image d'un point de ramification sauvage $x \in C$. Notons G_x le stabilisateur de x, $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x} \cong k[[T]]$ l'anneau local complété de la courbe C au point x et $\widehat{\mathcal{T}}_{C,x}$ la fibre complétée du faisceau tangent au point x. Il en découle une "représentation" de G_x dans $k[[T]]$, c'est-à-dire un morphisme injectif $G_x \hookrightarrow \mathrm{Aut}k[[T]]$. Un représentant (X, G) d'une déformation de (C, G) à A définit de même une représentation $G_x \hookrightarrow \mathrm{Aut}A[[T]]$ qui par la réduction par le morphisme canonique $A \to k \cong A/\mathcal{M}_A$ redonne la représentation initiale de G_x sur $k[[T]]$.
Ceci suggère de formuler le problème suivant : fixons un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}k[[T]]$ noté G en absence d'ambiguïté avec le sous-groupe des automorphismes de la courbe C. Nous obtenons une représentation $\bar{\rho} : G \hookrightarrow \mathrm{Aut}k[[T]]$. Pour A objet de $\mathcal{C}$, définissons le *foncteur des déformations infinitésimales* D_G de $\bar{\rho} : G \hookrightarrow \mathrm{Aut}k[[T]]$:

$$D_G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens} \quad A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{relèvement}\, G \to \mathrm{Aut}A[[T]] \text{modulo} \\ \text{la conjugaison par un élément} \\ \text{de}\ker(\mathrm{Aut}A[[T]] \to \mathrm{Aut}k[[T]]) \end{array} \right\}$$

Les propriétés nécessaires à l'application du critère de Schlessinger se vérifient aisément.

Théorème 2.2 Le foncteur D_G des relèvements infinitésimaux de $\bar{\rho} : G \hookrightarrow \mathrm{Aut}k[[T]]$ admet une déformation verselle.

Contrairement au cas global, ce relèvement versel n'est en général pas universel.

3 Principe local-global

Dans ce paragraphe nous allons relier les déformations globales du revêtement induit par (C, G) aux déformations locales associées aux points de branchement sauvage. Le résultat obtenu peut être rapproché du principe local-global utilisé par Green et Matignon [GrMa1] dans le cadre de la géométrie rigide.

3.1 Rappel sur la cohomologie équivariante

Dans ce paragraphe, nous rappellons brièvement les notions de cohomologie équivariante qui sont nécessaires pour décrire en termes cohomologiques le morphisme local-global ; pour plus de détails voir, par exemple [Gro2].

Fixons X un schéma de type fini sur k et supposons que le groupe (fini) G agit sur X (les énoncés de cette partie seront appliqués à la courbe C). Soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions sur X. Supposons que tout point de X admet un voisinage affine G-stable (ce qui est en particulier vérifié si X est projectif). Alors le schéma quotient $\Sigma = X/G$ est défini ; d'après [KaMa] ce passage au quotient est compatible aux changements de base.
Un $(G, \mathcal{O}_X)$-*module* est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent sur lequel G agit. Soit F un $(G, \mathcal{O}_X)$-module, nous avons une action naturelle de G sur $H^q(X, F)$. Si $\pi : X \to \Sigma = X/G$, nous pouvons considérer le faisceau noté $\pi_*^G(F)$ sur Σ défini par : si V est un ouvert de Σ,

$$V \mapsto \Gamma(V, \pi_*(F))^G = \Gamma(\pi^{-1}(V), F)^G$$

Nous définissons deux foncteurs covariants et exacts à gauche sur la catégorie des $(G, \mathcal{O}_X)$-modules :

$$\pi_*^G \text{ et } \Gamma^G(X, \bullet)$$

avec $\Gamma^G(X, F) = \Gamma(X, F)^G$. Les dérivées de ces foncteurs sont respectivement un faisceau de modules sur X/G noté $\mathcal{X}^q(G, F) = R^q\pi_*^G(X, F)$ et un groupe $H^q(G, F) = R^q\Gamma^G(X, F)$. Le k-espace vectoriel $H^q(G, F)$ est le *groupe de cohomologie équivariante* de G à coefficients dans le G-faisceau F.

Remarque 3.1.1 Vu que $\Gamma(\Sigma, \pi_*^G(F)) = \Gamma(X, F)^G$, nous avons $\Gamma_X^G = \Gamma_\Sigma \circ \pi_*^G$; d'où les deux suites spectrales convergentes d'aboutissement $H^\bullet(G, F)$:

$$'E_2^{p,q} = H^p(\Sigma, R^q\pi_*^G(F)) \Rightarrow H^{p+q}(G, F)$$
$$''E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, F)) \Rightarrow H^{p+q}(G, F)$$

Rappelons comment calculer la cohomologie G-équivariante par un procédé à la Čech (voir [Gro2]). Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines G-stables. Notons $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, F)$ le $q^{\text{ième}}$-faisceau des germes de cochaînes de Čech ; par définition pour U ouvert de X

$$\Gamma(U, \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, F)) = \prod_{\substack{(i_0, \cdots, i_q) \\ U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q} \neq \emptyset}} \Gamma(U \cap U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}, F)$$

Rappellons que le complexe de Čech $\mathcal{C}^q \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^{q+1}$ est une résolution de F, où la différentielle de Čech est définie par :

$$\forall \omega \in \mathcal{C}^q, \qquad \delta(\omega)_{i_0 \cdots i_{q+1}} = \sum_{\lambda=0}^{q+1} (-1)^\lambda \mathrm{res}_{U \cap U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{q+1}}} (\omega_{i_0 \cdots \hat{i}_\lambda \cdots i_{q+1}})$$

Soit $\Gamma(X, \mathcal{C}^q) = C^q(\mathcal{U}, F)$; c'est un G-module car $\mathcal{C}^q$ est un G-faisceau, et nous pouvons former la résolution standard de ce G-module

$$C^{p,q} = C^p(G, C^q(\mathcal{U}, F))$$

La différentielle $d : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$ de la cohomologie des groupes et la différentielle $\delta : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ font du groupe bigradué $\{C^{p,q}\}$ un complexe double. Notons

$$\mathfrak{d} = d + \delta$$

la différentielle totale. Donc pour $\omega \in C^{p,q}$, nous avons

$$\mathfrak{d}(\omega) = d(\omega) + (-1)^p \delta(\omega)$$

Notons $(C^\bullet, \mathfrak{d})$ le complexe simple associé au complexe double.

Théorème 3.1.2 *Le complexe $(C^\bullet, D)$ permet de calculer la cohomologie équivariante, et*

$$H^q(C^\bullet) \cong H^q(G, F)$$

(Voir [Go],[Gro2]). Grâce au théorème 3.1.2, nous pouvons décrire les groupes de cohomologie $H^1(G, \mathcal{T}_C)$ et $H^2(G, \mathcal{T}_C)$. Soit $\omega = \{\{\zeta_i^\sigma\}, \{\delta_{ij}\}\} \in C^{1,0} \oplus C^{0,1}$. Nous avons $\mathfrak{d}\omega = 0$ si et seulement si $-\delta\{\zeta_i^\sigma\} + d\{\delta_{ij}\} = 0$ et $\{\zeta_i^\sigma\}$ et $\{\delta_{ij}\}$ sont des 1-cocycles :

$$\zeta_i^{\sigma\tau} = \zeta_i^\sigma + \sigma(\zeta_i^\tau), \ \delta_{ik} = \delta_{ij} + \delta_{jk} \text{ sur } U_i \cap U_j \cap U_k$$

Donc $\zeta_j^\sigma - \zeta_i^\sigma = \sigma(\delta_{ij}) - \delta_{ij}$ sur $U_i \cap U_j$. La différentielle $\mathfrak{d} : C^{0,0} \to C^{1,0} \oplus C^{0,1}$ a pour image $\mathfrak{d}\{\gamma_i\} = \{\{\sigma\gamma_i - \gamma_i\}, \{\gamma_j - \gamma_i\}\}$. Ainsi

$$H^1(G, \mathcal{T}_C) = \frac{\{\{\zeta_i^\sigma\}, \{\delta_{ij}\}\}}{\{\{\sigma\gamma_i - \gamma_i\}, \{\gamma_j - \gamma_i\}\}}$$

Un 2-cocycle est un triplet (δ, γ, β) avec $\{\delta_{ijk}\}$ un 2-cocycle de Čech, $\{\beta_i(\sigma, \tau)\}$ est un 2-cocycle au sens de la cohomologie des groupes (pour i fixé) et $\{\gamma_{ij}(\sigma)\}$ est la composante de bidegré (1,1) ; donc

$$^\sigma\delta_{ijk} - \delta_{ijk} = \gamma_{jk}(\sigma) - \gamma_{ik}(\sigma) + \gamma_{ij}(\sigma) = 0$$

$$^\sigma\gamma_{ij}(\tau) - \gamma_{ij}(\sigma\tau) + \gamma_{ij}(\sigma) + \beta_j(\sigma, \tau) - \beta_i(\sigma, \tau) = 0$$

3.2 Identification de l'espace tangent et des obstructions

Revenons à l'étude du foncteur des déformations D_{gl} (voir §2) et notons $t_{D_{\mathrm{gl}}} = D_{\mathrm{gl}}(k[\varepsilon])$ l'espace tangent au foncteur D_{gl}.

Proposition 3.2.1 *Nous avons $t_{D_{\mathrm{gl}}} \cong H^1(G, \mathcal{T}_C)$.*

Preuve : Il s'agit de décrire une déformation de (C, G) à $k[\varepsilon]$, i.e. une déformation X de C à $k[\varepsilon]$ et un relèvement de G à X. La déformation X est localement triviale, c'est-à-dire, il existe un recouvrement ouvert affine $C = \cup_i U_i$, tel que nous ayons des trivialisations locales de la déformation X de C

$$X_i \xrightarrow{\sim} U_i \otimes_k k[\varepsilon]$$

non G-équivariantes. L'action de G sur X_i induit une action sur $U_i \otimes_k k[\varepsilon]$ qui est décrite par une classe de cohomologie $\zeta_i = \{\zeta_{i,\sigma}\}_{\sigma\in G} \in H^1(G, \Gamma(U_i, \mathcal{T}_C))$; plus précisement l'action de G sur $\Gamma(U_i, \mathcal{T}_C)$ est l'action tordue par ζ_i :

$$r \to r + \zeta_i(\sigma)(r)\varepsilon$$

Sur $X_i \cap X_j$ il y a deux trivialisations locales de la structure de schéma et les actions induites de G. Il y a compatibilité de ces données par l'isomorphisme G-équivariant de transition

$$\varphi_{ij} : (U_i \cap U_j) \otimes k[\varepsilon] \to (U_i \cap U_j) \otimes k[\varepsilon]$$

La G-équivariance s'écrit $\varphi_{ij}\zeta_j(\sigma) = \zeta_i(\sigma)^\sigma\varphi_{ij}$. L'automorphisme φ_{ij} est décrit par une dérivation $\{\delta_{ij}\} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{T}_C)$:

$$\{\varphi_{ij}(r)\} = \{r + \delta_{ij}(r)\varepsilon\},\ r \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{T}_C)$$

La condition de G-équivariance s'écrit alors $\delta_{ij} + \zeta_j(\sigma) = \zeta_i(\sigma) +^\sigma \delta_{ij}$; soit encore

$${}^\sigma\delta_{ij} - \delta_{ij} = \zeta_j(\sigma) - \zeta_i(\sigma)$$

Donc $\{\zeta_i(\sigma), \delta_{ij}\}$ définit une classe de cohomologie de $H^1(G, \mathcal{T}_C)$ vu la description précédente de ce groupe. Remarquons enfin que le changement de $\zeta_i(\sigma)$ et de δ_{ij} par des 1-cobords, revient à changer les trivialisations locales, donc donne la même classe de cohomologie dans $H^1(G, \mathcal{T}_C)$. D'où la proposition. ∎

Nous allons de la même façon identifier les obstructions au relèvement de (C, G) à des classes de 2-cohomologie. Soit $A' \to A$ une petite extension de $\mathcal{C}$ et (X, G) un représentant d'une déformation $[(X, G)] \in D_{\mathrm{gl}}(A)$ à A de (C, G). Comme $H^2(C, \mathcal{T}_C) = 0$ (vu que $\dim_k C = 1$), il n'y a pas d'obtruction à relever le schéma X de A à A'. Il ne reste plus qu'à relever G, pour cela raisonnons localement. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de X par des ouverts affines G-stables. Choisissons un relèvement de A à A' du schéma affine X_i (de support U_i) en $\widetilde{X_i}$; pour résumer, nous avons la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{X_i} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} A' \\
\uparrow & & \uparrow \\
X_i & \longrightarrow & \mathrm{Spec} A \\
\uparrow & & \uparrow \\
U_i & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k
\end{array}$$

Au-dessus de $U_i \cap U_j$, nous avons deux déformations de $X_i \cap X_j$ à A' donc un isomorphisme (non unique)

$$\sigma_{ij} : \widetilde{X_j}|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \widetilde{X_i}|_{U_i \cap U_j}$$

qui se réduit à l'identité sur A. L'automorphisme infinitésimal de $\widetilde{X_i}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$

$$\theta_{ijk} = \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik}^{-1} \text{ sur } U_i \cap U_j \cap U_k$$

est décrit par une dérivation $\delta_{ijk} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{T}_C)$:

$$\theta_{ijk} = \mathrm{Id} + \varepsilon \delta_{ijk}$$

Et $\{\delta_{ijk}\}$ est un 2-cocycle de Čech de classe nulle car $H^2(C, \mathcal{T}_C) = 0$. A présent il faut relever l'action de G. Pour $\sigma \in G$, notons $\tilde{\sigma}_i$ un relèvement quelconque de $\sigma_i = \sigma|_{X_i}$. Donc sur l'ouvert $X_i \cap X_j$:

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{X_j}|_{X_i \cap X_j} & \underset{\sigma_{ij}}{\xrightarrow{\sim}} & \widetilde{X_i}|_{X_i \cap X_j} \\
{\scriptstyle \tilde{\sigma}_j}\uparrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle \tilde{\sigma}_i}\uparrow{\scriptstyle \sim} \\
\widetilde{X_j}|_{X_i \cap X_j} & \underset{\sigma_{ij}}{\xrightarrow{\sim}} & \widetilde{X_i}|_{X_i \cap X_j}
\end{array}$$

Ce diagramme n'est a priori pas commutatif, introduisons un automorphisme infinitésimal de $\widetilde{X_i}|_{U_i \cap U_j}$ de "défaut" $f_{ij}(\sigma)$ défini par $\sigma_{ij} \tilde{\sigma}_j = f_{ij}(\sigma) \tilde{\sigma}_i \sigma_{ij}$, sur $X_i \cap X_j$. Pour $\sigma, \tau \in G$, la comparaison de $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\tau}_i$ avec $(\widetilde{\sigma\tau})_i$ introduit l'automorphisme infinitésimal de $\widetilde{X_i}$ de "déviation" défini par $\tilde{\sigma}_i \tilde{\tau}_i = g_i(\sigma, \tau)(\widetilde{\sigma\tau})_i$ et $\{g_i(\sigma, \tau)\}$ fournit un 2-cocycle de G dans

$\Gamma(U_i, \mathcal{T}_C)$.
Nous allons prouver que les données locales $\{\theta_{ijk}\}, \{f_{ij}(\sigma)\}, \{g_i(\sigma,\tau)\}$ définissent un 2-cocycle et donc une classe de cohomologie de $H^2(G, \mathcal{T}_C)$. De plus si nous changeons les identifications locales, alors ce cocycle est simplement altéré par un cobord.

Lemme 3.2.2 *Nous avons la relation* $f_{ij}(\sigma)\, {}^{\sigma}f_{ij}(\tau) g_i(\sigma,\tau) f_{ij}(\sigma\tau)^{-1} = \sigma_{ij} g_j(\sigma,\tau)\sigma_{ij}^{-1}$.

PREUVE : En effet $\sigma_{ij}\tilde{\sigma}_j\tilde{\tau}_j = \sigma_{ij} g_j(\sigma,\tau)(\widetilde{\sigma\tau})_j$ et

$$\sigma_{ij}\tilde{\sigma}_j\tilde{\tau}_j = f_{ij}(\sigma)\tilde{\sigma}_i\sigma_{ij}\tilde{\tau}_j = f_{ij}(\sigma)\tilde{\sigma}_i f_{ij}(\tau)\tilde{\tau}_i\sigma_{ij}$$

$$= f_{ij}(\sigma)^{\sigma}f_{ij}(\tau)\tilde{\sigma}_i\tilde{\tau}_i\sigma_{ij} = f_{ij}(\sigma)^{\sigma}f_{ij}(\tau) g_i(\sigma,\tau)(\widetilde{\sigma\tau})_i\sigma_{ij}$$
$$= f_{ij}(\sigma)^{\sigma}f_{ij}(\tau) g_i(\sigma,\tau) f_{ij}(\sigma\tau)^{-1}\sigma_{ij}(\widetilde{\sigma\tau})_j$$

D'où la relation attendue sur $X_i \cap X_j$:

$$\sigma_{ij} g_j(\sigma,\tau) = f_{ij}(\sigma)^{\sigma}f_{ij}(\tau) g_i(\sigma,\tau) f_{ij}(\sigma\tau)^{-1}\sigma_{ij}$$

∎

Comme $g_j(\sigma,\tau)$ est un automorphisme infinitésimal et que le groupe de ces automorphismes est abélien, isomorphe au groupe additif des champs de vecteurs, nous pouvons écrire $\sigma_{ij} g_j(\sigma,\tau)\sigma_{ij}^{-1} = g_j(\sigma,\tau)$. Nous obtenons ainsi la relation

$$f_{ij}(\sigma)\, {}^{\sigma}f_{ij}(\tau) f_{ij}(\sigma\tau)^{-1} = g_j(\sigma,\tau) g_i(\sigma,\tau)^{-1}$$

Le changement de notation $\gamma_{ij} = f_{ij}^{-1}$ permet de reconnaître la relation de 2-cocyle pour le triplet $\{\theta, f, g\}$. Il reste entre les données $\{\theta, f, g\}$ une autre relation qui s'identifie avec la relation de 2-cobord : sur $X_i \cap X_j \cap X_k$, nous avons les automorphismes :

$$\widetilde{X}_k\tilde{\sigma}_k \xrightarrow{\sigma_{jk}} \widetilde{X}_j\tilde{\sigma}_j \xrightarrow{\sigma_{ij}} \widetilde{X}_i\tilde{\sigma}_i$$

Par conséquent $\sigma_{ij}\sigma_{jk}\tilde{\sigma}_k = \theta_{ijk}\sigma_{ik}\tilde{\sigma}_k$. Or

$$\sigma_{ij}\sigma_{jk}\tilde{\sigma}_k = \sigma_{ij} f_{jk}(\sigma)\tilde{\sigma}_j\sigma_{jk} = f_{jk}(\sigma)\sigma_{ij}\tilde{\sigma}_j\sigma_{jk} = f_{jk}(\sigma) f_{ij}(\sigma)\tilde{\sigma}_i\theta_{ijk}\sigma_{ik}$$

Et

$$\theta_{ijk}\sigma_{ik}\tilde{\sigma}_k = \theta_{ijk} f_{ik}(\sigma)\tilde{\sigma}_i\sigma_{ik}$$

D'où la relation

$$f_{jk}(\sigma)f_{ij}(\sigma)f_{ik}(\sigma)^{1}\ {}^{\sigma}\theta_{ijk}\theta_{ijk}^{-1} = 1$$

c'est-à-dire la relation de 2-cobord en bidegré (1,2). Enfin il est facile de voir que le changement des identifications locales altère le cocycle par un 2-cobord, donc ne change pas sa classe de cohomologie. Nous avons ainsi établi

Proposition 3.2.3 *Soit (X, G) un représentant d'un élément de $D_{\mathrm{gl}}(A)$. La donnée d'un relèvement de la courbe X de A à A' définit une classe de cohomologie dans $H^2(G, \mathcal{T}_C)$ dite classe d'obstruction de la déformation de (X, G) de A à A'. Il existe une déformation de (X, G) de A à A' si et seulement si cette classe d'obstruction est nulle.*

3.3 Construction du morphisme local-global

L'objectif de ce paragraphe est de relier le foncteur des déformations D_{gl} aux foncteurs des déformations infinitésimales définis au-dessus des points de ramification sauvage (voir 1.1,1.2).

Soit $y_1, \ldots, y_r \in C/G$ les points images des points de ramification sauvage de $C \to C/G$. Pour $1 \leq i \leq r$, notons x_i un point au-dessus de y_i et G_{x_i} son stabilisateur. Soit $D_{\mathrm{loc}} = \prod_i D_{G_{x_i}}$ où $D_{G_{x_i}}$ est le foncteur des déformations infinitésimales de l'action induite de G_{x_i} sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x_i} \cong k[[T]]$. Le choix du point x_i est sans importance, car si nous changeons x_i en autre point x_i' de son orbite sous G, nous obtenons un foncteur $D_{G_{x_i'}}$ isomorphe à $D_{G_{x_i}}$. Par localisation en ces points, nous définissons un morphisme

$$\phi : D_{\mathrm{gl}} \to D_{\mathrm{loc}}$$

qui à une déformation X de (C, G) à A objet de $\mathcal{C}$ associe les déformations infinitésimales des $G_{x_i} \hookrightarrow \mathrm{Aut}k[[T]]$ à A. Notons $t_{D_{\mathrm{loc}}} = D_{\mathrm{loc}}(k[\varepsilon])$ l'espace tangent au foncteur D_{loc}.

Lemme 3.3.1 *Le faisceau $R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_C)$ sur C/G est concentré aux points y_i, et nous avons*

$$R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_C)_{y_i} \cong H^1(G_i, \widehat{\mathcal{T}}_{C,x_i})$$

PREUVE : Le foncteur $R^n\pi_*^G(\mathcal{T}_C)$ est "local", c'est-à-dire pour V ouvert de C/G

$$R^n\pi_*^G(\mathcal{T}_C)|_V = R^n\pi_*^G|_{\pi^{-1}(V)}(\mathcal{T}_C|_{\pi^{-1}(V)})$$

Nous nous restreignons alors à un ouvert affine V, c'est-à-dire nous supposons que C (et C/G) est affine, ainsi

$$H^p(C/G, R^q\pi_*^G(\mathcal{T}_C)) = 0, \text{ si } p > 0, \text{ et } H^p(G, H^q(C, \mathcal{T}_C)) = 0, \text{ si } q > 0$$

Donc les deux suites spectrales ${}'E_2^{p,q}$ et ${}''E_2^{p,q}$ conduisent à :

$$H^0(C/G, R^q\pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \cong H^q(G, \mathcal{T}_C) \cong H^q(G, \Gamma(C, \mathcal{T}_C))$$

Donc dans le cas affine, les faisceaux $R^q\pi_*^G(\mathcal{T}_C)$ et $H^q(G, \mathcal{T}_C)^\sim = H^q(G, \Gamma(C, \mathcal{T}_C))^\sim$ coïncident. Le foncteur de localisation étant exact, nous obtenons par passage à la fibre en $y \in C/G$

$$R^q\pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y = H^q(G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y)$$

Enfin comme $H^q(G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y)$ est un module de longueur finie (annulé par l'ordre de G), nous obtenons pour x au-dessus de y,

$$H^q(G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y) \cong H^q(G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y\hat{\ }) \cong H^q(G, \prod_{x \to y} \widehat{\mathcal{T}}_{C,x}) \cong H^q(G_x, \widehat{\mathcal{T}}_{C,x})$$

■

Lemme 3.3.2 *L'application* $H^1(G, \mathcal{T}_C) \to H^0(C/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \cong \oplus_{i=1}^r H^1(G_i, \hat{\mathcal{T}}_{C,x_i})$ *est surjective de noyau l'espace tangent au foncteur des déformations localement triviales.*

Preuve : Considérons la suite spectrale en degré total $p + q = 1$

$${}'E_2^{p,q} = H^p(C/G, R^q\pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \Rightarrow H^{p+q}(G, \mathcal{T}_C)$$

Comme ${}'E_2^{2,0} = H^2(C/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) = 0$, nous obtenons ${}'E_2^{0,1} = {}'E_\infty^{0,1}$; nous avons également ${}'E_2^{1,0} = {}'E_\infty^{1,0}$; d'où la suite exacte

$$0 \to H^1(C/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \to H^1(G, \mathcal{T}_C) \to H^0(C/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \to 0$$

D'après le lemme 3.3.1,

$$H^0(C/G, R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_C)) = \oplus_{i=1}^r H^1(G_i, \widehat{\mathcal{T}}_{C,x_i})$$

D'où l'application surjective $H^1(G, \mathcal{T}_C) \to \oplus_{i=1}^r H^1(G_i, \widehat{\mathcal{T}}_{C,x_i})$ qui est la différentielle de ϕ, de noyau l'espace tangent au foncteur $\ker\phi$ qui peut être identifié au foncteur des déformations localement triviales. ■

Passons à une analyse analogue du terme $H^2(G,\mathcal{T}_C)$.

Lemme 3.3.3 *Nous avons* $H^2(G,\mathcal{T}_C)\cong\oplus_{i=0}^r H^2(G_{x_i},\widehat{\mathcal{T}}_{C,x_i})$.

PREUVE : Si $y\in C/G$ et $x\in\pi^{-1}(y)$, alors

$$R^2\pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y\widehat{}\cong H^2(G_x,\widehat{\mathcal{T}}_{C,x})$$

En effet cette fibre est nulle en dehors des points y images de points de ramification sauvage, donc le $(\mathcal{T}_{C/G})_y$-module de longueur finie $R^2\pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y$ vérifie l'isomorphisme annoncé. Dans la suite spectrale ${}'E_2^{p,q}=H^p(C/G,R^q\pi_*^G(\mathcal{T}_C))$, nous avons ${}'E_2^{2,0}=0$ car $H^2(C/G,\pi_*^G(\mathcal{T}_C))=0$, et ${}'E_2^{1,1}=0$ car $R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_C)$ est à support fini, donc $H^1(C/G,R^1\pi_*^G(\mathcal{T}_C))=0$. Ainsi par dégénérescence, nous obtenons

$${}'E_2^{0,2}=H^0(C/G,R^2\pi_*^G(\mathcal{T}_C))=H^0(C/G,\oplus R^2\pi_*^G(\mathcal{T}_C)_y)\cong H^2(G,\mathcal{T}_C)$$

D'où le résultat annoncé. ∎

Remarque 3.3.4 Nous pouvons rapprocher ces résultats de la proposition 1.5 de Deligne Mumford [DeMu] qui établit un morphisme local-global similaire pour le foncteur des déformations de courbes stables, les points de branchement sauvage se substituant aux points doubles.

Théorème 3.3.5 *Le morphisme* $\phi:D_{\mathrm{gl}}\to D_{\mathrm{loc}}$ *est lisse.*

PREUVE : Soit $u:A'\to A$ une petite surjection de $\mathcal{C}$; nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} D_{\mathrm{gl}}(A') & \xrightarrow{\phi} & D_{\mathrm{loc}}(A') \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & {\scriptstyle u}\uparrow \\ D_{\mathrm{gl}}(A) & \xrightarrow{\phi} & D_{\mathrm{loc}}(A) \end{array}$$

Soit $[(X,G)]\in D_{\mathrm{gl}}(A)$ tel que $\phi(X)$ se relève à A' en $\widetilde{\phi(X)}$. Les obstructions à relever X et $\phi(X)$ à A' coïncident, comme cette dernière est nulle, nous avons donc une déformation $\widetilde{X}$ de (X,G) à A'. Les éléments $\phi(\widetilde{X})$ et $\widetilde{\phi(X)}$ diffèrent de l'action d'un élément de l'espace tangent $\delta\in t_{D_{\mathrm{loc}}}$; or ϕ est surjective sur les espaces tangents donc δ admet un antécédent par ϕ dans $t_{D_{\mathrm{gl}}}$. Enfin si nous corrigeons $\widetilde{X}$ par cet antécédent nous obtenons l'égalité $\phi(\widetilde{X})=\widetilde{\phi(X)}$; d'où la lissité de ϕ. ∎

Théorème 3.3.6 *Soit R_i l'anneau de déformations versel de $D_{G_{x_i}}$ et R_{gl} l'anneau de déformations (uni)versel de D_{gl}. Alors $R_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}R_r$ est l'anneau de déformations versel de D_{loc} et*

$$R_{\mathrm{gl}} = (R_1\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}R_r)[[U_1,\ldots,U_N]]$$

avec $N = \dim_k H^1(C/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C))$.

4 Le cas G cyclique

Nous supposons dorénavant que G est un p-groupe cyclique. L'objet de ce paragraphe est l'étude de l'anneau de déformations versel local des déformations d'une représentation $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}k[[T]]$. Nous commençons par décrire l'espace tangent et les classes d'obstruction de ce problème de déformations. Puis lorsque G est cyclique d'ordre p, nous mettons en évidence pour tout $p > 2$ une classe d'obstruction non triviale universelle.

4.1 L'espace tangent

Supposons à présent que G est un groupe cyclique d'ordre p^n. Fixons un générateur σ de G et notons

$$\sigma\cdot T = f_\sigma(T) = T + \sum_{j\geq e} a_j T^j$$

avec $e > 1$ et $a_e \neq 0$ (l'action de G est supposée non triviale). Le groupe G s'identifie alors au groupe de Galois de l'extension $k((T))/k((Y))$ avec $k[[Y]] = k[[T]]^G$ la k-algèbre des invariants de G. Soit le $k[[T]]$-module libre $\Theta = k[[T]]\frac{d}{dT}$ des k-dérivations continues. Il y a une action naturelle du groupe $\mathrm{Aut}k[[T]]$ sur Θ et donc une action de G sur Θ. Les déformations de la représentation $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}k[[T]]$ sont donc décrites par les groupes de cohomologies $H^1(G,\Theta)$, $H^2(G,\Theta)$. Nous voulons trouver $\dim_k H^1(G,\Theta)$ et $\dim_k H^2(G,\Theta)$ en fonction des invariants de l'extension totalement ramifiée $k((T))/k((Y))$, c'est-à-dire de la filtration de G par les groupes de ramification supérieurs ([Se2] IV). Comme G est cyclique, nous avons ([Se1] VIII 4)

$$H^1(G,\Theta) = \frac{\ker N}{\mathrm{Im}\delta} \text{ et } H^2(G,\Theta) = \frac{\ker\delta}{\mathrm{Im}N}$$

pour N,δ opérateurs de Θ, $k[[Y]]$-linéaires définis par

$$N(h) = \sum_{i=0}^{p^n-1} {}^{\sigma^i}h,\quad \delta(h) = {}^{\sigma}h - h,\quad h\in\Theta$$

Il s'agit d'abord d'étudier l'opérateur nilpotent d'ordre p^n, $\delta = \sigma - 1$, vu comme opérateur $k[[Y]]$-linéaire de $k[[T]]$ ou plus généralement de $E = T^\beta k[[T]]$ pour un $\beta \in \mathbf{N}$ fixé. Notons

$$E_j = \ker \delta^j = \{x \in E,\ \delta^j x = 0\},\ 0 \leq j \leq p^n$$

une suite décroissante de $k[[Y]]$ sous-modules sans torsion de E. Comme $\delta^{-1}(E_j) = E_{j+1}$, δ induit une application $k[[Y]]$-linéaire injective

$$\bar{\delta} : \frac{E_{j+1}}{E_j} \longrightarrow \frac{E_j}{E_{j-1}}$$

dont l'image est un $k[[Y]]$-module libre sans torsion. Nous rappellons que $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie inférieure de x.

Théorème 4.1.1 *Soit β l'exposant de la différente de $k((T))/k((Y))$. Alors*

$$\dim_k H^1(G, \Theta) = \dim_k H^2(G, \Theta) = \left\lfloor \frac{2\beta}{p^n} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\beta}{p^n} \right\rceil$$

PREUVE : Remarquons d'abord que

$$H^1(G, E) = \text{tors}\left(\frac{E}{\delta(E)}\right) = \frac{E_{p^n-1}}{\delta(E)}$$

où tors désigne le sous-module de torsion.
En effet $\ker N$ est un sous-$k[[Y]]$-module de E et le $k[[Y]]$-module $E/\ker N$ est sans torsion. La dernière égalité s'obtient en remarquant que $\delta(E) \subset E_{p^n-1}$ et si $x \in E$ vérifie $\delta y = lx$, alors $\delta^{p^n-1}(lx) = l\delta^{p^n-1}(x) = 0$ donc $x \in E_{p^n-1}$. Enfin $E_{p^n-1}/\delta(E)$ est de torsion car E_{p^n-1} et $\delta(E)$ sont des $k[[Y]]$-modules de même rang $p^n - 1$.

Nous cherchons donc la dimension du k-espace vectoriel $V = \dfrac{E_{p^n-1}}{\delta(E)}$. Ce $k[[Y]]$-module V est filtré par les sous modules

$$V^j = \frac{E_j + \delta(E)}{\delta(E)} \cong \frac{E_j}{\delta(E_{j+1})},\ 1 \leq j \leq p^n - 1$$

et $V^0 = 0$; ainsi l'ordre de V vérifie

$$|V| = \sum_{j=0}^{p^n-2} |V^{j+1}/V^j| = \sum_{j=0}^{p^n-2} |Q_j|$$

pour

$$Q_j \cong \frac{E_{j+1}}{\delta(E_{j+2}) + E_j} \cong \mathrm{Coker}\left(\bar{\delta} : \frac{E_{j+2}}{E_{j+1}} \to \frac{E_{j+1}}{E_j}\right)$$

Donc nous avons

$$|\,V\,| = \left|\mathrm{Coker}\left(E \cong \frac{E_{p^n}}{E_{p^n-1}} \to \frac{E_{p^n-1}}{E_{p^n-2}} \to \cdots \to \frac{E_2}{E_1} \to E_1\right)\right|$$

d'où $|\,V\,| = |\mathrm{Coker}(E \to E_1)|$. Nous avons l'égalité entre opérateurs $\delta^{p^n-1} = N = 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p^n-1}$. Par conséquent

$$|\,V\,| = \frac{\dim_k E^1}{\dim_k \delta^{p^n-1}(E)} = \dim_k \frac{\ker\delta}{N(E)}$$

et ainsi $\dim_k H^1(G,E) = \dim_k H^2(G,E)$. Pour obtenir les dimensions des groupes de cohomologie $H^1(G,E)$, $H^2(G,E)$, il suffit donc d'étudier $H^2(G,E)$.

Pour le calcul de $\dim_k H^2(G,\Theta)$, il est commode d'identifier le G-module Θ à un sous-G-module de $k[[T]]$. Soit $\mathcal{D}$ la différente de $k((T))/k((Y))$,

$$\mathcal{D} \cong (T^\beta) \text{ avec } \beta = \sum_{j=1}^{\infty}(|\,G_j\,| - 1)$$

les G_j étant les groupes de ramification supérieurs ([Se2]). Nous avons un isomorphisme de G-modules : $\Theta \cong \mathcal{D}$. En effet, posons $j_\sigma = \dfrac{df_\sigma}{dT}$; nous vérifions alors que $\{j_\sigma\}$ est un cocycle de G dans $k((T))^*$. D'après le théorème 90 d'Hilbert c'est un cobord, c'est-à-dire il existe $j \in k((T))^*$ tel que $\forall \sigma \in G,\ j_\sigma = j/\sigma j$. Nous pouvons prendre $j = \dfrac{dY}{dT}$, Y étant la norme de T. Par définition $v_T(j) = \beta$. Donc la multiplication par T^β dans $k((T))$ établit un G-isomorphisme de $\Theta \cong k[[T]]$ avec le G-module $T^\beta k[[T]]$ muni de l'action standard. Nous avons

$$H^2(G,E) = \frac{\ker\delta}{N(E)} = \frac{E \cap k[[Y]]}{N(E)}$$

Or d'une part $E \cap k[[Y]]$ est le plus petit idéal de $k[[T]]$ contenant Y et T^β. Donc

$$E \cap k[[Y]] = Y^{\lceil \beta/p^n \rceil} k[[T]]$$

D'autre part nous connaissons l'image de la trace ([Se2] V 3) :

$$N(E) = Y^{\lfloor 2\beta/p^n \rfloor} k[[T]]$$

D'où le théorème annoncé. ∎

L'égalité $\dim_k H^1(G,\Theta) = \dim_k H^2(G,\Theta)$ peut également être déduite du théorème de Herbrand. Dans le paragraphe suivant nous précisons la structure de $H^1(G,\Theta)$ comme module sur $k[[Y]] = k[[T]]^G$.

4.2 Une obstruction universelle

Soit R un anneau complet de valuation discrète de corps résiduel k et $k \subset R$; donc $R = k[[Y]]$. Soit $K = k((Y))$ son corps des fractions. Considérons l'équation

$$X^p - X = \phi \in k((Y)) \tag{1}$$

Il est bien connu que si $v_Y(\phi) = -m < 0$, avec $p \wedge m = 1$, alors l'équation (1) est irréductible et définie une extension p-cyclique de conducteur de Hasse m. Cela signifie que si $\{G_i\}$ est la filtration de G par les groupes de ramification supérieurs, nous avons

$$G = G_0 = \cdots = G_m \quad \text{et} \quad G_{m+1} = \{1\}$$

Supposons dorénavant cette condition réalisée, et soit $L = K(\xi)$, où ξ est une racine de (1). L'extension L/K est d'Artin-Schreier et $\eta = \xi$ est un générateur d'Artin-Schreier, c'est-à-dire $L = K(\eta)$ et $\eta^p - \eta \in K$. Notons que tout générateur d'Artin-Schreier est de la forme $\eta = j\xi + \psi$, où $j \in \mathbf{F}_p^*$ et $\psi \in K$. Nous pouvons parler plus généralement des générateurs d'Artin-Schreier η de conducteur donné m avec $\eta \in \overline{k((Y))}$, la clôture algébrique de $k((Y))$. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}k[[Y]]$ un automorphisme continu. Nous pouvons prolonger φ à $\mathrm{Aut}k((Y))$, donc φ agit sur les générateurs d'Artin-Schreier. Nous avons le lemme :

Lemme 4.2.1 *Soit ξ et η deux éléments d'Artin-Schreier de conducteur m. Alors il existe un automorphisme continu $\varphi \in \mathrm{Aut}k[[Y]]$ tel que $\varphi(\xi) = \eta$.*

PREUVE : Soit $\phi \in k((Y))$ tel que $v_Y(\phi) = -m$, avec $p \wedge m = 1$. Commençons par démontrer qu'il existe $Z \in k[[Y]]$ $v_Y(Z) = 1$ (c'est-à-dire Z est une variable) tel que $\phi = Z^{-m}$. Il existe $\psi \in k[[Y]]^*$ avec $\phi = Y^{-m}\psi$. Comme m est premier à p, $Y^m - \psi = 0$ est une equation séparable modulo Y. Ainsi d'après le lemme d'Hensel, $T^m - \psi$ a m racines distinctes. Soit $P(Y)$ l'une de ces racines; alors $\phi = (Y^{-1}P(Y))^m = Z^{-m}$ avec $Z = P(Y)^{-1}Y \in k[[Y]]$ une variable. Donc il existe deux variables $Z, W \in k[[Y]]$ telles que

$$\xi^p - \xi = Z^{-m},\ \eta^p - \eta = W^{-m}$$

Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}k[[Y]]$ tel que $\varphi(Z) = W$. Alors $\varphi(\xi)$ est solution de $X^p - X = W^{-m}$ et il existe $j \in \mathbf{F}_p$ avec $\varphi(\xi) = \eta + j$. Soit $\sigma_\eta \in \mathrm{Aut}k[[Y]]$ avec $\sigma_\eta(\eta) = \eta + 1$. Nous avons $\sigma_\eta^{-j} \circ \varphi \in \mathrm{Aut}k[[Y]]$ et $\sigma_\eta^{-j} \circ \varphi(\xi) = \eta$. ∎

Ainsi les automorphismes d'ordre p et de conducteur m de $k[[T]]$ sont deux à deux conjugués et en particulier conjugués à σ_0, où $\sigma_0(T) = T(1+T^m)^{-1/m}$. La proposition suivante est analogue à 1.3(a) [Ma]:

Proposition 4.2.2 *Soit $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux représentations de G dans $\mathrm{Aut}k[[T]]$ conjuguées par un élément de $\bar{\delta} \in \mathrm{Aut}k[[T]]$. Alors les anneaux de déformations versels $R_{\bar{\rho}}$ et $R_{\bar{\rho}'}$ de $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ respectivement sont isomorphes.*

Pour étudier les anneaux de déformations versels de représentations d'un groupe cyclique d'ordre p dans $\mathrm{Aut}k[[T]]$, il suffit donc d'étudier les déformations de l'automorphisme d'ordre p

$$\sigma_0(T) = \frac{T}{(1+T^m)^{1/m}}, \quad p \wedge m = 1$$

Lemme 4.2.3 *L'élément*

$$h(T)\frac{d}{dT} = \begin{cases} \frac{d}{dT} & si\ m = 1 \\ T\frac{d}{dT} & si\ m > 1 \end{cases}$$

représente un élément non nul de $H^1(G, \Theta)$.

Preuve : Rappelons que $H^1(G,\Theta) \cong \dfrac{\ker N}{\mathrm{Im}\delta}$ et $N(h(T)) = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_0^i(h(T))\left(\dfrac{d\sigma_0^i(T)}{dT}\right)^{-1}$. Comme $\left(\dfrac{d\sigma_0^i(T)}{dT}\right)^{-1} = (1+iT^m)^{1+1/m}$, nous avons si $m > 1$

$$N(h(T)) = N(T) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{T}{(1+iT^m)^{1/m}}(1+iT^m)^{1+1/m} = \sum_{i=0}^{p-1} T + iT^{m+1} = 0$$

et si $m = 1$

$$N(h(T)) = N(1) = \sum_{i=0}^{p-1}(1+iT)^2 = \sum_{i=0}^{p-1} 1 + 2iT + i^2T^2 = 0$$

Donc $h(T) \in \ker N$. Pour $f \in k[[T]]$, $v_T(\delta(f)) \geq m$, donc $h(T) \notin \mathrm{Im}\delta$. ∎

Soit A un objet de $\mathcal{C}$. Déformer suivant la direction tangentielle définie par $h(T)\dfrac{d}{dT}$, conduit à étudier les automorphismes suivants :

$$\sigma_a(T) = \frac{T}{(1+aT^m)^{1/m}} \text{ pour } a \in 1 + \mathcal{M}_A \text{ si } m > 1$$

$$\sigma_a(T) = \frac{T+a}{1+T+a} \text{ pour } a \in \mathcal{M}_A \text{ si } m = 1$$

Commençons par le cas $m > 1$, $p > 2$, et l'observation élémentaire

Lemme 4.2.4 *Soit A objet de $\mathcal{C}$, $a \in 1 + \mathcal{M}_A$ et*

$$\sigma_a(T) = T/(1+aT^m)^{1/m}$$

Nous avons $\sigma_a^p = \mathrm{Id}$ si et seulement si $1 + a + \cdots + a^{p-1} = 0$.

Lemme 4.2.5 *Supposons $p > 2$, $m > 1$ tels que $p \wedge m = 1$. Soit $A' \to A$ une petite extension et $a \in \mathcal{M}_A$ tel que $\sigma_a^p = \mathrm{Id}$. La classe d'obstruction à relever σ_a de A à A' est nulle si et seulement si $1 + a' + \cdots + a'^{p-1} = 0$.*

PREUVE : Il s'agit de relier la condition du lemme 4.2.4 à une obstruction cohomologique, c'est-à-dire à une classe de $H^2(G, \Theta)$. Soit $\pi : A' \to A$ une petite extention de noyau tA', et $a \in 1 + \mathcal{M}_A$ tel que $\sigma_a^p = \mathrm{Id}$. Pour obtenir l'obstruction cohomologique à relever σ_a de A à A', nous relevons a en $a' \in A$. Ainsi

$$1 + a' + \cdots + a'^{p-1} \in tA' \text{ et } a'^p = 1$$

et l'obstruction cohomologique dans $H^2(G, \Theta)$ est déterminée par le cocycle $(\varphi_{i,j})_{i,j \in \mathbf{F}_p}$ défini par

$$\sigma_{a'}^i \sigma_{a'}^j = \varphi_{i,j} \sigma_{a'}^{i+j}$$

les exposants étant pris modulo p. Donc

$$\varphi_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j < p \\ \sigma_{a'}^p & \text{si } i+j \geq p \end{cases} \qquad i,j < p$$

L'exposant de la différente est $\beta = (m+1)(p-1)$ et $H^2(G, \Theta)$ est le $k[[Y]]$-module cyclique

$$H^2(G,\Theta) = \frac{\ker\delta}{\mathrm{Im} N} \cong \frac{(Y)^{\lceil \beta/p \rceil}}{(Y)^{\lfloor 2\beta/p \rfloor}}$$

Y étant la norme de T et l'isomorphisme de la preuve du théorème 4.1.1

$$h(T)\frac{d}{dT} \mapsto h(T)\frac{dY}{dT}$$

étant étendu aux classes de cohomologie. Dans cette identification, $\varphi_{i,j} = h_{i,j}\dfrac{d}{dT}$ correspond à

$$h_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j < p \\ \sigma_{a'}^p(T) - T & \text{si } i+j \geq p \end{cases} \qquad i,j < p$$

D'où la classe d'obstruction est la classe de $h_{p-1,1}\dfrac{d}{dT} = (\sigma_{a'}^p(T) - T)\dfrac{d}{dT}$. Pour vérifier que cette classe est non nulle, observons que,

$$\sigma_{a'}^p(T) - T = \frac{T}{(a'^p + (1 + a' + \cdots + a'^{p-1})T^m)^{1/m}} - T = -\frac{1}{m}(1 + a' + \cdots + a'^{p-1})T^{m+1}$$

Il suffit alors de vérifier

$$v_Y\left(h_{p-1,1}(T)\frac{dY}{dT}\right) < \left\lfloor \frac{2\beta}{p} \right\rfloor \tag{2}$$

Cette inégalité est équivalente à

$$v_T(h_{p-1,1}) + \beta = (m+1)p < p\lfloor 2(m+1)(p-1)/p \rfloor$$

Écrivons $2(m+1) = pu + u'$ avec $0 \leq u' < p$. Nous avons

$$\lfloor 2(m+1)(p-1)/p \rfloor = \begin{cases} u(p-1) & \text{si } u' = 0 \\ u(p-1) + u' - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $u' \geq 1$, le résultat est clair. Si $u' = 0$ l'inégalité est assurée pourvu que $p > 2$ et $(m,p) \neq (1,3)$. Ce qui démontre l'inégalité (2) et le lemme. ∎

Revenons à présent au cas $m = 1$, $p > 2$.

Lemme 4.2.6 *Soit A objet de $\mathcal{C}$, $a \in \mathcal{M}_A$,*

$$\sigma_a(T) = \frac{T+a}{1+T+a} \quad et \quad M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Nous avons $\sigma_a^p = \mathrm{Id}$ si et seulement si $M_a^p = \mathrm{Id}$.

PREUVE : Soit $A_p, B_p, C_p, D_p \in \mathbf{Z}[a]$ tels que

$$M_a^p = \begin{pmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{pmatrix}$$

L'automorphisme σ_a s'identifie à l'homographie de matrice M_a. Ainsi

$$\sigma_a^p = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow \sigma_a^p(T) = T \Longleftrightarrow A_p T + B_p = T(C_p T + D_p)$$

$$\sigma_a^p = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow A_p = D_p, B_p = C_p = 0 \Longleftrightarrow M_a^p = \alpha \mathrm{Id}, \text{ pour } \alpha \in \mathbf{Z}[a]$$

Supposons $M_a^p = \alpha\mathrm{Id}$ pour $\alpha \in \mathbf{Z}[a]$. Comme M_a mod $\mathcal{M}_A = M_0$, la matrice M_a^p relève $M_0^p = \mathrm{Id}$ à A. Donc $\alpha \equiv 1$ mod $\mathcal{M}_A$. Par ailleurs $\det M_a = 1$ donc $\det M_a^p = \alpha^2 = 1$. Ces deux conditions sur α entraînent que $\alpha = 1$. D'où

$$\alpha_a^p = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow M_a^p = \mathrm{Id}$$

■

Soit T_p, S_{p-1} les polynômes de Tchebychev respectivement de première et de seconde espèce

$$T_p(X) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \begin{pmatrix} p-l \\ l \end{pmatrix} \frac{p}{p-l} (-1)^l (2X)^{p-2l}$$

$$S_{p-1}(X) = \sum_{l=0}^{(p-1)/2} \begin{pmatrix} p-1-l \\ l \end{pmatrix} (-1)^l (2X)^{p-1-2l}$$

Par définition, si $2X = Z + Z^{-1}$, nous avons

$$2T_p(X) = Z^p + Z^{-p}, \quad (Z - Z^{-1}) S_{p-1}(X) = Z^p - Z^{-p}$$

Lemme 4.2.7 *Nous avons*

$$M_a^p = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow S_{p-1}(a/2+1) = T(a/2+1) - 1 = 0$$

PREUVE : Posons $z = \dfrac{2 + a + \sqrt{(2+a)^2 - 4}}{2}$. En diagonalisant M_a, nous obtenons

$$M_a^p = \begin{pmatrix} -\frac{z^p - z^{-p}}{z - z^{-1}} \frac{a}{2} + \frac{z^p + z^{-p}}{2} & \frac{z^p - z^{-p}}{z - z^{-1}} \left(\left(\frac{z - z^{-1}}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} \right) \\ \frac{z^p - z^{-p}}{z - z^{-1}} & \frac{z^p - z^{-p}}{z - z^{-1}} \frac{a}{2} + \frac{z^p + z^{-p}}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $M_a^p = \mathrm{Id}$ si et seulement si

$$\frac{z^p - z^{-p}}{z - z^{-1}} = 0 \quad \text{et} \quad z^p + z^{-p} = 2$$

A l'aide des polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce ces conditions s'écrivent

$$S_{p-1}(x) = 0 \text{ et } T_p(x) - 1 = 0 \text{ pour } 2x = z + z^{-1} = 2 + a$$

∎

Lemme 4.2.8 *L'idéal* $(T_p(X/2+1), S_{p-1}(X/2+1))$ *de* $W(k)[X]$ *est principal et engendré par*

$$\psi(X) = \sum_{l=0}^{(p-1)/2} \binom{p-1-l}{l} (-1)^l (X+4)^{(p-1)/2-l}$$

Preuve : En étudiant les racines de $T_p(X) - 1$ et $S_{p-1}(X)$, vus comme polynômes de $\mathbf{C}(X)$ nous pouvons montrer

$$\phi(X) = (T_p(X) - 1) \wedge S_{p-1}(X) = 2^{(p-1)/2} \prod_{l=1}^{(p-1)/2} (X - \cos \frac{2l\pi}{p})$$

Précisement

$$\phi(X) = S_{p-1}\Big(\sqrt{\frac{X+1}{2}}\Big) = \sum_{l=0}^{(p-1)/2} \binom{p-1-l}{l} (-1)^l (2(X+1))^{(p-1)/2-l}$$

Enfin à l'aide de la trigonométrie hyperbolique, nous obtenons une équation de Bézout

$$U(X)(T_p(X) - 1) + V(X)S_{p-1}(X) = \phi(X)$$

avec $U(X) = -\frac{1}{2}\phi(X)$ et,

$$V(X) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p-l}{l} \frac{p}{p-l} (-1)^l (2(X+1))^{(p+1)/2-l}$$

Comme les entiers premiers à p sont inversibles dans $W(k)$, cette relation de Bézout est encore valable dans $W(k)[X]$, même après le changement de variables $Y = X/2 + 1$. Donc l'idéal $(T_p(X/2+1), S_{p-1}(X/2+1))$ de $W(k)[X]$ est principal et engendré par $\psi(X) = \phi(X/2+1)$. ∎

Soit $A' \to A$ une petite extension de $\mathcal{C}$ de noyau tA', $a \in \mathcal{M}_A$ tel que $\sigma_a^p = \mathrm{Id}$ et a' un relèvement de a dans A'. La classe d'obstruction à relever σ_a de A à A' est la classe de $h(T)\dfrac{d}{dT}$ dans $H^2(G, \Theta)$, avec

$$\sigma_{a'}^p(T) - T = -\frac{a'T^2}{1 + a'T} = th(T)$$

Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, nous pouvons montrer que $M_{a'}^n$ est de la forme

$$M_a'^n = \begin{pmatrix} A_n & a'C_n \\ C_n & A_n + a'C_n \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\sigma_{a'}^p(T) - T = \frac{A_p T + a'C_p}{C_p T + A_p + a'C_p} - T = \frac{a'C_p - a'C_p T - C_p T^2}{C_p T + A_p + a'C_p}$$

Or $C_p \equiv 0 \bmod \mathcal{M}_A$, donc $C_p = tc_p$ avec $c_p \in k$ et $a'C_p = 0$.
De même $A_p \equiv 1 \bmod \mathcal{M}_A$, donc $A_p = 1 + ta_p$ avec $a_p \in k$. D'où

$$\sigma_{a'}^p(T) - T = \frac{-c_p T^2 t}{1 + ta_p + tc_p T} = -c_p T^2(1 - ta_p - tc_p T) = (-c_p T^2)t$$

Donc la classe d'obstruction est la classe de $-c_p T^2 \dfrac{dY}{dT} \in \dfrac{(Y)^{\lceil \beta/p \rceil}}{(Y)^{\lfloor 2\beta/p \rfloor}}$. Par conséquent cette classe est nulle si et seulement si $c_p = 0$. Remarquons que si $c_p = 0$, alors $\det M_{a'}^p = 1 + 2ta_p = 1$ donc $a_p = 0$. Donc nous avons montré que l'obstruction cohomologique est nulle si et seulement si $M_{a'}^p = \mathrm{Id}$. Pour résumer nous avons le lemme suivant (analogue du lemme 4.2.5)

Lemme 4.2.9 *Supposons $m = 1$, $p > 2$. Soit $A' \to A$ une petite extension de $\mathcal{C}$, $a \in \mathcal{M}_A$ tel que $\sigma_a^p = \mathrm{Id}$ et a' un relèvement de a à A'. La classe d'obstruction à relever σ_a de A à A' est nulle si et seulement si $T_p(a'/2+1) - 1 = S_{p-1}(a'/2+1) = 0$.*

Ces résultats préliminaires étant établis, nous pouvons démontrer

Théorème 4.2.10 *Soit $p > 2$, $m \geq 1$ tels que $p \wedge m = 1$. Soit*

$$\sigma_0 : G \to \mathrm{Aut} k[[T]]$$

une représentation de conducteur de Hasse m. Si $m > 1$ alors nous avons un morphisme surjectif

$$R_{\sigma_0} \twoheadrightarrow W(k)[[X]]/\Big(\sum_{j=0}^{p-1}(1+X)^{mj}\Big)$$

Si $m = 1$ et $p > 3$, $R_{\sigma_0} \cong W(k)[[X]]/(\psi(X))$. En particulier si $m = 1$ et $p > 3$ ou si $m = 2$ et $p = 5$, l'anneau de déformations versel R_{σ_0} est d'intersection complète. Enfin si $m = 1$ et $p = 3$ le problème de déformations est rigide.

Preuve : Si $(m,p) = (1,3)$, $\dim_k H^1(G,\Theta) = \dim_k H^2(G,\Theta) = 0$, le problème de déformations est donc rigide. Pour $(m,p) \neq (1,3)$ ce résultat s'obtient grâce à l'étude du modèle local $\sigma_0(T) = T(1+T^m)^{-1/m}$ puis la proposition 4.2.2 conclut.
Commençons l'étude du modèle local par le cas $m = 1$, $p > 3$.
D'après les lemmes 4.2.7, 4.2.8, l'automorphisme

$$\sigma_X(T) = \frac{T+X}{1+T+X}$$

définit une déformation de σ_0 à $W(k)[[X]]/(\psi(X))$. Par définition de l'anneau versel, nous avons un morphisme

$$u : R_{\sigma_0} \to W(k)[[X]]/(\psi(X))$$

Comme

$$\dim_k H^1(G,\Theta) = \lfloor 4(p-1)/p \rfloor - \lceil 2(p-1)/p \rceil = 1$$

le morphisme u induit un isomorphisme sur les espaces tangents de $W(k)[[X]]/(\psi(X))$ et de R_{σ_0}. Nous allons montrer que u est un isomorphisme en démontrant que le couple $(W(k)[[X]]/(\psi(X)), \sigma_X)$ définit une déformation verselle. Notons D le foncteur de déformations de σ_0 et $h_{W(k)[[X]]/(\psi(X))}$ le foncteur des homomorphismes

$$h_{W(k)[[X]]/(\psi(X))} = \mathrm{Hom}_{W(k)}(W(k)[[X]]/(\psi(X)), \cdot)$$

Il suffit donc de vérifier que le morphisme de foncteurs

$$D \to h_{W(k)[[X]]/(\psi(X))}$$

est lisse. Soit $A' \to A$ une petite extension de $\mathcal{C}$ et $a \in \mathcal{M}_A$ tel que $\sigma_a^p = \mathrm{Id}$. Si $[\sigma_a] \in D(A)$ se relève dans $D(A')$ alors, par définition, l'obstruction à relever σ_a de A à A' est nulle. Alors pour a' relevant a à A', $\sigma_{a'}^p = \mathrm{Id}$ (Lemme 4.2.9). Donc le morphisme de foncteurs est lisse, et

$$R_{\sigma_0} \cong W(k)[[X]]/(\psi(X))$$

Un raisonnement essentiellement identique permet de traiter le cas $m > 1$. ∎

Remarque 4.2.11 Si $m = 1$ et $p > 3$, R_{σ_0} est d'intersection complète et $R_{\sigma_0}/pR_{\sigma_0} = k[X]/(X^{(p-1)/2})$. En effet d'après le lemme 4.2.8, les racines de $\psi(X) = \phi(X/2+1)$ sont les $2(\cos\dfrac{2l\pi}{p} - 1)$ pour $l \in \{1, \ldots, (p-1)/2\}$. Donc $\psi(X)$, vu comme polynôme de $\mathbf{Q}[X]$, est le polynôme minimal de $e^{2i\pi/p} + e^{-2i\pi/p} - 2 \in \mathbf{Z}[e^{2i\pi/p}]$. Or $\mathbf{Q}(e^{2i\pi/p} + e^{-2i\pi/p})$ est une extension de $\mathbf{Q}$ totalement ramifiée en p d'indice $(p-1)/2$. Donc tous les coefficients de degré inférieur à $(p-1)/2$ de $\psi(X)$ sont divisible par p.

Exemple 4.2.12 Supposons $(p, m) = (5, 2)$. Dans ce cas $\dim_k H^1(G, \Theta) = 1$. D'après le théorème 4.2.10 l'anneau de déformations versel de l'automorphisme d'ordre p défini par $\sigma_0(T) = T/(1+T^2)^{1/2}$ est

$$R_{\sigma_0} \cong W(k)[[X]]/\Big(\sum_{j=0}^{p-1}(1+X)^{mj}\Big)$$

Donc R_{σ_0} est d'intersection complète.

4.3 Déformations des équations d'Artin-Schreier

Écrivons $m = pq - l$, $l \in [1, p[$. Soit ζ une racine de l'unité d'ordre p. Posons $S = W(k)(\zeta)$, π une uniformisante de S. Nous construisons une déformation lisse d'un automorphisme σ_0 d'ordre p et de conducteur m avec n paramètres indépendants sur S, où

$$n = \begin{cases} q & \text{si } l = 1 \\ q-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans cette construction nous utilisons une idée de Sekiguchi, Oort et Suwa [SeOoSu], exploitée par Green et Matignon [GrMa2] qui permet de voir l'équation d'Artin-Schreier (définissant l'automorphisme σ_0) comme la réduction modulo π d'une équation de Kummer. En déformant ces équations, c'est-à-dire en prenant $A = S[[x_1, \ldots, x_n]]$ pour anneau de coefficients, nous définissons une extension L du corps des fractions de $A[[t]]$. Pour obtenir la déformation recherchée, il suffit d'identifier la normalisation de $A[[t]]$ dans L, qui est naturellement munie d'un automorphisme d'ordre p, à une algèbre de séries formelles. Cette stratégie est valable pour tout $l \in [1, p[$ cependant les cas $l = 1$ et $l \neq 1$ doivent être étudiés séparément.
Soit $\lambda = \zeta - 1$; donc $p\lambda^{-j} \equiv 0 \pmod{\pi}$, si $0 \leq j < p-1$, $p\lambda^{p-1} \equiv -1 \pmod{\pi}$. Considérons l'équation de Kummer

$$(X + \lambda^{-1})^p - \lambda^{-p} = t^{-m} \tag{3}$$

qui définit une extension cyclique du corps des fractions K de $S[[t]]$. L'équation (3) est équivalente à

$$X^{-p} = t^m\left(1 + \frac{p}{\lambda}X^{-1} + \cdots + \frac{p}{\lambda^{p-1}}X^{-(p-1)}\right) \tag{4}$$

Cette équation montre que X^{-1} appartient à la normalisation B de $S[[t]]$ dans $L = K(X)$. Par réduction modulo π l'équation (4) conduit à l'équation d'Artin-Schreier de conducteur m

$$X^p - X = t^{-m} \tag{5}$$

définissant l'automorphisme σ_0 de $k[[t]]$ par $\sigma_0(X) = X + 1$.
Commençons par étudier le cas $l = 1$. Posons $\xi = Xt^q$. L'équation d'Artin-Schreier (5) s'écrit

$$\xi^p - t^{(p-1)q}\xi = t \tag{6}$$

et l'équation (3)

$$(\lambda\xi + t^q)^p - t^{qp} = \lambda^p t \tag{7}$$

Lemme 4.3.1 *La normalisation B de $S[[t]]$ dans L est l'anneau des séries formelles $S[[\xi]]$.*

PREUVE : L'équation (7) équivaut à

$$\xi^p + \frac{p}{\lambda}\xi^{p-1}t^q + \cdots + \frac{p}{\lambda^{p-1}}\xi t^{(p-1)q} = t \tag{8}$$

Donc $\xi \in B$ et (8) est de la forme $F(\xi, t) = 0$ avec $\frac{\partial F}{\partial t} = 1 \mod (\xi, t)$; nous pouvons alors résoudre cette équation implicite en t et plonger $S[[t]]$ dans $S[[\xi]]$, ce qui conduit à $B = S[[\xi]]$. ∎

Nous déformons l'équation (6) par la substitution de t^q par $a(t) = t^q + x_1 t^{q-1} + \cdots + x_q$. Cela signifie que nous considèrons à présent l'anneau des séries formelles $A = S[[x_1, \ldots, x_q]]$ et de la même manière nous déformons (8) en

$$t = \xi^p + \frac{p}{\lambda}\xi^{p-1}a(t) + \cdots + \frac{p}{\lambda^{p-1}}\xi a(t)^{p-1} \tag{9}$$

qui modulo π se réduit à

$$t = \xi^p - \xi a(t)^{p-1} \tag{10}$$

Le lemme suivant se démontre de manière analogue au lemme 4.3.1

Lemme 4.3.2 *Soit L l'extension du corps des fractions de A définie par (9). Alors la normalisation de $A[[t]]$ dans L est $B = A[[\xi]]$.*

Pour traiter le cas $l \neq 1$, notons le lemme suivant :

Lemme 4.3.3 *Soit B un anneau intégralement clos de corps des fractions L. Soit u et v élements de B, $r, s \in \mathbf{N}$ avec $r \wedge s = 1$ et $u^r = v^s$. Alors il existe $\xi \in B$ tel que $u = \xi^s$.*

PREUVE : Soit les coefficients de Bézout $cr + ds = 1$. Nous avons $u^{cr} = u^{1-ds} = v^{cs}$, donc $u = \xi^s$ avec $\xi = v^c u^d \in L$. Comme B est intégralement clos, $\xi \in B$. ∎

Supposons d'abord $A = S$; il résulte de l'équation (4) que nous pouvons extraire une racine m-ème $Z = X^{-1/m}$ dans $\mathcal{M}_B$ et

$$Z^p = t\Big(1 + \frac{p}{\lambda}X^{-1} + \cdots + \frac{p}{\lambda^{p-1}}X^{-(p-1)}\Big)^{1/m} \tag{11}$$

Si L est l'extension du corps des fractions K de $A[[t]]$ définie par l'équation (4), nous déduisons de (11) que $t \in A[[Z]]$ et donc que la normalisation B de $A[[t]]$ dans L est $A[[Z]]$ (comparer au théorème II 4.1 de [GrMa1] qui utilise un critère local de bonne réduction pour un relèvement de l'équation d'Artin-Schreier à un anneau de valuation discrète). Notons que par réduction modulo π, l'inclusion $S[[t]] \subset S[[Z]]$ donne la normalisation $k[[Z]]$ de $k[[t]]$ dans l'extension d'Artin-Schreier $k((t))(X)$, $X^p - X = t^{-m}$ définie par l'équation (5), avec $Z = X^{-1/m}$.
Pour déformer ce revêtement, nous pouvons répéter tel quel l'argument précédent. Comme pour le cas $l = 1$, changeons le paramètre X en $\xi = Xt^q$. Supposons maintenant que l'anneau de base est $A = S[[x_1, \ldots, x_{q-1}]]$. Soit $a(t) = t^q + x_1 t^{q-1} + \cdots + x_{q-1}t$. Par rapport au cas $l = 1$, nous annulons le terme constant. En effet contrairement au cas $l = 1$ l'équation (4) déformée

$$t^l = \xi^p + \frac{p}{\lambda}\xi^{p-1}a(t) + \cdots + \frac{p}{\lambda^{p-1}}\xi a(t)^{p-1} \tag{12}$$

n'est pas d'Eisenstein. En l'écrivant

$$(a(t)\xi^{-1})^p = a(t)^p t^{-l}\Big(1 + \cdots + \frac{p}{\lambda^{p-1}}(a(t)\xi^{-1})^{p-1}\Big)$$

nous allons pouvoir établir le lemme analogue au lemme 4.3.2, pourvu que $a(T)\xi^{-1} \in B$, pour B la normalisation de $A[[t]]$ dans l'extension de Kummer L/K. C'est le cas si nous supprimons le terme constant de $a(t)$; donc $a(t)t^{-l}$ est un polynôme. Nous pouvons de nouveau utiliser le lemme 4.3.3 pour obtenir l'existence d'un élément $\eta \in \mathcal{M}_B$ tel que $\xi = \eta^l$. Nous avons encore

Lemme 4.3.4 *La normalisation de $A[[t]]$ dans l'extension de Kummer L de K est l'algèbre des séries formelles $B = A[[\eta]]$.*

PREUVE : L'équation (12) montre que la norme de ξ est t^l ; par suite la norme de η est de la forme ϵt avec $\epsilon^l = 1$, ce qui permet de supposer que la norme de η est t. Le polynôme minimal de η est de la forme $F(t,\eta) = \eta^p + c_1\eta^{p-1} + \cdots + c_{p-1}\eta + t = 0$ où $c_i \in A[[T]]$. Comme dans le lemme 4.3.1, cette équation implicite peut être résolue en t ; autrement dit nous pouvons exprimer t comme série formelle en η. Donc $t \in A[[\eta]]$. Alors l'algèbre locale $A[[\eta]]$ qui est un $A[[t]]$-module de type fini est de dimension de Krull $\dim_{\mathrm{Krull}} A + 1$, donc est l'algèbre des séries formelles en η sur A. Cette algèbre est un sous-anneau intégralement clos de B, donc $B = A[[\eta]]$. ∎

Analysons à présent cette déformation au niveau infinitésimal. Pour abréger la discussion, nous nous limitons au cas $l \neq 1$, le cas $l = 1$ se traitant de manière analogue. Fixons $j \in [1, q-1]$ et spécialisons les variables $x_i = 0$ si $i \neq j$ et $x_j = \varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 0$). Alors

$$a(t) = t^q + \varepsilon t^{q-j}$$

La construction précédente fournit une déformation σ de l'automorphisme d'Artin-Schreier σ_0 à $k[\varepsilon][[\eta]]$, où

$$\begin{cases} \eta^l = \xi \\ t^l = \xi^p\Big(1 - (a(t)\xi^{-1})^{p-1}\Big) \\ \sigma(\xi) = \xi + a(t) \end{cases}$$

L'automorphisme initial σ_0 est décrit par les relations

$$\begin{cases} \sigma_0(\xi) = \xi + t_0^q \\ t_0^l = \xi^p - t_0^{q(p-1)}\xi \end{cases}$$

Regardons t_0 et t comme fonctions implicites de la variable η. Écrivons

$$\sigma(\eta) = \sigma_0(\eta) + \varepsilon\phi_j(\eta) \text{ avec } \phi_j \in k[[\eta]]$$

Déterminons la direction tangentielle associée à cette déformation infinitésimale. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3.5 *Nous avons $v_\eta(\phi_j) = p(q-j) - (l-1)$.*

PREUVE : Écrivons $t = t_0 + \varepsilon b$ pour $b \in k[[\eta]]$ et observons que $v_\eta(b) \geq 1$. En effet

$$t^l = t_0^l + \varepsilon l t_0^{l-1} b = \xi^p - \xi t_0^{q(p-1)} + \varepsilon(p-1)\xi t_0^{(p-2)(q-j)} + \varepsilon q(p-1)\xi b t_0^{q(p-1)-1}$$

D'où $lb = (p-1)\xi t_0^{(p-2)(q-j)-(l-1)} + q(p-1)b\xi t_0^{q(p-1)-l}$ et $v_\eta(b) \geq 1$. Par ailleurs

$$\sigma(\eta)^l = \sigma(\xi) = (\sigma_0(\eta) + \varepsilon\phi_j(\eta))^l$$

Donc $\sigma_0(\xi) + \varepsilon l \sigma_0(\eta)^{l-1}\phi_j(\eta) = \xi + t^q + \varepsilon t^j$ et $l\sigma_0^{l-1}(\eta)\phi_j(\eta) = qt_0^{q-1}b(\eta) + t_0^{q-j}$. Ce qui donne la valuation de la série $\phi_j(\eta)$: $v_\eta(\phi_j) = p(q-j) - (l-1)$. ∎

Lemme 4.3.6 *Les classes* $\left[\phi_j \dfrac{d}{d\xi}\right] \in H^1(G, \Theta)$ *sont indépendantes.*

PREUVE : Pour démontrer ce lemme nous avons besoin d'une description de $H^1(G,\theta)$ comme $k[[t_0]]$-module. Pour cela, nous allons d'abord définir une $k[[t_0]]$-base de $k[[T]]$ relativement à laquelle δ est triangulaire supérieur. Pour tout $x, y \in k[[T]]$, par récurrence sur $n \geq 1$, il est clair que

$$\delta^n(xy) = \sum_{i,j \leq n,\ i+j \geq n} a_{ij}^n \delta^i x \delta^j y \qquad \text{avec } a_{i,n-i} = \binom{n}{i},\ 0 \leq i \leq n$$

et que

$$\forall\, \xi \text{ générateur de } E_2/E_1, \forall\, 2 \leq n \leq p-1, \quad \xi^n \in E_{n+1} \text{ et } \delta^n(\xi^n) = n!(\delta\xi)^n$$

Remarquons qu'il existe $\xi \in E_2 - E_1$ tel que si $0 \leq j \leq i \leq p-1$ alors

$$v_T(\delta^j(\xi^i)) = pqj + l(i-j) \text{ avec } l = v_T(\xi) \in [1, p[\text{ et } m = pq - l$$

En effet, nous pouvons choisir $\xi \in E_2$ dont la classe engendre le $k[[Y]]$-module E_2/E_1, nous pouvons même supposer que $\xi \in Tk[[T]]$; alors pour $l = v_T(\xi)$ nous avons $1 \leq l < p$; car si $l \geq p$, alors $\xi Y^{-1} \in E_2$. Comme $v_T(\delta\xi) = l + m$ et $\delta\xi \in E_1 = k[[Y]]$, nous obtenons

$$v_T(\xi) = l \in [1, p[,\ v_T(\delta\xi) = l + m = pq$$

Ensuite nous raisonnons par récurrence sur j en observant que si p ne divise pas $v_T(z)$ alors $v_T(\delta z) = v_T(z) + m$. Posons :

$$\gamma(j) = \left\lfloor \frac{jpq + l(p-1-j)}{p} \right\rfloor = jq + \left\lfloor \frac{l(p-1-j)}{p} \right\rfloor$$

Alors $z_j = Y^{-\gamma(j)}\delta^j(\xi^{p-1})$, $0 \leq j \leq p-1$ est un générateur de E_{p-j}/E_{p-j-1}. En effet, si $j = p-1$ alors $z_{p-1} = Y^{(p-1)l}(p-1)!(\delta\xi)^{p-1}$ est une unité de $k[[Y]]$. Si $j < p-1$, supposons que z_j ne soit pas un générateur de E_{p-j}/E_{p-j-1}. Il existe alors $\theta \in Yk[[Y]]$, $\xi \in E_{p-j}$ et $\eta \in E_{p-j-1}$ tels que $z_j = \theta\xi + \eta$, donc $\delta^{p-j-1}(z_j) = \theta\delta^{p-j-1}(\xi)$.
Or d'une part $\delta^{p-j-1}(z_j) = Y^{-\gamma(j)}(p-1)!\delta(\xi)^{p-1}$ a pour valuation

$$v_T(\delta^{p-j-1}(z_j)) = pq(p-1-j) - p\left\lfloor \frac{l(p-1-j)}{p} \right\rfloor$$

D'autre part comme $v_T(\theta) \geq p$ et $v_T(\delta^{p-j-1}(\xi)) \geq v_T(\xi) + (p-j-1)m$, nous obtenons par comparaison

$$pq(p-1-j) - p\left\lfloor \frac{m(p-1-j)}{p} \right\rfloor \geq p + (p-j-1)m$$

et vu que $m = pq - l$, $l(p-1-j) - p\left\lfloor \frac{l(p-1-j)}{p} \right\rfloor \geq p$; ce qui est exclu. Par conséquent la famille $\{z_0, \ldots, z_{p-1}\}$ est une $k[[Y]]$-base de $k[[T]]$ avec

$$\delta(z_j) = Y^{\gamma(j+1)-\gamma(j)}z_{j+1}, 0 \leq j \leq p-2 \text{ et } \delta(z_{p-1}) = 0$$

Il ne reste plus qu'à voir que la structure de $H^1(G,\Theta)$ comme $k[[Y]]$-module est donnée par

$$H^1(G,\Theta) \cong \oplus_{j=1}^{p-1} \frac{k[[Y]]}{(Y^{q+s_j})}$$

avec $s_j \geq -1$ et $s_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } l = 1 \\ -1 & \text{si } l \neq 1 \end{cases}$. Nous observons d'abord que $v_T(z_j) = r_j$ est le reste de $l(p-1-j)$ modulo p et que pour $0 \leq j \leq p-1$, ces restes sont deux à deux distincts. Rappelons que Θ et la différente $\mathcal{D}$ sont G-isomorphes et que $\mathcal{D} = T^\beta k[[T]]$ avec $\beta = (m+1)(p-1)$. Pour $(u_j)_{0\leq j\leq p-1} \in (k[[Y]])^p$, on a $\sum_{j=0}^{p-1} u_j z_j \in \mathcal{D}$ si et seulement si pour tout j,

$$pv_Y(u_j) + r_j \geq (p-1)(pq-l+1)$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} v_Y(u_j) \geq pq-(l-1)-q+1 & \text{si } r_j < l-1 \\ v_Y(u_j) \geq pq-(l-1)-q & \text{si } r_j \geq l-1 \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{D} = \oplus_{j=0}^{p-1} k[[Y]]\, Y^{pq-(l-1)-q+s'_j} z_j \quad \text{avec} \quad s'_j = \begin{cases} 1 & \text{si } r_j < l-1 \\ 0 & \text{si } r_j \geq l-1 \end{cases}$$

Posons $w_j = Y^{pq-(l-1)-q+s'_j} z_j$ pour $0 \leq j \leq p-1$, $s''_j = \gamma(j+1) - \gamma(j) - q$ et $s_{j+1} = s'_j + s''_j - s'_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq p-2$. Alors $\delta(w_j) = Y^{q+s_{j+1}} w_{j+1}$. D'où

$$H^1(G,\Theta) \cong \mathrm{tors}\Big(\frac{\mathcal{D}}{\delta(\mathcal{D})}\Big) \cong \oplus_{j=1}^{p-1} \frac{k[[Y]]}{(Y^{q+s_j})}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme annoncé.
En effet par le lemme 4.3.5,

$$v_\eta(\phi_j \frac{dt_0}{d\xi}) = p(q-j) - (l-1) + \beta = p(pq-(l-1)-q+q-j)$$

Par conséquent la composante de $\phi_j \dfrac{dt_0}{d\xi}$ sur $w_{p-1} = t_0^{pq-(l-1)-q+s'_{p-1}} z_{p-1}$ est non nulle. Le coefficient relatif à w_{p-1} de $\phi_j \dfrac{dt_0}{d\xi}$ a pour valuation en t_0, $q-j-s'_{p-1}$. Donc ces composantes dans $H^1(G,\Theta)^G$ sont indépendantes. ■

Théorème 4.3.7 *Soit $m = pq - l$, $q \geq 1$ et $l \in [1, p-1]$. L'anneau versel pour un automorphisme σ_0 de conducteur m a un quotient formellement lisse :*

$$\begin{cases} R_{\sigma_0} \twoheadrightarrow W(k)(\zeta)[[x_1,\dots,x_q]] & si\ l=1 \\ R_{\sigma_0} \twoheadrightarrow W(k)(\zeta)[[x_1,\dots,x_{q-1}]] & si\ l \neq 1 \end{cases}$$

Si $p=2$, pour tout conducteur m (impair), l'anneau de déformations versel d'un automorphisme d'ordre 2 est l'algèbre des séries formelles

$$W(k)[[X_1,\dots,X_{\frac{m+1}{2}}]]$$

Il n'y a donc pas d'obstruction au problème de relèvement.

Remarque 4.3.8 Le théorème 4.3.7 a pour conséquence géométrique en caractéristique 2, le fait qu'un point de branchement de conducteur m se déploie dans une déformation générique en $d = \dfrac{m+1}{2}$ points de conducteur 1. Notons aussi que le théorème 4.3.7 joint au théorème 3.3.6 redonne le résultat de Laudal et Lønsted ([LaLø] Theorem 2), c'est-à-dire si C est hyperelliptique et σ est l'involution hyperelliptique alors l'anneau (uni)versel de déformations global est une $W(k)$-algèbre de séries formelles.
Dans le cas général (G cyclique d'ordre p), le théorème 4.3.7 entraîne une minoration de la dimension de Krull de l'anneau versel local. Dans le paragraphee suivant, nous montrons que cette minoration est une égalité.

5 Un espace de modules pour les revêtements galoisiens

Fixons $n \geq 3$ premier à p. Rappelons la définition d'une structure de niveau n ([DeMu], [KaMa]). Soit C une courbe lisse projective de genre $g \geq 1$ et $J(C)$ la jacobienne de C. Notons $C[n] = J(C)[n]$ le sous-groupe des points de n-division de $J(C)$. Rappelons que pour S un $\mathbf{Z}[1/n]$-schéma et C une S-courbe projective et lisse, le S-schéma en groupe

$$C[n] = J(C)[n] \to S$$

est fini étale sur S ([KaMa] Proposition 1.6.4).
Une *structure de niveau* n pour la courbe C/S, est un isomorphisme φ de S-schémas en groupes

$$C[n] \xrightarrow{\varphi \sim} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}_S = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g} \times S$$

Pour S un schéma tel que n soit inversible dans $\mathcal{O}_S$, notons $(C/S, \varphi)$ le couple composé d'une S-courbe $\pi : C \to S$ lisse et projective, et d'une structure de niveau φ (le niveau est fixé égal à n). Un isomorphisme $\tau : (C/S, \varphi) \xrightarrow{\sim} (C'/S, \varphi')$ est un S-isomorphisme $\tau : C \xrightarrow{\sim} C'$ tel que le triangle ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
f : C'[n] \arrow[rr, "\tau[n]", "\sim"'] \arrow[dr, "\varphi'"', "\sim"] & & C[n] \arrow[dl, "\varphi", "\sim"'] \\
& (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}_S &
\end{tikzcd}$$

où $\tau[n]$ est l'isomorphisme induit par l'image réciproque $\mathcal{L} \to \tau^*(\mathcal{L})$ de $\mathrm{Pic}(C')$ sur $\mathrm{Pic}(C)$.
Rappelons la propriété de rigidité ([KaMa]):

Proposition 5.1 *Si S est connexe, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*
i. $\tau[n]$ est l'identité en un point $s \in S$
ii. $\tau[n]$ est l'identité
iii. τ est l'identité.

Soit $\mathrm{Sch}_{\mathbf{Z}[1/n]}$ la catégorie des schémas S tels que n est inversible sur $\mathcal{O}_S$; définissons un foncteur contravariant $\mathcal{M}_{g,n}$ $(g \geq 1)$ par

$$\mathcal{M}_{g,n} : \mathrm{Sch}_{\mathbf{Z}[1/n]} \to \mathrm{Ens}, \qquad S \mapsto \Big\{ \text{classes d'équivalence } [C/S, \varphi] \Big\}$$

Rappelons le résultat fondamental ([DeMu], [KaMa] pour $g = 1$) :

Théorème 5.2 *Le foncteur $\mathcal{M}_{g,n}$ est représentable par un $\mathbf{Z}[1/n]$-schéma quasi-projectif noté $\mathbf{M}_{g,n}$ appelé le schéma modulaire des courbes de genre g de niveau n.*

La représentabilité de $\mathcal{M}_{g,n}$ signifie en particulier qu'il existe une $\mathbf{M}_{g,n}$-courbe universelle avec structure de niveau n

$$\mathcal{C}_{g,n} \to \mathbf{M}_{g,n}$$

Si $(C/S, \varphi)$ est une S-courbe projective lisse munie d'une structure de niveau n, il existe un unique morphisme $f : S \to \mathbf{M}_{g,n}$ tel que C soit S-isomorphe à $\mathcal{C}_{g,n} \times_{\mathbf{M}_{g,n}} S$ et φ s'identifie à l'image réciproque de la structure de niveau universelle sur $\mathcal{C}_{g,n}$. Si S est connexe, le groupe $\mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S$ est le groupe des automorphismes du S-schéma constant $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S^{2g}$. Ainsi $\mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S$ opère sur l'ensemble des structures de niveau n portées par la courbe C/S par :

$$\alpha \in \mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S, \quad \alpha[C/S, \varphi] = [C/S, \alpha \circ \varphi]$$

Dire que $\alpha[C/S, \varphi] = [C/S, \varphi]$ signifie qu'il existe un automorphisme τ (unique par la propriété de rigidité) de C/S tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
C[n] \arrow[d, "\varphi", "\sim"'] & C[n] \arrow[l, "{\tau[n]}"'] \arrow[d, "\varphi", "\sim"'] \\
(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S^{2g} & (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S^{2g} \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Soit G un sous-groupe (fini) du groupe $\mathrm{Aut}(C/S)$ et soit φ une structure de niveau n sur C/S.

Lemme 5.3 *Supposons S connexe. Pour tout point $s \in S$, l'image G_s de G dans* $\mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$

$$G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(C_s) \to \mathrm{Aut}(C_s[n]) \xrightarrow{\varphi_s \sim} \mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est indépendante de $s \in S$; autrement dit, $\varphi(G)$ est un sous-groupe constant de $\mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S$.

Fixons à présent un sous-groupe $G \subset \mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Notons $(C/S, \varphi, \theta)$ le triplet constitué d'une S-courbe algébrique lisse complète de genre $g \geq 1$ munie d'une struture φ de niveau n et d'une action fidèle θ de G sur C/S qui est φ-adaptée, c'est-à-dire telle que l'isomorphisme φ soit G-équivariant ; ou encore que pour tout $\sigma \in G$

$$\varphi \circ \theta(\sigma)^{-1}[n] = \sigma \circ \varphi$$

Deux triplets $(C/S, \varphi, \theta)$ et $(C'/S, \varphi', \theta')$ sont isomorphes s'il existe un S-isomorphisme $\tau : C \xrightarrow{\sim} C'$ qui est G-équivariant et qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
C[n] \arrow[dr, "\sim", "\varphi"'] & & C'[n] \arrow[ll, "{\tau[n]}"'] \arrow[dl, "\sim"', "\varphi'"] \\
& (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_S^{2g} &
\end{tikzcd}$$

Notons que si $\tau[n]$ est G-équivariant, alors τ est G-équivariant d'après le théorème de rigidité 5.1. Si n est premier à p, nous pouvons définir le foncteur contravariant $\mathcal{M}_{g,n,G}$ par

$$\mathcal{M}_{g,n,G} : S \mapsto \{\text{classes d'équivalence } [C/S, \varphi, \theta]\}$$

Théorème 5.4 *Le foncteur $\mathcal{M}_{g,n,G}$ est représentable par le sous-schéma fermé des points fixes de G sur $\mathbf{M}_{g,n}$:*

$$\mathbf{M}_{g,n,G} = \mathbf{M}_{g,n}^{G}$$

Preuve : Observons tout d'abord que de l'action naturelle de $\mathrm{Gl}_{2g}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{M}_{g,n}$ découle une action de G. Le sous-schéma des points fixes de G a pour points

$$\mathrm{Hom}(S, \mathbf{M}_{g,n}^{G}) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathbf{M}_{g,n})^{G}$$

autrement dit le morphisme $f : S \to \mathbf{M}_{g,n}$ se factorise par $\mathbf{M}_{g,n}$ si et seulement si pour tout $g \in G$, $g \cdot f = f$. Il s'agit alors d'identifier les points de $\mathcal{M}_{g,n,G}(S)$ avec ceux de $\mathcal{M}_{g,n}(S)^{G}$.

Soit $[C/S, \varphi, \theta] \in \mathcal{M}_{g,n,G}(S)$, par le foncteur d'oubli de l'action de G, on obtient un couple $(C/S, \varphi)$ dont la classe à isomorphisme près est bien définie ; on a donc un point $[C/S, \varphi] \in \mathcal{M}_{g,n}(S)$. Ce point est fixé par G, car, par définition, pour tout $g \in G$, $\theta(g) \in \mathrm{Aut}(C/S)$ induit exactement g via φ.

Ce foncteur d'oubli est bien injectif. En effet si $[C/S, \varphi, \theta]$ et $[C'/S, \varphi', \theta']$ ont même image alors $[C/S, \varphi] = [C'/S, \varphi']$. Donc il existe un S-isomorphisme

$$\tau : C \xrightarrow{\sim} C'$$

qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} C[n] \arrow[dr, "\sim", "\varphi"'] & & C'[n] \arrow[ll, "\tau{[n]}"', "\sim"] \arrow[dl, "\sim"', "\varphi'"] \\ & (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}_{S} & \end{tikzcd}$$

Les actions de G via φ et φ' sont G-équivariantes, donc $\tau[n]$ est G-équivariant ; par rigidité, τ est aussi G-équivariant. Donc τ est un isomorphisme entre les triplets $(C/S, \varphi, \theta)$ et $(C'/S, \varphi', \theta')$.

Pour montrer la surjectivité, prenons $[C/S, \varphi] \in \mathcal{M}_{g,n}(S)^{G}$. Par définition pour tout $g \in G$ il existe un unique automorphisme $\tau(g)$:

$$\tau(g) : C \xrightarrow{\sim} C$$

qui est φ-compatible, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} C[n] \arrow[dr, "\varphi"', "\sim"] & & C[n] \arrow[ll, "\tau(g)[n]"', "\sim"] \arrow[dl, "\varphi", "\sim"'] \\ & (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}_S & \end{tikzcd}$$

Ensuite on observe que le morphisme $\theta : g \mapsto \tau(g)$ définit une action de G sur C/S. D'où la surjectivité. ∎

Il existe une courbe universelle avec structure de niveau n et action de G définie sur $\mathbf{M}_{g,n,G}$:

$$\pi_{g,n,G} : \mathcal{C}_{g,n,G} \to \mathbf{M}_{g,n,G}$$

Il se peut que $\mathbf{M}_{g,n,G}$ ne soit pas connexe. Alors si pour tout $x \in \mathbf{M}_{g,n,G}$, nous notons $\mathcal{C}_x = \pi^{-1}_{g,n,G}(x)$, le genre de $\mathcal{C}_x/G$ n'est pas forcément constant. Nous fixons alors un genre g' et nous nous limitons à l'étude des seules composantes connexes de $\mathbf{M}_{g,n,G}$ le long desquelles le genre des courbes $\mathcal{C}_x/G$ est constant et égal à g' (nous supposons ce problème non vide!).

5.1 L'espace modulaire de Harbater

Fixons une courbe affine lisse U. Soit Σ sa complétion et G un p-groupe fini. Harbater ([Ha]) a étudié la variété des G-revêtements étales de U, c'est-à-dire de Σ avec points de branchements contenus dans $\Sigma - U$. Ici, et contrairement à la situation considérée dans les paragraphes précédents, deux revêtements galoisiens étales de U de groupe G, $\pi : C \to U$ et $\pi' : C' \to U$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\tau : C \xrightarrow{\sim} C'$ tel que $\pi'\tau = \pi$. Dans [Ha], Harbater prouve que les classes de G-revêtements étales de U sont les points d'un espace de modules fin, qui est une limite inductive d'espaces affines.

Nous allons détailler le cas particulier $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $U = \mathbb{P}^1 - \{b_1, \ldots, b_r\}$. Dans ce cas un revêtement galoisien étale de U, c'est-à-dire une courbe C, est décrit par le corps $k(C) = k(t)(\xi)$, avec ξ solution de l'équation d'Artin-Schreier

$$\xi^p - \xi = a(t) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

La classe du revêtement est déterminée par la classe de la fraction rationnelle $a(t)$ modulo l'image de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ par l'application $\mathfrak{p} : x \mapsto x^p - x$. D'où la suite exacte qui décrit l'ensemble des points du schéma de Harbater $\mathbf{H}(U)$ ([Ha])

$$0 \longrightarrow \frac{\Gamma(U,\mathcal{O}_U)}{k} \xrightarrow{\mathfrak{p}} \frac{\Gamma(U,\mathcal{O}_U)}{k} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes de} \\ \text{revêtements} \end{array} \right\} \to 0 \tag{13}$$

Notons $[a(t)] \in H(U)$ l'image de $a(t) \in \Gamma(U,\mathcal{O}_U)$.
Soit $b \in \Sigma - U$, un point de branchement ; soit t' le paramètre local $t - t(b)$ (resp. t^{-1} si $b = \infty$) en b. De manière analogue à (13), les extensions $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-cycliques de $k((t))$ sont classifiées par un générateur d'Artin-Schreier, c'est-à-dire, par la classe de $a \in k((t'))$ modulo $k[[t']] + \mathfrak{p}(k((t')))$.
Nous avons l'analogue local de (13),

$$0 \longrightarrow \frac{k((t'))}{k[[t']]} \xrightarrow{\mathfrak{p}} \frac{k((t'))}{k[[t']]} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes de revêtements} \\ \text{de } \operatorname{Spec} k((t')) \end{array} \right\} \to 0 \tag{14}$$

Definition 5.1.1 Appellons *partie polaire* en b, un polynôme de Laurent

$$\mathfrak{t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{t'^j}, \quad \text{où} \quad \alpha_j = 0 \text{ si } p|j$$

et $\alpha_m \neq 0$. L'entier m, premier à p, est la *longueur* de $\mathfrak{t}$.

Lemme 5.1.2 *Dans chaque classe de*

$$\frac{k((t'))}{k[[t']] + \mathfrak{p}(k((t')))}$$

il y a une unique partie polaire.

PREUVE : Considérons la classe de $a(t')$ pour

$$a(t') = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{t'^j} \in k((t'))$$

Montrons d'abord qu'il existe une partie polaire dans la classe de a. Supposons que a n'est pas une partie polaire. Soit $j(a)$ le plus grand indice $j \in [1,m]$ tel que p divise j et $\alpha_j \neq 0$. Notons $j(a) = pl$ et $\alpha_{j(a)} = \beta^p$ pour $\beta \in k^*$. Alors

$$b(t') = a(t') - \mathfrak{p}\left(\frac{\beta}{t'^l}\right)$$

appartient à la classe de a et si b n'est pas une partie polaire, $j(b) < j(a)$. Il est alors immédiat que la classe de a contient une partie polaire et que celle-ci est unique. ∎

Soit maintenant, $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ un G-revêtement étale sur $U = \mathbb{P}^1 - \{b_1, \dots, b_r\}$, déterminé par la classe de $a(t) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Pour tout point $b_i \in \mathbb{P}^1 - U$, $1 \leq i \leq r$, soit $\mathfrak{t}_i$ la partie polaire de $a(t)$ dans $k((t_i'))$ et soit m_i sa longueur. Remarquons que m_i est le conducteur du revêtement au point b_i. Nous obtenons ainsi une application définie sur l'espace modulaire de Harbater $\mathbf{H}(U)$ de U :

$$[a(t)] \mapsto \{\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_r\} \tag{15}$$

Nous avons ([Ha] Proposition 2.7) :

Proposition 5.1.3 *L'application (15) est un isomorphisme de l'espace modulaire de Harbater $\mathbf{H}(U)$ sur les r-uplets de revêtements locaux aux points $b_i \in \mathbb{P}^1 - U$, $1 \leq i \leq r$.*

La relation entre $a(t)$ et les parties polaires $\{\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_r\}$ est la décomposition en éléments simples

$$a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{t}_i$$

Fixons à présent en chaque point b_i, $1 \leq i \leq r$, le conducteur m_i (c'est-à-dire la longueur de la partie polaire $\mathfrak{t}_i$). L'espace modulaire correspondant $\mathbf{H}(U, \{m_i\}_{1 \leq i \leq r})$ vérifie

$$\mathbf{H}(U, \{m_i\}_{1 \leq i \leq r}) \cong (\mathbb{A}^1_*)^r \times (\mathbb{A}^1)^{r'}$$

avec $r' = \sum_{i=1}^{r}(m_i - \lfloor m_i/p \rfloor - 1)$. En particulier sa dimension est

$$\dim_k \mathbf{H}(U, \{m_i\}_{1 \leq i \leq r}) = \sum_{i=1}^{r} \left(m_i - \left\lfloor \frac{m_i}{p} \right\rfloor \right)$$

Citons aussi le corollaire suivant du résultat de Harbater dont nous ferons usage pour $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ([Ha] Corollary 2.4) :

Corollaire 5.1.4 *Soit G un p-groupe fini et $U = \mathbb{A}^1$. Tout G-revêtement de* $\operatorname{Spec} k((t'))$ *($t' = t^{-1}$) se prolonge de manière unique en un G-revêtement de $\mathbb{P}^1$, étale sur $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$.*

5.2 Détermination de la dimension de Krull

Soit R_σ l'anneau de déformations versel local associé à un automorphisme σ d'ordre p de conducteur m de $k[[T]]$. Le groupe cyclique d'ordre p, $G = < \sigma >$ s'identifie au groupe d'inertie à l'infini d'un G-revêtement $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ étale sur $\mathbb{A}^1$. Fixons une structure de niveau n sur la courbe C. Posons $N = m+1$. Le genre g de C est donné par la relation de Riemann-Hurwitz :

$$g = \frac{(N-2)(p-1)}{2}$$

Nous pouvons exclure le cas $m = 1$ car alors l'anneau R_σ est décrit explicitement (Théorème 4.2.10) et nous pouvons également supposer $p \neq 2$ (Théorème 4.3.7). Dans la suite nous nous plaçons donc dans le cas $p > 2$ et $m > 1$. Ainsi le genre du revêtement C de $\mathbb{P}^1$, étale sur $\mathbb{A}^1$, est $g \geq 2$ sauf si $(p, m) = (3, 2)$. Dans cette situation exceptionnelle, nous pouvons remplacer C par un revêtement de $\mathbb{P}^1$ ramifié en deux points 0 et ∞, avec le conducteur $m = 3$ en chaque point. Donc dorénavant les revêtements considérés sont de genre $g \geq 2$. Un tel revêtement $\pi : C \to \mathbb{P}^1$, défini sur k, se réalise comme un point x d'un espace modulaire $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{g,n,G}$. Cet espace est défini sur $\mathbf{Z}[1/n]$. Par changement de l'anneau de base, nous pouvons supposer qu'il est défini sur $W(k)$. Le point x appartient alors à la fibre spéciale de $\mathbf{M}$.

Lemme 5.2.1 *L'anneau R_{gl} de déformations (uni)versel de (C, G) est relié à $\mathbf{M}$ par*

$$R_{\mathrm{gl}} \cong \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{M},x}$$

PREUVE : L'anneau local complet $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{M},x}$ pro-représente le foncteur

$$F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, \quad A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{relèvement } \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec} A, \mathbf{M}) \\ \text{ de } x \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec} k, \mathbf{M}) \end{array} \right\}$$

Par oubli de la structure de niveau, nous définissons un morphisme lisse

$$\phi : F \to D_{\mathrm{gl}}$$

Et

$$d\phi : F(k[\varepsilon]) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{gl}}(k[\varepsilon])$$

est bijectif. En effet si (X, G) est une déformation de (C, G) à $k[\varepsilon]$, alors la structure de niveau fixée sur C se relève de manière unique à X. Par définition, nous obtenons $R_{\mathrm{gl}} \cong \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{M},x}$. ∎

La dimension de Krull de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{M},x}$, c'est-à-dire la dimension de $\mathbf{M}$, est connue lorsque p ne divise pas l'ordre de G (ramification modérée). Nous allons prouver que cette dimension est indépendante de l'hypothèse sur l'ordre de G, c'est-à-dire même si G est cyclique d'ordre p.

Proposition 5.2.2 *Nous avons* $\dim_{\mathrm{Krull}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{M},x} = N - 2$.

Comme dans le cas de la ramification modérée, nous souhaitons comparer $\mathbf{M}$ à un schéma de "configuration", celui formé par les points de branchement, supposés mobiles. Le problème est que ce nombre n'est pas constant dans une déformation, contrairement au cas modéré. Nous contournons cette difficulté de la manière suivante (voir [Be] §2 Proposition) :

Lemme 5.2.3 *Soit* $\pi : X \to S$ *un* S*-point de* $\mathbf{M}$*,* X *et* S k*-schémas de type fini (*k *algébriquement clos). Le schéma des points fixes* $\mathrm{Fix} = X^G$ *de* G *(cyclique) sur* X *est un diviseur de Cartier relatif de degré* N*.*

Preuve : Soit $s \in S$ et $x \in X_s = \pi^{-1}(s)$ un point de $\mathrm{Fix} = X^G$; x est un point fermé de la fibre X_s car l'automorphisme σ n'est pas l'identité sur X_s. L'anneau local $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est de valuation discrète. Choisissons une uniformisante t de $\mathcal{O}_{X_s,x}$ que nous relevons en $T \in \mathcal{M}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Nous avons alors

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_s\mathcal{O}_{X,x} + T\mathcal{O}_{X,x}$$

Nous allons prouver que l'idéal $\mathcal{I}$ du sous-schéma Fix a pour équation locale en x, $\sigma^*(T) - T$. Un élément $y \in \mathcal{M}_x$ peut se mettre sous la forme

$$y \equiv P_l(T) \bmod \mathcal{M}_x^{l+1}$$

où $l \geq 1$ et $P_l(T)$ est un polynôme à coefficients dans l'image par π^* de $\mathcal{O}_{S,s}$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de degré inférieur à l ; autrement dit

$$y \equiv \sum_{i \leq l} r_i T^i \bmod \mathcal{M}_x^{l+1}$$

Alors modulo $\mathcal{M}_x^{l+1}$,

$$\sigma^*(y) - y = \sum_{i \leq l} r_i(\sigma^*(T^i) - T^i) = \sum_{i \leq l} r_i(\sigma^*(T)^i - T^i)$$

Or $\sigma^*(T)^i - T^i = (\sigma^*(T) - T)\lambda_i$ avec $\lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}$, ainsi

$$\sigma^*(y) - y \in \mathcal{O}_{X,x}(\sigma^*(T) - T) + \mathcal{M}_x^{l+1}$$

et $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}(\sigma^*(T) - T) + \mathcal{M}_x^{l+1}$ pour tout $l \geq 1$, ce qui entraîne l'égalité

$$\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}(\sigma^*(T) - T)$$

Il est clair que Fix est un diviseur de Cartier relatif. La fibre de Fix en un point géométrique s de S est le sous-schéma des points fixes de σ sur la fibre X_s, donc

$$\mathrm{Fix}_s = \sum_{i=1}^{r'} (a_i + 1) w_i$$

où $w_1, \ldots, w_{r'}$ sont les points fixes de conducteurs respectifs $a_1, \ldots, a_{r'}$ ($a_i = 0$ si $p \neq 0$ dans $k(s)$). Le degré est $N = \sum_{i=1}^{r'} (a_i + 1)$. ∎

Le lemme 5.2.3 nous permet de démontrer la proposition 5.2.2, de la façon suivante : D'après le lemme 5.2.3 pour la courbe universelle

$$\mathcal{C}_{g,n,G} \to \mathbf{M}$$

nous obtenons un diviseur de Cartier relatif noté $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{g,n,G} \subset \mathcal{C}_{g,n,G}$.
Soit $\Sigma = \mathcal{C}_{g,n,G}/G$ et $\tau : \mathcal{C}_{g,n,G} \to \Sigma$, $h : \Sigma \to \mathbf{M}$ les morphismes correspondants. Remarquons que τ est fini et plat de rang $p = |G|$. Il est alors possible de former l'image directe $\tau_*(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$, qui est un diviseur de Cartier relatif de Σ au-dessus de $\mathbf{M}$ de degré N ([Mu] Lecture 10). Par hypothèse, les fibres de h sont de genre zéro, c'est-à-dire que les fibres géométriques sont des droites projectives (h est un fibré tordu en droites projectives).

Notons $\mathbf{M}_0$ la fibre spéciale de $\mathbf{M} \to \mathrm{Spec}(W(k))$. Si $Z \subset \mathbf{M}_0$ est une composante irréductible avec $x \in Z$ et Z horizontale ($Z \not\subset M_0$), alors $\dim Z = 1 + \dim Z_\eta$ où Z_η est la fibre générique. Du fait que les revêtements cycliques de degré p se relèvent en caractéristique zéro, une telle composante horizontale existe. Dans le cas de la ramification modérée, la dimension de $\mathbf{M}$ est connue, nous avons $\dim Z_\eta = N - 3$, donc $\dim Z = N - 2$.

Nous nous limitons à présent aux composantes verticales. Pour estimer $\dim \mathcal{O}_{\mathbf{M}_0,x}$, nous pouvons considérer un voisinage étale de x dans $\mathbf{M}_0$. En particulier comme $h : \Sigma \to \mathbf{M}$ est lisse, h possède, localement pour la topologie étale, une section. Nous pouvons donc supposer que la courbe induite $\Sigma_V \to V$ est un produit $V \times \mathbb{P}^1$. Fixons une trivialisation $\phi : \Sigma_V \xrightarrow{\sim} V \times \mathbb{P}^1$. Cela signifie que pour tout point géométrique $v \in V$, nous avons une identification privilégiée

$$\phi_v : \Sigma_v = \mathcal{C}_v/G \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$$

La fibre $\mathcal{D}_v$ de $\mathcal{D}$ est un diviseur de Σ_v :

$$\mathcal{D}_v = \sum_{i=1}^{r'} (a_i + 1) b_i$$

où $b_1, \dots, b_{r'}$ sont les points de branchement de $\mathcal{C}_v \to \Sigma_v \cong \mathbb{P}^1$ et $a_1, \dots, a_{r'}$ les conducteurs respectifs. Nous définissons ainsi un morphisme

$$\delta : V \to \mathrm{Div}_N(\mathbb{P}^1), \quad v \mapsto \phi_v(\mathcal{D}_v)$$

Soit $\mathrm{PGL}(1)$ le groupe des automorphismes de la droite projective $\mathbb{P}^1_k$. Formons le morphisme

$$\Delta : V \times \mathrm{PGL}(1) \to \mathrm{Div}_N(\mathbb{P}^1), \quad \Delta(v, h) = h(\delta(v))$$

(Nous utilisons la même notation h pour un élément de $\mathrm{PGL}(1)$ et son action sur $\mathrm{Div}_N(\mathbb{P}^1)$). Nous pouvons supposer que

$$\Delta(x, 1) = D_0 = (m + 1)\infty$$

Soit $D = \sum_{i=1}^{r'}(a_i + 1)b_i$ un point géométrique de $\mathrm{Div}_N(\mathbb{P}^1)$. En particulier $\sum_{i=1}^{r'}(a_i + 1) = N + 1$. Examinons la fibre $\Delta^{-1}(D)$. Un point de cette fibre est un couple $(z, h) \in V \times \mathrm{PGL}(1)$ tel que $h(\phi_v(D_v)) = D$. Si nous remplaçons les courbes Σ_V et $\mathcal{C}_V$ par leurs images réciproques par la projection $V \times \mathrm{PGL}(1) \to V$, nous obtenons par restriction à $Z = \Delta^{-1}(D)$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\
& \Sigma_Z = \mathcal{C}_Z/G &
\end{tikzcd}$$

En corrigeant l'identification $\phi_v : \Sigma_{(v,h)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ par $h \circ \phi_v$, nous obtenons un isomorphisme $\Sigma_Z \cong Z \times \mathbb{P}^1$, tel que pour tout $z \in Z$, le diviseur de branchement de $\mathcal{C}_z \to \Sigma_z = \mathbb{P}^1$ est constant égal à D. Par restriction à $U = \mathbb{P}^1 - \mathrm{Supp}(D)$, nous obtenons une famille de G-revêtements étales de U paramétrée par Z ; d'où un morphisme $Z \to \mathbf{H}(U, \{a_i\}_{1 \le i \le r'})$ dans l'espace modulaire de Harbater des G-revêtements étales de U avec conducteurs fixés en les points de $\mathbb{P}^1 - U$. Ce morphisme est à fibres finies, donc

$$\dim Z \le \dim_k \mathbf{H}(U, \{a_i\}_{1 \le i \le r'})$$

soit encore

$$\dim Z \le \sum_{i=1}^{r'} (a_i - \lfloor a_i/p \rfloor)$$

Pour conclure, considérons $W \subset V$ une composante irréductible passant par x. Considérons la stratification naturelle

$$\mathrm{Div}_N(\mathbb{P}^1) = \cup_{\sum_i (a_i+1)=N+1} \sigma(a_1, \ldots , a_{r'})$$

avec $\sigma(a_1, \ldots , a_{r'})$ l'ensembles des diviseurs formés de r' points distincts avec les multiplicités respectives $a_1{+}1, \ldots , a_{r'}{+}1$ ($a_i \geq 0$). La cellule $\overline{\sigma(a_1+1, \ldots , a_{r'}+1)}$ est irréductible de dimension r' ; Supposons que

$$\Delta(W \times \mathrm{PGL}(1)) \subset \overline{\sigma(a_1+1, \ldots , a_{r'}+1)}$$

et $\Delta(W) \cap \sigma(a_1+1, \ldots , a_{r'}+1) \neq \emptyset$. Comme la fibre de Δ en un point géométrique de $\Delta(W)$ est de dimension majorée par $\sum_{i=1}^{r'}(a_i - \lfloor a_i/p \rfloor)$, nous obtenons

$$\dim W \times \mathrm{PGL}(1) \leq r' + \sum_{i=1}^{r'}(a_i - \lfloor a_i/p \rfloor) \leq \sum_{i=1}^{r'}(a_i+1) = N$$

Donc $\dim W \leq N-3$, ce qui termine la preuve de la proposition.

5.3 Calcul de $\dim_k H^1(G, \mathcal{T}_C)$ et conclusion

Revenons à la situation générale d'un revêtement cyclique de degré p sur le corps k : $C \to \Sigma = C/G$, avec les points de branchement $b_1, \ldots , b_r$ et $m_1, \ldots , m_r$ leurs conducteurs respectifs. Soit g_Σ le genre de la courbe Σ.

Lemme 5.3.1 *Soit $\mathfrak{r} \subset C$ le diviseur de ramification, dont l'idéal en un point est la différente ; nous avons la formule générale de ramification*

$$\Omega^1_C \cong \mathcal{O}_C(\mathfrak{r}) \otimes \pi^*(\Omega^1_\Sigma)$$

Preuve : Le revêtement étant séparable, nous avons la suite exacte

$$0 \to \pi^*\Omega^1_\Sigma \to \Omega^1_C \to \Omega^1_{C/\Sigma} \to 0$$

D'après [Se2] III Proposition 14, $\mathcal{O}_C(\mathfrak{r}) \cong \Omega^1_C \otimes \pi^*(\Omega^1_\Sigma)^{-1}$. La conclusion en découle. ∎

Proposition 5.3.2 *Nous avons*

$$\dim_k H^1(G,\mathcal{T}_C) = 3g_\Sigma - 3 + \sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{2\beta_i}{p} \right\rceil$$

pour $\beta_i = (m_i+1)(p-1)$.

PREUVE : Soit $\mathfrak{r} \subset C$ le diviseur de ramification, ainsi d'après la formule générale de ramification

$$\Omega^1_C \cong \mathcal{O}_C(\mathfrak{r}) \otimes \pi^*(\Omega^1_\Sigma)$$

soit encore

$$\mathcal{T}_C \cong \mathcal{O}_C(-\mathfrak{r}) \otimes \pi^*(\mathcal{T}_\Sigma)$$

D'où

$$\pi_*(\mathcal{T}_C) \cong \mathcal{T}_\Sigma \otimes \pi_*(\mathcal{O}_C(-\mathfrak{r})) \cong \mathcal{T}_\Sigma \otimes (\mathcal{O}_\Sigma \cap \pi_*(\mathcal{O}_C(-\mathfrak{r})))$$

Calculons d'abord le terme entre parenthèse ; soit $y \in \Sigma$. La fibre au point y est

$$\mathcal{O}_{\Sigma,y} \text{ si } y \notin \{b_1,\dots,b_r\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\Sigma,b_i}\Big(\Big\lfloor \frac{\beta_i}{p} \Big\rfloor b_i\Big) \text{ si } y = b_i$$

car si $\mathfrak{p}(x_i) = b_i$, l'idéal de $\mathfrak{r}$ dans $\mathcal{O}_{C,x_i}$ est la différente, donc est de valuation β_i. Donc

$$\pi_*^G(\mathcal{T}_C) = \mathcal{T}_\Sigma \otimes \mathcal{O}_\Sigma\Big(-\sum_{i=1}^{r} \Big\lfloor \frac{\beta_i}{p} \Big\rfloor b_i\Big)$$

Ainsi la contribution "globale" à $H^1(G,\mathcal{T}_C)$ vérifie

$$H^1(\Sigma, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \cong H^1\Big(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma\Big(\Big\lfloor \frac{\beta_i}{p} \Big\rfloor b_i\Big)\Big) \cong H^0\Big(\Sigma, \Omega_\Sigma^{\otimes 2}\Big(-\sum_{i=1}^{r} \Big\lfloor \frac{\beta_i}{p} \Big\rfloor b_i\Big)\Big)$$

le dernier isomorphisme provenant de la dualité de Serre. Alors la formule de Riemann-Roch donne

$$\dim_k H^1(\Sigma, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) = 3g_\Sigma - 3 + \sum_{i=1}^{r} \Big\lfloor \frac{\beta_i}{p} \Big\rfloor$$

La contribution "locale" à $H^1(G,\mathcal{T}_C)$ est de dimension

$$\sum_{i=1}^{r} \dim_k H^1(G, \widehat{\mathcal{T}}_{C,x_i}) = \sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{2\beta_i}{p} \right\rceil - \Big\lfloor \frac{\beta_i}{p} \Big\rfloor$$

D'où

$$\dim_k H^1(G,\mathcal{T}_C) = 3g_\Sigma - 3 + \sum_{i=1}^{r} \left\lceil \frac{2\beta_i}{p} \right\rceil$$

∎

Nous pouvons maintenant obtenir la dimension de l'anneau de déformation versel local, associé à un automorphisme σ de conducteur m. Nous supposons $m \geq 2$ et $p \geq 3$. Par le principe local-global (Théorème 3.3.6), en supposant qu'il n'y a qu'un point de branchement, l'anneau de déformations universel global vérifie

$$\dim_{\mathrm{Krull}} R_{\mathrm{gl}} = N - 2 = \dim_{\mathrm{Krull}} R_\sigma + \dim_k H^1(\Sigma, \pi_*^G(\mathcal{T}_C))$$

D'après le calcul précédent, nous obtenons ($g_\Sigma = 0$)

$$\dim_k H^1(\Sigma, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) = -3 + \left\lfloor \frac{\beta}{p} \right\rfloor$$

Comme $N + 1 = m + 2$,

$$\dim_{\mathrm{Krull}} R_\sigma = m + 2 - \left\lfloor \frac{\beta}{p} \right\rfloor$$

D'où le résultat :

Théorème 5.3.3 *Soit R_σ l'anneau de déformations versel défini par un automorphisme σ d'ordre p et de conducteur $m = pq - l$ ($q \geq 1$ et $l \in [1, p-1]$). Nous avons*

$$\dim_{\mathrm{Krull}} R_\sigma = \begin{cases} q \ si \ l \neq 1 \\ q + 1 \ si \ l = 1 \end{cases}$$

Et si $p > 2$, $m < p - 1$ et $(m, p) \neq (1, 3)$, R_σ est une intersection complète de dimension 1.

Il serait intéressant de savoir si la propriété d'intersection complète est toujours vraie pour d'autres valeurs de m et de p par exemple pour $m = p - 1$.
Nous obtenons aussi le corollaire suivant qui a pour conséquence un résultat de Green et Matignon ([GrMa2]) lorsque $m < p - 1$ (le résultat de Green et Matignon est encore valable pour $m = p - 1$).

Corollaire 5.3.4 *Soit S un anneau de valuation discrète complet contenant $W(k)$. Supposons $m < p - 1$. Alors il y a seulement un nombre fini de classes de conjugaison d'automorphismes d'ordre p de $S[[T]]$ qui induisent sur la fibre spéciale $k[[T]]$ un automorphisme de conducteur m.*

Preuve : Soit σ un automorphisme de $k[[T]]$ de conducteur m. La donnée d'un automorphisme de $S[[T]]$ qui induit σ, définit une déformation de σ et par conséquent un $W(k)$-automorphisme

$$u : R_\sigma \to S$$

La dimension de Krull de R_σ est 1, donc $\dim_{\text{Krull}} R_\sigma/pR_\sigma = 0$. Par conséquent R_σ est un $W(k)$-morphisme de type fini. Supposons $R_\sigma = \sum_{i=1}^r W(k)e_i$. Notons $P_i(Y)$ un polynôme unitaire à coefficients dans $W(k)$ tel que $P_i(e_i) = 0$. Alors u est déterminé par les images $y_i = u(e_i) \in S$ qui vérifient $P_i(y_i) = 0$. Il n'y a qu'un nombre fini de solutions possibles pour un tel choix et donc pour u. ∎

Il est possible de déterminer dans certains cas les conducteurs d'une déformation générique :

Corollaire 5.3.5 *Soit u et $v \in [1, p-1]$ définis par l'équation de Bézout $up - vl = 1$. Supposons que v divise $p-1$ (par exemple si $l = 1$). Le relèvement de (C, G) défini par l'équation d'Artin-Schreier déformée*

$$\xi^p - a(t)^{p-1}\xi = t^l, \qquad \text{avec } a(t) = \begin{cases} t^q + x_1 t^{q-1} + \cdots + x_q & \text{si } l = 1 \\ t^q + x_1 t^{q-1} + \cdots + x_{q-1} t & \text{sinon} \end{cases}$$

a pour conducteur $q-1$ fois $p-1$ et une fois $p-l$.

Bibliographie

[Be] J. Bertin. *Obstructions locales au relèvement de revêtements galoisiens de courbes lisses.* C. R. Acad. Sci. Paris, **326** série I (1998), 55–58.

[Co] R. Coleman. *Torsion points on curves.* Dans Galois representations and arithmetic algebraic geometry, Adv. St. in Pure Math. **12** (1987), 235–247.

[DeMu] P. Deligne, D. Mumford. *The irreductibility of the space of curves of given genus.* Publication de l'IHES **36** (1969), 75–109.

[Go] R. Godement. Topologie algèbrique et théorie des faisceaux. Hermann-Paris (1964).

[GrMa1] B. Green, M. Matignon. *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Comp. Math. **113** (1998), 239–274.

[GrMa2] B. Green, M. Matignon. *Order p automorphisms of the open disc of a p-adic field.* A paraître dans Journal of the AMS.

[Gro1] A. Grothendieck. Revêtements étales et groupe fondamental. SGA1, Lecture Notes in Math. **224** (1971).

[Gro2] A. Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Mathematical Journal **9** (1957), 119–221.

[Gro3] A. Grothendieck. *Fondements de la géométrie algébrique.* Extraits du Sém. Bourbaki 1957-1962. Sécr. Math., Paris (1962).

[Ha] D. Harbater. *Moduli of p-covers of curves.* Communications in Algebra **8** (12) (1980), 1095–1122.

[KaMa] N. Katz, B. Mazur. Arithmetic moduli of elliptic curves. Ann. of Math. Stud. **108**, Princeton University Press, 1985.

[La] O. Laudal. Formal moduli of algebraic structures. Lecture Notes in Math. **754** (1983).

[LaLø] O. Laudal, K. Lønsted. *Deformations of curves I. Moduli for hyperelliptic curves.* Dans Algebraic Geometry (Norway 1977), Lecture Notes in Math. **687** (1978), 150–167.

[Ma] B. Mazur. *Deforming Galois representations.* Dans Galois groups over **Q**, Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre eds, MSRI Publ. **16**, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, 1987, 385–437.

[Mé] A. Mézard. Quelques problèmes de déformations en caractéristique mixte. Thèse, Institut Fourier France (1998).

[Mu] D. Mumford. Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton University Press, 1966.

[Oo] F. Oort. *Liftings algebraic curves, abelian varieties and their endomorphisms to characteristic zero.* Proceedings in symposia in pure mathematics **46** (1987), 167-195.

[Sc] M. Schlessinger. *Functors of Artin rings.* Trans. Am. Soc. **130** (1968), 208–222.

[Se1] J.-P. Serre. *Revêtements de courbes algébriques.* Sém. Bourbaki **749** (1991).

[Se2] J.-P. Serre. Corps locaux. Hermann-Paris, 1962.

[SeOoSu] T. Sekiguchi, F. Oort, N. Suwa. *On the deformation of Artin-Schreier to Kummer.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **22** 4 série (1989), 345–375.

courriel : jose.bertin@ujf-grenoble.fr, ariane.mezard@ujf-grenoble.fr

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (France)