

LES CONDITIONS DE BOHR-SOMMERFELD SINGULIÈRES

Yves Colin de Verdière*, ** et Bernard Parisse**

7 septembre 1998

* Institut Universitaire de France

** Institut Fourier, Unité mixte de recherche CNRS-UJF 5582

BP 74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex (France)

yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

bernard.parisse@ujf-grenoble.fr

Résumé

Le but de cet article est de présenter une écriture géométrique des conditions de Bohr-Sommerfeld singulières données dans [8] dans un cadre général, incluant des variétés caractéristiques avec plusieurs points cols. Plusieurs exemples sont présentés de façon détaillée avec un test numérique des résultats.

Mots-clés: Valeurs propres, matrice de diffusion, conditions de Bohr-Sommerfeld, semi-classique, point col, lemme de Morse.

Classification A.M.S.: 34E20 - 34L25 - 81Q20

Introduction

Les conditions de Bohr-Sommerfeld permettent de décrire les valeurs propres d'un système hamiltonien complètement intégrable dans la limite semi-classique ; en fait, elles ne concernent que l'ouvert dense de l'espace des phases admettant un feuilletage lisse par des tores lagrangiens invariants et s'expriment comme une condition de quantification qui sélectionne certains de ces tores (voir par exemple [3], [9] ou [15]). Ces conditions font intervenir les intégrales d'actions et les intégrales du symbole sous-principal le long des cycles du tore invariant. On peut les écrire dans un contexte non spectral comme des conditions d'existence de solutions pour un (système d') opérateur(s) pseudo-différentiel(s) ayant ce tore comme variété caractéristique. En dimension 1, si γ est une composante compacte connexe lisse de la variété caractéristique (γ est un cercle), on note $A_\gamma = \int_\gamma \xi dx$ l'intégrale d'action, $I_\gamma = \int_\gamma H_1 dt$ (H_1 est le symbole sous-principal, si \mathcal{X}_{H_0} désigne le champ hamiltonien associé au symbole principal H_0 on définit dt par $dt(\mathcal{X}_{H_0}) = 1$) et $m(\gamma)$ l'indice de Maslov, la condition d'existence de solution de $\hat{H}u = O(h^2)$ (avec u de norme L^2 minorée) s'écrit :

$$\frac{1}{h}A_\gamma - I_\gamma + \frac{\pi}{2}m(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z} . \quad (1)$$

Déjà en dimension 1, un hamiltonien générique $H_0(x, \xi)$ a en général des valeurs critiques et les surfaces de niveaux correspondantes sont singulières. Près d'un extremum local non dégénéré, on peut régulariser les équations en termes d'oscillateurs harmoniques (voir [4]). Ce n'est plus le cas pour les points cols. Il existe alors une forme normale microlocale (lemme de Morse semi-classique, voir [7], [6]). Dans l'article [8], nous avons décrit les conditions de quantification associées à la variété singulière correspondant au cas du double puits de potentiel pour l'équation de Schrödinger.

Le but de l'article qui suit est de reformuler et de généraliser les conditions de quantification obtenues dans [8]. La reformulation se fait en des termes purement géométriques : les intégrales d'actions ne nécessitent pas de régularisation, par contre les intégrales du symbole sous-principal sont divergentes et nécessitent une régularisation utilisant la géométrie symplectique de l'espace des phases (voir 2.2).

On peut ainsi décrire le spectre semi-classique dans des cas où la variété caractéristique contient plusieurs points cols : puits multiples avec des cols de mêmes niveaux, pendule simple sur le tore. Le cas de systèmes couplés (voir la théorie locale dans [6]) sera étudié dans [5].

On peut aussi étudier des problèmes de diffusion. On présente plus bas le cas d'un puits avec un seul seuil et le cas du sommet de volcan (voir paragraphe 12). On étudie dans [5] la limite adiabatique pour un système à N -niveaux présentant des croisements évités (voir [13] et aussi [11]). Par rapport à la littérature, insistons sur le fait que nos méthodes se situent dans un contexte différentiable et n'utilisent pas de prolongement analytique. La combinatoire délicate des lignes

de Stokes y est en quelque sorte remplacée par un mécanisme algébrique associé au graphe tétravalent que forme la variété caractéristique.

La structure de l'article est la suivante : les solutions microlocales de l'équation pseudo-différentielle sont les sections d'un faisceau sur la variété caractéristique Z . L'étude abstraite de ces faisceaux est donnée dans le paragraphe 4. La description géométrique (à $O(h^2)$ près) du faisceau est donnée en termes des invariants classiques des cycles (section 2) et des cols (section 3). On considère en particulier une régularisation canonique des intégrales $\int_{\gamma} H_1 dt$ où γ est un cycle de la variété caractéristique.

On souhaite ensuite montrer au lecteur la mise en oeuvre des formules dans un certain nombre d'exemples : spectre de l'équation de Schrödinger pour un double puits sur \mathbb{R} de façon à retrouver les résultats de [8] (section 8), pour un triple puits (section 9), discriminant et spectres de l'équation de Hill (sections 10 et 11), calcul de matrice de diffusion pour des potentiels sur \mathbb{R} à 1 (section 12.1) ou 2 canaux (section 12.2).

Enfin dans les appendices (section A), ces résultats théoriques font l'objet de comparaison avec des calculs numérique directs.

Les cas des systèmes d'équations de Schrödinger (approximation de Born-Oppenheimer) et de la limite adiabatique pour les croisements évités d'un système à N niveaux seront traités dans un article en préparation ([5]).

Le cas des dimensions ≥ 2 sera étudié dans un travail ultérieur avec l'application aux états semi-excités dans le cas résonant en dimension 2 (voir [12] et [2]). Le cas des singularités *focus-focus* est traité dans le preprint [18].

1 Le contexte

1.1 Classique

Soit (X, ω) une variété symplectique de dimension 2 (X est l'espace des phases) et $H_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien C^∞ . En général, X est le cotangent de $M = \mathbb{R}$ ou de $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mais on peut aussi envisager le cas où X est une surface de Riemann (opérateurs de Toeplitz).

Supposons que 0 est valeur critique de H_0 et soit Z une composante connexe de la variété caractéristique $H_0^{-1}(0)$. On suppose que les seuls points critiques de H_0 situés sur Z sont non dégénérés de type col. Dans les problèmes de spectre, Z est compacte, alors que Z a des branches ouvertes dans les problèmes de diffusion. On note m_∞ le nombre de branches ouvertes de Z , Z_0 l'ensemble de ses points critiques et $n = \#Z_0$. L'ensemble Z est donc un graphe tétravalent plongé dans X . On notera s_j , $j = 1, \dots, n$ les points de Z_0 (sommets de Z), e_l , $l = 1, \dots, m$ les arêtes de Z (compactes ou ouvertes), on pose $m = m_b + m_\infty$. Soit γ_j , $j = 1, \dots, N$ une base de cycles de Z , c'est à dire une base de $\mathbf{H}_1(Z, \mathbb{Z})$ (\mathbb{Z} -module libre de rang N) formée de cycles géométriques (orientés). On a,

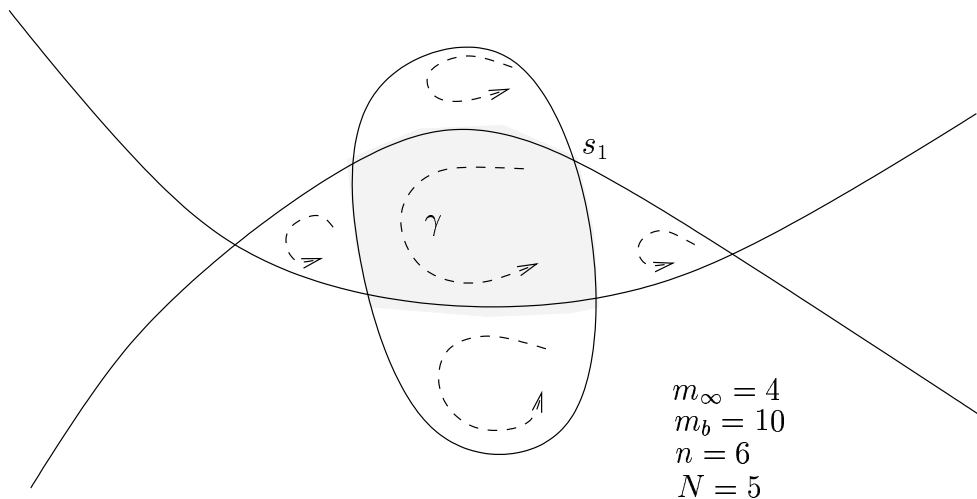


Figure 1: la variété caractéristique Z

d'après la formule d'Euler-Poincaré :

$$N = b_1(Z) = 1 - n + m_b , \quad (2)$$

avec $4n = 2m - m_\infty$. Dans le cas compact, $N = 1 + n$.

1.2 Semi-classique

Soit \hat{H} un hamiltonien quantique (semi-classique) sur X de symbole principal H_0 . On ne demande pas à \hat{H} d'être autoadjoint. On note $H_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ son symbole sous-principal (voir [9]). On a donc, si $X = T^*\mathbb{R}$:

$$\hat{H} = \text{Op}_W(H_0 + hH_1) + O(h^2) , \quad (3)$$

où Op_W est la *quantification de Weyl* définie par

$$\text{Op}_W(H)u(x) = \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} H\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) |dyd\xi| .$$

L'écriture précédente peut servir à définir le symbole sous-principal H_1 .

1.3 Spectre

On suppose Z compacte. Les *conditions de Bohr-Sommerfeld singulières* sont alors les conditions sous lesquelles l'équation

$$\hat{H}u = O(h^2) \quad (4)$$

admet des solutions microlocalisées sur Z de norme $\int |u(x)|^2 dx \sim 1$.

Le cas étudié dans [8] est celui où $\hat{H} = \hat{K} - \lambda h$ (\hat{K} est un opérateur de Schrödinger vérifiant $K_1 = 0$) et donc $H_1 = -\lambda$. Les valeurs de λ pour lesquelles les conditions de Bohr-Sommerfeld sont satisfaites correspondent alors aux valeurs propres $h\lambda$ de \hat{K} .

1.4 Matrice \mathcal{S}

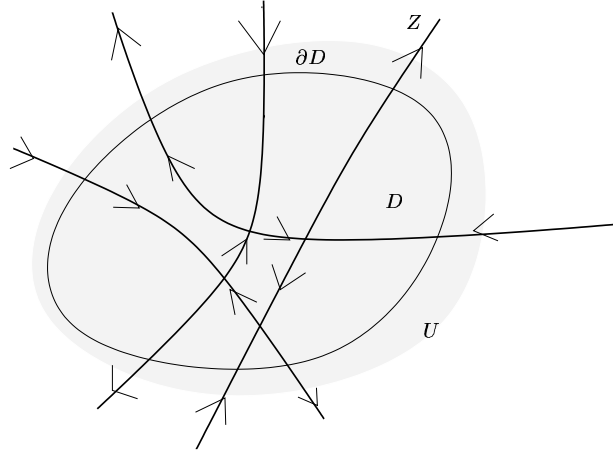


Figure 2: la matrice \mathcal{S}

Supposons que Z ait des branches ouvertes. Chaque branche est orientée par le flot hamiltonien de H_0 . Il y a autant de branches rentrantes que de branches sortantes. On note \mathcal{H}_∞ la somme pour toutes les branches ouvertes des solutions microlocales sur ces branches de $\hat{H}u = 0$. C'est un $\mathbb{C}(h)$ -module de rang m_∞ . L'espace \mathcal{H}_∞ se décompose naturellement en somme de 2 sous-espaces de même dimension $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{in} \oplus \mathcal{H}_{out}$. On appelle *matrice* \mathcal{S} de \hat{H} le sous-espace de l'espace \mathcal{H}_∞ des solutions microlocales de $\hat{H}u = 0$ sur les branches ouvertes qui se prolongent à Z tout entier. C'est en général le graphe d'une application de \mathcal{H}_{in} dans \mathcal{H}_{out} .

Unitarité.

Si on suppose \hat{H} autoadjoint, on va définir une forme hermitienne J sur \mathcal{H}_∞ . Soit D un domaine à bord ∂D de X contenant les arêtes compactes de Z et tel que le bord rencontre transversalement chaque branche ouverte en un point. Soit Ω un voisinage de ∂D dans X qui ne rencontre que les branches ouvertes et $U = D \cup \Omega$. Soit Π un OPD auto-adjoint d'ordre 0 dont le microsupport est contenu dans U et microlocalement égal à Id dans un voisinage de $D \setminus \Omega$. Soit Σ un autre OPD autoadjoint microlocalement nul dans un autre voisinage de $D \setminus \Omega$

et égal à Id là où Π ne l'est pas.

$$J(u, v) = \frac{i}{\hbar} (\langle \Sigma \hat{H} \Pi u \mid \Pi v \rangle - \langle \Pi u \mid \Sigma \hat{H} \Pi v \rangle) .$$

Cette forme J rend orthogonales les solutions sur les différentes branches et est définie positive (resp. négative) sur les branches entrantes (resp. sortantes). En effet

$$J(u, v) = \frac{i}{\hbar} \langle \Pi[\Sigma, \hat{H}]\Pi u \mid v \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\Sigma, \hat{H}]u \mid v \rangle + O(\hbar^\infty) .$$

On peut donc calculer $J(u, u)$ pour une solution microlocale u sur une branche e en termes de son symbole principal $\sigma_0(u)$ qui est une demi-densité sur e invariante par le flot hamiltonien de H_0 .

Lemme 1

$$J(u, u) = \pm \frac{|\sigma_0|^2}{|dt|} + O(\hbar) ,$$

avec le signe $+$ pour une branche sortante et $-$ pour une branche entrante. Ici $|\sigma_0|^2/dt$ désigne le quotient d'une densité (carré d'une demi-densité) par dt et non une dérivée.

Ce lemme résulte du calcul du symbole du crochet $[\Sigma, \hat{H}]$ qui vaut $\frac{\hbar}{i} \frac{d\sigma}{dt}$ si on note σ le symbole principal de Σ .

On a le :

Théorème 1 *Si on écrit $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{in} \oplus \mathcal{H}_{out}$, la matrice \mathcal{S} est le graphe d'une transformation unitaire (à $O(\hbar^\infty)$ près) de \mathcal{H}_{in} dans \mathcal{H}_{out} pour les métriques induites respectivement par J sur \mathcal{H}_{out} et $-J$ sur \mathcal{H}_{in} .*

L'isotropie est claire, car, si u est une solution dans U , $\Sigma \hat{H} \Pi u = \hat{H} \Pi u$. Le théorème se montre par récurrence sur le nombre d'arêtes intérieures. S'il n'y en a aucune, on sait que l'espace des solutions a la bonne dimension puisqu'alors Z est une réunion disjointe de croix simples. Recoller les 2 bords d'une arête coupée s'identifie à une opération de réduction sur la matrice \mathcal{S} . Plus précisément, on utilise le :

Lemme 2 *Soit $H = H_+ \oplus H_-$ où H_+ et H_- sont 2 Hilbert de même dimension finie. Soit $U : H_- \rightarrow H_+$ une isométrie linéaire de graphe Γ . Soient $e_\pm \in H_\pm$ 2 vecteurs de norme 1 et K_\pm les orthogonaux de $\mathbb{C}e_\pm$. Soit $e^{i\alpha}$ un complexe de module 1. Soit*

$$\Gamma_1 = \{(z_-, z_+) \in K_- \oplus K_+ \mid \exists y \in \mathbb{C}, (z_- + ye_-, z_+ + e^{i\alpha} ye_+) \in \Gamma\} .$$

Alors Γ_1 est le graphe d'une transformation unitaire de K_- dans K_+ .

La preuve est élémentaire.

On applique ensuite le lemme avec Z et Z_1 obtenu en coupant une arête intérieure de Z de façon à remplacer celle-ci par une entrante et une sortante de Z_1 . H_{\pm} sont relatifs à Z_1 alors que K_{\pm} sont relatifs à Z . Les e_{\pm} sont des solutions microlocales J -normalisées aux 2 bouts de l'arête coupée et $y_+ = e^{i\alpha}y_-$ exprime le recollement des 2 solutions.

2 Les invariants semi-classiques des cycles

A chaque cycle γ de Z , on associe 3 nombres : l'*action principale* A_{γ} (ou plus précisément $\exp(\frac{i}{\hbar}A_{\gamma})$), l'*action sous-principale* I_{γ} et l'*indice de Maslov* $m(\gamma)$. Ces invariants peuvent être définis dans le contexte de la quantification géométrique, i.e. uniquement en se donnant un fibré en droites avec connection sur l'espace des phases.

2.1 Les actions principales A_{γ}

Si γ est un cycle de Z , on pose :

$$A_{\gamma} = \int_{\gamma} \xi dx . \quad (5)$$

Le nombre A_{γ} est l'aire symplectique du domaine limité par γ si γ est le bord d'un domaine compact.

Si ω n'est pas exacte, l'invariant $e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma} \xi dx}$ est l'holonomie du fibré en droites utilisé pour quantifier X .

2.2 Les actions sous-principales I_{γ}

Soit \mathcal{X}_{H_0} le gradient symplectique de H_0 . On note dt la différentielle associée sur $Z \setminus Z_0$:

$$dt(\mathcal{X}_{H_0}) = 1 . \quad (6)$$

Les nombres I_{γ} sont des *parties principales* des intégrales divergentes $\int_{\gamma} H_1 dt$. Il nous suffit d'expliquer comment on prend les parties principales aux points cols.

Soit AB un arc de γ contenant la seule singularité s_j . On définit

$$\text{vp} \int_A^B H_1 dt = \lim_{a,b \rightarrow 0} \left(\int_A^a H_1 dt + \int_b^B H_1 dt + a(s_j) \ln \left| \int_{R_{a,b}} \omega \right| \right) , \quad (7)$$

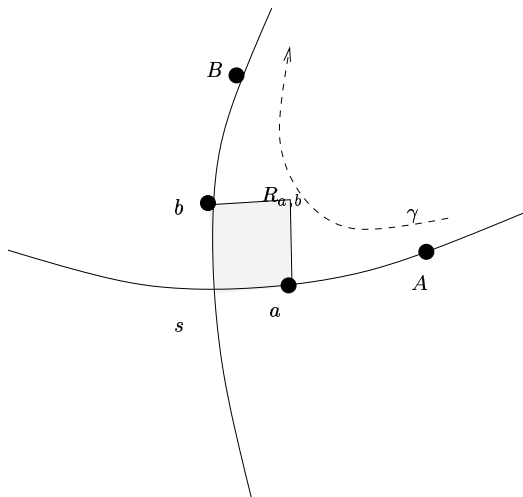


Figure 3: calcul de la partie principale de $\int_{\gamma} H_1 dt$

où

$$a(s_j) = \frac{\pm H_1(s_j)}{|\det H_0''(s_j)|^{1/2}}, \quad (8)$$

et $R_{a,b}$ est le parallélogramme construit sur les vecteurs $s_j \vec{a}$ et $s_j \vec{b}$, indiqué sur la figure. Le signe \pm est $+$ si l'arc AB est orienté dans le même sens que dt et $-$ sinon.

Lemme 3 *La limite précédente existe et est indépendante des choix faits.*

Preuve.—

Quitte à faire une transformation canonique, on peut supposer que $H_0(z) = Wx\xi + O(|z|^3)$. On a bien sûr $W = \pm |\det H_0''(s_j)|^{1/2}$ avec la convention de signe de la formule (8). On fait alors le calcul de $(\int_A^a + \int_b^B) H_1 dt$ en remplaçant H_0 par $Wx\xi$ (donc $dt = \frac{dx}{Wx} = -\frac{d\xi}{W\xi}$), ce qui donne la partie polaire de l'intégrale $-H_1(s_j)/W \ln(ab)$.

□

Si le cycle γ est lisse en s_j , on définit

$$\int_B^{\tilde{A}} H_1 dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_B^{\gamma(-\varepsilon)} + \int_{\gamma(\varepsilon)}^A \right) H_1 dt, \quad (9)$$

où $u \rightarrow \gamma(u)$ paramètre γ de façon C^1 et avec $\gamma(0) = s_j$. Ce choix est compatible avec les précédents : $\gamma \rightarrow I_\gamma$ est \mathbb{Z} -linéaire.

Remarque : les actions sous-principales I_γ possèdent une interprétation *classique* très naturelle. Supposons que γ soit un cycle simple de $Z = \{H_0 = 0\}$ tel que $\gamma = \partial D$ et que H_0 soit ≤ 0 dans D . Notons s_j , $j = 1, \dots, N$ les points cols de Z situés sur γ . Soit $H_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall j$, $1 \leq j \leq N$, on ait $H_1(s_j) < 0$. Pour $\tau < 0$, posons

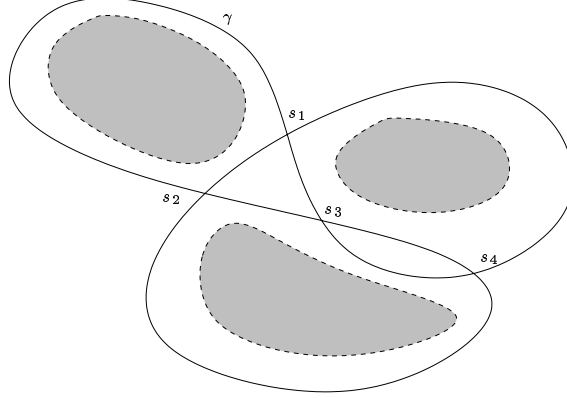


Figure 4: l'aire $A(\tau)$

$$A(\tau) = \int_{H_0 + \tau H_1 \leq 0} |dx d\xi| .$$

Alors, lorsque $\tau \rightarrow 0^-$, $A(\tau)$ admet le développement limité suivant :

$$A(\tau) = A(0) + \tau \left(\sum_{j=1}^N \varepsilon_0(s_j) (1 - \ln |\tau \varepsilon_0(s_j)|) \right) - \tau I_\gamma + O(\tau^2 \ln |\tau|) . \quad (10)$$

2.3 Les indices de Maslov $m(\gamma)$

On suppose d'abord qu'aucun des vecteurs tangents aux arêtes aux points singuliers n'est vertical, i.e. contenu dans le noyau de la différentielle de la projection de T^*M sur M . On attribue alors à chaque arc e_j orienté un indice de Maslov suivant les prescriptions usuelles rappelées dans la figure suivante :

Dans le cas où certains de ces vecteurs tangents sont verticaux, on commence par faire une petite homotopie pour les placer en position générique avant de faire le calcul. On utilisera alors cette même position générique pour numéroter les branches à la figure 7, p. 13.

3 Les invariants semi-classiques des points cols

Le lemme de Morse semi-classique (voir [7] pages 1546 et suivantes et aussi [6]) peut se reformuler ainsi :

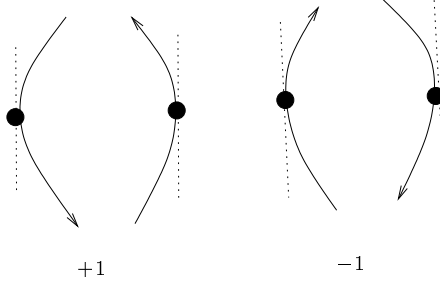


Figure 5: calcul des indices de Maslov.

Théorème 2 Soit χ un germe de transformation canonique défini sur (\mathbb{R}^2, O) , $(x, \xi) = \chi(y, \eta)$ tel que $H_0 \circ \chi = W(y\eta)y\eta$ et $\chi(O) = s$, $s \in Z_0$. Il existe un OIF unitaire U associé à χ , un OPD elliptique en O , \hat{W} , et une série formelle uniquement déterminée

$$\varepsilon(h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j h^j \quad (11)$$

tels que l'on ait :

$$\hat{H}U = U\hat{W}(y\hat{\eta} - h\varepsilon(h)) , \quad (12)$$

microlocalement près de O .

$$y\hat{\eta} = \frac{h}{i} \left(y \frac{d}{dy} + \frac{1}{2} \right) \quad (13)$$

est le quantifié de Weyl de $y\eta$. On a :

$$\varepsilon_0 = \pm \frac{H_1(s)}{|\det(H_0''(s))|^{1/2}} , \quad (14)$$

et la série $\varepsilon(h)$ est uniquement déterminée par \hat{H} . Le signe \pm est l'opposé du signe de $W(0)$.

Preuve. –

La preuve, donnée dans [6], est voisine de l'argument donné dans [7], mais comme on ne suppose pas \hat{H} autoadjoint, on doit se passer du calcul fonctionnel, ce qui donne l'énoncé de la formule (12). L'unicité de la série $\varepsilon(h)$ est démontrée de façon géométrique dans [6] en lui associant un invariant géométrique local utilisant un birapport.

Contentons-nous d'expliquer la formule (14). Comme H_0 est nul et critique au point s_j , le symbole sous-principal $H_1(s_j)$ de \hat{H} en s_j

est égal à celui de $\hat{W}(y\eta - h\varepsilon_0)$ en O . Ce dernier vaut $-W(O)\varepsilon_0$. Il reste à calculer $W(O)$; pour cela, on évalue le déterminant du hessien au point critique qui est invariant par χ . On trouve ainsi

$$|W(O)| = |\det(H''_0(s_j))|^{\frac{1}{2}} . \quad (15)$$

Dans la pratique, il est inconfortable de garder $W(0) > 0$. On préfère choisir le quadrant image par χ du 1er quadrant de façon qu'il soit dirigé vers le haut (voir figure 9) et alors $W(0)$ est > 0 ou < 0 suivant le signe de H_0 dans cette région. Alors ε_0 est changé de signe suivant la même règle.

□

Définition 1 *La série $\varepsilon_j(h) = \varepsilon_{0,j} + O(h)$ est l'invariant semi-classique du point critique s_j .*

4 Des faisceaux sur Z

4.1 Algèbre linéaire

Soit Z un graphe tétravalent connexe avec éventuellement des arcs ouverts. On note e l'arête générique. On suppose qu'on s'est donné pour chaque sommet une numérotation des arêtes qui y arrivent : e_1, e_2, e_3, e_4 (par exemple en suivant la convention de la figure 7, p. 13).

Définition 2 *On définit un faisceau $\mathcal{F} = (Z, E_e, F_s)$ sur Z de la façon suivante : on se donne pour chaque arête un espace vectoriel E_e de dimension 1 sur un corps K (ou un module libre sur un anneau) et pour chaque sommet s un sous-espace vectoriel F_s générique de $\bigoplus_{i=1}^4 E_{e_i}$ de dimension 2. Générique signifie que cet espace n'est contenu dans aucune somme de 3 des E_{e_j} .*

On peut écrire F_s comme le graphe d'une application linéaire $T_s : E_{e_1} \oplus E_{e_2} \rightarrow E_{e_3} \oplus E_{e_4}$. Il existe des bases des E_{e_i} telles que la matrice de T vérifie $T_{i,j} = 1$ pour $(i, j) = (1, 4), (2, 3), (2, 4)$ et $T_{1,3} = \rho_s$.

$$T = \begin{pmatrix} \rho_s & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (16)$$

ρ_s est un scalaire non nul qui ne dépend pas de la base choisie : $\rho_s = \frac{T_{1,3}T_{2,4}}{T_{1,4}T_{2,3}}$. On peut l'interpréter en termes de birapport comme dans [6] : si D_i sont les droites de F_s constituée des solutions nulles sur la branche e_i , ρ_s est le birapport des ces 4 droites. De telles bases sont uniques à un scalaire global près. Un tel choix définit donc un faisceau \mathcal{F}_1 sur Z dont l'espace des sections au voisinage de chaque

sommet est de dimension 1. Soit maintenant γ un cycle de Z . On lui associe un scalaire non nul h_γ qui est l'holonomie le long de γ du faisceau \mathcal{F}_1 définie avec la convention suivante : si ϕ_+ est une section sur l'arête e ($\phi_+ \in E_e \setminus 0$) que l'on suit comme section de \mathcal{F}_1 le long de γ , on obtient un nouvel élément ϕ_- de E_e et on a :

Définition 3 *L'holonomie de γ est définie par :*

$$\phi_+ = h_\gamma \phi_- .$$

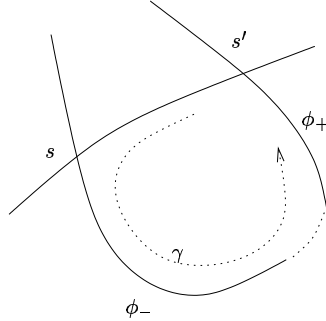


Figure 6: convention pour les holonomies

On a alors le :

Théorème 3 *Les scalaires non nuls ρ_s et h_γ en nombre $n + N$ caractérisent le faisceau $\mathcal{F} = (Z, E_e, F_s)$ à isomorphisme près. Si on appelle section de \mathcal{F} la donnée d'un élément de $\oplus E_e$ qui soit dans F_s pour chaque sommet, la dimension de l'espace des sections $b_0(\mathcal{F})$ ne dépend donc que des invariants précédents. Il en est de même de la matrice \mathcal{S} (à conjugaison près par des matrices diagonales) dans le cas où Z a des branches ouvertes.*

Preuve.—

En coupant certaines arêtes de Z , on détermine un arbre maximal T , sous-graphe de Z . Chaque arête coupée orientée détermine un cycle $\gamma \in H_1(Z, \mathbb{Z})$ et on obtient ainsi une bijection entre les arêtes coupées orientées et les cycles d'une base de $H_1(Z, \mathbb{Z})$. Les données permettent de trivialisier le faisceau \mathcal{F}_1 sur T et donc de reconstruire \mathcal{F} sur T . On lit alors les holonomies h_γ sur les arêtes coupées à l'aide de la définition 3.

□

4.2 Le cas semi-classique

Soit $\mathbb{C}(h)$ l'anneau des séries formelles en h . Dans ce qui suit, E_e est le $\mathbb{C}(h)$ -module des solutions microlocales le long de e modulo $O(h^\infty)$. Les modules F_s sont donnés par les solutions microlocales près des points cols. Le paramètre ρ se calcule en termes de la série $\varepsilon(h)$ associée au point col par le théorème 2. Plus précisément, on a

$$\rho_s = -e^{2\pi\varepsilon} . \quad (17)$$

On peut bien sûr choisir une forme normale arbitraire pour définir le sous-faisceau.

On choisit les e_i près de s comme sur la figure 7.

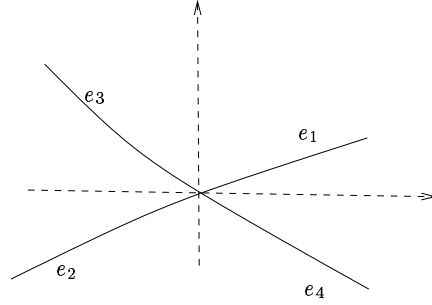


Figure 7: choix des e_i

On prend alors pour forme normale :

$$T(\varepsilon) = \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-\varepsilon\pi} \\ ie^{-\varepsilon\pi} & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

où:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right) e^{\varepsilon\left(\frac{\pi}{2} + i \ln h\right)} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}}} e^{i \arg \Gamma(1/2 + i\varepsilon) + i\varepsilon \ln(h)}. \quad (20)$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow \pm\infty$, la formule de Stirling permet de montrer les asymptotiques suivantes

$$T(\varepsilon) = e^{i\varepsilon \ln |h\varepsilon|} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow +\infty, \quad (21)$$

et

$$T(\varepsilon) = e^{i\varepsilon \ln |h\varepsilon|} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow -\infty. \quad (22)$$

Ces asymptotiques décrivent la transition entre le cas singulier et le cas lisse. Elles permettent en particulier de tester les formules de quantification !

Problème : comment écrire la condition $b_0(\mathcal{F}) \neq 0$ en termes des invariants précédents ? Comment calculer la matrice de diffusion ?

Cette écriture donne les conditions de quantification. On coupe b_1 arêtes de Z de façon à avoir un arbre maximal T . On choisit une section ϕ non nulle de \mathcal{F}_1 sur T . On cherche alors $\psi = x\phi : x = (x_e, e \in E(T) ; (x_e^+, x_e^-), e \in E(Z \setminus T))$ avec en chaque sommet $(x_3, x_4) = T(\varepsilon)(x_1, x_2)$ et $x_e^+ = (h_\gamma)^{-1}x_e^-$. Reportant ces dernières équations dans le premier système donne un système de $\nu = 2n$ équations linéaires homogènes à ν inconnues. La condition s'écrit donc comme la nullité d'un déterminant $\nu \times \nu$ où $\nu = 2n$.

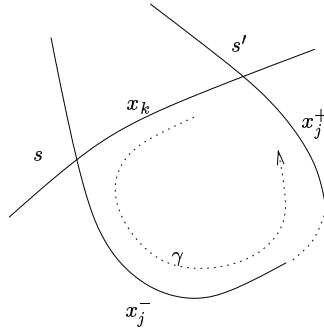


Figure 8: les x_k, x_j^\pm .

Cas métrique :

si chaque espace E_e est muni d'une métrique hermitienne et que les T_s sont unitaires, on peut choisir comme forme normale de T_s une matrice unitaire, par exemple:

$$T_s = \begin{pmatrix} \cos \theta_s & -\sin \theta_s \\ \sin \theta_s & \cos \theta_s \end{pmatrix}, \quad (23)$$

avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $\tan^2 \theta_s = -\rho_s$. Dans ce cas les holonomies h_γ sont de module 1 : ce sont des déphasages. On voit aisément que la condition $b_0 \neq 0$ peut se réécrire sous la forme

“1 est valeur propre d'une matrice unitaire”.

Supposons que l'on cherche le spectre d'un opérateur de Schrödinger K (cf. section 1.3). L'équation $b_0 \neq 0$ se traduit alors en 1 est valeur propre d'une matrice unitaire dépendant du paramètre spectral λ . Il s'agit d'une équation complexe ayant un paramètre réel. Montrons qu'en fait cette équation complexe est équivalente dans tous les cas à une équation réelle: la condition de Bohr-Sommerfeld singulière.

En effet, soit U une matrice unitaire $n \times n$, on a:

$$\det(I - U) = \det(UU^* - U) = \det(U) \det(U^* - I) = (-1)^n \det(U) \overline{\det(I - U)}$$

Posons encore $\det(I - U) = a + ib$ et $(-1)^n \det(U) = c$, on a donc:

$$(a + ib) = c(a - ib)$$

Si $c \neq 1$, alors:

$$a = -i \frac{1+c}{1-c} b$$

donc $a + ib = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Si $c = 1$, alors $b = 0$ donc $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Dans les deux cas, on s'est ramené à une équation réelle.

5 Calcul des holonomies à $O(\hbar)$ près

Il faut calculer les ρ_s et les holonomies h_γ au sens du §4. On a déjà vu que $\rho_s = -e^{2\pi\varepsilon}$. Il reste à déterminer les holonomies, ce qui est le résultat principal de l'article :

Théorème 4 *Avec le choix de forme normale donné par l'équation (18) et les conventions de la figure 7, les holonomies h_γ sont données par :*

$$h_\gamma^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar} A_\gamma - i I_\gamma + i \frac{\pi}{2} m_\gamma} (1 + O(\hbar)) . \quad (24)$$

6 Justification

Soit $\varphi_\pm(y)$ et $\psi_\pm(y)$ les fonctions définies par :

$$\varphi_\pm(y) = Y(\pm y) |y|^{-1/2} e^{i\varepsilon \ln |y|} , \quad (25)$$

et

$$\psi_\pm(y) = \int^\star Y(\pm \eta) |\eta|^{-1/2} e^{i \frac{y\eta}{\hbar}} e^{-i\varepsilon \ln |\eta|} d\eta , \quad (26)$$

où

$$\int^\star = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \int \quad (27)$$

et Y est la fonction de Heaviside. Soit alors f une solution microlocale au voisinage de O de

$$(\hat{y}\hat{\eta} - \hbar\varepsilon)f = O(\hbar^\infty) , \quad (28)$$

f est en dehors de l'origine microlocalement combinaison linéaire des φ_\pm et ψ_\pm ; ce qu'on écrit

$$f \sim \sum x_\pm \varphi_\pm + y_\pm \psi_\pm . \quad (29)$$

On a la relation (voir [7]) :

$$\begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} \quad (30)$$

Avec les notations de la figure 7, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \quad (31)$$

Posons :

$$\chi'(O) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } a > 0, b < 0. \quad (32)$$

où χ est la tranformation canonique du théorème 2.

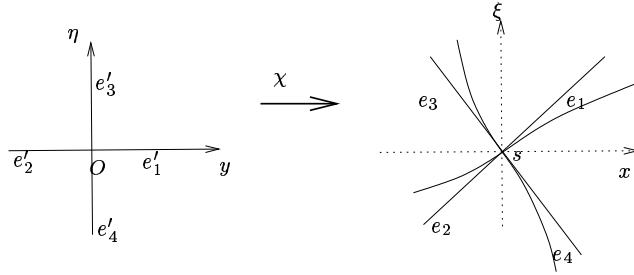


Figure 9: le choix des e_i et de χ .

On peut supposer que $s_j = O$ et soit $S(x, y) = S_0(x, y) + O((|x| + |y|)^3)$ la fonction génératrice de χ définie par

$$\chi\left(y, -\frac{\partial S}{\partial y}\right) = \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \quad (33)$$

et $S(O) = 0$. On a donc :

$$S_0(x, y) = \frac{1}{2b}(dx^2 - 2xy + ay^2) . \quad (34)$$

L'OIF U est donc donné par :

$$Uf(x) = \int^* e^{\frac{i}{h}S(x,y)} C_h(x, y) f(y) dy , \quad (35)$$

où $C_h(x, y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} C_j(x, y) h^j$ et $C_0(O) = 1$.

Soit $\Phi_{\pm} = U\varphi_{\pm}$ et $\Psi_{\pm} = U\psi_{\pm}$. Calculons l'expression semi-classique de ces fonctions pour $x_0 \neq 0$, mais voisin de 0. L'application de la formule de la phase stationnaire à l'intégrale :

$$\Phi_{\pm}(x_0) = \int^{\star} e^{\frac{i}{\hbar}S(x_0,y)} C_h(x_0, y) \phi_{\pm}(y) g(y) dy , \quad (36)$$

où $g(y) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \setminus 0)$ vaut 1 près de y_0 tel que $\chi(y_0, 0) = (x_0, \xi_0)$, donne :

$$\Phi_{\pm}(x_0) = Y(\pm x_0) e^{\frac{i}{\hbar}S_1(x_0)} e^{i\varepsilon \ln|\frac{x_0}{a}|} e^{-i\frac{\pi}{2}} \left| \frac{b}{x_0} \right|^{\frac{1}{2}} (A_0(x_0) + O(\hbar)) , \quad (37)$$

avec $A_0(x) = 1 + O(x)$ et $S_1(x)$ est la fonction génératrice de la branche $\chi(\mathbb{R} \times 0)$ qui vaut 0 en $x = 0$. De même

$$\Psi_{\pm}(x_0) = Y(\mp x_0) e^{\frac{i}{\hbar}S_2(x_0)} e^{-i\varepsilon \ln|\frac{x_0}{b}|} e^{-i\frac{\pi}{2}} \left| \frac{b}{x_0} \right|^{\frac{1}{2}} (B_0(x_0) + O(\hbar)) , \quad (38)$$

où $B_0(x) = 1 + O(x)$ et S_2 est la fonction génératrice de la branche $\chi(0 \times \mathbb{R})$ qui vaut 0 en $x = 0$.

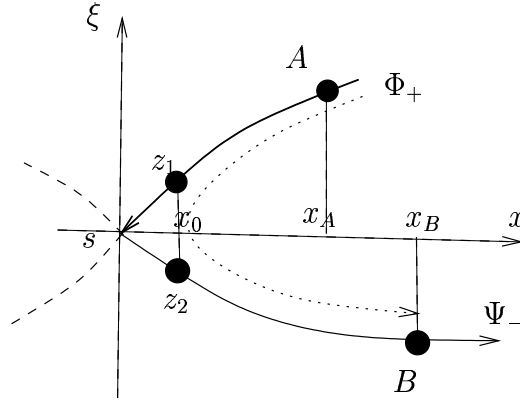


Figure 10: calcul de l'holonomie.

Evaluons $\Phi_+(x_A)$ et $\Psi_-(x_B)$ à partir de leurs valeurs respectives en x_0 afin de calculer leur déphasage, à l'aide des formules BKW usuelles.

On a, en posant $z_j = (x_0, S'_j(x_0))$:

$$\Phi_+(x_A) = -iC_+(x_A) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{z_1}^A \xi dx + i\varepsilon \ln \frac{x_0}{a} - i \int_{z_1}^A H_1 dt} (A_0(x_0) + O(\hbar)) , \quad (39)$$

où les intégrales curvilignes sont prises sur Z et $C_+(x_A) > 0$, et de même :

$$\Psi_-(x_B) = -iC_-(x_B) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{z_2}^B \xi dx - i\varepsilon \ln \frac{x_0}{|b|} - i \int_{z_2}^B H_1 dt} (B_0(x_0) + O(\hbar)) , \quad (40)$$

où $C_-(x_B) > 0$.

On peut ainsi calculer le déphasage $\Psi_-(x_B) = e^{i\Omega}\Phi_+(x_A)$ en utilisant les expressions précédentes et en faisant tendre x_0 vers 0 :

$$\Omega = \frac{i}{\hbar} \int_A^B \xi dx - i \text{vp} \int_A^B H_1 dt + O(\hbar) , \quad (41)$$

en passant à la limite où $a, b \rightarrow s_j$ et en utilisant $\omega(s_j \vec{z}_1, s_j \vec{z}_2) \sim \frac{x^2}{a|b|}$.

Pour se convaincre de la validité de (24), imaginons que les solutions microlocales Φ_+ et Ψ_- correspondent à la même arête $e \in E(Z \setminus T)$. On fait tendre les points A et B l'un vers l'autre, on doit alors avoir :

$$x_+ \Phi_+(x_A) = x_- \Psi_-(x_B) e^{i\frac{\pi}{2} m \gamma}$$

soit :

$$x_+ = x_- e^{i\Omega + i\frac{\pi}{2} m \gamma}$$

donc :

$$h_\gamma^{-1} = e^{i\Omega + i\frac{\pi}{2} m \gamma}$$

7 Résumé des conditions de quantification

Pour résumer, on se donne l'hamiltonien semi-classique de symbole principal réel H_0 et de symbole sous-principal H_1 . On détermine la variété caractéristique Z , puis les invariants ε des points cols, ce sont des séries formelles en \hbar dont le premier terme ε_0 est donné par la formule (14). On choisit ensuite un arbre maximal dont on oriente les arêtes coupées. On peut alors calculer l'holonomie des cycles associés par la formule (24). On écrit alors les solutions microlocales en termes de la trivialisations de \mathcal{F}_1 sous la forme $u = \sum_e x_e u_e$ où la somme porte sur les arêtes de T . Les conditions sur (x_e) sont alors données par les matrices T_e associées à chaque point singulier et les holonomies $x_{e_-} = h_\gamma x_{e_+}$ si le cycle γ rencontre l'arête coupée $e = e_+ \cup e_-$ suivant e_- puis e_+ . L'erreur relative sur ces conditions est d'ordre $O(\hbar^\infty)$, elle devient d'ordre $O(\hbar)$ lorsqu'on remplace les holonomies en utilisant l'équation (24), dans ce cas on peut aussi remplacer ε par ε_0 sans changer l'erreur relative.

8 Le cas du double puits

8.1 Le double puits général

C'est le cas étudié dans [7] et [8]. $X = T^*\mathbb{R}$, $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel qui présente un double puits. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que:

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad \mathcal{V} = V''(0) \ll 0$$

par exemple $V(x) = x^2((x - b)^2 - a^2)$ avec $a > b > 0$.

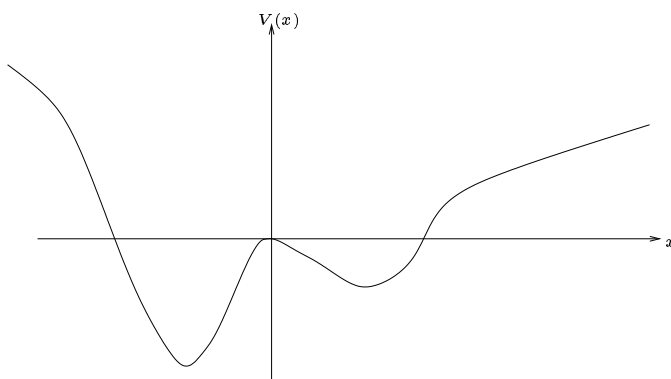


Figure 11: un potentiel double puits.

On considère alors l'opérateur de Schrödinger :

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - \lambda h . \quad (42)$$

L'existence de solutions normalisées de $\hat{H}u = O(h^\infty)$ équivaut donc au fait que λh est une valeur propre de $-\frac{1}{2}h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, à une erreur d'ordre $O(h^\infty)$ près (relativement à l'écart à la valeur propre la plus proche).

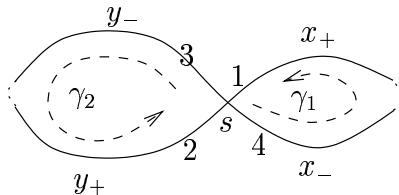


Figure 12: le double puits dans l'espace des phases.

On a donc ici :

$$\det(H''_0) = \mathcal{V}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{-\mathcal{V}}} \quad (43)$$

Les équations d'holonomie sont

$$x_- = h_{\gamma_1} x_+, \quad y_- = h_{\gamma_2} y_+, \quad (44)$$

et au point critique on a :

$$\begin{pmatrix} y_- \\ x_- \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix}. \quad (45)$$

La condition de quantification peut s'écrire :

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & h_{\gamma_2} \\ h_{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix} - T(\varepsilon) \right) = 0 . \quad (46)$$

ou encore "1 est valeur propre de la matrice" :

$$T(\varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & h_{\gamma_1}^{-1} \\ h_{\gamma_2}^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad T(\varepsilon) = \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-\varepsilon\pi} \\ ie^{-\varepsilon\pi} & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est unitaire, donc si on applique l'appendice de [8], la condition de quantification se ramène à une équation réelle, on retrouve la proposition 3 de [8] :

Proposition 1 *L'existence de solutions normalisées de $\hat{H}u = O(h^\infty)$ équivaut à la condition suivante sur λ :*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi\varepsilon}}} \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) = \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \ln h + \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\varepsilon \right) \right) \quad (47)$$

où ε dépend de λ (cf. (11) et (43)) et où :

$$e^{i\varphi_1} = h_{\gamma_1}^{-1}, \quad e^{i\varphi_2} = h_{\gamma_2}^{-1}$$

Nous allons maintenant déterminer l'équation (47) à une erreur relative d'ordre $O(h)$. On remplace donc ε par ε_0 , puis on calcule φ_1 et φ_2 en appliquant (24): les indices de Maslov valent +1, les A_{γ_i} sont les opposés des aires de l'intérieur du cycle γ_i (car $d(\xi dx) = -dx \wedge d\xi$). Il ne reste donc qu'à calculer les valeurs principales I_{γ_i} .

On remarque que le long d'une trajectoire du hamiltonien $H = \xi^2/2 + V(x)$, on a :

$$\frac{dx}{dt} = \xi_{\pm} = \pm \sqrt{-2V(x)}$$

Considérons un des cycles noté dorénavant γ , soit A l'intersection de γ avec l'axe des x . Soit x_A l'abscisse de A (par exemple, pour $V(x) = x^2((x-b)^2 - a^2)$, $x_A = b \pm a$). On a d'après la définition (8) :

$$\begin{aligned} I_{\gamma} &= \lim_{\tilde{a}\tilde{b} \rightarrow s_j} \left(\int_A^{\tilde{a}} H_1 dt + \int_{\tilde{b}}^A H_1 dt + a(0) \ln \int_{R_{\tilde{a},\tilde{b}}} \omega \right) \\ &= \lambda \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \int_{x_A}^x \frac{-dX}{\sqrt{-2V(X)}} + \frac{1}{\sqrt{-\mathcal{V}}} \ln |2x \sqrt{-2V(x)}| \right) \end{aligned}$$

8.2 Limite non singulière

On peut retrouver les conditions de Bohr-Sommerfeld habituelles (non singulières) lorsque $\varepsilon \rightarrow \pm\infty$. On utilise la formule de Stirling :

$$\arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right) = \varepsilon \ln |\varepsilon| - \varepsilon + o(1),$$

et on calcule l'asymptotique de l'aire de l'intérieur de la courbe de niveau $\frac{\xi^2}{2} + V(x) = \tau$ lorsque τ tend vers 0. D'après l'équation (10) de la section 2.2, on a :

$$A(\tau) = A(0) + 2\frac{\tau}{\sqrt{|\mathcal{V}|}}\left(1 - \ln \frac{|\tau|}{\sqrt{|\mathcal{V}|}}\right) - (I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2})\tau + O(\tau^2 \ln |\tau|),$$

en prenant $H_1 = 1$ dans la définition des intégrales I_γ .

Ici $\tau = \lambda h$ et les cycles sont parcourus dans le sens trigonométrique, il faut donc changer le signe de $A(\tau)$:

$$\begin{aligned} \int_{H=\lambda h} \xi dx &= \int_{H=0} \xi dx + 2\frac{\lambda h}{\sqrt{|\mathcal{V}|}}\left(\ln \frac{|\lambda h|}{\sqrt{|\mathcal{V}|}} - 1\right) + (I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2})\lambda h + O(\lambda^2 h^2 \ln h) \\ &= \int_{H=0} \xi dx + 2\varepsilon_0 h(\ln |h\varepsilon_0| - 1) - h(I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2})H_1 + O(\lambda^2 h^2 \ln h) \end{aligned}$$

puisque $H_1 = -\lambda$.

On fait maintenant tendre λ vers $+\infty$, l'équation (47) est alors vérifiée si l'argument du cosinus du membre de droite est égal à $\pi/2$ modulo π soit :

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \varepsilon \ln h - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon + o_\varepsilon(1) = k\pi \quad (48)$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2h} \int_{H=0} \xi dx - \frac{1}{2}(I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2})(H_1) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2h} \int_{H=\lambda h} \xi dx - \varepsilon_0(\ln |h\varepsilon_0| - 1) + O(h \ln h \varepsilon_0^2) \end{aligned}$$

l'équation (48) devient ainsi :

$$\frac{1}{2h}A(h\varepsilon) + \frac{\pi}{2} + O(h \ln h \varepsilon^2) + o_{\varepsilon \rightarrow +\infty}(1) = k\pi$$

qui redonne les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles. On peut faire le même type de vérification lorsque λ tend vers $-\infty$.

8.3 Calculs analytiques pour les potentiels de degré 4

Dans cette section, on s'intéresse à l'exemple $V(x) = x^2((x-b)^2 - a^2)$.

8.3.1 Résultats.

On peut calculer explicitement les aires A_{γ_i} :

$$\begin{aligned} A_{\gamma_d} &= \sqrt{2} \left(-\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}^3}{3} - \sqrt{a^2 - b^2}b^2 - ba^2 \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{a^2b\pi}{2} \right) \\ A_{\gamma_g} &= \sqrt{2} \left(-\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}^3}{3} - \sqrt{a^2 - b^2}b^2 - ba^2 \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{a^2b\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

De même, on calcule explicitement les I_γ :

$$I_{\gamma_d} = \varepsilon_0 \left(\frac{7}{2} \ln 2(a^2 - b^2) - 2 \ln a \right) = \varepsilon_0 \left(\frac{7}{2} \ln(2(a^2 - b^2)) - 2 \ln a \right) \quad (49)$$

Le calcul de I_{γ_g} donne le même résultat, ce qu'on montrera directement à la section 8.3.2.

En remplaçant dans (24), on obtient à une erreur relative d'ordre $O(h)$ près :

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \sqrt{2} \frac{a^2b\pi}{h} \\ \varphi_1 + \varphi_2 &= \pi - 2\varepsilon_0 \left(\frac{7}{2} \ln(2(a^2 - b^2)) - 2 \ln a \right) + \\ &+ \sqrt{2} \frac{2}{h} \left(-\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}^3}{3} - \sqrt{a^2 - b^2}b^2 - ba^2 \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \right) \end{aligned}$$

puis en appliquant l'équation (47) on obtient la :

Proposition 2 *Les solutions ε_0 de:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi\varepsilon_0}}} \cos\left(\frac{a^2b\pi}{2h}\right) &= \cos\left(\pi - 2\varepsilon_0 \left(\frac{7}{2} \ln(2(a^2 - b^2)) - 2 \ln a \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{2}}{h} \left[-\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}^3}{3} - \sqrt{a^2 - b^2}b^2 - ba^2 \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \right] + \right. \\ &+ \left. \varepsilon_0 \ln h + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon_0\right) \right) \end{aligned} \quad (50)$$

correspondent aux valeurs propres $\lambda h = \sqrt{2(a^2 - b^2)}\varepsilon_0 h$ de l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{1}{2}h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x) = x^2((x - b)^2 - a^2)$$

à une erreur relative d'ordre $O(h)$ près (l'erreur relative est mesurée par rapport à l'écart à la valeur propre la plus proche).

Pour calculer explicitement les valeurs propres du potentiel V proches de 0, on cherche les solutions de (50), les valeurs propres sont alors les λh correspondants. Dans l'appendice A.1, on comparera ces valeurs propres à celles calculées purement numériquement, obtenues en appliquant la méthode de Runge-Kutta à l'équation de Schrödinger. Les méthodes semi-classiques permettront d'explorer beaucoup plus finement la zone d'énergie critique pour h petit (pour la méthode de Runge-Kutta, il faut choisir un pas qui est petit devant $1/h$, le temps de calcul croit donc linéairement en $1/h$ alors qu'il est constant si on utilise les conditions singulières).

8.3.2 Egalité $I_{\gamma_d} = I_{\gamma_g}$

L'égalité des intégrales I_γ pour des potentiels polynomiaux de degré 4 peut être montrée directement. En vertu de la formule (10), il suffit de prouver que $A_+(E) - A_-(E) = \text{constante}$, où $A_\pm(E)$ sont pour $E < 0$ les aires des 2 composantes connexes de $\xi^2 + V(x) \leq E$. Si on note par γ_\pm les bords de ces 2 domaines, on a

$$\frac{dA_\pm}{dE} = \int_{\gamma_\pm} \frac{dx}{\xi}.$$

La forme $\frac{dx}{\xi}$ est holomorphe sur la compactification projective holomorphe lisse de la courbe $\xi^2 + V(x) = E$. Cette courbe est un tore lorsque V est de degré 4 et les courbes γ_+ et γ_- sont homotopes (car simples et ne se coupant pas), d'où l'égalité des dérivées.

9 Le triple puits

Même contexte que dans la section 8, mais V présente 3 puits consécutifs avec des cols de même hauteur.

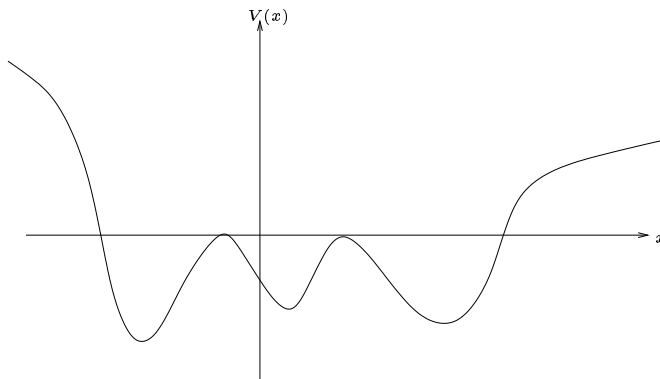


Figure 13: un potentiel triple puits.

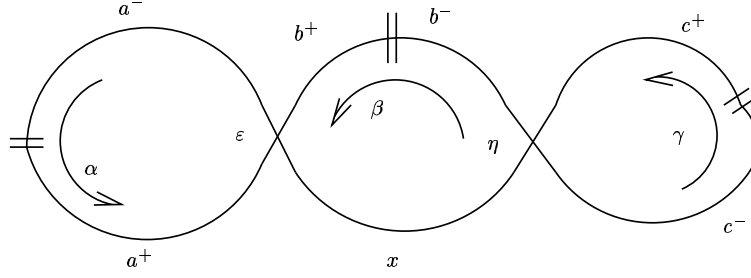


Figure 14: le triple puits dans l'espace des phases.

On crée un arbre maximal comme sur la figure 14 avec 7 arêtes notées a^\pm , b^\pm , c^\pm et x . Il y a trois cycles notés α , β et γ :

$$a^+ = a^-/h_\alpha, \quad b^+ = b^-/h_\beta, \quad c^+ = c^-/h_\gamma$$

On note ε et η les invariants semi-classiques des deux sommets, on a donc les relations :

$$\begin{pmatrix} a^- \\ x \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} b^+ \\ a^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b^- \\ c^- \end{pmatrix} = T(\eta) \begin{pmatrix} c^+ \\ x \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} T(\varepsilon) & 0 \\ 0 & T(\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^+ \\ a^+ \\ c^+ \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^- \\ x \\ b^- \\ c^- \end{pmatrix} = 0$$

Comme :

$$\begin{pmatrix} a^- \\ x \\ b^- \\ c^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^+ \\ a^+ \\ c^+ \\ x \end{pmatrix}$$

le système possède une solution non-triviale si et seulement si :

$$\det \left(\begin{pmatrix} T(\varepsilon) & 0 \\ 0 & T(\eta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & h_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_\gamma & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Notons \mathcal{E} et \mathcal{N} les coefficients en facteur des matrices $T(\varepsilon)$ et $T(\eta)$ (cf. (19) pour \mathcal{E} et une formule analogue pour \mathcal{N}). En divisant les deux premières lignes du

déterminant par \mathcal{E} et les deux dernières par \mathcal{N} , on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & ie^{-\varepsilon\pi} - \frac{h_\alpha}{\mathcal{E}} & 0 & 0 \\ ie^{-\varepsilon\pi} & 1 & 0 & \frac{-1}{\mathcal{E}} \\ \frac{-h_\beta}{\mathcal{N}} & 0 & 1 & ie^{-\eta\pi} \\ 0 & 0 & ie^{-\eta\pi} - \frac{h_\gamma}{\mathcal{N}} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

déterminant que l'on développe par rapport à la première colonne :

$$(1 - ie^{-\eta\pi}(ie^{-\eta\pi} - \frac{h_\gamma}{\mathcal{N}}))(1 - ie^{-\varepsilon\pi}(ie^{-\varepsilon\pi} - \frac{h_\alpha}{\mathcal{E}})) + \frac{h_\beta}{\mathcal{N}}(ie^{-\varepsilon\pi} - \frac{h_\alpha}{\mathcal{E}})\frac{-1}{\mathcal{E}}(ie^{-\eta\pi} - \frac{h_\gamma}{\mathcal{N}}) = 0$$

Posons encore :

$$A = e^{-\varepsilon\pi} + i\frac{h_\alpha}{\mathcal{E}}, \quad C = e^{-\eta\pi} + i\frac{h_\gamma}{\mathcal{N}} \quad (51)$$

On obtient alors l'équation :

$$(1 + e^{-\eta\pi}C)(1 + e^{-\varepsilon\pi}A) = \frac{-h_\beta}{\mathcal{N}\mathcal{E}}AC \quad (52)$$

On va voir que les modules des deux membres sont égaux (lorsque E est réel) ce qui donnera bien une équation de quantification (en prenant les arguments des deux membres). Pour cela, introduisons encore les notations :

$$\tilde{\alpha} = \arg h_\alpha - \arg \mathcal{E}, \quad \tilde{\gamma} = \arg h_\gamma - \arg \mathcal{N} \quad (53)$$

de sorte que :

$$A = e^{-\varepsilon\pi} + \sqrt{1 + e^{-2\varepsilon\pi}}e^{i\tilde{\alpha}}, \quad C = e^{-\eta\pi} + \sqrt{1 + e^{-2\eta\pi}}e^{i\tilde{\gamma}}$$

puisque $|\mathcal{E}| = 1/\sqrt{1 + e^{-2\varepsilon\pi}}$. Donc :

$$\begin{aligned} 1 + e^{-\varepsilon\pi}A &= 1 + e^{-2\varepsilon\pi} + e^{-\pi\varepsilon}\sqrt{1 + e^{-2\varepsilon\pi}}e^{i\tilde{\alpha}} \\ &= \sqrt{1 + e^{-2\varepsilon\pi}}e^{i\tilde{\alpha}}\bar{A} \end{aligned}$$

Ce qui simplifie l'équation (52) en :

$$e^{i\tilde{\alpha}+i\tilde{\gamma}}\sqrt{1 + e^{-2\varepsilon\pi}}\sqrt{1 + e^{-2\eta\pi}}AC = \frac{-h_\beta}{\mathcal{E}\mathcal{N}}AC$$

Il est maintenant clair que les modules des deux membres sont égaux, il nous reste l'équation :

$$\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = \pi + \arg h_\beta - \arg \mathcal{E} - \arg \mathcal{N} + 2 \arg A + 2 \arg C \quad (2\pi)$$

Soit finalement :

Proposition 3 Les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger à 3 puits correspondent à une erreur relative d'ordre $O(h^\infty)$ près aux solutions λ de:

$$\arg(h_\alpha) + \arg(h_\gamma) = \arg(h_\beta) + \pi + 2 \arg A + 2 \arg C \quad (2\pi) \quad (54)$$

où α, β et γ désignent les holonomies des 3 cycles et où A et C ont été définis en (51) et (19).

Exercice :

On pourrait comme dans le cas du double-puits effectuer analytiquement les calculs dans le cas du potentiel

$$V(x) = a(x^2 - 1)^3 - b(x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1)^2(ax^2 - a - b)$$

avec $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$V'(x) = 2x(3a(x^2 - 1)^2 - 2b(x^2 - 1)) = 2x(x^2 - 1)(3ax^2 - 3a - 2b)$$

Ce potentiel admet 5 points critiques : $0, \pm 1, \pm \sqrt{1 + 2b/(3a)}$. Les valeurs critiques respectives : sont $-a - b < 0, 0, -4b^3/(27a^2) < 0$ et de dérivée seconde respectives : $6a + 4b > 0, -8b < 0$ et $24b + 16b^2/(3a) > 0$. Il admet donc 2 maximum locaux de même hauteur 0 (note : le potentiel $V(x)$ est pair, il faut s'attendre à des propriétés de symétrie supplémentaire). On peut à nouveau faire des calculs explicites des intégrales d'action, car pour $x \in [-1, 1]$:

$$W(x) = \sqrt{-V(x)} = (1 - x^2)\sqrt{b + a - ax^2}$$

admet une primitive explicite de même que son inverse.

10 L'équation de Hill

On considère dans toute cette section un opérateur de Schrödinger

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

où $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ , périodique de période $T > 0$ et vérifie $\sup_{x \in \mathbb{R}} V(x) = 0$.

10.1 Rappel sur le spectre de l'équation de Hill et son discriminant

Il est classique que l'opérateur \hat{H} est alors essentiellement auto-adjoint et admet un spectre absolument continu formé d'une réunion d'intervalles appelées *bandes*. Les intervalles entre 2 bandes consécutives sont appelés *gaps*.

Pour déterminer les bandes, on introduit la fonction *discriminant* notée $\Delta(E)$. Soit $P_E : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'application linéaire qui à $(u(0), u'(0))$ associe $(u(T), u'(T))$ où u est solution de $(\hat{H} - E)u = 0$. Il est facile de voir que P_E est de déterminant 1.

Définition 4 On définit le discriminant de l'équation de Hill par :

$$\Delta(E) = \text{trace}(P_E) .$$

Le discriminant $\Delta(E)$ a l'allure donnée dans la figure 15.

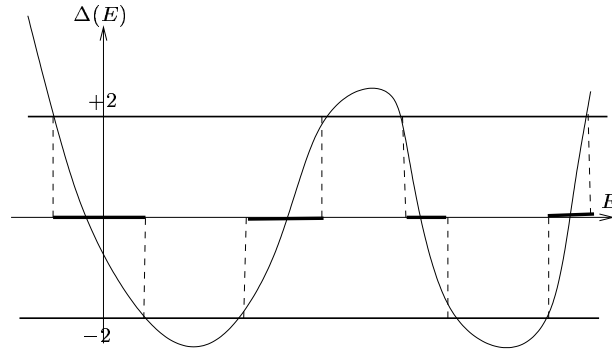


Figure 15: la fonction $\Delta(E)$

On définit le spectre pair (ou périodique) $E_1^+ < \dots \leq E_k^+ \leq \dots$ comme le spectre de \hat{H} restreint aux fonctions périodiques. Les E_k^+ sont les solutions de $\Delta(E^+) = 2$. De même, on définit le spectre impair $E_1^- \leq \dots \leq E_k^- \leq \dots$ comme le spectre de \hat{H} restreint aux fonctions anti-périodiques. Les E_k^- sont les solutions de $\Delta(E^-) = -2$. On a les inégalités

$$E_1^+ < E_1^- \leq E_2^- < E_2^+ \leq E_3^- < E_3^+ \leq \dots$$

et les bandes sont données par

$$B_{2j-1} = [E_{2j-1}^+, E_{2j-1}^-], \quad j = 1, 2, \dots$$

$$B_{2j} = [E_{2j}^-, E_{2j}^+], \quad j = 1, 2, \dots .$$

On peut aussi trouver le spectre de \hat{H} sur un intervalle kT comme réunion des solutions de $\Delta(E) = 2 \cos \frac{2\pi j}{k}$.

Lorsque $h \rightarrow 0^+$, les bandes dans la zone d'énergie $E < 0$ sont exponentiellement petites. Lorsque $E > 0$ et $h \rightarrow 0$, ce sont les gaps qui le sont. On va décrire plus bas le calcul asymptotique de $\Delta(h\lambda)$ qui sera noté $\Delta_1(\lambda)$, ce qui permettra de décrire la transition entre les 2 régimes d'énergie ainsi que les spectres de H restreint aux fonctions de période kT , k entier fixé.

10.2 L'asymptotique semi-classique du discriminant dans le cas d'un maximum par période

On se place ici dans le cas où $V^{-1}(0) = 2\pi\mathbb{Z}$ et $V''(0) < 0$. Par exemple $V(x) = \cos x - 1$. On note γ_{\pm} les 2 cycles sur $T^*(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}})$ définis par $\gamma_+(s) = (s, \sqrt{-2V(s)})$, $0 \leq s \leq 2\pi$ et $\gamma_-(s) = (2\pi - s, -\sqrt{-2V(2\pi - s)})$, $0 \leq s \leq 2\pi$.

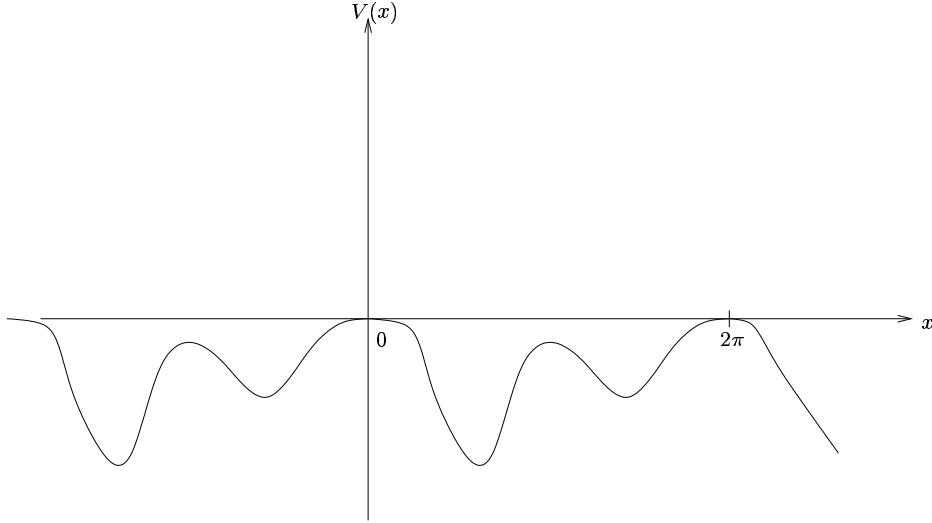


Figure 16: un exemple de potentiel périodique.

Théorème 5 Soit α l'holonomie commune de γ_{\pm} . Si on pose $\Omega = \int_{\gamma_+} \xi dx$ et $J = \text{vp} \int_{\gamma_+} dt$, on a donc $\alpha = e^{\frac{i\Omega}{h} - i\lambda J} + O(h)$. Soit $\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j(\lambda) h^j$ l'invariant semi-classique du point $(0, 0)$, avec $\varepsilon_0 = \frac{\lambda}{|V''(0)|^{\frac{1}{2}}}$. On a pour $|\lambda| \leq M$:

$$\Delta_1(\lambda) = 2\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}} \cos\left(\arg \alpha + \varepsilon \ln h + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right) + O(h^\infty), \quad (55)$$

et donc

$$\Delta_1(\lambda) = 2\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon_0}} \cos\left(-\frac{\Omega}{h} - \lambda J + \varepsilon_0 \ln h + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon_0\right)\right) + O(h \ln h). \quad (56)$$

On retrouve ainsi les résultats obtenus par März dans le cas analytique (voir [14]).

Corollaire 1 On en déduit que dans la région où $\lambda \rightarrow 0$, on a :

$$\Delta_1(\lambda) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\Omega}{h} + \frac{\lambda \ln h}{|V''(0)|^{\frac{1}{2}}}\right) + O(\lambda) + O(h \ln h). \quad (57)$$

Les gaps et les bandes sont donc asymptotiquement de même longueur l donnée par

$$l = \frac{\pi h |V''(0)|^{\frac{1}{2}}}{2 |\ln h|}.$$

Preuve. –

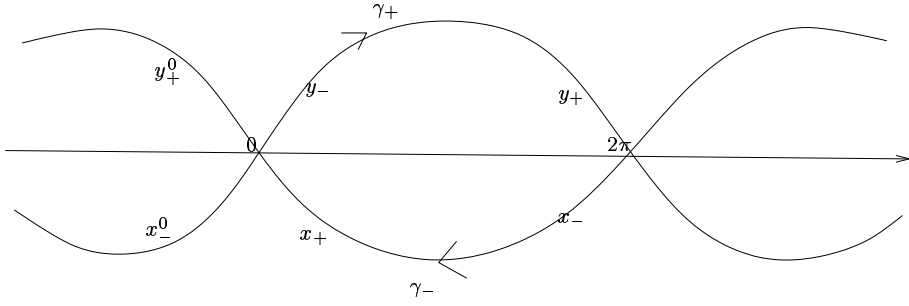


Figure 17: l'espace des phases pour l'équation de Hill

En $x = 0$, on se place dans la base des 2 solutions microlocales (e_3, e_2) et on note (y_+^0, x_-^0) les coordonnées d'une solution de l'équation de Schrödinger. En $x = 2\pi$, on note les coordonnées de cette même solution (y_-, x_+) dans la base (e_1, e_4) et (y_+, x_-) dans la base (e_3, e_2) . La matrice P est la matrice qui permet de passer de (y_+^0, x_-^0) à (y_+, x_-) . Elle se déduit de la matrice T et des holonomies :

$$y_+ = h_{\gamma^+}^{-1} y_-, \quad x_+ = h_{\gamma^-}^{-1} x_-, \quad \begin{pmatrix} y_+^0 \\ x_+^0 \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} y_- \\ x_- \end{pmatrix} \quad (58)$$

On factorise \mathcal{E} dans la matrice $T(\varepsilon)$ (cf. (19)). On obtient alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\alpha\mathcal{E} & -ie^{-\pi\varepsilon}/\alpha \\ \alpha ie^{-\pi\varepsilon} & \alpha\mathcal{E}(1 + e^{-2\pi\varepsilon}) \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que $\det(P) = 1$ alors que :

$$\text{tr}(A) = 2\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}} \cos \left(\arg(\alpha) + \varepsilon \ln(h) + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right) \right). \quad (59)$$

□

10.3 Le spectre périodique

On déduit facilement le spectre périodique de l'équation $\Delta_1(\lambda) = 2$. On peut retrouver cette condition par la méthode directe. Nous le ferons aussi dans la situation combinatoire plus complexe du spectre pour les fonctions de période $2T$ ou $3T$. Cette situation est assez analogue au problème du double-puits, mais cette fois-ci les doublets de valeurs propres correspondent à des énergies supérieures à l'énergie critique pour lesquelles deux trajectoires classiques symétriques interagissent par effet tunnel microlocal.

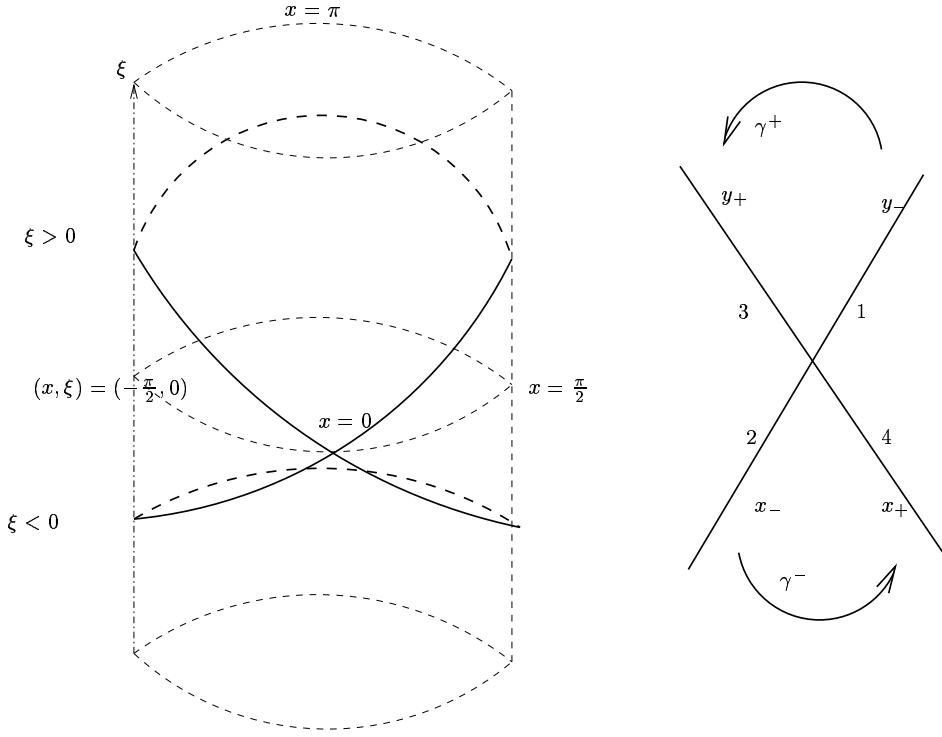


Figure 18: la trajectoire d'énergie 0 dans l'espace des phases du pendule

Revenons à la zone de transition, on a (cf. figure 18) :

$$y_+ = h_{\gamma^+}^{-1} y_-, x_+ = h_{\gamma^-}^{-1} x_-, \quad \begin{pmatrix} y_+ \\ x_+ \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} y_- \\ x_- \end{pmatrix} \quad (60)$$

Donc 1 est valeur propre de la matrice unitaire :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} h_{\gamma^+} & 0 \\ 0 & h_{\gamma^-} \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas du double puits, on applique l'équation

$$|a| \cos \left(\frac{\arg ad}{2} - \arg a \right) = \cos \left(\frac{\arg ad}{2} \right)$$

qui donne les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}}} = \cos \left(\arg \alpha + \varepsilon \ln h + \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\varepsilon \right) \right) \quad (61)$$

Cette formule peut aussi être déduite de la formule (55) en écrivant $\Delta_1(\lambda) = 2$. On remarquera le signe $-$ devant ε dans l'exponentielle du membre de gauche de (61), ce qui confirme bien l'existence de doublets tunnels de valeur propres pour

$E > 0$ au lieu de $E < 0$ (cas du double puits symétrique). L'étude des solutions de (61) est analogue à celle faite pour le double puits, on retrouvera donc le même facteur universel de transition entre les deux échelles de valeurs propres.

Exemple : dans le cas où $V(x) = \cos x - 1$ (équation de Mathieu), on a $\Omega = 8$ et $J = -5 \ln 2$. On peut faire une vérification numérique comme dans le cas du double puits (cf. la section A.1.2).

10.4 L'asymptotique semi-classique du discriminant dans le cas de deux maxima par période

La situation dans l'espace des phases est décrite par la figure 19. Avec ces notations, il s'agit de calculer (B^+, Y) en fonction de (b^+, y) . Les équations

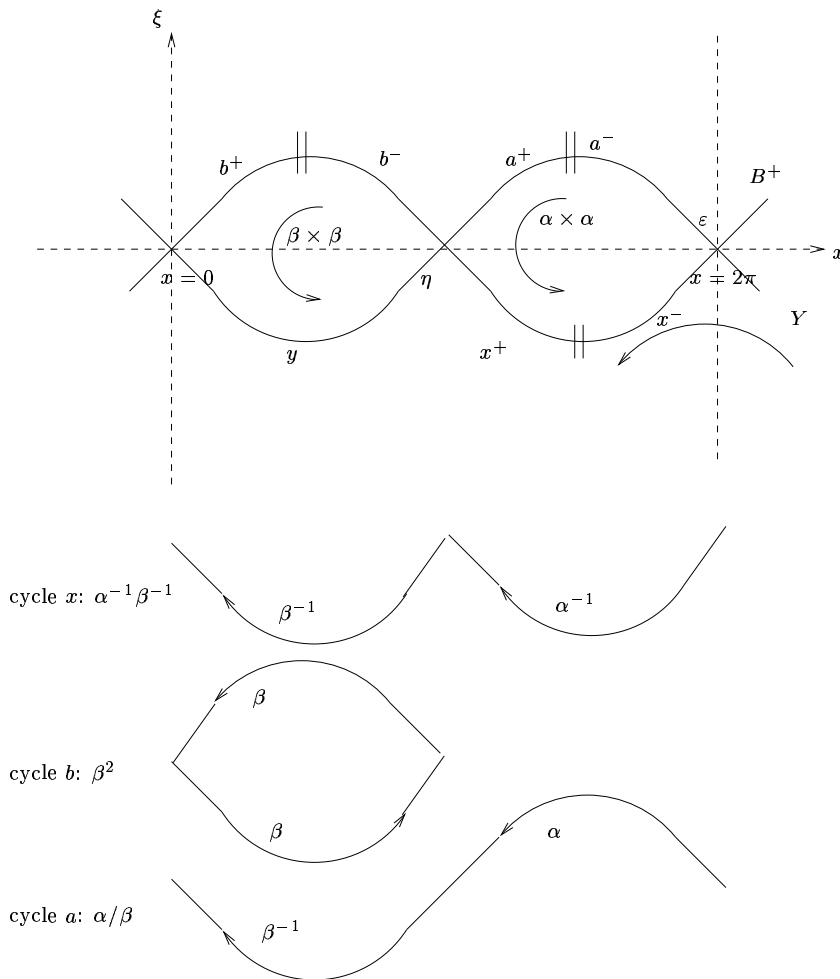


Figure 19: le double-puits pour le pendule

d'holonomie sont:

$$a^+ = a^- \frac{\beta}{\alpha}, \quad b^+ = b^- \frac{1}{\beta^2}, \quad x^+ = x^- \alpha \beta$$

et les équations aux 2 points cols:

$$\begin{pmatrix} b^- \\ x^+ \end{pmatrix} = T(\eta) \begin{pmatrix} a^+ \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^- \\ Y \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} B^+ \\ x^- \end{pmatrix}$$

En utilisant un système de calcul formel, on détermine (B^+, Y) en fonction de (b^+, y) , on vérifie au passage que le déterminant de la matrice est 1, quant à la trace, elle vaut:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}}\sqrt{1 + e^{-2\pi\eta}} \cos(\arg \alpha + \arg \beta - \arg \mathcal{E} - \arg \mathcal{N}) + \\ &\quad + 2e^{-\pi(\varepsilon+\eta)} \cos(\arg \beta - \arg \alpha). \end{aligned}$$

On peut par exemple en déduire des informations sur la longueur des gaps/bandes lorsque λ tend vers 0. Dans ce cas, modulo une erreur de l'ordre de $1/|\ln(h)|$, on a :

$$\Delta = 4 \cos(\arg \alpha + \arg \beta - (\varepsilon + \eta) \ln(h)) + 2 \cos(\arg \beta - \arg \alpha)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\Delta = 2 + 4 \left[\cos(\arg \alpha + \arg \beta - (\varepsilon + \eta) \ln(h)) - \sin \left(\frac{\arg \beta - \arg \alpha}{2} \right)^2 \right]$$

L'équation $\Delta > 2$ devient ainsi à une erreur d'ordre $1/|\ln(h)|$ près :

$$\cos(\arg \alpha + \arg \beta - (\varepsilon + \eta) \ln(h)) > \sin \left(\frac{\arg \beta - \arg \alpha}{2} \right)^2$$

Donc les gaps et les bandes ne sont pas de longueur égale en général, sauf si $\beta = \alpha$. Toutes les situations sont possibles selon la valeur de $\arg \beta - \arg \alpha$, on peut par exemple avoir une situation où les gaps sont de taille asymptotiquement nulles ou l'inverse.

11 Le spectre périodique dans le cas d'une période $2T$ ou $3T$

On a vu dans la section précédente que le pendule présentait la même transition universelle que le double puits symétrique. Il est naturel de se demander si le même phénomène se produit pour le double et le triple puits symétrique (par translation) sur $M = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Les modèles sont les potentiels $V(x) = 1 - \cos(2x)$ et $1 - \cos(3x)$.

11.1 Double puits symétrique.

11.1.1 Étude directe

Ici on a des doublets de valeurs propres exponentiellement proches dans les deux zones d'énergie de part et d'autre de la valeur critique mais les chemins tunnels correspondant dans l'espace des phases sont complètement différents. On a un

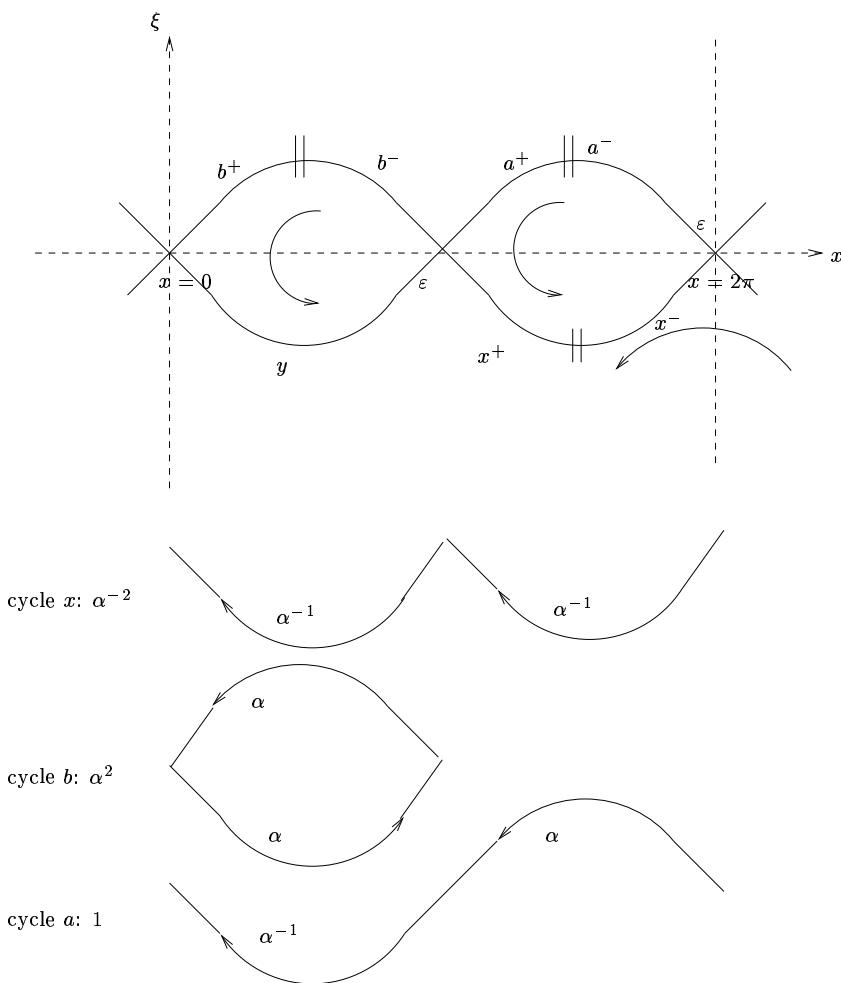


Figure 20: le double-puits symétrique pour le pendule

petit cycle d'holonomie α^2 , et deux grands cycle d'holonomies respectives 1 et α^{-2} et deux sommets d'invariant semi-classique ε Avec les notations de la figure 20, p. 33, on a :

$$\begin{pmatrix} a^- \\ y \\ b^- \\ x^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(\varepsilon) & 0_2 \\ 0_2 & T(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^+ \\ x^- \\ a^+ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^+ \\ x^- \\ a^+ \\ y \end{pmatrix}$$

On écrit la nullité du déterminant de la matrice 4×4 du système homogène dont (b^+, x^-, a^+, y) est solution et on factorise \mathcal{E} sur chaque ligne (cf. (19)) :

$$\begin{vmatrix} 1 & ie^{-\varepsilon\pi} & -1/\mathcal{E} & 0 \\ ie^{-\varepsilon\pi} & 1 & 0 & -1/\mathcal{E} \\ -\alpha^2/\mathcal{E} & 0 & 1 & ie^{-\varepsilon\pi} \\ 0 & -\alpha^2/\mathcal{E} & ie^{-\varepsilon\pi} & 1 \end{vmatrix}$$

et on obtient :

$$\mathcal{E}(1 - ie^{-\varepsilon\pi}) = \pm\alpha \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}(1 + ie^{-\varepsilon\pi}) = \pm\alpha \quad (62)$$

Dans la limite semi-classique après grossissement de l'échelle d'énergie par un facteur $1/h$, on obtient par exemple au voisinage de 0 l'équidistribution des valeurs propres.

11.1.2 Étude avec la fonction trace

On peut aussi trouver les valeurs propres en décomposant en valeur paire (au sens de la translation : $f(x + \pi) = f(x)$) et impaire ($f(x + \pi) = -f(x)$). Il suffit alors de chercher si 1 et -1 sont valeurs propres de la matrice de translation sur une demi-période, ou, en se souvenant que le déterminant de la matrice de translation est 1, de regarder si la trace de la matrice de translation est 2 (valeur propre paire) ou -2 (valeur propre impaire). D'où l'équation :

$$\cos\left(\arg(\alpha) + \varepsilon \ln(h) + \arg\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}}} \quad (63)$$

En particulier en $\varepsilon = 0$, on retrouve bien l'équidistribution des valeurs propres selon l'alternance pair, impair, impair, pair. Comparons enfin (63) avec (62): comme les membres de (62) sont tous de module 1, ces 4 équations sont donc équivalentes aux équations obtenues en prenant les arguments des 4 membres. On se ramène ensuite aisément à (63).

On peut aussi appliquer l'équation (62) en faisant $\alpha = \beta$ et $\varepsilon = \eta$. En appliquant $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et en observant que les conventions d'orientation des cycles sont opposées (donc les holonomies inverses l'une de l'autre) on retrouve bien (63).

11.2 Triple puits symétrique.

11.2.1 Étude directe

Le phénomène de transition à étudier est le passage de triplets de valeurs propres exponentiellement proches (zone $E < 0$) à des doublets de valeurs propres exponentiellement proches (zone $E > 0$). Il y a alors deux "petits" cycles qui ont la

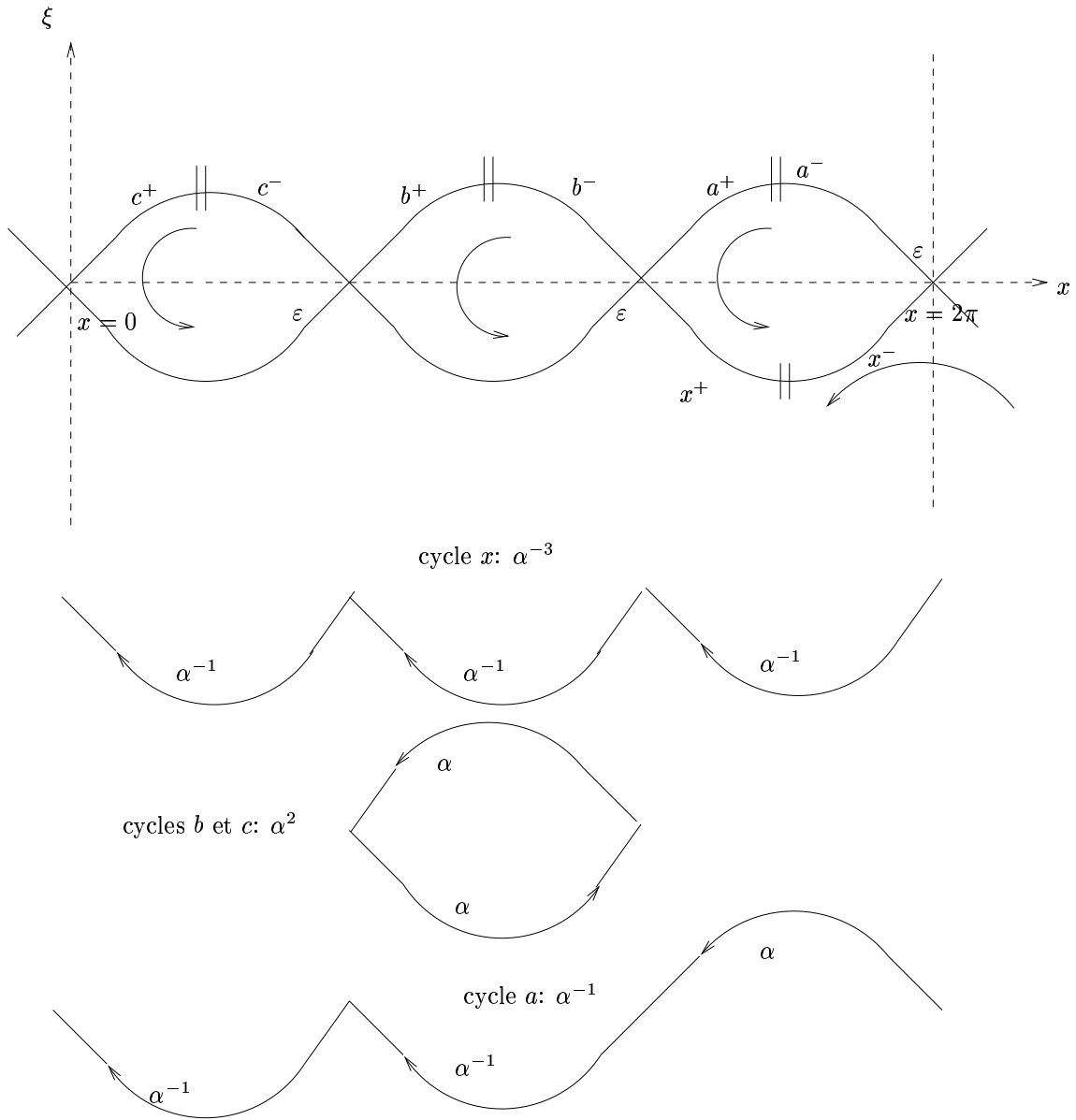


Figure 21: le triple-puits pour le pendule

même holonomie que l'on notera α^2 et deux grand cycle d'holonomie respectives α^{-1} et $\alpha^{-3} = a^3$. Les trois sommets ont le même invariant semi-classique ε et on factorise \mathcal{E} de la matrice $T(\varepsilon)$ comme en (19). Avec les notations de la figure (21), on a :

$$\begin{pmatrix} a^- \\ z \\ b^- \\ x^+ \\ c^- \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & T(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & T(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ x^- \\ a^+ \\ y \\ b^+ \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^+ \\ x^- \\ a^+ \\ y \\ b^+ \\ z \end{pmatrix}$$

l'écriture des conditions de quantification donne donc une matrice 6×6 de déterminant nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & ie^{-\pi\varepsilon} & -1/(\alpha\mathcal{E}) & 0 & 0 & 0 \\ ie^{-\pi\varepsilon} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/\mathcal{E} \\ 0 & 0 & 1 & ie^{-\pi\varepsilon} & -\alpha^2/\mathcal{E} & 0 \\ 0 & -\alpha^3/\mathcal{E} & ie^{-\pi\varepsilon} & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha^2/\mathcal{E} & 0 & 0 & 0 & 1 & ie^{-\pi\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & -1/\mathcal{E} & ie^{-\pi\varepsilon} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

qui se factorise en :

$$(\alpha - \mathcal{E}(1 - ie^{-\pi\varepsilon}))(\alpha - \mathcal{E}(1 + ie^{-\pi\varepsilon}))(\alpha^2 + \alpha\mathcal{E} + \mathcal{E}^2(1 + e^{-2\pi\varepsilon}))^2 = 0$$

On trouve donc 2 valeurs propres simples :

$$\mathcal{E}(1 - ie^{-\pi\varepsilon}) = \pm\alpha$$

et 2 valeurs propres doubles :

$$\mathcal{E} = \alpha \frac{-1 \pm i\sqrt{4(1 + e^{-2\pi\varepsilon}) - 1}}{2(1 + e^{-2\pi\varepsilon})}$$

Au voisinage de 0, les valeurs propres se répartissent comme les complexes suivants sur le cercle unité :

$$\frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}(\text{simple}), \quad \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(\text{double})$$

Ce qui donne la transition de la figure 22 où les valeurs propres doubles sont représentées par un barreau de taille deux fois plus épaisse que le barreau représentant une valeur propre simple.

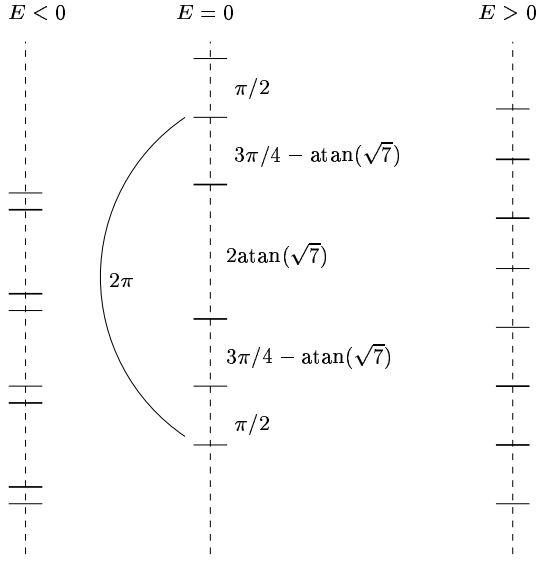


Figure 22: transition universelle (cas du triple puits)

11.2.2 Étude avec la fonction trace

Ici on étudie la trace de la matrice de translation sur un tiers de période. La parité/imparité du double puits est remplacée par la relation :

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = e^{2ik\pi/3} f(x)$$

On remarque que $k = 1$ et $k = 2$ donnent lieu à des fonctions conjuguées ce qui explique le phénomène des valeurs propres doubles correspondant à une trace de $2 \cos(2\pi/3)$. Les valeurs propres simples correspondent en fait à des solutions de période $2\pi/3$, elles ont donc vis-à-vis de la transition le même comportement que celles du pendule simple. Pour les valeurs propres doubles, on obtient :

$$\cos\left(\arg(\alpha) + \varepsilon \ln(h) + \arg\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}}}$$

On retrouve facilement en $\varepsilon = 0$ la description faite à la figure (22)

12 Matrices de diffusion

12.1 Cas d'un canal de diffusion

Il s'agit du cas étudié par Rouleux. Soit $V(x)$ un potentiel C^∞ tel que $V(x) = 0$ pour $x \geq x_1 > 0$ et il existe $V_0 > 0$ tel que $V^{-1}(V_0) = \{x_0, 0\}$ avec $x_0 < 0$, $V'(x_0) < 0$, $V'(0) = 0$ et $V''(0) < 0$. On a donc $V^{-1}(]-\infty, V_0]) = [x_0, +\infty[$.

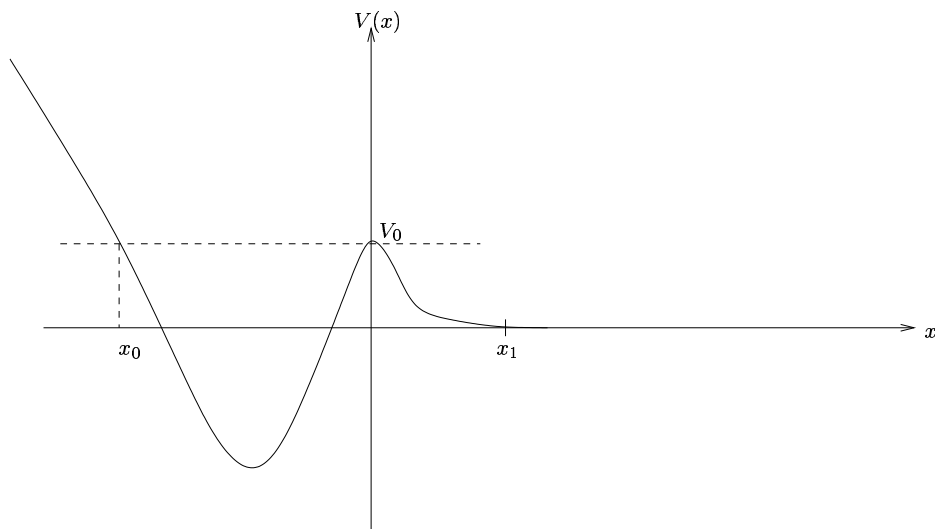


Figure 23: potentiel de diffusion à 1 canal.

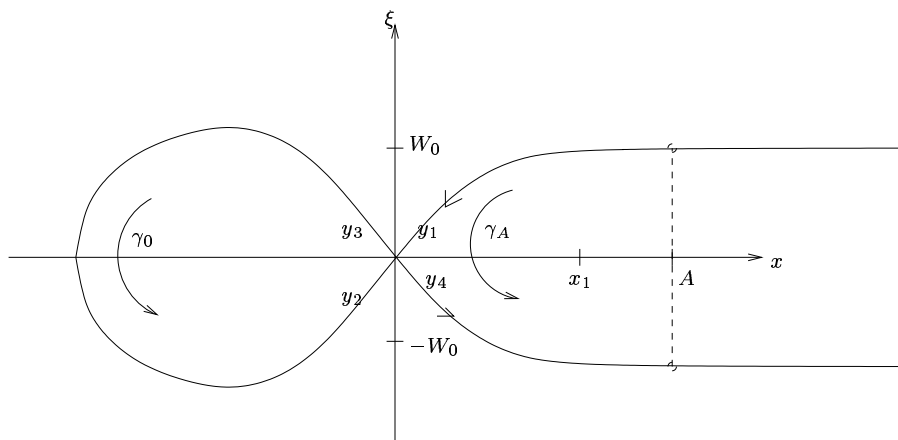


Figure 24: diffusion à 1 canal dans l'espace des phases.

L'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2}\varphi'' + V(x)\varphi = k^2\varphi$$

admet pour $k > 0$ une unique solution φ qui pour $x \geq x_1$, s'écrit $r(k)e^{i\sqrt{2kx}/\hbar} + e^{-i\sqrt{2kx}/\hbar}$ et qui est de carré intégrable sur \mathbb{R}^- . Le coefficient $r(k)$ est de module 1, on l'appelle *coefficient de réflexion*. Les techniques précédentes permettent de calculer $r(k)$ à $O(\hbar)$ près dans la zone $k = \sqrt{V_0} + O(\hbar)$. Posons $W_0 = \sqrt{V_0}$. On pose donc $k = W_0 + \hbar\omega$ avec $\omega = O(1)$. On a alors $H_0 = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x) - V_0$ et $H_1 = -W_0\omega$.

On se donne $A > x_1$ et on introduit le chemin simple γ_A de l'espace des phases qui va de (A, W_0) à $(A, -W_0)$ en restant dans la variété caractéristique $\xi^2 + V(x) = V_0$. On peut calculer le déphasage de la solution standard le long de γ_A qui est donné (voir formule (41)) par

$$\alpha = e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_A} \xi dx - i v.p. \int_{\gamma_A} H_1 dt} (1 + O(\hbar)) .$$

Avec les mêmes notations que pour le double puits, on a donc :

$$y_2 = \frac{y_3}{\beta}, \quad y_1 = \alpha r(k) e^{2ikA} y_4$$

et

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T(\varepsilon) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} . \quad (64)$$

On en déduit :

$$r(k) = e^{-2ikA} \frac{1}{\alpha\beta} \exp \left(2i \arg \left(\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon} \frac{\beta}{\gamma}} - ie^{-\varepsilon\pi} \right) \right) (1 + O(\hbar)) , \quad (65)$$

où $\gamma = e^{i \arg \varepsilon}$. Comme α et β sont de modules 1, on retrouve bien $|r(k)| = 1$. Bien entendu, $r(k)$ est indépendant de la valeur de $A > x_1$ choisie (A est aussi présent dans α).

12.2 Cas de 2 canaux de diffusion

On considère par exemple le cas d'une équation de Schrödinger sur \mathbb{R} du type (42) avec $V(x) \rightarrow -a$, $a > 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, $V(x) \rightarrow -b$, $b > 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, $\sup V = 0$ et $V^{-1}(0) = \{x_1, x_2\}$ avec $x_1 < x_2$ et $V''(x_i) < 0$. Il s'agit de l'exemple traité par Fujiié et Ramond ([10]) dans le cas analytique.

Dans l'espace des phases, la couche d'énergie critique a l'allure représentée ci-dessous. En notant β l'holonomie du cycle β , et \mathcal{E}_j , $j = 1, 2$ les coefficients

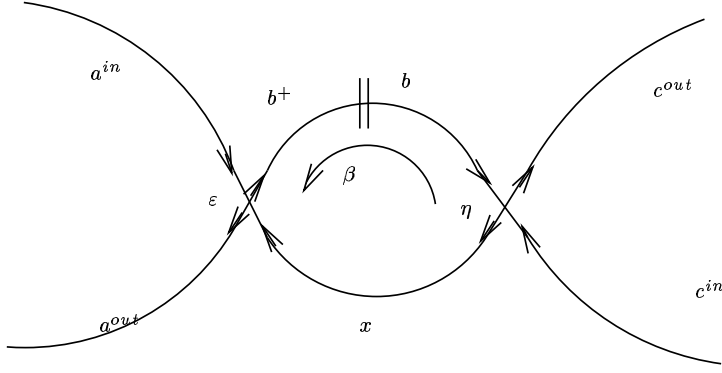


Figure 25: le volcano-top

scalaires en facteurs des matrices $T(\varepsilon_j)$ (cf. (19)), on a les équations :

$$b^+ = \frac{b}{\beta}, \quad \begin{pmatrix} a^{in} \\ x \end{pmatrix} = T(\varepsilon_1) \begin{pmatrix} b^+ \\ a^{out} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ c^{in} \end{pmatrix} = T(\varepsilon_2) \begin{pmatrix} c^{out} \\ x \end{pmatrix}$$

On élimine b et x des équations et on obtient finalement :

$$a^{in} = \frac{\mathcal{E}_1}{D} \left[i \left(\frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{\beta} e^{-\varepsilon_2 \pi} (1 + e^{-2\varepsilon_1 \pi}) + e^{-\varepsilon_1 \pi} \right) a^{out} + \frac{\mathcal{E}_2}{\beta} c^{out} \right] \quad (66)$$

$$c^{in} = \frac{\mathcal{E}_2}{D} \left[\mathcal{E}_1 a^{out} + i \left(\frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{\beta} e^{-\varepsilon_1 \pi} (1 + e^{-2\varepsilon_2 \pi}) + e^{-\varepsilon_2 \pi} \right) c^{out} \right] \quad (67)$$

$$D = 1 + e^{-\varepsilon_1 \pi} e^{-\varepsilon_2 \pi} \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{\beta} \quad (68)$$

Le dénominateur D ne s'annule jamais (sur le réel) car $|\mathcal{E}_j| = (1 + e^{-2\varepsilon_j \pi})^{-1/2}$. On vérifie aussi à l'aide de cette relation que la matrice S permettant de passer de (a^{out}, c^{out}) à (a^{in}, c^{in}) est bien unitaire. Les *quasi-résonances* sont les zéros complexes du prolongement analytique de D .

Calculons maintenant les coefficients de transmission et de réflexion (on se contentera de leurs modules, on pourrait aussi calculer les déphasages dans l'esprit de la section précédente). On prend une solution dont la partie entrante est microlocalement supportée sur une des deux branches entrantes, par exemple a^{in} . On a donc $a^{in} = 1$ et $c^{in} = 0$ et $|c^{out}| = |t|$, $|a^{out}| = |r| = \sqrt{1 - |t|^2}$. Comme la matrice S est unitaire, on a :

$$|t| = \left| \frac{\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1}{D} \right|$$

Par exemple, si on s'intéresse à une énergie E telle que E/h tend vers 0, alors $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et on retrouve le résultat de Ramond et Fujiïé :

$$|t| = \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos \beta}}$$

A Résultats numériques.

A.1 Conditions de Bohr-Sommerfeld

A.1.1 Le cas du double puits symétrique.

On prend le potentiel $V(x) = x^4 - x^2$, il s'agit de vérifier la pertinence de l'équation (50) pour différentes valeurs de h . Pour cela, on compare avec le calcul des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger obtenues en appliquant la méthode de Runge-Kutta au système différentiel :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2(V(x)-E)}{h^2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} \quad (69)$$

Plus précisément, on considère 2 solutions de (69), définies en partant de points situés dans la zone classiquement interdite, l'un dans la composante connexe contenant $-\infty$, l'autre dans la composante connexe contenant $+\infty$. On prend $\varphi = 1$ et $\varphi' = 0$ comme conditions initiales. Puis on calcule le wronskien $W(E)$ de ces 2 solutions au point $x = 0$. Numériquement, quelles que soient les conditions initiales choisies, le fait de partir de la zone classiquement interdite va donner dans la zone classiquement permise une solution qui décroît exponentiellement en $\mp\infty$. Donc, le wronskien $W(E)$ s'annule si et seulement si E est valeur propre. Pour trouver les valeurs de E , on détecte les changements de signes du wronskien, on se rapproche de E par dichotomie puis on interpole la courbe $E \rightarrow W(E)$ par un segment jusqu'à déterminer E avec la précision voulue (méthode de la corde, la convergence est à peine moins bonne que la méthode de Newton : $|E_n - E| \leq |E_0 - E|^{F_n}$ où F_n est la suite de Fibonacci)

D'autre part, l'équation (50) pour le potentiel $V(x) = x^4 - x^2$ s'écrit puisque $a = 1$ et $b = 0$ sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi\varepsilon}}} + \cos \left(\varepsilon \ln(h) + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right) - \frac{7}{2}\varepsilon \ln(2) - \frac{2\sqrt{2}}{3h} \right)$$

avec $\varepsilon = \frac{E}{\sqrt{2}h}$.

L'implémentation a été faite en C/C++, les programmes sont disponibles à l'URL suivante :

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/bs.tgz>

En particulier, signalons que le calcul de l'argument de la fonction Γ a été fait en utilisant la bibliothèque PARI développée par l'équipe de théorie des nombres de Bordeaux.

On obtient par exemple pour $h = 10^{-6}$ dans l'intervalle $[-2.10^{-6}, 3.10^{-6}]$ les valeurs propres suivantes :

Numéro	Runge-Kutta	Bohr-Sommerfeld
1	-1.68092e-06	-1.68100e-06
2	-1.67670e-06	-1.67678e-06
3	-1.14072e-06	-1.14080e-06
4	-1.12697e-06	-1.12706e-06
5	-0.62743e-06	-0.62751e-06
6	-0.58579e-06	-0.58587e-06
7	-0.15515e-06	-0.15522e-06
8	-0.05032e-06	-0.05041e-06
9	0.29793e-06	0.29786e-06
10	0.48460e-06	0.48451e-06
11	0.78346e-06	0.78339e-06
12	1.02441e-06	1.02432e-06
13	1.30685e-06	1.30677e-06
14	1.57243e-06	1.57234e-06
15	1.85275e-06	1.85266e-06
16	2.12953e-06	2.12944e-06
17	2.41218e-06	2.41208e-06
18	2.69515e-06	2.69506e-06
19	2.98110e-06	2.98101e-06
20	3.26833e-06	3.26824e-06

Les conditions de Bohr-Sommerfeld modifiées au point critique donnent donc de très bons résultats pour le calcul du spectre. Le calcul est bien plus rapide que par la méthode purement numérique de Runge-Kutta (ici d'un facteur 100 environ).

Deuxième comparaison: pour $h = 0.1$, on obtient les valeurs propres suivantes dans l'intervalle $[-0.3, 0.3]$:

Numéro	Runge-Kutta	Bohr-Sommerfeld
0	-0.156568	-0.16038
1	-0.155061	-0.15861
2	-0.014654	-0.01358
3	0.021032	0.02162
4	0.116728	0.11546
5	0.212051	0.20839

On observe que même pour cette valeur de h qui est relativement grande, les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières donnent une bonne approximation des valeurs propres (mais pour cette valeur de h , le calcul numérique direct est plus rapide que le calcul des solutions des conditions singulières). On remarque aussi l'écart moyen entre deux valeurs propres qui est ici de l'ordre de $1 \times h$ alors qu'il est de l'ordre de $4 \times h$ pour $h = 10^{-6}$ (idéalement, on devrait trouver un rapport de 6 entre ces deux valeurs, il faudrait calculer ce rapport sur des intervalles d'énergie plus proches de $E = 0$).

On peut aussi comparer le décalage entre l'échelle des valeurs propres paires

(E_0 , E_2 et E_4 ici) et impaires au voisinage de 0 en introduisant le facteur

$$R = \frac{E_{2n+1} - E_{2n}}{E_{2n+2} - E_{2n}}$$

qui mesure ce décalage. Ce rapport tend vers $1/2$ si $E_{2n+1} \gg h$ (équirépartition des valeurs propres) et tend vers 0 si $-E_{2n+1} \gg h$ (doublets de valeurs propres). Si $E_{2n+1}/(h\sqrt{|V''(0)|})$ tend vers une limite ε_0 lorsque h tend vers 0, on montre que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} R = \frac{\arccos\left((1 + e^{2\pi\varepsilon_0})^{-1/2}\right)}{\pi}$$

Ainsi $R \rightarrow 1/4$ pour $\varepsilon_0 = 0$. Prenons par exemple $h = 0.1$, on calcule le rapport $(E_3 - E_2)/(E_4 - E_2) = 0.27$, proche de la valeur théorique de R car $E_3/(\sqrt{2}h) = 0.15$ est voisin de 0.

A.1.2 Le cas du pendule

On considère ici le cas du pendule, c'est-à-dire l'équation de Schrödinger périodique avec comme potentiel $V(x) = \cos(x) - 1$. Les conditions semi-classiques s'écrivent d'après (61)

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\varepsilon}}} = \cos\left(-\frac{8}{h} - 5 \ln(2)\varepsilon + \varepsilon \ln h + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right)$$

avec $\varepsilon = E/h$.

L'étude purement numérique est un peu différente de celle du double puits, elle consiste à étudier la matrice de monodromie. On prend un couple de vecteurs de conditions initiales $(\varphi, \varphi') = (1, 0)$ et $(0, 1)$ en $x = 0$ que l'on fait évoluer par la méthode de Runge-Kutta jusqu'en $x = 2\pi$. L'énergie E est valeur propre si et seulement si 1 est valeur propre de la matrice M , on remplace donc l'étude du wronskien du double puits par l'étude de $\det(M - I)$.

Dans la zone d'énergie $E \geq 0$, l'erreur relative est de l'ordre de p^3/h^4 où p est le pas, par contre dans la zone $E < 0$, le fait de partir de la zone interdite et d'y revenir multiplie l'erreur relative par un coefficient exponentiellement grand proportionnel à $e^{-CE/h}$. Cette méthode n'a donc de sens que pour $E > -Dh$ (et plus on souhaite choisir D grand, plus il faudra prendre p petit).

La comparaison des deux méthodes est probante. Par exemple, pour $h = 10^{-3}$, on obtient le tableau suivant :

Numéro	Runge-Kutta	Bohr-Sommerfeld
0	-0.00339886	-0.00339946
1	-0.00305773	-0.00305821
2	-0.00272065	-0.0027210
3	-0.00238812	-0.00238841
4	-0.00206018	-0.002060396
5	-0.00173847	-0.001738624
6	-0.00142077	-0.0014208684
7	-0.00111594	-0.001116004
8	-0.000805647	-0.000805677
9	-0.000541145	-0.000541155
10	-0.000212948	-0.000212945
11	-5.18091e-05	-5.18018e-05
12	0.000371877	0.0003718748
13	0.000420734	0.000420730
14	0.000978865	0.000978818
15	0.000978865	0.000978818

On remarque que les écarts sont plus faibles pour $E > 0$ comme on pouvait le prévoir à cause de l'instabilité numérique moindre de la méthode pour $E > 0$.

Bibliographie

- [1] P. Bleher, Semiclassical quantization rules near separatrices, *Commun. Math. Phys.*, 165:621-640, 1994.
- [2] Y. Colin de Verdière, Formes normales de Birkhoff classiques et quantiques, *Exposé au séminaire de physique-mathématique de l'Institut Fourier*, 1997.
- [3] Y. Colin de Verdière, Quasi-modes sur les variétés riemanniennes, *Inventiones Math.*, 43:15-52, 1977.
- [4] Y. Colin de Verdière, Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II : le cas intégrable, *Math. Zeitschrift*, 171:51-73, 1980.
- [5] Y. Colin de Verdière, Limite adiabatique en présence de croisements évités et phases géométriques. *En préparation*, 1998.
- [6] Y. Colin de Verdière, M. Lombardi et J. Pollet, La formule de Landau-Zener microlocale, *Prépublication de l'Institut Fourier*, 412:1-15, 1998 (disponible sur le serveur de l'Institut Fourier <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/>).
- [7] Y. Colin de Verdière et B. Parisse, Equilibre instable en régime semi-classique : I-Concentration microlocale. *Commun. PDE*, 19:1535-1563, 1994.

- [8] Y. Colin de Verdière et B. Parisse, Equilibre instable en régime semi-classique : II—Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Physique théorique)*, 61:347-367, 1994.
- [9] J. Duistermaat, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities, *Commun. pure appl. Math.* 27, 207-281 (1974).
- [10] S. Fujiié, T. Ramond, Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline, *Prépublication Paris-Nord*, 96-24, 1996.
- [11] A. Joye, Exponential asymptotics in a singular limit for n -level scattering systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 28:669–703, 1997.
- [12] M. Joyeux, Classical dynamics of the 1:1, 1:2 and 1:3 resonance Hamiltonians, *J. Chem. Phys.*, 203:281-307, 1996.
- [13] P. Martin et G. Nenciu, Semi-classical inelastic S -matrix for one dimensional N -states systems, *Reviews in Mathematical Physics*, 7:193–242 (1995).
- [14] C. März, Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum, *Asymptotic Anal.*, 5:221-267 (1992).
- [15] V.P. Maslov, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Suivi de deux notes complémentaires de V. I. Arnol'd et V. C. Bouslaev. *Dunod, Gauthier-Villars (Paris)*, 1972.
- [16] J. Pollet, Analyse semi-classique d'un système d'équations de Schrödinger couplées : formule de Landau-Zener, *Thèse de l'université de Grenoble*, 1997.
- [17] M. Rouleux, Feshbach resonances in the semi-classical limit, *Preprint CPT*, 1997.
- [18] S. Vu Ngoc, Bohr-Sommerfeld conditions for Integrable Systems with critical manifold of focus-focus type, *Preprint 1998*.