

Opérations sur les graphes épais Application au groupe fondamental

Michel Imbert

Introduction

Soit Γ un graphe fini et connexe. On sait définir son groupe fondamental d'une manière totalement combinatoire (voir [Se]). C'est un groupe libre en $h(\Gamma) = a(\Gamma) - s(\Gamma) + 1$ générateurs, $a(\Gamma)$ et $s(\Gamma)$ étant respectivement le nombre d'arêtes géométriques et le nombre de sommets du graphe. Il est aisé d'obtenir une base de ce groupe, à l'aide par exemple d'un arbre maximal [loc-cit].

Supposons maintenant que Γ soit muni d'un épaississement, donc que Γ est un graphe épais au sens de [Jo-Si], [Ma-Vo] ou [Ba-It] (dans les deux premières références les graphes épais sont appelés cartes). On sait alors réaliser topologiquement Γ comme un rétracte par déformation d'une surface $F(\Gamma)$ orientable compacte privée d'un nombre fini de points. Le groupe fondamental de Γ est donc isomorphe à celui de la surface $F(\Gamma)$.

Soit le groupe $\Pi_{g,n}$ défini par générateurs et relations :

$$\Pi_{g,n} = \langle \{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_1, \dots, C_n\} / \prod_{i=1}^g [A_i, B_i] \prod_{k=1}^n C_k = 1 \rangle .$$

La classification topologique des surfaces compactes orientables (telle qu'elle est décrite dans [Be] ou [Sti], par réduction à la forme normale), et le théorème de Van Kampen, permettent d'établir un isomorphisme (non canonique) entre le groupe fondamental d'une surface compacte privée de n points et un groupe $\Pi_{g,n}$, l'entier g étant le genre de la surface. Le groupe fondamental d'un graphe épais Γ est donc isomorphe à un groupe $\Pi_{g,n}$.

Classification mathématique : 05C10.

Mots clés : graphe épais, groupe fondamental.

Le but de cette note est d'établir un algorithme portant uniquement sur le graphe et son épaississement, qui conduit à une présentation du groupe fondamental d'un graphe épais de genre g (défini par la formule d'Euler-Poincaré) et à n faces, de la forme de celle de $\Pi_{g,n}$ (théorème 3.2). Nous utiliserons pour cela les trois opérations fondamentales sur les graphes épais que sont le mouvement de Whitehead, la dualité, et l'opération de couper-coller.

Ce résultat a pour motivation l'étude combinatoire des espaces modulaires $\mathcal{M}_{g,n}$ des surfaces de Riemann compactes de genre g avec n points marqués. (voir [Ha], [Pe], [Ko]), et de manière plus générale l'étude des revêtements de surfaces de Riemann compactes et des espaces modulaires de Hurwitz qui classifient ces revêtements (voir [Im]).

Le déroulement du texte est le suivant. Dans le premier paragraphe nous effectuons quelques rappels sur les graphes et leurs groupes fondamentaux. Dans le second paragraphe, nous définissons les graphes épais et les opérations de base sur ces graphes. Dans le troisième paragraphe, nous énonçons et démontrons le résultat principal de cette note.

1. Graphes

Nous effectuons les rappels de base sur les graphes et leurs groupes fondamentaux en nous basant exclusivement sur le livre de J.P Serre [Se].

DÉFINITION 1.1. — *Un graphe Γ est formé d'un ensemble de sommets $S(\Gamma)$ et d'un ensemble d'arêtes $A(\Gamma)$, munis de deux applications :*

$$A(\Gamma) \longrightarrow S(\Gamma) \times S(\Gamma) \text{ et } A(\Gamma) \longrightarrow A(\Gamma)$$

$$y \longmapsto (y(0), y(1)) \qquad y \longmapsto \bar{y}$$

avec les conditions que la seconde application soit une involution sans point fixe et que $y(0) = \bar{y}(1)$.

Dans cette définition, les éléments de A sont des arêtes orientées, et si $y \in A$ alors \bar{y} est son arête opposée.

On appelle $y(0)$ l'origine de y et $y(1)$ son sommet terminal. On peut avoir $y(0) = y(1)$ auquel cas on parle de boucle.

Si $y \in A(\Gamma)$ est une arête orientée, alors nous appellerons arête géométrique le couple $\{y, \bar{y}\}$.

Notons qu'il existe une notion naturelle de morphisme de graphes (voir [Se]) que nous préciserons pour les graphes épais.

DÉFINITION 1.2. — *Un chemin orienté c d'un graphe Γ est une succession d'arêtes orientées de $\Gamma : a_1, \dots, a_n$ avec $a_i(1) = a_{i+1}(0)$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On note $o(c) = a_1(0)$ l'origine du chemin et $t(c) = a_n(1)$ son sommet terminal. Si $o(c) = t(c)$ on parle de lacet orienté basé en $o(c)$.*

Nous ferons dans cette rédaction les hypothèses suivantes (sauf mention explicite du contraire) :

1. Tous nos graphes seront finis (ie $\#A(\Gamma)$ et $\#S(\Gamma)$ sont finis).
2. Tous nos graphes seront connexes (ie deux sommets quelconques du graphe sont les extrémités d'au moins un chemin orienté).

Nous prendrons les notations suivantes tout au long de la rédaction : si Γ est un graphe, $A(\Gamma)$ désigne l'ensemble de ses arêtes orientées, $S(\Gamma)$ l'ensemble de ses sommets, et $A_g(\Gamma)$ l'ensemble de ses arêtes géométriques. Nous noterons $s(\Gamma) = \#S(\Gamma)$ et $a(\Gamma) = \#A_g(\Gamma)$, de sorte que $\#A(\Gamma) = 2a(\Gamma)$.

Rappelons qu'un arbre est un graphe, dans lequel pour tout sommet s , il n'existe aucun lacet basé en s . Le fait suivant est classique :

LEMME 1.3. — *Soit Γ un graphe. Il existe un sous graphe de Γ qui est un arbre, et dont l'ensemble des sommets est $S(\Gamma)$. Un tel arbre possède $s(\Gamma) - 1$ arêtes géométriques.*

La démonstration s'effectue par récurrence sur le nombre de sommets du graphe. Un tel arbre est dit maximal.

Si à un graphe on associe sa réalisation topologique, alors le groupe fondamental de cette réalisation est isomorphe au groupe fondamental du graphe (voir [Se]).

Rappelons maintenant la définition combinatoire du groupe fondamental d'un graphe. Si $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ et $\beta = (b_1, \dots, b_m)$ sont deux chemins orientés d'un graphe Γ avec $a_n(1) = b_1(0)$, on définit le chemin composé $\alpha\beta = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$. Deux chemins orientés α et β sont dits élémentairement homotopes si $\alpha = ca\bar{a}d$ et si $\beta = cd$ où a est une arête orientée, c, d sont des chemins orientés (ou si on a la même propriété en inversant le rôle de α et de β). On note $\alpha \sim \beta$. Deux chemins orientés α et β sont dits homotopes s'il existe une succession d'homotopies élémentaires $\alpha \sim \gamma \sim \dots \sim \beta$.

Si deux chemins orientés sont homotopes alors leurs extrémités coïncident. On peut donc affirmer que les classes d'homotopie de lacets orientés d'un graphe Γ basés en un sommet p du graphe équipées de la loi de composition décrite ci-dessus forment un groupe. Ce groupe, noté $\pi_1(\Gamma, p)$ est le groupe fondamental de Γ basé en p .

Si q est un autre sommet de Γ alors l'application suivante:

$$h_{p,q} : \pi_1(\Gamma, p) \longrightarrow \pi_1(\Gamma, q)$$

$$\gamma \longmapsto \alpha\gamma\bar{\alpha}$$

où α est un chemin orienté d'origine p et de sommet terminal q , définit un isomorphisme de groupes.

Le résultat classique sur le groupe fondamental d'un graphe est le suivant (voir [Se]) :

THÉORÈME 1.4. — *Soit Γ un graphe. Alors $\pi_1(\Gamma, p)$ est un groupe libre en $h(\Gamma)$ générateurs, où $h(\Gamma) = a(\Gamma) - s(\Gamma) + 1$.*

Le nombre $h(\Gamma)$ s'appelle le nombre cyclotomique du graphe, il est égal au rang du premier groupe d'homologie $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

On explicite un système de générateurs de $\pi_1(\Gamma, p)$ comme suit : soit T un arbre maximal de Γ ; il possède $s(\Gamma) - 1$ arêtes géométriques. Soient $\{y_j, \bar{y}_j\}$ pour j allant de 1 à $h(\Gamma)$ les arêtes géométriques non contenues dans T , avec $P_j = y_j(0)$ et $Q_j = y_j(1)$. Notons α_j (respectivement β_j) l'unique chemin orienté sans aller-retour tracé sur T joignant p à P_j (respectivement p à Q_j). Alors $\gamma_j = \alpha_j y_j \beta_j$ est un lacet orienté basé en p , et on démontre aisément que les classes d'homotopie de γ_j pour j variant de 1 à $h(\Gamma)$ constituent une base de $\pi_1(\Gamma, p)$.

Nous verrons dans le paragraphe 3 que si le graphe est un graphe épais, alors il possède une présentation "topologique" comme indiqué dans l'introduction.

2. Graphes épais

Il s'agit ici de rappeler les définitions et les opérations combinatoires principales sur les graphes épais.

DÉFINITION 2.1. — **• Un graphe épais Γ est la donnée d'un ensemble fini $A(\Gamma)$ et de deux permutations σ_0 et σ_1 de cet ensemble, avec σ_1 involution sans point fixe.**

- Le sous groupe $C(\Gamma)$ du groupe des permutations de $A(\Gamma)$ engendré par σ_0 et σ_1 est appelé le **groupe cartographique** de Γ .

Hypothèse : nous supposons toujours les graphes épais connexes, ce qui équivaut à la transitivité de l'action de $C(\Gamma)$ sur $A(\Gamma)$.

Les éléments de $A(\Gamma)$ sont des arêtes orientées. Les arêtes géométriques sont les orbites de $\sigma_1(\Gamma)$ et les sommets celles de $\sigma_0(\Gamma)$; chaque cycle disjoint représente un sommet, sa longueur est appelée la valence du sommet.

Nous notons $A_g(\Gamma)$ et $S(\Gamma)$ ces ensembles, $a(\Gamma)$ et $s(\Gamma)$ leurs cardinaux respectifs, de sorte que $\#A(\Gamma) = 2a(\Gamma)$.

Nous utiliserons souvent la notation simplificatrice $\sigma_1(a) = \bar{a}$.

Un graphe épais est bien sur un graphe au sens de la définition 1.1. Il suffit de spécifier l'application qui à une arête orientée a associe ses extrémités $a(0)$ et $a(1)$. On choisit pour $a(1)$ la σ_0 -orbite de a et pour $a(0)$ la σ_0 -orbite de \bar{a} .

Si on pense à un sommet comme une collection d'arêtes orientées pointant vers un point; alors on peut voir un graphe épais comme un graphe muni d'un épaississement, qui est ainsi la donnée pour chaque sommet d'un ordre cyclique sur l'ensemble des arêtes orientées pointant vers ce sommet.

Outre des sommets et des arêtes, un graphe épais comporte également des **faces**. On pose classiquement

$$\sigma_2(\Gamma) = \sigma_1(\Gamma)\sigma_0^{-1}(\Gamma) \text{ tel que } \sigma_0(\Gamma)\sigma_1(\Gamma)\sigma_2(\Gamma) = 1 .$$

Les orbites de σ_2 sont appelées les faces du graphe épais. On note $F(\Gamma)$ leur ensemble, et $f(\Gamma)$ le nombre de ces faces. Le cardinal d'une orbite de σ_2 est appelé la valence de la face correspondante.

Une propriété remarquable des faces est que chacune d'entre elles forme un lacet orienté.

Si $b = \sigma_2(a)$, alors $b(0) = a(1)$. En effet $\bar{b} = \sigma_0^{-1}(a)$, $\bar{b}(1) = b(0)$ et $\sigma_0^{-1}(a)(1) = a(1)$.

On peut donc aussi voir un graphe épais comme un ensemble fini de polygones orientés du plan représentant ses faces, équipé d'une identification par paires d'arêtes, d'orientations opposées. En remplissant ces polygones par des disques épointés, nous obtenons une surface orientable $F(\Gamma)$ contenant une réalisation topologique de Γ comme un rétracte par déformation.

Une définition alternative d'un graphe épais est la suivante [Ba-It]: soit C_∞ le groupe cartographique universel que l'on définit canoniquement par générateurs et relations

$$C_\infty = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2 = 1 \rangle .$$

Un graphe épais Γ est alors la donnée d'une représentation par permutations $\Phi : C_\infty \rightarrow S_A$ de C_∞ dans un ensemble fini A de cardinal pair, qui est transitive et telle que σ_1 agisse sans point fixe. On a alors $C(\Gamma) = C_\infty / \ker(\Phi)$.

Cette présentation des graphes épais autorise la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. — *Un morphisme $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ entre deux graphes épais est donné par une application $f : A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma')$ qui vérifie :*

$$f \circ \sigma_i(a) = \sigma'_i \circ f(a) \text{ pour } i \in \{0, 1, 2\} .$$

Lorsque f est bijective, on dit que c'est un isomorphisme.

Ainsi le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\Gamma)$ d'un graphe épais s'identifie au commutant de σ_0 et de σ_1 dans le groupe des permutations des arêtes orientées.

La transitivité implique que $f(A(\Gamma)) = A(\Gamma')$. Un morphisme de graphes épais induit bien sûr un morphisme entre les graphes sous jacents.

D'une manière équivalente, si Γ est donné par $\Phi : C_\infty \rightarrow S_{A(\Gamma)}$, et Γ' par $\Phi' : C_\infty \rightarrow S_{A(\Gamma')}$, alors un morphisme est donné par une application $f : A(\Gamma) \rightarrow A(\Gamma')$ qui est C_∞ -équivariante. Remarquons qu'alors nous avons $\ker(\Phi) < \ker(\Phi')$, et que f induit donc un épimorphisme entre les groupes cartographiques $C(\Gamma)$ et $C(\Gamma')$.

DÉFINITION 2.3. — *Soit Γ un graphe épais et $S = (a, \sigma_0(a), \dots, \sigma_0^{k-1}(a))$ un sommet de valence k de Γ . Une orientation de S est le choix d'une des deux bijections suivantes (définies à composition près par une puissance de σ_0) :*

$$\sigma_0^{l-1}a \longmapsto \exp(2i\pi l/k) \quad \forall l \in \{1, \dots, k\}$$

$$\sigma_0^{l-1}a \longmapsto \exp(-2i\pi l/k) \quad \forall l \in \{1, \dots, k\}$$

On dit que Γ est orienté si le même choix est fait pour chaque sommet de Γ .

Tous les graphes épais sont bien sûr orientables, mais nous n'aurons pas à effectuer le choix d'une orientation.

Un graphe plongé dans une surface compacte est la réalisation topologique d'un graphe épais. En effet la permutation σ_0 est donnée par la projection des voisinages des sommets sur les espaces tangents en ces points. Remarquons qu'une orientation du graphe épais détermine une orientation de la surface, et vice-versa. Les faces bordent des disques simplement

connexes. Une orientation de la surface détermine une orientation des faces, et réciproquement (toujours via le plan tangent).

On peut voir les graphes épais à une face comme des polygones avec identification par paires des arêtes. C'est le cas par exemple des polygones fondamentaux des surfaces compactes, qui ne possèdent de plus qu'un seul sommet (voir la figure 1).

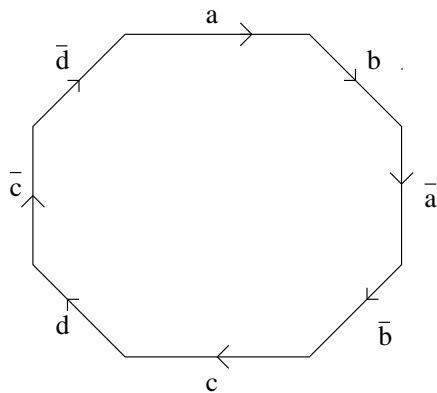


FIG. 1: *Polygone fondamental d'une surface de genre deux.*

DÉFINITION 2.4. — Soit Γ un graphe épais. La caractéristique d'Euler de Γ , $\chi(\Gamma)$, est définie par $\chi(\Gamma) = s(\Gamma) - a(\Gamma) + f(\Gamma)$. Le genre $g(\Gamma)$ est défini par $2 - 2g(\Gamma) = \chi(\Gamma)$.

Un argument simple [Ba-It] montre que $\chi(\Gamma)$ est un nombre pair inférieur ou égal à 2, ce qui donne un sens à la définition du genre. Le genre et la caractéristique d'Euler d'un graphe épais sont des invariants de sa classe d'isomorphisme, de même d'ailleurs que la liste des valences de ses sommets ou de ses faces.

Nous allons maintenant décrire la première opération combinatoire fondamentale sur les graphes épais : le mouvement de Whitehead.

DÉFINITION 2.5. — Soit Γ un graphe épais, et $e = (a, \bar{a})$ une arête géométrique de Γ qui n'est pas une boucle (ie $a(0) \neq a(1)$). On appelle mouvement de Whitehead sur Γ le long de e l'opération qui consiste à effacer e et à identifier les deux sommets $a(0)$ et $a(1)$, munissant les arêtes qui pointent vers ce nouveau sommet de l'ordre cyclique induit. On note $W_e(\Gamma)$ le graphe épais qui en résulte.

On dit également que l'on effectue une rétraction de l'arête géométrique e (voir la figure 2). Décrivons l'ordre cyclique pour les arêtes orientées dont le sommet terminal est le nouveau sommet. Soient $(a_1, \dots, a_p = \bar{a})$ et $(a = b_1, \dots, b_q)$ les orbites respectives de \bar{a} et de a sous σ_0 ; alors l'ordre cyclique des arêtes orientées dont le sommet terminal est le nouveau sommet est : $(a_1, \dots, a_{p-1}, b_2, \dots, b_q)$.
 Puisque les seules faces de valence 1 sont données par les boucles, $W_e(\Gamma)$ possède le même nombre de faces que Γ . Comme il possède un sommet de moins et une arête géométrique de moins, on en déduit que $\chi(\Gamma) = \chi(W_e(\Gamma))$ d'où $g(\Gamma) = g(W_e(\Gamma))$.

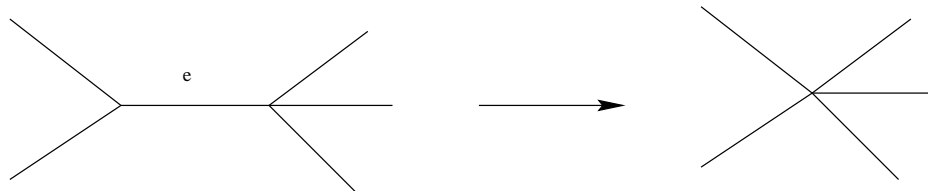


FIG. 2: *Mouvement de Whitehead (rétraction d'arête).*

LEMME 2.6. — *Soit Γ un graphe épais, e et f deux arêtes géométriques de Γ . Alors si $W_e(W_f(\Gamma))$ et $W_f(W_e(\Gamma))$ sont définis, ce sont deux graphes épais isomorphes que nous noterons $W_{e,f}(\Gamma)$.*

Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre de la validité de cet énoncé, soit par un dessin, soit en décrivant les groupes cartographiques des deux graphes épais.

La seconde opération combinatoire importante est un phénomène de dualité consistant à échanger le rôle des sommets et des faces d'un graphe épais.

DÉFINITION 2.7. — *Soit Γ un graphe épais décrit par son groupe cartographique $C(\Gamma) = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$. Alors on définit le graphe épais dual Γ^* par $\sigma_0^* = \sigma_2, \sigma_1^* = \sigma_1$.*

Nous avons alors $\sigma_2^* = \sigma_1\sigma_0\sigma_1$. Remarquons que $\chi(\Gamma^*) = \chi(\Gamma)$, d'où $g(\Gamma^*) = g(\Gamma)$. On a également $\text{Aut}(\Gamma^*) = \text{Aut}(\Gamma)$. Par contre Γ^{**} n'est en général qu'isomorphe à Γ , l'isomorphisme étant la conjugaison par σ_1 . De plus si Γ est orienté, alors Γ^{**} possède l'orientation opposée.

3. Groupe fondamental d'un graphe épais

Comme indiqué dans l'introduction, nous allons détailler un algorithme permettant de déterminer une présentation du groupe fondamental d'un graphe épais Γ en termes de $2g(\Gamma) + f(\Gamma)$ générateurs satisfaisant une unique relation (la relation de surface); les $2g$ premiers lacets correspondent géométriquement aux lacets d'homologie de la surface associée à Γ ; les autres correspondent aux lacets qui entourent les piqures, ils sont induits par les faces.

Les faces fournissent en effet des classes de conjugaison d'éléments privilégiés du groupe fondamental, que nous allons définir. Soit (a_1, \dots, a_l) une face du graphe épais de valence l , les arêtes orientées étant écrites dans l'ordre imposé par σ_2 . On joint $a_1(0)$ au sommet de base par un chemin orienté α , et on considère dans $\pi_1(\Gamma)$ la classe d'homotopie du lacet orienté $\gamma = \alpha a_1 \dots a_l \bar{\alpha}$. Un autre choix de α conduit à un élément conjugué de γ . Si la face est décrite cycliquement à partir de a_i avec $i > 1$, alors on obtient la classe d'homotopie d'un lacet orienté $\beta a_i \dots a_{i-1} \bar{\beta}$, homotope à $\beta a_i \dots a_l a_1 \dots a_{i-1} a_i \dots a_l \bar{\alpha} \dots \bar{a}_i \bar{\beta}$ qui est conjugué à γ . On peut donc associer à chaque face de Γ une classe de conjugaison d'élément de $\pi_1(\Gamma)$.

DÉFINITION 3.1. — *Nous nommerons **cycle facial** tout élément de la classe de conjugaison du lacet orienté associé à chaque face comme indiqué ci-dessus.*

En n'utilisant que des opérations portant sur le graphe épais de départ, nous allons démontrer le théorème suivant, objet de cette note, qui raffine le théorème de classification combinatoire des surfaces topologiques compactes :

THÉORÈME 3.2. — *Soit Γ un graphe épais de genre g à n faces. Il existe des cycles faciaux C_1, \dots, C_n et des lacets orientés $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ qui génèrent $\pi_1(\Gamma)$ et qui sont soumis à la seule relation de surface :*

$$[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] C_1 \cdots C_n = 1 .$$

Appelons présentation topologique une telle présentation du groupe fondamental d'un graphe épais. La démonstration fournit en fait un algorithme précis conduisant à une telle présentation (voir l'exemple à la fin du texte). Ce résultat permet de bien mesurer l'influence d'un épaississement sur un graphe ordinaire.

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin du lemme facile suivant :

LEMME 3.3. — Soit Γ un graphe épais et $W_e(\Gamma)$ le graphe épais obtenu par rétraction de l'arête géométrique $e = (a, \bar{a})$. Soit $v = a(0)$, $w = a(1)$ et x le nouveau sommet de $W_e(\Gamma)$. Alors il existe un isomorphisme canonique entre $\pi_1(\Gamma, w)$ et $\pi_1(W_e(\Gamma), x)$.

Démonstration. — Rappelons que le groupoïde fondamental d'un graphe consiste en les classes d'homotopie de chemin orienté équipées de la loi de succession des chemins quand cela est possible.

On peut définir une application ι du groupoïde fondamental de $W_e(\Gamma)$ dans celui de Γ . On définit pour cela ι sur les arêtes orientées de $W_e(\Gamma)$.

Tout d'abord si $b \in A(\Gamma) \setminus (a, \bar{a})$, soit b^* l'arête orientée correspondante de $W_e(\Gamma)$ de telle façon que l'on ait $\overline{b^*} = \bar{b}^*$. Soit $b \in A(\Gamma) \setminus (a, \bar{a})$: si $b(1) = v$ alors $\iota(b^*) = b\bar{a}$, si $b(0) = v$ alors $\iota(b^*) = ab$, et sinon $\iota(b^*) = b$.

On constate que $\iota(b^* \overline{b^*}) = 1 \forall b^* \in A(W_e(\Gamma))$. L'application ι induit donc une application

$$\begin{aligned} \pi_1(W_e(\Gamma), x) &\longrightarrow \pi_1(\Gamma, w) \\ \gamma^* = a_1^* \cdots a_n^* &\mapsto \gamma = \iota(a_1^* \cdots a_n^*) \end{aligned}$$

C'est un épimorphisme entre deux groupes libres de même rang $(2g(\Gamma) + f(\Gamma) - 1)$, ie c'est un isomorphisme. \square

Démontrons d'abord le théorème dans le cas où le genre du graphe épais est zéro. Nous nous ramenons pour cela au cas où le graphe épais ne possède qu'un seul sommet.

Soit Γ un graphe épais avec $g(\Gamma) = 0$ et $s(\Gamma) \geq 2$. Choisissons une arête (a, \bar{a}) parmi celles qui ne sont pas des boucles. Effectuons la rétraction de cette arête. Alors $W_{a, \bar{a}}(\Gamma)$ n'est pas un sous graphe de Γ , mais on possède l'isomorphisme du lemme 3.3, induit par l'application ι .

Supposons que a et \bar{a} appartiennent à la même face et soit $ae_1 \cdots e_r \bar{a} f_1 \cdots f_s$ le cycle facial correspondant de Γ . Comme $a(1) = w = e_1(0)$, on a $\iota(e_1^*) = ae_1$. De même $\iota(e_r^*) = e_r \bar{a}$ car $e_r(1) = w$. Si ensuite pour $1 < j < r$ on a $e_j(1) = w$, alors $e_{j+1}(0) = w$ d'où $\iota(e_j^* e_{j+1}^*) = e_j e_{j+1}$. Même processus pour les arêtes orientées f_j . On en déduit que l'image par ι du cycle facial $e_1^* \cdots e_r^* f_1^* \cdots f_s^*$ de $W_{a, \bar{a}}(\Gamma)$ est le cycle facial $ae_1 \cdots e_r \bar{a} f_1 \cdots f_s$ de Γ .

Dans le cas où a et \bar{a} n'appartiennent pas à la même face, on obtient le même résultat pour les cycles faciaux correspondants.

Ainsi si le théorème est vérifié pour $W_{a, \bar{a}}(\Gamma)$, il reste vrai pour le graphe épais Γ , et en itérant ceci on se ramène à démontrer le théorème pour des graphes épais qui ne possèdent qu'un seul sommet.

Achevons maintenant la preuve du théorème dans le cas du genre nul en considérant un graphe épais Γ avec $g(\Gamma) = 0$ et $s(\Gamma) = 1$ (c'est un bouquet de cercles). Un tel graphe épais possède $f(\Gamma) - 1 = a(\Gamma)$ faces de valence un (notons les $(F_i)_i$) et une face de valence $a(\Gamma)$ (notons la G). Cette face s'écrit $G = b_1 \cdots b_{a(\Gamma)}$ en terme d'arêtes orientées.

Prenons $F_1 = \bar{b}_1, \dots, F_{a(\Gamma)} = \bar{b}_{a(\Gamma)}$, alors nous avons bien

$$G \prod_{i=1}^{a(\Gamma)} F_i = 1 .$$

Pour démontrer le théorème dans le cas $g > 0$ nous procéderons en trois étapes. Nous réduirons le problème au cas où les graphes épais ne possèdent qu'une seule face dans un premier temps, puis au cas où ils ne possèdent qu'une seule face et qu'un seul sommet dans un deuxième temps. Nous démontrerons alors le théorème dans ce dernier cas.

Pour effectuer la réduction au cas d'une seule face nous avons besoin du résultat élémentaire suivant :

LEMME 3.4. — *Soit Γ un graphe épais avec au moins deux faces. Alors il existe une arête géométrique (a, \bar{a}) qui sépare deux faces distinctes.*

Démonstration. — Dans le cas contraire, pour toute arête (a, \bar{a}) , a et \bar{a} sont incidentes sur la même face F . Ceci signifie que F qui est une orbite de $\sigma_2(\Gamma)$ est aussi stable par $\sigma_1(\Gamma)$. Donc F est stable sous l'action du groupe cartographique de Γ , ce qui pour $f(\Gamma) \geq 2$ est contraire à la connexité supposée de Γ . \square

Nous effectuons maintenant la réduction du théorème au cas d'une seule face. Soit Γ un graphe épais avec au moins deux faces et soient F_1 et F_2 deux faces distinctes séparées par l'arête (a, \bar{a}) . On effectue un mouvement de Whitehead sur Γ^* le long de l'arête duale de (a, \bar{a}) . Cela revient à effacer l'arête (a, \bar{a}) et à recoller F_1 et F_2 . Précisément si $F_1 = (a_1, \dots, a_r = a)$ et $F_2 = (\bar{a} = b_1, \dots, b_s)$, alors l'opération consiste à former la nouvelle face $F_1 \# F_2 = (a_1, \dots, a_{r-1}, b_2, \dots, b_s)$, les autres faces restant inchangées. Notons $\Gamma \#$ le graphe épais ainsi obtenu. On a $s(\Gamma \#) = s(\Gamma)$, $a(\Gamma \#) = a(\Gamma) - 1$ et $f(\Gamma \#) = f(\Gamma) - 1$. En particulier $g(\Gamma \#) = g(\Gamma)$.

Le graphe $\Gamma \#$ est un sous graphe de Γ et on en déduit l'existence d'un monomorphisme naturel $i_{\#} : \pi_1(\Gamma \#) \rightarrow \pi_1(\Gamma)$.

L'image par $i_{\#}$ d'un cycle facial γ_j attaché à la face F_j ($j \geq 3$) est un cycle facial de $\Gamma \#$. Si on note $\gamma_{1,2}$ le cycle facial attaché à la face $F_1 \# F_2$, alors on a $i_{\#}(\gamma_{1,2}) = \gamma_1 \gamma_2$.

Supposons maintenant le théorème vérifié pour le graphe épais $\Gamma\#$. Alors une présentation topologique de $\pi_1(\Gamma\#)$ induit par $i_\#$ une présentation analogue pour $\pi_1(\Gamma)$. En itérant ce processus, on se ramène donc à démontrer le théorème pour des graphes épais qui ne possèdent qu'une seule face.

Nous réduisons de nouveau le problème au cas où Γ ne possède qu'un seul sommet. La discussion qui précède permet de supposer $f(\Gamma) = 1$. Supposons que $s(\Gamma) \geq 2$. Choisissons une arête (a, \bar{a}) parmi celles qui ne sont pas des boucles. Effectuons la rétraction de cette arête. Alors $W_{a,\bar{a}}(\Gamma)$ n'est pas un sous graphe de Γ , mais on possède l'isomorphisme du lemme 3.3, qui permet comme dans le cas du genre nul de démontrer que si le théorème est vérifié pour $W_{a,\bar{a}}(\Gamma)$, il reste vrai pour le graphe épais Γ . Et en itérant ceci on se ramène à démontrer le théorème pour des graphes épais qui ne possèdent qu'une seule face et qu'un seul sommet.

Un tel graphe épais peut être vu comme un polygône à $2a = 4g$ arêtes orientées, avec une donnée d'identification des arêtes orientées par paires qui induit une seule classe de sommet.

On peut nommer les arêtes orientées a_1, \dots, a_{2a} et supposer que $\sigma_2 = (a_1 \cdots a_{2a})$. L'arête orientée a_i est identifiée avec $a_j = \sigma_1(a_i) = \bar{a}_i$. D'une façon équivalente Γ peut être vu comme un symbole formé de $2g$ lettres a_1, \dots, a_{2g} et des $2g$ lettres opposées $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{2g}$, ce symbole ne pouvant comporter de juxtaposition du type $\cdots a\bar{a} \cdots$. Le fait que $s = 1$ signifie que la permutation σ_0 doit être un $4g$ -cycle.

Comme exemples nous avons le symbole dit normal : $a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots a_{2g-1} a_{2g} \bar{a}_{2g-1} \bar{a}_{2g}$, ou encore le symbole $a_1 \cdots a_{2g} \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{2g}$ pour lequel $\sigma_1 = \sigma_2^{2g}$, et $\sigma_0 = \sigma_2^{2g-1}$ est bien un $4g$ -cycle.

Nous introduisons à ce stade une troisième opération combinatoire : celle de couper-coller, utilisée classiquement dans la démonstration combinatoire de la classification topologique des surfaces compactes (voir [Be] et [Sti]); nous l'étendons aux graphes épais à une seule face.

DÉFINITION 3.5. — *Soit un symbole à $4g$ -lettres comme décrit ci-dessus représentant un graphe épais avec une face. On le prend sous la forme $a\alpha b\bar{a}\beta$, où a et b représentent des arêtes orientées alors que α et β représentent des chemins orientés.*

L'opération couper le long de b et coller le long de a consiste à former le nouveau symbole $cb\bar{a}\bar{c}\beta$ où c représente une arête orientée, et à considérer le graphe épais à une seule face qui lui est associé.

La traduction picturale de cette opération est donnée sur la figure 3.

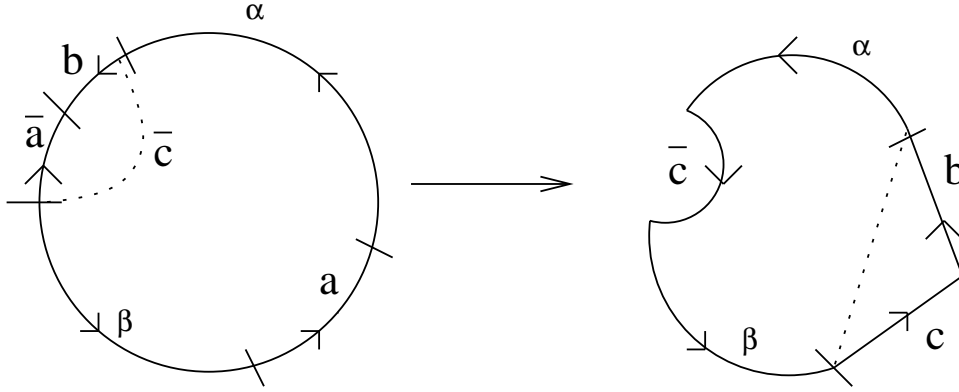


FIG. 3: L'opération couper-coller sur un graphe épais à une face.

Par application itérée de cette opération de couper-coller élémentaire, on peut transformer un symbole écrit sous la forme $a\beta\gamma\bar{a}\delta\sigma$ en un autre symbole $c\gamma\beta\bar{c}\sigma\delta$.

Le point crucial de cette opération est que si le graphe épais de départ ne possède qu'un seul sommet, alors le graphe épais obtenu après une opération couper-coller ne possède également qu'un seul sommet.

LEMME 3.6. — Soit $acb\bar{a}\beta$ un symbole représentant un graphe épais avec une face et un sommet. Alors le graphe épais associé au symbole $cba\bar{c}\beta$ obtenu par couper le long de b et coller le long de a ne possède également qu'un sommet.

Démonstration. — Notons $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ les permutations engendrant le groupe cartographique du premier graphe épais, et $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ celles qui engendrent le groupe cartographique du second graphe épais. Nous devons démontrer que δ_0 est un $4g$ -cycle (si g est le genre du premier graphe épais). On décompose pour cela les mots α et β en succession de lettres représentant des arêtes orientées: $\alpha = a_1 \cdots a_p$, $\beta = b_1 \cdots b_q$. Il faut alors distinguer plusieurs cas selon la position de \bar{b} dans α ou β .

Premier cas: $\bar{b} = a_l$

Alors $l \neq 1$ et $l \neq p$. En effet si $l = p$ cela contredit l'hypothèse que σ_0 est un $4g$ -cycle. De même si $l = 1$ alors nous avons $\sigma_0(a) = b$ et $\sigma_0(b) = a$ ce qui contredit l'hypothèse.

Soit Λ l'ensemble suivant d'arêtes orientées :

$$\Lambda = (a_1, \dots, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q).$$

Examinons les effets respectifs des permutations σ_0 et δ_0 sur l'ensemble des arêtes orientées. Notons que si $x \in \Lambda$ alors $\sigma_0(x) \in \Lambda$ sauf si $x \in (\bar{a}_1, \bar{a}_{l+1}, \bar{b}_1)$.

En effet nous avons $\sigma_0(\bar{a}_1) = a$, $\sigma_0(\bar{a}_{l+1}) = \bar{b}$ et $\sigma_0(\bar{b}_1) = \bar{a}$. Observons aussi que si x et $y = \sigma_0(x)$ appartiennent à Λ , alors $y = \delta_0(x)$.

Itérons les permutations σ_0 et δ_0 en démarrant de a pour σ_0 et de b pour δ_0 . Nous avons $\sigma_0(a) = b$, $\sigma_0(b) = a_{l-1} \in \Lambda$ et $\delta_0(b) = a_{l-1}$. La permutation σ_0 ne peut sortir de Λ par la lettre \bar{a}_1 puisque $\sigma_0(\bar{a}_1) = a$ et que nous n'avons pas encore atteint \bar{b} par exemple. Donc lorsque σ_0 sort de l'ensemble Λ , cette sortie se fait soit par \bar{b}_1 soit par \bar{a}_{l+1} .

Supposons que ce soit par l'intermédiaire de \bar{b}_1 (la conclusion sera la même dans l'autre cas). Nous avons $\sigma_0(\bar{b}_1) = \bar{a}$, $\sigma_0(\bar{a}) = b_q$ et $\delta_0(\bar{b}_1) = \bar{c}$, $\delta_0(\bar{c}) = b_q$. Nous voici de nouveau dans Λ , et nous ne pouvons en ressortir que par la lettre \bar{a}_{l+1} (l'obstruction pour α_1 étant toujours valable). On a alors $\sigma_0(\bar{a}_{l+1}) = \bar{b}$, $\sigma_0(\bar{b}) = a_p$ d'une part et $\delta_0(\bar{a}_{l+1}) = \bar{b}$, $\delta_0(\bar{b}) = \bar{c}$, $\delta_0(\bar{c}) = a_p$ d'autre part. De retour dans Λ la seule issue est par \bar{a}_1 avec $\sigma_0(\bar{a}_1) = a$ et $\delta_0(\bar{a}_1) = b$.

Nous venons de parcourir les $4g$ arêtes à la fois pour σ_0 et pour δ_0 en $4g$ "coups", ce qui prouve que δ_0 est un $4g$ -cycle.

Deuxième cas: $\bar{b} = b_j$ ($1 < j < q$)

Soit $\Lambda = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_q)$. Les permutations σ_0 et δ_0 coïncident sur Λ et σ_0 n'en sort qu'en \bar{a}_1 , \bar{b}_1 ou \bar{b}_{j+1} . On reprend le "jeu" précédent au départ de a (resp. b) pour σ_0 (resp. δ_0).

On a $\sigma_0(a) = b$, $\sigma_0(b) = b_{j-1} \in \Lambda$ et $\delta_0(b) = b_{j-1}$. Pour les mêmes raisons qu'au cas précédent σ_0 ne peut sortir de Λ que par \bar{b}_1 ou \bar{b}_{j+1} . Prenons par exemple (l'autre cas est similaire) \bar{b}_{j+1} . Alors $\sigma_0(\bar{b}_{j+1}) = \bar{b}$, $\sigma_0(\bar{b}) = a_p \in \Lambda$ et $\delta_0(\bar{b}_{j+1}) = \bar{b}$, $\delta_0(\bar{b}) = c$, $\delta_0(c) = a_p$. De nouveau dans Λ nous ne pouvons nous enfuir qu'avec \bar{b}_1 : $\sigma_0(\bar{b}_1) = \bar{a}$, $\sigma_0(\bar{a}) = b_q \in \Lambda$ d'un côté, et $\delta_0(\bar{b}_1) = \bar{c}$, $\delta_0(\bar{c}) = b_q$ de l'autre côté. Finalement on sort une dernière fois de Λ par \bar{a}_1 : $\sigma_0(\bar{a}_1) = a$ et $\delta_0(\bar{a}_1) = b$.

En conclusion nous pouvons affirmer que δ_0 est un $4g$ -cycle.

Troisième cas: $\bar{b} = b_1$

Avec le jeu précédent et $\Lambda = (a_1, \dots, a_p, b_2, \dots, b_q)$ il faut que σ_0 atteigne \bar{a}_1 ou \bar{b}_2 pour aller au coup suivant hors de Λ .

On a $\sigma_0(a) = b$, $\sigma_0(b) = \bar{a}$, $\sigma_0(\bar{a}) = b_q \in \Lambda$ et $\delta_0(b) = \bar{c}$, $\delta_0(\bar{c}) = b_q$. Comme précédemment on ne peut sortir par \bar{a}_1 car $\sigma_0(\bar{a}_1) = a$ et $\bar{b} = b_1$ n'a pas encore été atteint par σ_0 qui est un $4g$ -cycle. Donc nous avons $\sigma_0(\bar{b}_2) = \bar{b}$, $\sigma_0(\bar{b}) = a_p$ et aussi $\delta_0(\bar{b}_2) = \bar{b}$, $\delta_0(\bar{b}) = c$, $\delta_0(c) = a_p$. De retour dans Λ on ne peut en ressortir que par \bar{a}_1 et on termine le jeu par $\sigma_0(\bar{a}_1) = a$ et $\delta_0(\bar{a}_1) = b$.

En conclusion nous pouvons affirmer que δ_0 est un $4g$ -cycle.

Quatrième cas: $\bar{b} = b_q$

Ici $\Lambda = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_{q-1})$. On a $\sigma_0(a) = b$, $\sigma_0(b) = b_{q-1} \in \Lambda$ et

$\delta_0(b) = b_{q-1}$. Toujours pour les mêmes raisons, σ_0 ne peut sortir à ce stade de Λ que par \bar{b}_1 . Ce qui conduit à $\sigma_0(\bar{b}_1) = \bar{a}$, $\sigma_0(\bar{a}) = \bar{b}$, $\sigma_0(\bar{b}) = a_p \in \Lambda$ et à $\delta_0(\bar{b}_1) = \bar{c}$, $\delta_0(\bar{c}) = \bar{b}$, $\delta_0(\bar{b}) = c$, $\delta_0(c) = a_p$. La sortie finale de Λ s'effectue par \bar{a}_1 et nous finissons ce dernier tour de manège par $\sigma_0(\bar{a}_1) = a$ et $\delta_0(\bar{a}_1) = b$.

En conclusion nous pouvons affirmer que δ_0 est un $4g$ -cycle. □

Soit un symbole de $4g$ arêtes orientées représentant un graphe épais à une face et un sommet. Nous dirons que la lettre b sépare le couple (a, \bar{a}) s'il est possible d'écrire le symbole sous la forme $a\alpha b\beta\bar{a}\gamma\bar{b}\delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des mots représentant des chemins orientés. Nous avons alors le résultat suivant :

LEMME 3.7. — *Etant donné un symbole de $4g$ -lettres représentant un graphe épais à une face et un sommet, pour toute lettre a il existe une lettre b qui sépare le couple (a, \bar{a}) .*

Démonstration. — Soient $(\sigma_i)_{i=0,1,2}$ les permutations décrivant les sommets, arêtes et faces de ce graphe épais.

Représentons le symbole par $a_1 a_2 \cdots a_i \cdots$ avec $a = a_1$ et $\bar{a} = a_i$ pour $i > 1$. S'il n'existe pas d'indice j compris strictement entre 1 et i tel que $\bar{a}_j = a_k$ avec $k > i$ alors ceci signifie que l'ensemble d'arêtes orientées $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})$ est stable par la permutation σ_0 puisqu'il est stable par σ_2 et σ_1 . Mais ceci contredit l'hypothèse que σ_0 est un $4g$ -cycle. □

Nous sommes maintenant en position pour terminer la démonstration du théorème 3.2.

Soit Γ un graphe épais à une face et un sommet, de genre $g > 0$, représenté sous la forme d'un symbole de $4g$ lettres.

Il est important d'observer que les opérations couper-coller s'interprètent comme des manipulations sur des mots dans le groupe fondamental du graphe épais Γ . Par exemple le couper-coller élémentaire $a\alpha b\bar{a}\beta \rightarrow c\bar{a}\bar{c}\beta$ consiste dans cette interprétation à poser $\bar{c} = \bar{b}\bar{a}$ ce qui équivaut à homotopie près à $a = cb$.

Utilisant le lemme 3.7, on démarre avec un symbole mis sous la forme $a\alpha b\beta\bar{a}\gamma\bar{b}\delta$ que l'on récrit $b\beta\bar{a}\gamma\bar{b}\delta a\alpha$. On effectue un couper-coller le long de l'arête géométrique (b, \bar{b}) , ce qui conduit au symbole $c\bar{a}\gamma\beta\bar{c}\alpha\delta a$ que l'on peut récrire à homotopie près $ac\bar{a}\phi\bar{c}\psi$ en posant $\phi = \gamma\beta$ et $\psi = \alpha\delta$.

Le symbole obtenu représente un nouveau graphe épais avec une face et un sommet. L'opération correspondante dans $\pi_1(\Gamma)$ consiste à passer du cycle facial $a\alpha b\beta\bar{a}\gamma\bar{b}\delta$ au cycle $ac\bar{a}\phi\bar{c}\psi$ où $c \in \pi_1(\Gamma)$.

Effectuons encore un couper-coller le long de l'arête géométrique (a, \bar{a}) cette fois. On passe alors du cycle facial $ac\bar{a}\phi\bar{c}\psi$ au cycle $dcd\bar{c}\psi\phi$ où $\bar{d} = \bar{a}\phi$.

La suite de la démonstration, qui mime la procédure utilisée dans le théorème de classification combinatoire des surfaces compactes, utilise une récurrence sur le nombre de commutateurs déjà présents dans l'écriture du cycle facial de Γ , récurrence dont nous venons d'effectuer la première étape. Supposons donc que le cycle facial de notre graphe épais soit sous la forme $[a_1, b_1] \cdots [a_p, b_p]c_1 \cdots c_m$, avec $a_i, b_i \in \pi_1(\Gamma)$ pour $i = 1, \dots, p$ et $p < 2g$. Le lemme 3.7 assure qu'il existe une arête orientée c_i ($i > 1$) qui sépare (c_1, \bar{c}_1) .

Posons $\zeta = \prod_{j=1}^p [a_j, b_j]$, $d = c_i$ et $c = c_1$. Notre symbole (ou élément du

groupe fondamental) s'écrit $\zeta cad\beta\bar{c}\gamma\bar{d}\delta$, soit à homotopie près $d\beta\bar{c}\gamma\bar{d}\delta\zeta c\alpha$. On effectue un premier couper-coller le long de (d, \bar{d}) ce qui conduit au cycle facial $e\bar{c}\gamma\beta\bar{e}\alpha\delta\zeta c$ ou encore $\bar{e}\alpha\delta\zeta c\bar{e}\gamma\beta$ avec $e = \alpha d\beta$.

Puis un second couper-coller le long de (\bar{e}, e) conduit au cycle facial $\bar{c}\bar{f}c\alpha\delta\zeta f\gamma\beta$ en posant $\bar{f} = \gamma\beta\bar{e}\alpha\delta\zeta$. Enfin un dernier couper-coller le long de (c, \bar{c}) conduit au cycle facial $\bar{f}g\gamma\beta\alpha\delta\zeta\bar{g}$ où $g = c\alpha\delta\zeta$, cycle facial qui peut se récrire $\zeta[a_{p+1}, b_{p+1}]\gamma\beta\alpha\delta$ où $a_{p+1} = \bar{g}$, $b_{p+1} = \bar{f} \in \pi_1(\Gamma)$.

Le théorème 3.2 de présentation topologique du groupe fondamental d'un graphe épais est donc démontré. \square

Exemple : Soit le symbole $abcd\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ (qui n'est pas un symbole normal) représentant un graphe épais de genre deux avec une face et un sommet, et également un cycle facial comme élément du groupe fondamental de ce graphe épais.

Ecrivons le $bcd\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}a$ et effectuons alors un couper-coller le long de l'arête géométrique (b, \bar{b}) en posant $e = bcd$. On obtient que ce cycle facial peut s'écrire $e\bar{a}cd\bar{e}\bar{c}\bar{d}a$ ou encore $ae\bar{a}cd\bar{e}\bar{c}\bar{d}$. En posant $f = \bar{a}cd$ et en effectuant le couper-coller le long de l'arête géométrique (a, \bar{a}) , le cycle facial s'écrit maintenant $f\bar{e}\bar{f}\bar{e}\bar{c}\bar{d}cd$, et nous avons donc obtenu une présentation topologique du groupe fondamental de ce graphe épais, comme indiquée par le théorème 3.2.

Références

[Ba-It] M BAUER et C ITZYKSON, *Triangulations*, The Grothendieck theory of dessins d'enfants, (L.Schneps ed), LMS, LNS 200, Cambridge university press, (1995).

- [Be] L BERS, *Riemann surfaces*, Lecture notes, New York university press, (1957-1958).
- [Bes-It-Zu] D BESSIS, C ITZYKSON et J.B ZUBER, *Quantum field theory techniques in graphical enumeration*, Adv in applied mathematics 1, (1980), 109-157.
- [Ha] J.L HARER, *The cohomology of moduli space of curves*, Theory of moduli, (E.Sernesi ed), LNM 1337, Springer Verlag, (1988).
- [Im] M IMBERT, *Méthodes graphiques dans les revêtements et décomposition cellulaire des espaces de Hurwitz*, Thèse de doctorat, Grenoble, (1998).
- [Jo-Si] G.A JONES et D SINGERMAN, *Theory of maps on orientable surfaces*, Proc Lond Math Soc, Vol 377, (1978), 273-307.
- [Ko] M KONTSEVICH, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm Math Phys 147, (1992), 1-23.
- [Ma-Vo] J MALGOIRE et C VOISIN, *Cartes cellulaires*, Cahiers Math Montpellier 12, (1977).
- [Pe] R.C PENNER, *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Comm Math Phys 113, (1987), 299-339.
- [Se] J.P SERRE, *Arbres et amalgames*, Astérisque 47, SMF, (1977).
- [Sti] J STILLWELL, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer Verlag, (1980).

Michel Imbert
 e-mail : Michel.Imbert@ujf-grenoble.fr
 Université de Grenoble1-CNRS
Institut Fourier
UFR de mathématiques
UMR 5582
 B.P.74
 38402 Saint Martin d'Hères Cedex
 (France).