Comportement asymptotique des fonctions harmoniques sur les arbres

Frédéric Mouton

Résumé. On considère ici une marche aléatoire sur un arbre infini ayant des probabilités de transition "raisonnables", c'est-à-dire bornées entre deux constantes strictement comprises entre 0 et $1/2$. Pour une fonction harmonique sur cet arbre, on montre que les notions de convergence radiale, bornitude radiale, finitude de l'énergie radiale et les notions stochastiques correspondantes sont toutes équivalentes en presque tout point du bord à l'infini. La démonstration est inspirée de celle d'un résultat analogue de l'auteur sur les variétés riemanniennes de courbure négative pincée.

Abstract. Considering a random walk on an infinite tree, we suppose that transition probabilities are "reasonnable", *id est* that they are bounded between two constants taken in $(0, 1/2)$. It is shown that, for a given harmonic function on the tree, properties of radial convergence, radial boundedness, finiteness of radial energy and corresponding stochastic notions are all equivalent at almost each point of the geometric boundary. The idea of the proof come from an analoguous result on Riemannian manifolds of pinched negative curvature due to the author.

Introduction

L'étude des propriétés radiales ou non-tangentielles des fonctions harmoniques remonte aux résultats de Fatou [11] du début du siècle : une fonction harmonique positive sur le disque unité de $\mathbf{R}^2$ admet en presque tout point du bord une limite radiale (resp. non-tangentielle). On s'est ensuite aperçu progressivement de la grande généralité de cet énoncé puisqu'il reste valide sur des espaces très divers : demi-espace euclidien, ouverts lipschitziens, espace hyperbolique, variétés riemanniennes simplement connexes de courbure négative pincée [3, 1], groupe libre [10, 8], arbres [7], graphes hyperboliques au sens de Gromov [2], pour n'en citer que quelques uns.

Une autre question a été de savoir ce qu'on pouvait dire lorsque la fonction harmonique n'était plus supposée positive, ce qui a entraîné la recherche de critères pour que la fonction admette une limite radiale ou non-tangentielle en un point donné du bord. Le résultat global de Fatou n'impliquant de convergence qu'en presque tout point du bord, on a recherché des critères ponctuels qui soient valides en presque tout point du bord. Les deux critères qui nous intéressent ici sont celui de bornitude (radiale ou non-tangentielle) et de finitude de l'*intégrale d'aire* (aussi appelée intégrale de Lusin). Le critère de bornitude est dû à I.I. Privalov [18] en dimension 2 et à A.P. Calderón [6] dans le demi-espace. Celui de l'intégrale d'aire est dû d'une part à J. Marcinkiewicz et A. Zygmund [15] et d'autre part à D.C. Spencer [19] en dimension 2, et à A.P. Calderón [5] et E.M. Stein [20] dans le demi-espace.

**Mots-clés* : fonctions harmoniques — arbres — théorème de Fatou — marches aléatoires.
†*Classification math.* : 05C05, 31C20, 31C35, 60J15, 60J50.

Contrairement au théorème de Fatou, ces critères ponctuels ont été assez peu développés dans d'autres cadres que le demi-espace euclidien. Cette étude est cependant intéressante comme on peut le voir sur l'exemple de l'espace hyperbolique réel, où plusieurs des notions mises en jeu trouvent une interprétation géométrique très satisfaisante : le bord qui devient le bord "à l'infini" (ou bord géométrique), les rayons qui deviennent des géodésiques, les cônes non-tangentiels qui deviennent des voisinages tubulaires de géodésiques et, surtout, l'intégrale d'aire qui reçoit une expression plus simple et naturelle, puisqu'elle devient l'intégrale d'un gradient au carré, c'est-à-dire une énergie [16]. Les premiers travaux en ce sens sont ceux d'A. Korányi et R.B. Putz sur les espaces symétriques [12, 13], qui utilisent la structure algébrique du groupe d'isométrie de l'espace considéré. Plus récemment, nous avons établi ces critères ponctuels pour les variétés riemanniennes simplement connexes de courbure négative pincée [16], en nous inspirant d'une démonstration des critères euclidiens due à J. Brossard [4] et utilisant le mouvement brownien.

Il semblait alors naturel de voir ce qu'on pouvait dire dans le cas discret, c'est-à-dire lorsqu'on regarde les fonctions harmoniques sur un graphe. Le cas le plus simple est celui des arbres, qui sont de bons analogues discrets des variétés de courbure négative, et c'est celui que nous traitons ici. Nous pensions *a priori* que les arguments du cas continu s'adapteraient sans problème. Cela a été le cas pour les arguments géométriques, qui sont même considérablement simplifiés par la structure d'arbre. Il n'en a pas été de même pour les arguments probabilistes car les martingales discrètes sont d'un maniement plus délicat que les martingales continues. En ce qui concerne la théorie du potentiel, la démonstration dans le cas des variétés utilisait la connaissance du bord de Martin et des inégalités de Harnack à l'infini [3, 1]. Dans le cas présent, bien qu'on ait à notre disposition les résultats théoriques d'A. Ancona [1, 2], il semble plus naturel d'utiliser les résultats antérieurs de P. Cartier sur le bord de Martin des arbres [7]. Le principe de Harnack à l'infini est alors remplacé par des estimations reposant sur la structure d'arbre et la propriété forte de Markov, ce qui permet d'avoir des démonstrations assez dépouillées et des majorations explicites.

Par ailleurs, la lecture de cet article nécessite assez peu de prérequis, l'essentiel étant d'avoir (ou de se forger au cours du texte) une idée intuitive de la propriété forte de Markov. En particulier, il n'est nulle part fait recours à la géométrie différentielle, ce qui devrait permettre de faire connaître les techniques de démonstration à un public plus large que dans le cas des variétés. À part les résultats de P. Cartier, dont nous rappelons en détail (mais sans démonstrations) ce qui nous servira, tout est démontré. Cela devrait permettre à cet article de se suffire à lui-même. Le lecteur plus exigeant pourra se référer sans problème à l'article de P. Cartier qui ne demande aucune connaissance préalable.

La structure de cet article est la suivante. Dans la section 1, nous introduisons les concepts de base de graphe, de marche aléatoire et de fonction harmonique. Le lemme 2 illustre la subtilité du cas discret en ce qui concerne les martingales. Dans la section 2, on rappelle les principaux résultats de P. Cartier. Dans la section 3, nous rappelons la méthode de Doob pour conditionner la marche à sortir en un point donné du bord (qui est aussi exposée dans l'article de P. Cartier). La section 4 introduit l'hypothèse d'uniformité sur la marche aléatoire et expose le résultat principal. Ce résultat est ensuite démontré dans les sections 6 et 7, après avoir tiré des conséquences de l'hypothèse d'uniformité dans la section 5.

1 Marche aléatoire sur un graphe

Après avoir défini les notions de graphe et de marche aléatoire, nous introduisons la fonction de Green en rappelant la dichotomie "récurrence-transience". Nous définissons ensuite les fonctions harmoniques et montrons un premier résultat sur leurs différentes propriétés asymptotiques le long de la marche aléatoire.

1.1 Définitions

On définit un *graphe non-orienté* $\mathcal{G} = (S, A)$ par son ensemble de *sommets* S et son ensemble d'*arêtes* A, une arête étant une partie à deux éléments de S (remarquons que cette définition exclut les "boucles" et les "arêtes multiples"). On dira que deux sommets x et y sont *voisins* s'ils sont reliés par une arête ($\{x, y\} \in A$), ce qu'on notera $x \sim y$. Une suite $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ telle que $x_i \sim x_{i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$ est appelée un *chemin* de *longueur* n joignant x à y.

Le graphe $\mathcal{G}$ sera supposé *localement fini* (tout sommet a un nombre fini de voisins) et *connexe* (deux points quelconques sont toujours joignables par un chemin). La *distance* $d(x, y)$ entre deux points x et y est alors la longueur minimum des chemins joignant x à y. Un chemin réalisant ce minimum est appelé un *segment géodésique*.

Une *marche aléatoire* sur le graphe $\mathcal{G}$ est alors une chaîne de Markov sur S dont les probabilités de transition $p(x, y)$ (probabilité de passer de x à y en une étape) sont non nulles si et seulement si x et y sont deux sommets voisins. On a alors, pour un sommet x fixé, $\sum_{y \sim x} p(x, y) = 1$. La marche aléatoire est donnée par la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où X_n est la "position" au temps n. Sa loi est la donnée d'une famille $(P_x)_{x \in S}$ où P_x est la probabilité obtenue lorsque le point de départ de la marche est x. On note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires X_i, $i \leq n$ (c'est la tribu du passé au sens large : elle "représente" les informations connues jusqu'à l'instant n compris). Si T est un temps d'arrêt, on note $\mathcal{F}_T$ la tribu qu'il définit (informations connues jusqu'à l'instant T). La propriété forte de Markov traduit le fait que tout ce qui se passe après un temps d'arrêt ne dépend pas du passé au sens strict, mais uniquement de la situation au temps T.

Pour énoncer précisément cette propriété, on introduit l'*espace des chemins* : on sait qu'on peut choisir comme univers sous-jacent l'espace Ω des chemins infinis (indexés par $\mathbf{N}$), muni de la tribu "trace" sur Ω de la tribu produit dénombrable des $\mathcal{P}(S)$. On introduit aussi l'*opérateur de décalage* Θ de Ω dans lui-même qui, à un chemin ω, fait correspondre le chemin $\Theta(\omega) : n \longmapsto \omega(n+1)$. Pour un temps d'arrêt presque sûrement fini T on note alors Θ^T l'application qui, à un chemin ω, fait correspondre $(\Theta^T)(\omega) = \Theta^{T(\omega)}(\omega) : n \longmapsto \omega(n + T(\omega))$. On peut alors énoncer la propriété :

Théorème 1 *(Propriété forte de Markov)*

Soient F une variable aléatoire positive et T un temps d'arrêt presque sûrement fini. Alors

$$E_x[F \circ \Theta^T | \mathcal{F}_T] = u_F(X_T) \text{ où l'on pose } u_F(y) = E_y[F].$$

1.2 Fonctions de Green

On définit $p_n(x,y) = P_x[X_n = y]$, la probabilité de passer de x à y en exactement n coups ($n \geq 1$). On a évidemment $p_1 = p$. La *fonction de Green* G est alors définie sur $S \times S$ par $G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y)$. Si on note $L(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{(X_n=y)}$ le *temps de séjour* en y, on a $G(x,y) = E_x[L(y)]$ par le théorème de Fubini.

On peut exprimer $G(x,x)$ en fonction de p_x, probabilité de revenir au moins une fois en x en partant de x. Pour cela on partitionne l'univers Ω avec les événements "revenir exactement n fois en x", qu'on note Ω_n, pour $0 \leq n \leq \infty$. Pour $n \neq \infty$, on obtient $P_x[\Omega_n] = p_x^n(1-p_x)$ en utilisant la propriété forte de Markov aux temps de k-ième retour en x pour $1 \leq k \leq n$. Pour $n = \infty$, la propriété forte de Markov au temps de premier retour en x donne $P_x[\Omega_\infty] = p_x \cdot P_x[\Omega_\infty]$. On distingue alors deux cas.

Si $p_x = 1$, les Ω_n sont de probabilité nulle pour tout $n \neq \infty$, donc leur réunion (dénombrable) aussi et son complémentaire Ω_∞ est presque sûr : on revient presque sûrement une infinité de fois en x et x est dit *récurrent*. Le temps de séjour en x est alors presque toujours infini et $G(x,x) = \infty$.

Si $p_x < 1$, la relation avec $P_x[\Omega_\infty]$ prouve que cette probabilité est nulle : on ne revient presque jamais une infinité de fois en x et x est dit *transient*. On a alors $G(x,x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_x^n(1-p_x) = \frac{1}{1-p_x}$.

Pour exprimer $G(x,y)$, on introduit $H(x,y)$, probabilité partant de x d'atteindre y. Remarquons que H ne s'annule pas, d'après l'hypothèse de connexité, et que $H(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x,y)$, où $q_n(x,y)$ est la probabilité, partant de x, d'atteindre pour la première fois y au temps n. En utilisant la propriété forte de Markov au temps τ_y de première atteinte de y, on obtient :

$$G(x,y) = H(x,y)G(y,y) \tag{1}$$

Sous l'hypothèse de connexité du graphe, il est classique que tous les points sont de même nature (récurrence ou transience) : si un point est récurrent, alors tous les points le sont et la fonction de Green n'a que des valeurs infinies. Dans le cas contraire, tous les points sont transients et la fonction de Green n'a que des valeurs finies. On dira que la marche aléatoire est *récurrente* ou *transiente*. Remarquons qu'une marche sur un graphe fini est forcément récurrente.

Plus généralement, si U est une partie de S, on définit sur $U \times U$ la *fonction de Green* $G_U(x,y)$ de U comme l'espérance, partant de x, du temps de séjour en y avant de sortir de U. Le théorème de Fubini donne aisément la formule suivante.

Soient φ une fonction positive sur U et $x \in U$. En notant τ le temps de sortie de U, on a

$$E_x\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \varphi(X_k)\right] = \sum_{y \in U} \varphi(y) G_U(x,y). \tag{2}$$

1.3 Fonctions harmoniques

On associe à la marche aléatoire un opérateur *laplacien* défini sur l'espace $\mathbf{R}^S$ des fonctions sur l'ensemble S des sommets par

$$(\Delta f)(x) = E_x[f(X_1)] - f(x) = \left(\sum_{y\sim x} p(x,y)f(y)\right) - f(x).$$

Une fonction est dite *harmonique* si son laplacien est nul. Par exemple, en utilisant la propriété de Markov au temps 1 puis en prenant les espérances, on voit facilement que, pour $y \in S$ fixé, la fonction $H(\cdot, y)$ est harmonique sur $S \setminus \{y\}$. Il en est alors de même pour $G(\cdot, y)$ d'après la formule 1. Le lien entre la marche aléatoire et le laplacien s'exprime par la propriété suivante, qui découle de la propriété de Markov.

Lemme 1 *(Propriété de martingale)*
Pour tout point x et toute fonction f, les variables aléatoires

$$M_n = f(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta f(X_k)$$

forment une $(\mathcal{F}_n)$-martingale pour la probabilité P_x. En particulier, si f est harmonique, $(f(X_n))$ est une martingale.

Nous étudierons par la suite le comportement des fonctions harmoniques le long de certaines trajectoires de la marche aléatoire. Pour cela, nous introduisons ici quelques définitions.

Soit u une fonction harmonique fixée. On appelle *énergie aléatoire* de u la variable aléatoire

$$J^*(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\Delta u^2\right)(X_k).$$

Cette définition permet de se passer de l'introduction du gradient [16] et elle est bien valide car la série ci-dessus est à termes positifs. En effet, pour tout $x \in S$,

$$\begin{aligned}
\Delta u^2(x) &= \sum_{y\sim x} p(x,y)(u^2(y) - u^2(x)) \\
&= \sum_{y\sim x} p(x,y)\left[(u(y) - u(x))^2 + 2u(x)(u(y) - u(x))\right] \\
&= \sum_{y\sim x} p(x,y)(u(y) - u(x))^2,
\end{aligned}$$

car la fonction u est harmonique.

On définit alors les trois événements correspondant au comportement de u le long des trajectoires lorsque n tend vers ∞ : convergence, bornitude et finitude de l'énergie, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{**} &= \{\omega \in \Omega |\ \text{la suite } \ (u(X_n(\omega)) \ \text{ a une limite finie}\}, \\
\mathcal{N}^{**} &= \{\omega \in \Omega |\ \text{la suite } \ (u(X_n(\omega)) \ \text{ est bornée}\}, \\
\mathcal{J}^{**} &= \{\omega \in \Omega | J^*(u)(\omega) < \infty\}.
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un graphe quelconque, on a les inclusions suivantes :

Lemme 2 *Pour toute fonction harmonique u (et tout point x), on a*

$$\mathcal{J}^{**} \overset{\sim}{\subset} \mathcal{L}^{**} \subset \mathcal{N}^{**}$$

le première inclusion étant P_x-presque sûre.

La deuxième inclusion est triviale car toute suite convergente est bornée. Montrons la première : pour cela, il suffit de montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathcal{J}_N^{**} = \{\omega \in \Omega | J^*(u)(\omega) \leq N\}$ est presque inclus dans $\mathcal{L}^{**}$, le résultat cherché en découlant par réunion dénombrable. Fixons alors $N \in \mathbf{N}$ et notons τ_N le premier temps n pour lequel $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\Delta u^2\right)(X_k) > N$ en convenant que $\tau_N = \infty$ lorsque cela n'arrive pas. Pour $n \in \mathbf{N}$, l'événement $\{\tau_N > n+1\}$ étant égal à $\{\sum_{k=0}^{n} \left(\Delta u^2\right)(X_k) \leq N\}$ (la somme étant à termes positifs), il est $\mathcal{F}_n$-mesurable. L'événement complémentaire $\{\tau_N - 1 \leq n\}$ est donc $\mathcal{F}_n$-mesurable et $\tau'_N = \tau_N - 1$ est un temps d'arrêt. Remarquons que $\sum_{k=0}^{\tau'_N-1} \left(\Delta u^2\right)(X_k) \leq N$ et que $\tau'_N = \infty$ si et seulement si $J^*(u) \leq N$. Stoppons alors la martingale $M_n = u^2(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta u^2(X_k)$ au temps d'arrêt τ'_N :

$$M_{n\wedge\tau'_N} \geq - \sum_{k=0}^{(n\wedge\tau'_N)-1} \Delta u^2(X_k) \geq -N.$$

Cette martingale étant minorée par une constante, elle est presque sûrement convergente. Sur l'événement $\mathcal{J}_N^{**}$, d'une part $\tau'_N = \infty$, donc $M_n = M_{n\wedge\tau'_N}$ est presque sûrement convergente, et d'autre part $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(X_k)$ converge, donc $u^2(X_n)$ a presque sûrement une limite finie. Pour se ramener à la fonction u, on utilise une astuce classique : la fonction $v = u+1$ est aussi une fonction harmonique et $\Delta v^2 = \Delta(u^2+2u+1) = \Delta u^2$ car $2u+1$ est harmonique. Ainsi on peut appliquer à v ce qui précède et, sur l'événement $\mathcal{J}_N^{**}$ (qui est le même pour u et v), $v^2(X_n)$ a presque sûrement une limite finie. Comme $v^2 = u^2+2u+1$, si v^2 et u^2 ont une limite finie, alors u en a une. Ainsi $\mathcal{J}_N^{**} \overset{\sim}{\subset} \mathcal{L}^{**}$, ce qui achève la preuve du lemme.

Avant de passer au cas des arbres, faisons quelques remarques. Les inclusions ci-dessus semblent strictes en général et il devrait être possible de construire un contre-exemple. Dans le cas que nous allons considérer, ce seront au contraire des égalités presque sûres, ce qui sera montré indirectement comme une conséquence du théorème principal. En termes de martingales, $J^*(u)$ correspond à "une" variation quadratique de la martingale $(u(X_n))$ (il y a en effet plusieurs définitions de la variation quadratique dans le cas discret) et, dans ce langage, le résultat ci-dessus doit être connu.

2 Cas d'un arbre, bords à l'infini

On décrit dans cette section des résultats sur les arbres connus depuis les travaux de P. Cartier [7]. On commence par définir les arbres, puis on introduit les différents bords à l'infini : le bord géométrique, le bord de Martin et le bord de Poisson, ainsi que les résultats associés et les liens entre ces différents bords.

2.1 Définitions

On se place sur le graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ de la section précédente (non orienté, localement fini et connexe). On dit que deux chemins sont *élémentairement homotopes* si on peut passer de l'un à l'autre en supprimant un "aller-retour", c'est-à-dire remplacer $\ldots, x, y, x, \ldots$ par $\ldots, x, \ldots$ et on appelle *homotopie* la relation d'équivalence engendrée sur l'ensemble des chemins. On appelle *lacet* un chemin qui finit à l'endroit où il a commencé et *lacet trivial* un lacet réduit à un point. Le graphe $\mathcal{G}$ est appelé un *arbre* s'il est *simplement connexe*, c'est-à-dire si tout lacet est homotope à un lacet trivial.

Dans toute la suite, $\mathcal{G}$ sera un **arbre**, qu'on supposera de plus **transient** (donc infini).

On déduit aisément de la définition d'un arbre qu'il y a unicité du segment géodésique joignant x à y et que tout chemin de x à y passe par tous les points de ce segment géodésique. Autrement dit, pour une partie de S, la connexité et la convexité sont deux notions équivalentes. Si maintenant on choisit un point z sur le segment géodésique joignant x à y, on est donc obligé de passer par z lorsqu'on va de x à y et cela donne les formules suivantes, grâce à la propriété forte de Markov :

$$H(x, y) = H(x, z)H(z, y) \tag{3}$$

$$G(x, y) = H(x, z)G(z, y) \tag{4}$$

(La fonction H définie ici est égale à la fonction F de l'article de P. Cartier sauf sur la diagonale de $S \times S$.)

Remarquons enfin que, si U est une partie connexe (donc convexe par ce qui précède) de S et $x \in S$, il existe un unique point de U situé à distance minimale de x, qu'on appelle la *projection* de x sur U. De plus, si un chemin partant de x rencontre U, il le fait pour la première fois à l'endroit de cette projection.

2.2 Bord géométrique

Le bord géométrique de l'arbre est défini à l'aide des rayons géodésiques. Une *géodésique* est un chemin doublement infini (indexé par $\mathbf{Z}$) dont tous les sous-chemins finis sont des segments géodésiques. Un *rayon géodésique* est un chemin simplement infini (indexé par $\mathbf{N}$) dont tous les sous-chemins finis sont des segments géodésiques. Deux rayons géodésiques γ et δ sont dits *asymptotes* s'ils restent à distance bornée l'un de l'autre, c'est-à-dire si la suite $(d(\gamma(n), \delta(n)))_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée. Dans le cas d'un arbre, cela signifie qu'à une translation près, les rayons géodésiques coïncident à partir d'un certain rang. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence et on appelle *bord géométrique* de l'arbre l'ensemble des rayons géodésiques quotienté par cette relation d'équivalence, qu'on note ∂S. Dans le cas d'un arbre, il est facile de voir qu'étant donné un point $x \in S$, chaque point du bord géométrique est représenté par un unique rayon géodésique partant de x.

Nous nous limiterons donc à considérer les rayons géodésiques qui partent d'un *point base* donné o, **qui est fixé pour toute la suite**.

Si θ est un point du bord géométrique ∂S, on note alors γ_θ le rayon géodésique partant de o qui représente θ. On dira que γ_θ *pointe vers* θ. Par abus de langage, on notera encore γ_θ l'image du rayon géodésique, c'est-à-dire l'ensemble $\{\gamma_\theta(n), n \in \mathbf{N}\}$.

On munit $S \cup \partial S$ de la topologie des cônes : si on fixe un segment géodésique partant de o, on considère tous les rayons géodésiques qui débutent par ce segment et on appelle *cône* la réunion de ces rayons géodésiques privée du segment initial moins son extrémité, à laquelle on a rajouté les points à l'infini correspondant. La topologie engendrée par les cônes et les points de S fournit alors une compactification de S, appelée *compactification géométrique*. Dire qu'un point y est "proche" de θ signifie que la partie initiale commune entre γ_θ et le segment géodésique (oy) est "grande".

2.3 Bord de Martin

Le bord de Martin est défini à l'aide des *noyaux de Green normalisés* $K_y = \frac{G(\cdot,y)}{G(o,y)}$ définis pour $y \in S$. Ces noyaux sont harmoniques sauf en y et on cherche à envoyer cette "singularité" à l'infini : on considère les suites (y_n) telles que (K_{y_n}) converge simplement vers une fonction harmonique sur S (remarquons que cette fonction harmonique est positive). Deux telles suites sont dites équivalentes si la fonction harmonique limite est la même. Le *bord de Martin* est obtenu en quotientant l'ensemble de ces suites par cette relation d'équivalence. En identifiant S et l'ensemble de noyaux de Green normalisés (par $y \longmapsto K_y$) et le bord de Martin et l'ensemble des fonctions harmoniques limites, puis en mettant sur la réunion de ces deux ensembles la topologie de la convergence simple, on obtient une compactification de S, appelée *compactification de Martin*. Avec cette topologie, les suites précédentes convergent vers le point du bord de Martin qu'elles définissent. Remarquons qu'en général, il faut définir le bord de Martin à l'aide de la convergence uniforme sur tout compact, qui coïncide ici avec la convergence simple.

En vue de comparer le bord de Martin et le bord géométrique, il est naturel de regarder si les rayons géodésiques définissent un point du bord de Martin, c'est-à-dire si la suite $(\frac{G(\cdot,\gamma_\theta(n))}{G(o,\gamma_\theta(n))})$ converge simplement vers une fonction harmonique. Soit $x \in S$ et y la projection de x sur γ_θ. Pour tout point $z \in \gamma_\theta$ situé entre y et θ, la formule 4 donne $G(o,z) = H(o,y)G(y,z)$ et $G(x,z) = H(x,y)G(y,z)$. Ainsi la suite $(\frac{G(x,\gamma_\theta(n))}{G(o,\gamma_\theta(n))})$ est stationnaire et converge vers $\frac{H(x,y)}{H(o,y)}$ où y est la projection de x sur γ_θ. On voit facilement que la limite simple ainsi obtenue est harmonique et on l'appelle le *noyau de Martin* K_θ de θ. Cela fournit un plongement du bord géométrique dans le bord de Martin.

Le résultat principal de P. Cartier est qu'il n'y a pas d'autres points dans le bord de Martin :

Théorème 2 *Pour un arbre transient, les compactifications de Martin et géométrique coïncident. De plus, tous les points de la frontière de Martin sont extrémaux.*

Il en découle d'après la théorie de Martin qu'on peut représenter les fonctions harmoniques positives par des mesures positives sur le bord à l'infini :

Corollaire 1 *(Représentation des fonctions harmoniques positives)*
La formule

$$\forall x \in S,\ u(x) = \int_{\partial S} K_\theta(x)\nu(d\theta).$$

établit une bijection entre l'ensemble des fonctions harmoniques positives u et l'ensemble des mesures boréliennes positives ν sur le bord ∂S.

2.4 Bord de Poisson

En appliquant la théorie de Martin à la fonction constante égale à 1, on obtient des résultats sur la marche aléatoire :

Théorème 3 *Soit x un point quelconque de S. Alors, P_x-p.s., la suite (X_n) converge vers un point $X_\infty \in \partial S$. La loi de X_∞ (loi de sortie de la marche aléatoire), notée μ_x et appelée mesure harmonique partant de x, est une mesure sur ∂S. On obtient ainsi une famille de mesures $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$ sur ∂S qui sont absolument continues les unes par rapport aux autres et dont la dérivée de Radon-Nykodim est donnée par le noyau de Martin :*

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_o} = K_\theta(x).$$

Ces mesures harmoniques ont les mêmes ensembles négligeables ce qui permet de définir la μ-négligeabilité et l'espace $L^\infty(\partial S, \mu)$. Leur support commun (ensemble des points de sortie de la marche aléatoire) est appelé *bord de Poisson*. C'est la partie du bord de Martin qui sert à représenter les fonctions harmoniques positives bornées et il permet aussi de représenter celles qui ne sont pas positives :

Théorème 4 *(Représentation des fonctions harmoniques bornées)*
La formule

$$\forall x \in S,\ u(x) = \int_{\partial S} f(\theta)\mu_x(d\theta) = E_x\left[f(X_\infty)\right]$$

établit une bijection entre l'ensemble des fonctions harmoniques bornées u et l'ensemble des fonctions $f \in L^\infty(\partial S, \mu)$.

Nous verrons plus tard comment obtenir f comme "limite" (géométrique ou stochastique) de la fonction u.

Par ailleurs, les mesures harmoniques vérifient une propriété analogue aux formules 3 et 4 sur les fonctions H et G. Pour l'énoncer, introduisons une définition : si $y \in S$, on appelle *ombre* de y sur le bord l'ensemble

$$A_o(y) = \{\theta \in \partial S | y \in \gamma_\theta\},$$

obtenu en mettant une "source lumineuse" au point o. On montre alors aisément, grâce à l'unicité des segments géodésiques et à la propriété forte de Markov, le résultat suivant :

Lemme 3 *Si $E \subset \partial S$ est un borélien inclus dans l'ombre $A_o(y)$ de y, alors*

$$\mu_o(E) = H(o, y)\mu_y(E).$$

3 Conditionnement

La méthode des h-processus de Doob permet de construire, pour $x \in S$ et $\theta \in \partial S$, une probabilité P_x^θ, probabilité partant de x et *sachant qu'on sort en* θ. Cette construction est faite dans l'article de Cartier [7] et est identique à celle du cas continu [9, 16]. La probabilité ainsi construite vérifie (et c'est presque sa définition) la propriété suivante :

Proposition 1 *Soient T un temps d'arrêt presque sûrement fini et F une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_T$-mesurable. On a alors la formule :*

$$E_x^\theta[F] = \frac{1}{K_\theta(x)} E_x\left[F \cdot K_\theta(X_T)\right].$$

De plus, la marche vérifie encore la **propriété forte de Markov** pour P_x^θ et on a les deux propriétés suivantes :

Proposition 2 *(Désintégration)*
Pour toute variable aléatoire positive F,

$$E_x[F] = \int_{\partial S} E_x^\theta[F] \mu_x(d\theta).$$

La deuxième nécessite une définition : un événement A sera dit *asymptotique* s'il est invariant par l'opérateur de décalage Θ défini dans la sous-section 1.1 (c'est-à-dire si $\mathbf{1}_{(A)} \circ \Theta = \mathbf{1}_{(A)}$). On a alors le résultat suivant :

Proposition 3 *(Loi 0–1 asymptotique)*
Si l'événement A est asymptotique, alors, pour tout $\theta \in \partial S$, l'application $x \longmapsto P_x^\theta[A]$ est constante sur S et vaut 0 ou 1.

Les événements $\mathcal{L}^{**}$, $\mathcal{N}^{**}$ et $\mathcal{J}^{**}$ définis dans la section 1.3 par le comportement d'une fonction harmonique u le long de la marche aléatoire sont clairement asymptotiques. La loi 0–1 asymptotique affirme que les quantités $P_x^\theta(\mathcal{L}^{**})$, $P_x^\theta(\mathcal{N}^{**})$ et $P_x^\theta(\mathcal{J}^{**})$ prennent les valeurs 0 ou 1, cela indépendamment du point base x. On définit alors les ensembles (indépendants de x) suivants :

$$\mathcal{L}^* = \left\{\theta \in \partial S | P_x^\theta(\mathcal{L}^{**}) = 1\right\},$$

$$\mathcal{N}^* = \left\{\theta \in \partial S | P_x^\theta(\mathcal{N}^{**}) = 1\right\},$$

$$\mathcal{J}^* = \left\{\theta \in \partial S | P_x^\theta(\mathcal{J}^{**}) = 1\right\},$$

Ce sont les ensembles de points θ du bord tels que u converge, est bornée ou a une énergie finie le long des trajectoires aléatoires "conditionnées" à sortir au point θ. Nous dirons alors qu'il y a *convergence stochastique*, *bornitude stochastique* ou *finitude de l'énergie stochastique* de u en θ. De plus, pour $\theta \in \mathcal{L}^*$, les événements $\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to+\infty} u(X_n) \leq R\}$ sont asymptotiques, donc la variable aléatoire $\lim_{n\to+\infty} u(X_n)$ est P_x^θ-p.s. constante (cette constante ne dépendant pas de x) et cette valeur est appelée la *limite stochastique* de u en θ.

En appliquant la formule de désintégration ci-dessus au lemme 2, on obtient le résultat suivant :

Lemme 4 *Pour toute fonction harmonique u, on a*

$$\mathcal{J}^* \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{L}^* \subset \mathcal{N}^*$$

le première inclusion étant μ-presque sûre (μ mesure harmonique).

Nous introduisons dans la section suivante une hypothèse d'uniformité sur la marche aléatoire. Une conséquence immédiate du résultat principal (théorème 5) est que, sous cette hypothèse, les deux inclusions ci-dessus sont en fait des égalités presque sûres.

4 Résultat principal

Les résultats géométriques dont on s'inspire ici [16] concernent les variétés riemanniennes dont la courbure est "pincée" entre deux constantes strictement négatives. L'analogue discret de la courbure négative est obtenu en prenant un arbre. Cela permet, entre autres, d'avoir un comportement similaire des géodésiques : écartement de deux géodésiques, unicité du segment géodésique entre deux points, bord à l'infini. Pour traduire les bornes uniformes sur la courbure, on regarde le nombre d'arêtes partant de chaque point ainsi que leurs poids respectifs : beaucoup d'arêtes avec des poids faibles signifient que la courbure est très négative. On se convainc alors qu'une bonne hypothèse, d'ailleurs déjà utilisée dans les travaux de A. Korányi, M.A. Picardello et M.H. Taibleson [14] et M.A. Picardello et W. Woess [17], est la suivante :

$$(\mathcal{H}) \qquad \exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \sim y, \varepsilon \leq p(x,y) \leq \frac{1}{2} - \eta.$$

Cette hypothèse assure en particulier que le nombre de voisins d'un sommet est minoré par trois et majoré uniformément sur S. De plus, elle entraîne que l'arbre est transient, comme conséquence immédiate du lemme 6 qu'on verra plus loin.

Pour pouvoir énoncer le résultat principal il nous reste à définir les notions "radiales" correspondant aux notions stochastiques déjà introduites mais définies par le comportement de la fonction sur les rayons géodésiques. Soit u une fonction harmonique. On définit son énergie radiale par

$$J_\theta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(\gamma_\theta(k)).$$

Nous dirons qu'il y a *convergence radiale*, *bornitude radiale* ou *finitude de l'énergie radiale* de u en θ selon que $(u(\gamma_\theta(n)))_n$ converge, qu'elle est bornée ou que $J_\theta(u) < +\infty$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 5 *Soient $\mathcal{G} = (S, A)$ un arbre muni d'une marche aléatoire vérifiant l'hypothèse d'uniformité $(\mathcal{H})$ et u une fonction harmonique.*

Alors les notions de convergence radiale, bornitude radiale, finitude de l'énergie radiale, convergence stochastique, bornitude stochastique et finitude de l'énergie stochastique de u coïncident pour μ-presque tout point du bord.

Pour plus de commodité, nous noterons $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{J}$, les ensembles de points θ du bord pour lesquels il y a respectivement convergence radiale, bornitude radiale ou finitude de l'énergie radiale de u en θ. Il nous faut montrer que les ensembles $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{N}^*$ et $\mathcal{J}^*$ sont égaux μ-presque partout. D'après le lemme 4, on sait déjà que $\mathcal{J}^* \tilde{\subset} \mathcal{L}^* \subset \mathcal{N}^*$ et il est clair que $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$, puisqu'une suite convergente est bornée.

Par ailleurs, puisqu'on est sur un arbre, un chemin partant de o et qui tend vers un point θ du bord passe forcément par tous les points du segment géodésique γ_θ. Ainsi, si $X_0 = o$ et $X_\infty = \theta$, alors la suite $(\gamma_\theta(n))$ est une suite extraite de la suite (X_n) et on a les inclusions $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$, et $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{J}$. Cela entraîne aussi qu'en cas de convergences stochastique et radiale, les limites sont les mêmes.

En résumé, on a donc les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{J}^* & \tilde{\subset} & \mathcal{L}^* & \subset & \mathcal{N}^* \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathcal{J} & & \mathcal{L} & \subset & \mathcal{N} \end{array}$$

et il suffit de montrer que $\mathcal{N} \tilde{\subset} \mathcal{J}$ et $\mathcal{J} \tilde{\subset} \mathcal{J}^*$ pour achever la preuve du théorème, ce qui sera fait dans les sections 6 et 7. Pour cela, nous aurons besoin de traduire l'hypothèse $(\mathcal{H})$, ce qui sera fait dans la section 5 où nous verrons plusieurs conséquences de cette hypothèse.

Nous aurons aussi besoin de savoir construire la fonction à l'infini qui "représente" une fonction harmonique bornée (théorème 4). Il découle des résultats de P. Cartier qu'elle est limite de la fonction harmonique :

Lemme 5 *Toute fonction harmonique bornée converge radialement et stochastiquement en μ-presque tout point du bord et l'unique fonction $f \in L^\infty(\partial S, \mu)$ telle que*

$$\forall x \in S,\ u(x) = \int_{\partial S} f(\theta)\mu_x(d\theta) = E_x\left[f(X_\infty)\right]$$

est μ-presque partout limite radiale et stochastique de u.

5 Conséquences de l'hypothèse d'uniformité

Dans toute la suite, on supposera que la marche aléatoire sur l'**arbre** $\mathcal{G}$ vérifie l'**hypothèse** $(\mathcal{H})$.

Cela permet alors de majorer uniformément les fonctions H et G :

Lemme 6

$$\exists C_H \left(= \frac{\frac{1}{2}-\eta}{\frac{1}{2}+\eta}\right) < 1, \forall x \neq y, H(x,y) \leq C_H.$$

$$\exists C_G \left(= \frac{1}{1-C_H}\right), \forall x, y, G(x,y) \leq C_G.$$

Une démonstration de ce résultat figure dans l'article de M.A. Picardello et W. Woess déjà cité [17]. Nous en donnons ici une autre, due à C. Leuridan (communication personnelle).

D'après les formules 3 et 4, il suffit de montrer la première inégalité lorsque x et y sont voisins et la deuxième lorsque $x = y$ (car H prend des valeurs entre 0 et 1).

Soient alors x et y deux sommets voisins. La majoration de $H(x, y)$ repose sur le fait qu'à tout instant, la probabilité de s'éloigner de y est supérieure ou égale à $\frac{1}{2} + \eta$. Cela découle de l'hypothèse $(\mathcal{H})$ puisqu'en tout point différent de y, il y a une seule arête qui se rapproche de y.

La méthode de M.A. Picardello et W. Woess consiste à comparer la situation à celle d'une chaîne de Markov unidimensionnelle sur $\mathbf{N}$ telle qu'en un point différent de 0, la probabilité d'augmenter de 1 vaille $\frac{1}{2} + \eta$ et celle de décroître de 1 vaille $\frac{1}{2} - \eta$. Dans ce cas particulier, il est possible de calculer explicitement la probabilité d'atteindre 0 en partant de 1. La comparaison repose alors sur une récurrence. On pourrait aussi faire cette comparaison à l'aide du formalisme des réseaux électriques.

Nous utilisons ici une méthode plus probabiliste qui nous a été indiquée par C. Leuridan et qui consiste à introduire une surmartingale judicieuse : pour $\lambda > 0$ qu'on déterminera précisément par la suite, on pose $M_n = \exp(-\lambda d(X_n, y))$. On a alors :

$$E_x[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathrm{e}^{-\lambda d(X_n,y)} E_x[\mathrm{e}^{-\lambda(d(X_{n+1},y)-d(X_n,y))}|\mathcal{F}_n].$$

Or, sachant que $\{X_0 = x_0; X_1 = x_1; \ldots; X_n = x_n\}$, $d(X_{n+1}, y) - d(X_n, y)$ vaut 1 avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2} + \eta$ et -1 avec une probabilité inférieure ou égale à $\frac{1}{2} - \eta$, donc (en remarquant que $\mathrm{e}^{-\lambda} \leq \mathrm{e}^{\lambda}$)

$$E_x[\mathrm{e}^{-\lambda(d(X_{n+1},y)-d(X_n,y))}|\mathcal{F}_n] \leq \left(\frac{1}{2} + \eta\right) \mathrm{e}^{-\lambda} + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \mathrm{e}^{\lambda}.$$

On choisit alors λ de sorte que $(\frac{1}{2} + \eta)\mathrm{e}^{-\lambda} + (\frac{1}{2} - \eta)\mathrm{e}^{\lambda} = 1$, ce qui est possible car cette quantité est strictement inférieure à 1 pour $\lambda > 0$ assez petit et tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$. Pour cette valeur de λ, la suite (M_n) est une surmartingale. Elle est positive, majorée par 1 et converge presque sûrement vers 0. Soit τ_y le temps d'atteinte de y. On a $M_{\tau_y} = \mathbf{1}_{(\tau_y < \infty)}$ et le théorème d'arrêt de Doob donne :

$$H(x, y) = P_x[\tau_y < \infty] = E_x[M_{\tau_y}] \leq E_x[M_0] = \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{\frac{1}{2} - \eta}{\frac{1}{2} + \eta}.$$

Pour un sommet x, on a vu dans la sous-section 1.2 que $G(x, x) = \frac{1}{1 - p_x}$. Or p_x, probabilité de revenir au moins une fois en x en partant de x, est la moyenne des $H(y, x)$ pour y voisin de x, donc $p_x \leq C_H$, ce qui prouve la majoration de G et achève la preuve du lemme.

Ces majorations permettent de démontrer trois résultats qui seront très utiles par la suite.

Corollaire 2 *("Lemme d'évitement")*
Soit U une partie connexe de S (au sens de l'introduction). Alors

$$P_x\,[\textit{la marche rencontre } U] \leq (C_H)^{d(x,U)}.$$

Notons y la projection de x sur U (U est connexe). On sait qu'on est forcé de passer par y pour rencontrer U lorsqu'on part de x (sous-section 2.1), donc

P_x [la marche rencontre U] $= H(x,y)$. Si on note $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ les points du segment géodésique joignant x à y, on a (par la formule 3)

$$H(x,y) = H(x_0,x_1)H(x_1,x_2)\cdots H(x_{n-1},x_n) \leq (C_H)^n.$$

Comme $n = d(x,y) = d(x,U)$, le lemme est prouvé.

Pour énoncer les deux résultats suivants, introduisons une notation : si E est une partie du bord, on notera

$$\Gamma(E) = \bigcup_{\theta \in E} \gamma_\theta$$

la réunion des rayons géodésiques pointant vers E. On a alors :

Corollaire 3 *("Lemme de la fin")*
Soit E un borélien du bord. Alors, pour μ-presque tout $\theta \in E$, la marche aléatoire finit P_o^θ-presque sûrement sa vie dans $\Gamma(E)$.

Notons v la fonction harmonique bornée définie par

$$v(x) = \mu_x(E) = P_x\left[X_\infty \in E\right]$$

à l'aide du théorème 4 de représentation des fonctions harmoniques bornées. Si $x \notin \Gamma(E)$, alors, par le corollaire précédent ($\Gamma(E)$ étant connexe),

$$P_x\,[\text{la marche rencontre } \Gamma(E)] \leq C_H,$$

donc *a fortiori* $v(x) \leq C_H$, puisqu'il faut rentrer dans $\Gamma(E)$ pour finir dans E. Ainsi, si $v(x) > C_H$, alors $x \in \Gamma(E)$. Par ailleurs, d'après le lemme 5, pour μ-presque tout $\theta \in E$, P_o^θ-presque sûrement, $(v(X_n))$ tend vers 1, donc $X_n \in E$ à partir d'un certain rang par ce qui précède, ce qu'il fallait démontrer.

Et en notant $\widetilde{\gamma_\theta} = \{x \in S | d(x, \gamma_\theta) \leq 1\}$ le rayon géodésique *épaissi*, on a aussi :

Corollaire 4 *("Lemme des pointes")*
Soit E un borélien du bord. Alors, pour μ-presque tout $\theta \in E$, $\Gamma(E)$ contient une "pointe" de $\widetilde{\gamma_\theta}$, c'est-à-dire contient $\widetilde{\gamma_\theta}$ sauf un ensemble fini.

Avec les notations de la démonstration précédente, on sait encore, par le lemme 5, que pour μ-presque tout $\theta \in E$, v converge radialement en θ vers 1. Soit θ un tel point du bord : $v(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers θ en restant dans γ_θ. Comme $v \leq 1$ et que, par l'hypothèse $(\mathcal{H})$, les poids des voisins d'un point sont minorés uniformément, la propriété de la moyenne entraîne qu'il y a aussi convergence de $v(x)$ vers 1 lorsque x tend vers θ en restant dans $\widetilde{\gamma_\theta}$. Comme dans la démonstration précédente, si $v(x) > C_H$, alors $x \in \Gamma(E)$, ce qui conclut.

Nous pouvons maintenant commencer la démonstration proprement dite du théorème.

6 La bornitude radiale implique la finitude de l'énergie radiale

On montre ici que $\mathcal{N} \mathrel{\widetilde{\subset}} \mathcal{J}$. Pour cela, on introduit l'ensemble

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \left\{ \theta \in \partial S \,\middle|\, \sup_{\widetilde{\gamma}_\theta} |u| < +\infty \right\}$$

qui est clairement inclus dans $\mathcal{N}$ ($\widetilde{\gamma}_\theta$ est le rayon géodésique épaissi défini dans la section 5). Réciproquement, le "lemme des pointes" (corollaire 4) permet de montrer que $\mathcal{N} \mathrel{\widetilde{\subset}} \widetilde{\mathcal{N}}$. Pour cela on écrit $\mathcal{N} = \bigcup_{N \in \mathbf{N}} \mathcal{N}_N$, où

$$\mathcal{N}_N = \left\{ \theta \in \partial S \,\middle|\, \sup_{\gamma_\theta} |u| \leq N \right\}.$$

La réunion étant dénombrable, il nous suffit alors de montrer que pour tout N, $\mathcal{N}_N \mathrel{\widetilde{\subset}} \widetilde{\mathcal{N}}$. Cependant, le "lemme des pointes" affirme que, pour μ-presque tout $\theta \in \mathcal{N}_N$, $\Gamma(\mathcal{N}_N)$ contient $\widetilde{\gamma}_\theta$ sauf un ensemble fini. Pour un tel θ, u est donc bornée sur $\widetilde{\gamma}_\theta$ puisque, par définition de $\mathcal{N}_N$, $|u| \leq N$ sur $\Gamma(\mathcal{N}_N)$. Ainsi $\mathcal{N}_N \mathrel{\widetilde{\subset}} \widetilde{\mathcal{N}}$ pour tout N et $\mathcal{N} \mathrel{\widetilde{\subset}} \widetilde{\mathcal{N}}$, donc ces deux ensembles sont égaux μ-presque partout.

Il nous suffit donc de montrer ici que $\widetilde{\mathcal{N}} \mathrel{\widetilde{\subset}} \mathcal{J}$. On écrit de nouveau que $\widetilde{\mathcal{N}} = \bigcup_{N \in \mathbf{N}} \widetilde{\mathcal{N}}_N$, où

$$\widetilde{\mathcal{N}}_N = \left\{ \theta \in \partial S \,\middle|\, \sup_{\widetilde{\gamma}_\theta} |u| \leq N \right\}.$$

et il nous suffit de montrer que pour tout N, $\widetilde{\mathcal{N}}_N \mathrel{\widetilde{\subset}} \mathcal{J}$.

Soit maintenant $N \in \mathbf{N}$ fixé. On pose $\Gamma = \Gamma(\widetilde{\mathcal{N}}_N)$, réunion des rayons géodésiques pointant sur $\widetilde{\mathcal{N}}_N$ et on note τ le temps de sortie de Γ. On sait que

$$M_n = u^2(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta u^2(X_k)$$

est un martingale d'après le lemme 1. En appliquant le théorème d'arrêt de Doob au temps d'arrêt borné $\tau \wedge n$, on obtient

$$E_o\left[M_{\tau \wedge n}\right] = E_o[M_0] = u^2(o) \geq 0,$$

donc

$$E_o\left[\sum_{k=0}^{\tau \wedge n-1} \Delta u^2(X_k)\right] \leq E_o\left[u^2(X_{\tau \wedge n})\right].$$

Or $X_{\tau \wedge n}$ est à distance au plus 1 de Γ, donc d'un rayon géodésique γ_θ où $\theta \in \widetilde{\mathcal{N}}_N$. Ainsi $X_{\tau \wedge n} \in \widetilde{\gamma}_\theta$ et, par définition de $\widetilde{\mathcal{N}}_N$, $|u(X_{\tau \wedge n})| \leq N$, donc

$$E_o\left[\sum_{k=0}^{\tau \wedge n-1} \Delta u^2(X_k)\right] \leq N^2.$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient, par convergence monotone (remarquer que $\Delta u^2 \geq 0$),

$$E_o\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta u^2(X_k)\right] \leq N^2 < +\infty$$

et par la formule de désintégration (proposition 2), on obtient que, pour μ-presque tout $\theta \in \partial S$,

$$E_o^\theta\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta u^2(X_k)\right] < +\infty.$$

Lorsque $X_\infty = \theta$ et $\tau = \infty$, la suite $(\gamma_\theta(n))$ étant une suite extraite de (X_n) et les séries étant à termes positifs,

$$J_\theta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(\gamma_\theta(k)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(X_k) = \sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta u^2(X_k),$$

donc, en multipliant par $\mathbf{1}_{(\tau=\infty)}$ et en prenant les espérances conditionnelles en θ, on obtient, pour tout $\theta \in \partial S$,

$$J_\theta(u) \cdot P_o^\theta[\tau = \infty] \leq E_o^\theta\left[\mathbf{1}_{(\tau=\infty)} \cdot \sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta u^2(X_k)\right] \leq E_o^\theta\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta u^2(X_k)\right].$$

Ainsi, pour μ-presque tout $\theta \in \partial S$,

$$J_\theta(u) \cdot P_o^\theta[\tau = \infty] < +\infty.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que, pour μ-presque tout $\theta \in \widetilde{\mathcal{N}}_N$, $P_o^\theta[\tau = \infty] > 0$. Par le “lemme de la fin” (corollaire 3), il suffit de montrer cela pour les θ tels que la marche aléatoire finit P_o^θ-presque sûrement sa vie dans Γ. Soit θ un tel point. On a

$$\lim_{n\to\infty} P_o^\theta\left[\forall k \geq n, X_k \in \Gamma\right] = P_o^\theta\left[\text{la marche finit dans } \Gamma\right] = 1.$$

Soit alors n tel que

$$P_o^\theta\left[\forall k \geq n, X_k \in \Gamma\right] > 0.$$

D'après la propriété de Markov,

$$P_o^\theta\left[\forall k \geq n, X_k \in \Gamma\right] = E_o^\theta\left[P_o^\theta\left[\forall k \geq n, X_k \in \Gamma | \mathcal{F}_n\right]\right] = E_o^\theta\left[\varphi(X_n)\right]$$

où $\varphi(x) = P_x^\theta\left[\forall k, X_k \in \Gamma\right] = P_x^\theta[\tau = \infty]$. Comme $E_o^\theta\left[\varphi(X_n)\right] > 0$, la fonction φ n'est pas nulle. Il existe donc un point x tel que $P_x^\theta[\tau = \infty] > 0$. Or

$$P_o^\theta[\tau = \infty] \geq P_o^\theta\left[(X_n) \text{ rencontre } x \text{ et } \tau = \infty\right]$$

et, en appliquant la propriété forte de Markov au temps d'atteinte de x, cette dernière probabilité est égale à

$$P_o^\theta\left[(X_n) \text{ rencontre } x \text{ avant de sortir de } \Gamma\right] \cdot P_x^\theta[\tau = \infty].$$

Par ailleurs, en appliquant la proposition 1 au temps d'arrêt $T = \tau_x \wedge \tau \wedge n$ (où τ_x est le temps d'atteinte de x) et à $F = \mathbf{1}_{(\tau_x \leq \tau\wedge n)} = \mathbf{1}_{(X_T = x)}$, on obtient (puisque $K_\theta(o) = 1$) :

$$P_o^\theta[\tau_x \leq \tau \wedge n] = E_o[\mathbf{1}_{(\tau_x \leq \tau\wedge n)} \cdot K_\theta(X_T)] = K_\theta(x) \cdot P_o[\tau_x \leq \tau \wedge n],$$

ce qui donne par convergence monotone, en faisant tendre n vers ∞,

$$\begin{aligned}&P_o^\theta\left[(X_n) \text{ rencontre } x \text{ avant de sortir de } \Gamma\right]\\&\quad = K_\theta(x)\cdot P_o\left[(X_n) \text{ rencontre } x \text{ avant de sortir de } \Gamma\right] > 0\end{aligned}$$

car le noyau de Martin est strictement positif et Γ est connexe (car étoilé) donc il contient au moins un chemin de o à x et il y a une probabilité non nulle de suivre ce chemin. Ainsi $P_o^\theta[\tau = \infty] > 0$, ce qui achève la preuve de l'inclusion $\mathcal{N} \mathrel{\tilde{\subset}} \mathcal{J}$.

7 La finitude de l'énergie radiale implique la finitude de l'énergie aléatoire

On montre ici que $\mathcal{J} \mathrel{\tilde{\subset}} \mathcal{J}^*$. De la même manière que dans la section précédente, on introduit les ensembles $\mathcal{J}_N = \{\theta \in \partial S | J_\theta(u) \leq N\}$ et il suffit de montrer que, pour tout N, $\mathcal{J}_N \mathrel{\tilde{\subset}} \mathcal{J}^*$. On introduit aussi la fonction harmonique bornée $v(x) = \mu_x(\mathcal{J}_N) = P_x\left[X_\infty \in \mathcal{J}_N\right]$ définie à l'aide du théorème 4 de représentation des fonctions harmoniques bornées. Enfin, on définit la quantité

$$I = E_o\left[\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(X_k)\cdot \mathbf{1}_{(v\geq\alpha)}(X_k)\right],$$

avec $\alpha = \frac{1+C_H}{2}$ où $C_H < 1$ est la constante du lemme 6.

Remarquons qu'il nous suffit de montrer que $I < +\infty$ pour avoir le résultat voulu. En effet, dans ce cas, la formule de désintégration (proposition 2) assure pour μ-presque tout $\theta \in \partial S$ que

$$E_o^\theta\left[\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(X_k)\cdot \mathbf{1}_{(v\geq\alpha)}(X_k)\right] < +\infty$$

donc, P_o^θ-presque sûrement,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(X_k)\cdot \mathbf{1}_{(v\geq\alpha)}(X_k) < +\infty.$$

Par ailleurs, la fonction v converge stochastiquement en μ-presque tout point θ du bord vers $\mathbf{1}_{(\mathcal{J}_N)}(\theta)$ d'après le lemme 5. Ainsi, μ-presque tout point $\theta \in \mathcal{J}_N$ vérifie que, P_o^θ-presque sûrement, la série précédente converge et $\lim_{k\to\infty} v(X_k) = 1$ donc $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(X_k) < +\infty$. Un tel θ est donc dans $\mathcal{J}^*$, donc $\mathcal{J}_N \mathrel{\tilde{\subset}} \mathcal{J}^*$.

Il nous reste donc à prouver que $I < +\infty$. Pour cela, réécrivons I à l'aide de la formule 2 appliquée avec $U = S$:

$$I = \sum_{y\in S} \Delta u^2(y)\mathbf{1}_{(v\geq\alpha)}(y)G(o,y) = \sum_{y\in\{v\geq\alpha\}} \Delta u^2(y)G(o,y). \tag{5}$$

Puis, en intégrant l'énergie (bornée par N) sur $\mathcal{J}_N$ et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient une quantité ressemblante, dont on sait qu'elle est finie :

$$N \geq \int_{\mathcal{J}_N}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u^2(\gamma_\theta(k))\right)\mu_o(d\theta) = \sum_{y\in\Gamma(\mathcal{J}_N)} \Delta u^2(y)\mu_o(\mathcal{J}_N \cap A_o(y)), \tag{6}$$

où $A_o(y) = \{\theta \in \partial S | y \in \gamma_\theta\}$ est comme précédemment l'ombre de y sur le bord. Il ne reste plus qu'à comparer les quantités 5 et 6, ce qu'on fait à l'aide du lemme suivant qui entraîne clairement la finitude cherchée.

Lemme 7 *On a les deux propriétés suivantes :*

1. $\{v \geq \alpha\} \subset \Gamma(\mathcal{J}_N)$;
2. $\forall y \in \{v \geq \alpha\}, G(o,y) \leq 2(C_G)^2 \mu_o(\mathcal{J}_N \cap A_o(y))$.

Montrons alors ce lemme. Remarquons que, par définition de l'ombre de y, $y \notin \Gamma(\partial S \setminus A_o(y))$. En appliquant le "lemme d'évitement" (corollaire 2), on a

$$\mu_y(\partial S \setminus A_o(y)) \leq P_y \,[\text{la marche rencontre } \Gamma(\partial S \setminus A_o(y))] \leq C_H,$$

donc

$$v(y) = \mu_y(\mathcal{J}_N) \leq \mu_y(\mathcal{J}_N \cap A_o(y)) + \mu_y(\partial S \setminus A_o(y)) \leq \mu_y(\mathcal{J}_N \cap A_o(y)) + C_H.$$

Pour $y \in \{v \geq \alpha\}$, on a alors

$$\mu_y(\mathcal{J}_N \cap A_o(y)) \geq v(y) - C_H \geq \alpha - C_H = \frac{1 - C_H}{2} > 0.$$

Cela a deux conséquences. D'une part, $\mathcal{J}_N \cap A_o(y)$ est non vide donc, par définition de l'ombre, $y \in \Gamma(\mathcal{J}_N)$, ce qui prouve la première propriété. D'autre part, en appliquant la formule 1, le lemme 3 et le lemme 6, on obtient :

$$\frac{\mu_o(\mathcal{J}_N \cap A_o(y))}{G(o,y)} = \frac{H(o,y)\mu_y(\mathcal{J}_N \cap A_o(y))}{H(o,y)G(y,y)} \geq \frac{1 - C_H}{2C_G} = \frac{1}{2(C_G)^2},$$

ce qui prouve la deuxième propriété et achève la démonstration de l'inclusion $\mathcal{J} \stackrel{\sim}{\subset} \mathcal{J}^*$.

Remerciements

Nous tenons à remercier ici l'auditoire du *séminaire d'Analyse et de Probabilités* de Grenoble pour l'interaction profitable qu'il a su créer durant nos exposés et tout particulièrement Christophe Leuridan pour l'intérêt qu'il a apporté à ce travail.

Références

[1] Alano Ancona. Negatively curved manifolds, elliptic operators and the Martin boundary. *Ann. of Math.*, 125:495–536, 1987.

[2] Alano Ancona. Positive harmonic functions and hyperbolicity. In J. Kràl et al., editor, *Potential Theory, Surveys and Problems*. Springer Lect. Notes in Math. 1344, Berlin, 1988.

[3] M.T. Anderson and R. Schoen. Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature. *Annals of Math.*, 121:429–461, 1985.

[4] Jean Brossard. Comportement non-tangentiel et comportement brownien des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Démonstration probabiliste d'un théorème de Calderon et Stein. *Séminaire de Probabilités, Université de Strasbourg*, XII:378–397, 1978.

[5] A.P. Calderón. On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund. *Trans. of A.M.S.*, 68:55–61, 1950.

[6] A.P. Calderón. On the behaviour of harmonic functions at the boundary. *Trans. of A.M.S.*, 68:47–54, 1950.

[7] P. Cartier. Fonctions harmoniques sur un arbre. In *Symposia Mathematica*, volume IX, pages 203–270. Academic Press, London and New-York, 1972.

[8] Yves Derriennic. Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 32:261–276, 1975.

[9] Richard Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis.* Wadsworth Advanced Books & Software, 1984.

[10] E.B. Dynkin and M.B. Malyutov. Random walks on groups with a finite number of generators. *Soviet Math. Dokl.*, 2:399–402, 1961.

[11] Pierre Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 30:335–400, 1906.

[12] A. Korányi and R.B. Putz. Local Fatou theorem and area theorem for symmetric spaces of rank one. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 224:157–168, 1976.

[13] A. Korányi and R.B. Putz. An area theorem for products of symmetric spaces of rank one. *Bull. Sc. math.*, 105:3–16, 1981.

[14] Adam Korányi, Massimo A. Picardello, and Mitchell H. Taibleson. Hardy spaces on non-homogeneous trees. In *Symposia Mathematica*, volume XXIX, pages 205–254. Academic Press, London and New-York, 1987.

[15] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund. A theorem of Lusin. *Duke Math. J.*, 4:473–485, 1938.

[16] Frédéric Mouton. Comportement asymptotique des fonctions harmoniques en courbure négative. *Comment. Math. Helvetici*, 70:475–505, 1995.

[17] Massimo A. Picardello and Wolfgang Woess. Finite truncations of random walks on trees. In *Symposia Mathematica*, volume XXIX, pages 255–265. Academic Press, London and New-York, 1987.

[18] I.I. Privalov. Sur les fonctions conjuguées. *Bull. Soc. Math. France*, pages 100–103, 1916.

[19] D.C. Spencer. A function theoric identity. *Amer. J. Math.*, 65:147–160, 1943.

[20] E.M. Stein. On the theory of harmonic functions of several variables II. *Acta Math.*, 106:137–174, 1961.

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 SAINT-MARTIN D'HÈRES CEDEX (France)
Email: `mouton@fourier.ujf-grenoble.fr`

(9 juin 1998)