VALEURS PROPRES SEMI-CLASSIQUES D'UN OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC UN POTENTIEL DÉGÉNÉRÉ

par Françoise TRUC

1. Introduction.

On étudie l'opérateur de Schrödinger $\widehat{H}_h$ associé à un potentiel dégénéré du type suivant :

$$\widehat{H}_h = -h^2\Delta + V(x,y),\ (x,y) = (x_1, x_2, \dots x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}\ .$$

Δ désigne le laplacien dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et le potentiel est de la forme suivante :

$V(x,y) = f(x)y^2$, où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, strictement positive, qui tend vers l'infini à l'infini. (hypothèse $(*)$)

L'opérateur $\widehat{H}_h$ est essentiellement autoadjoint et on connaît des conditions suffisantes (cf. [HE], p. 6 et [HE-NO]) pour qu'il soit à résolvante compacte sur $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$.

On note $N_h(E)$ la fonction de dénombrement de son spectre :

$N_h(E) = \text{card}\{\lambda_i(h); \lambda_i(h)\ \text{ valeur propre de }\ \widehat{H}_h\ \text{ et }\ \lambda_i(h) \leq E\}$.

On remarque que $\widehat{H}_h = h^2 H_h$, où $H_h = -\Delta + \frac{f(x)}{h^2}y^2$.

De ce fait, si l'on note N_f la fonction de dénombrement relative à $H = -\Delta + f(x)y^2$, on a, pour toute énergie E fixée :

$$N_h(E) = N_{f/h^2}(\frac{E}{h^2})\ .$$

Dans le cas $n = 1$, et pour un potentiel du type $f(x) = (1+x^2)^k, k \in Z$, on connaît (cf. [R]) le comportement de $N_f(\lambda)$ pour les grandes valeurs de λ :

$$N_f(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{k\in Z^+} \int_{\mathbb{R}} \big(\lambda - (2k+1)\sqrt{f(x)}\big)_+^{1/2} dx \quad (\lambda \to \infty).$$

L'objet de cet article est la détermination d'un équivalent de $N_h(E)$ à E fixée pour h tendant vers zéro, et pour une classe de potentiels $f(x)$ plus large.

Mots-clés : spectre, fonction de dénombrement, asymptotique semi-classique, principe du minimax.
Classification Mathématique : 35P20.

Posons :

$$N_f^{as}(E) = C_n \sum_{k\in Z^+} \int_{\mathbb{R}^n} \big(E - (2k+1)\sqrt{f(x)}\big)_+^{n/2} dx$$

avec :

$$C_n = \frac{\gamma_n}{(2\pi)^n}$$

$$\gamma_n = \text{volume de la boule unité de } \mathbb{R}^n \ .$$

L'hypothèse $(*)$ sur f permet que l'expression $N_f^{as}(E)$ soit bien définie. En adaptant la méthode utilisée dans [CV1], on démontrera le

Théorème. — *Soit f vérifiant $(*)$. Supposons de plus que f est différentiable et posons*

$$M(x) = \sup_{|x-x'|\leq 1} |Df(x')| \ .$$

Si f vérifie de plus l' hypothèse $(**)$: $M(x) = o(f(x)), (x \to \infty)$, l'opérateur $\widehat{H}_h$ est à résolvante compacte et on a, pour toute énergie E :

$$N_h(E) \sim \frac{1}{h^n} N^{as}_{h^2 f}[E] \quad (h\to 0)\ .$$

Remarque 1. — Cette expression peut encore s'écrire :

$$N_h(E) \sim \frac{C_n}{h^{n/2}} \sum_{k\in Z^+} \int_{\mathbb{R}^n} \big(\frac{E}{h} - (2k+1)\sqrt{f(x)}\big)_+^{n/2} dx \qquad (h\to 0)\ .$$

Pour le potentiel $f(x) = 1 + x^2$ dans $\mathbb{R}$ on trouve ainsi l'équivalent :

$$N_h(E) \sim \frac{k}{h^2} Log(\frac{1}{h}) \quad (h \to 0)\ .$$

Remarque 2. — La démonstration de ce théorème reposant sur des comparaisons de formes quadratiques, c'est grâce à la minoration de la forme quadratique $\langle \widehat{H}_h u, u\rangle$ (voir p. 9) que l'on obtient la compacité de la résolvante (cf. [RS] théorème XIII.64 (*vi*) p. 245).

2. Deux résultats préliminaires.

2.1. Problème de Dirichlet dans un parallélépipède pour l'opérateur de Schrödinger dans le cas où f est une constante.

Posons

$$\nu_{f(x)}(\lambda) = C_n \sum_{k\in Z^+} \big(\lambda - (2k+1)\sqrt{f(x)}\big)_+^{n/2}\ .$$

La fonction $N_f^{as}(\lambda)$ s'écrit alors :

$$N_f^{as}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu_{f(x)}(\lambda)\, dx\,.$$

Dans le cas d'une fonction f constante ($f(x) = a$ pour tout x), la fonction $\nu_a(\lambda)$ s'interprète comme une densité d'état, car elle permet d'estimer $N_{a,r}(\lambda)$, la fonction de comptage du spectre du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Schrödinger H_a associé au potentiel $V(x,y) = ay^2$ dans le parallélépipède :

$$P_r = \{(x,y); |x_i| \leq r\, \forall i; y \in]-\infty, +\infty[\}\,.$$

Plus précisément nous avons l'estimation suivante :

Théorème.

Il existe une constante c ne dépendant que de n telle que, pour tout A avec $0<A<r/2$, *on ait :*

$$N_{a,r}(\lambda) \leq \mathbb{R}^n \nu_a(\lambda)$$
$$N_{a,r}(\lambda) \geq (r-A)^n \nu_a(\lambda - c/A^2)\,.$$

Démonstration. — On commence par choisir un cube $(\widetilde{\Omega})$ de $\mathbb{R}^n$. On considère le pavage de $\mathbb{R}^{n+1}$ par les parallélépipèdes $P_r + (rZ)^n$ et on désigne par $(\Omega_i)_{i\in I}$ la famille de ceux de ces parallélépipèdes inclus dans $\Omega = \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}$. On peut écrire aussi: $\Omega_i = \widetilde{\Omega}_i \times \mathbb{R}$. On utilise alors l'injection isométrique (pour les normes L^2 et la forme quadratique $q_a(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla u|^2 + V|u|^2$) :

$$\bigoplus_{i\geq 1} H_0^1(\Omega_i) \to H_0^1(\Omega)$$

$$j\Big(\bigoplus_{i\geq 1} u_i\Big) = \sum_{i\geq 1} u_i$$

On en déduit , chaque Ω_i ayant le même spectre :

$$(\sharp I) \times N_{a,r}(\lambda) \leq N_{a,\Omega}(\lambda) \;\; (1)$$

Or les valeurs propres de H_a dans Ω pour le problème de Dirichlet sont de la forme :

$$\lambda = a(2k+1) + \mu,\; k \in Z,\; \mu \in \Sigma_0\,,$$

Σ_0 désignant le spectre de Dirichlet du Laplacien pour le cube $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^n$. On peut donc écrire, en notant N_0 la fonction de comptage de ce spectre :

$$N_{a,\Omega}(\lambda) = \sum_{k\geq 1} N_0[\lambda - a(2k+1)]\,.$$

Or $\sharp I \times \mathbb{R}^n = \mathrm{vol}(\bigcup \widetilde{\Omega}_i) = \mathrm{vol}\,\widetilde{\Omega}$.

L'inégalité (1) peut donc encore s'écrire :

$$N_{a,r}(\lambda) \leq \frac{\mathbb{R}^n}{\mathrm{vol}\,\widetilde{\Omega}} \sum_{k\geq 1} N_0[\lambda - a(2k+1)]\,.$$

On en déduit la première inégalité du théorème en passant à la limite pour $\widetilde{\Omega}$ grand, en utilisant l'asymptotique :

$$\lim_{\widetilde{\Omega}\ \text{grand}} \frac{N_0(\mu)}{\mathrm{vol}\,\widetilde{\Omega}} = \frac{\gamma_n}{(2\pi)^n}\mu^{n/2}\,.$$

Pour obtenir la minoration, on considère le pavage de $\mathbb{R}^{n+1}$ par les parallélépipèdes $P_{r-A} + ((r-A)Z)^n$, on ne garde que ceux qui sont inclus dans Ω, et on désigne par $(\Omega_i)_{i\in I}$ des parallélépipèdes ayant mêmes centres que ces derniers et de côtés r. On peut écrire aussi $\Omega_i = \widetilde{\Omega}_i \times \mathbb{R}$. On a ainsi : $\mathrm{vol}(\bigcup \widetilde{\Omega}_i) = (\frac{r}{r-A})^n \,\mathrm{vol}\,\widetilde{\Omega}$.

Les $(\Omega_i)_{i\in I}$ forment un recouvrement de Ω.

On construit alors une famille $\phi_i \in C_o^\infty(\widetilde{\Omega}_i)$ vérifiant : $\sum \phi_i^2 = 1$ et $\forall x \in \widetilde{\Omega}_i$, $\|d\phi_i(x)\| \leq C/A$; (la constante C ne dépend que de n). La construction d'une telle famille est détaillée dans [CV1] ou [DU].

On considère alors l'injection isométrique (pour les normes L^2) :

$$H_0^1(\Omega) \to \bigoplus_{i\geq 1} H_0^1(\Omega_i)$$

$$j(u) = \bigoplus_{i\geq 1} u_i \ \text{ avec : } u_i = u\phi_i\,.$$

On utilise l'inégalité entre la forme quadratique $q_1\big(\bigoplus_{i\geq 1} u_i\big) = \sum_{i\geq 1} \int_{\Omega_i} |\nabla u\phi_i|^2 + ay^2|u\phi_i|^2$, et la forme quadratique $q_a(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla u|^2 + V|u|^2$:

$$q_a(u) \geq \sum_{i\geq 0} \int_{\Omega_i} |\nabla u_i|^2 + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} ay^2|u|^2 - \frac{c^3}{A^2}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u|^2\,.$$

(Le détail des calculs est donné dans la section 3.2.a)).

La méthode du minimax donne alors :

$$N_{a,\Omega}(\lambda) \leq (\sharp I) \times N_{a,r}(\lambda - \frac{c}{A^2})$$

Le même raisonnement que dans la première partie de la preuve conduit à la minoration cherchée, compte tenu du fait que cette fois l'on a :

$$\sharp I \times \mathbb{R}^n = \mathrm{vol}(\bigcup \widetilde{\Omega}_i) = (\frac{r}{r-A})^n \,\mathrm{vol}\,\widetilde{\Omega}\,.$$

2.2. Existence d'un pavage de $\mathbb{R}^n$ en cubes "adapté" à f et à h.

Lemme. — *Sous les hypothèses* $(*)$ *et* $(**)$, *et* $\varepsilon > 0$ *étant donné, il existe pour tout h un pavage de* $\mathbb{R}^n$ *par des cubes* $(\widetilde{\Omega}_i)_{i\geq 0}$ *de côté* r_i, *et des nombres* $(a_i)_{i\geq 1}$ $(0<a_i\leq r_i/2)$ *tels que, si l'on note* $M_i = \sup_{x\in\widetilde{\Omega}_i} |Df(x)|$, *on ait, pour tout x dans* $\widetilde{\Omega}_i$ *et pour tout entier* $i \geq 1$:

i) $r_i M_i \leq \varepsilon\sqrt{h} f(x)$

ii) $1/a_i^2 \leq \max\left(\frac{4\varepsilon}{h}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Démonstration. — On considère un pavage initial de $\mathbb{R}^n$ par des cubes (C_α) de côtés 1. D'après l'hypothèse $(**)$, on peut regrouper dans un cube noté $\widetilde{\Omega}_0$ les (C_α) tels qu'il existe x dans (C_α) vérifiant : $M_\alpha \geq \varepsilon^2 f(x)$. Ce cube ne dépend pas de h.

On subdivise les cubes (C_α) extérieurs à $\widetilde{\Omega}_0$ en petits cubes de côtés r_α avec $1/r_\alpha$ entier. Ces cubes seront les $\widetilde{\Omega}_i$. Deux cas se présentent pour les cubes (C_α), qui conditionnent le choix de r_α :

1) $M_\alpha > \varepsilon\sqrt{h}\min_{x\in C_\alpha} f(x)$

On peut alors choisir r_α tel que $1/r_\alpha$ soit entier et que :

$$\frac{\varepsilon\sqrt{h}}{2}\min_{x\in C_\alpha} f(x) \leq r_\alpha M_\alpha \leq \varepsilon\sqrt{h}\min_{x\in C_\alpha} f(x).$$

L'inégalité i) du lemme est alors vérifiée, puisque $r_i = r_\alpha$ pour les $\widetilde{\Omega}_i$ contenus dans C_α, et que l'on a : $M_i \leq M_\alpha$.

On prend ensuite les a_i tous égaux dans C_α à $a_\alpha = \sqrt{\varepsilon} r_\alpha$, ce qui entraîne

$$1/a_i^2 = 1/(\varepsilon r_i^2) \leq \frac{4M_\alpha}{h\varepsilon^3 \min_{x\in C_\alpha} f(x)^2} \leq \frac{4\varepsilon}{h}\ .$$

Cette dernière inégalité provient en effet du choix de $\widetilde{\Omega}_0$.

2) $M_\alpha \leq \varepsilon\sqrt{h}\min_{x\in C_\alpha} f(x)$.

On choisit alors $r_i = r_\alpha = 1$, si bien que l'inégalité i) est satisfaite et que $1/a_i^2 = 1/\varepsilon$.

Dans toute la suite, ε est fixé. On utilise le pavage $(\widetilde{\Omega}_i)$ associé à une valeur de h fixée pour l'instant. On pose comme précédemment : $\Omega_i = \widetilde{\Omega}_i \times \mathbb{R}$.

3. Preuve du résultat principal.

3.1. Minoration de $N_h(E)$.

On utilise l'injection $\bigoplus_{i\geq 1} H_0^1(\Omega_i) \to D(q_{f/h^2})$, où chaque $H_0^1(\Omega_i)$ est muni de la forme quadratique associée à la fonction constante $f(x_i)/h^2$, x_i étant un point arbitrairement fixé dans $\widetilde{\Omega}_i$.

On a ainsi :

$$q_1\Big(\bigoplus_{i\geq 1} u_i\Big) = \sum_{i\geq 1} \int_{\Omega_i} |\nabla u_i|^2 + \frac{f(x_i)}{h^2} y^2 |u_i|^2$$

$$q_{f/h^2}(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla u|^2 + \frac{f(x)}{h^2} y^2 |u|^2 \quad \text{avec } u = \sum_{i\geq 1} u_i \, .$$

Grâce à l'hypothèse $(**)$ et à l'inégalité $i)$ du lemme, on peut écrire :

$$\frac{|f(x) - f(x_i)|}{h^2} \leq \frac{M_i r_i}{h^2} \leq \varepsilon\sqrt{h}\frac{f(x_i)}{h^2} \, .$$

Cela entraîne sur les formes quadratiques l'inégalité suivante :

$$q_{f/h^2}(u) \leq \; q_1\Big(\bigoplus_{i\geq 1} u_i\Big) + \; \varepsilon\sqrt{h} \sum_{i\geq 1} \int_{\Omega_i} \frac{f(x_i)}{h^2} y^2 |u_i|^2,$$

d'où, par application du principe du minimax :

$$N(\lambda) \geq \frac{1}{1+\varepsilon\sqrt{h}} \sum_{i\geq 1} N_{\sqrt{f(x_i)}/h, r_i}[\lambda] \, .$$

Le calcul dans le cas d'une fonction f constante dans un parallélépipède (Théorème 2.1), puis l'inégalité (ii) du lemme 2.2 permettent d'écrire successivement :

$$N(\lambda) \geq \sum_{i\geq 1} (r_i - a_i)^n \, \nu_{\sqrt{f(x_i)}/h}\big[\lambda - \frac{c}{a_i^2}\big] \, ,$$

$$N(\lambda) \geq \sum_{i\geq 1} (r_i - a_i)^n \, \nu_{\sqrt{f(x_i)}/h}\big[\lambda - \frac{4c\varepsilon}{h} - \frac{c}{\varepsilon}\big] \, .$$

En utilisant le fait que $a_i = \varepsilon r_i$ on obtient la minoration suivante :

$$N(\lambda) \geq (1 - 0(\sqrt{\varepsilon})) \sum_{i\geq 1} r_i^n \, \nu_{\sqrt{f(x_i)}/h}\big[\lambda - c_{\varepsilon,h}\big]$$

avec :

$$c_{\varepsilon,h} = \frac{4c\varepsilon}{h} - \frac{c}{\varepsilon} \, .$$

En utilisant le fait que x_i est quelconque dans $\widetilde{\Omega}_i$ et en écrivant $\lambda = \frac{E}{h^2}$, on obtient :

$$N(\frac{E}{h^2}) \geq (1 - 0(\sqrt{\varepsilon})) \int_{x \notin \widetilde{\Omega}_0} \nu_{\sqrt{f(x)}/h} \big[\frac{E}{h^2} - c_{\varepsilon,h} \big] \; .$$

Cette inégalité ne fait intervenir que $\widetilde{\Omega}_0$ comme élément du pavage , élément qui ne dépend pas de h. On peut à présent faire tendre h vers 0 .

Finalement, le fait que :

$$\int_{\widetilde{\Omega}_0} \nu_{\sqrt{f(x)}/h}(\frac{E}{h^2}) = \; 0\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \nu_{\sqrt{f(x)}/h}(\frac{E}{h^2})\Big) \; \text{ quand } \; h \to 0$$

permet d'aboutir à la minoration finale :

$$N_h(E) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \nu_{\sqrt{f(x)}/h} \big[\frac{E}{h^2} \big] \; .$$

3.2. Majoration de $N_h(E)$.

On utilise cette fois le recouvrement de $\mathbb{R}^{n+1}$ par les $U_i = \widetilde{U}_i \times \mathbb{R}$,où les $\widetilde{U}_i$ sont des cubes centrés sur les $\widetilde{\Omega}_i$ mais de côtés $r_i + a_i$.

On pose : $\widetilde{U}_0 = \{x {\in} \mathbb{R}^n ; d(x, \widetilde{\Omega}_0) \leq \sqrt{\varepsilon}/2\}$. De cette manière on définit : $a_0 = \sqrt{\varepsilon}$. On pose comme précédemment : $U_0 = \widetilde{U}_0 \times \mathbb{R}$.

Comme dans la preuve du théorème 2.1 , on construit alors une famille $\phi_i \in C_o^\infty(\widetilde{U}_i)$ vérifiant : $\sum \phi_i^2 = 1$ et $\forall x \in \widetilde{U}_i$, $|d\phi_i(x)| \leq c/a_i$. $(c = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \# I(x)$, avec $I(x) = \{i \geq 0 ; x \in \widetilde{\Omega_i}\}$. c est une constante qui ne dépend que de n). On définit une injection de $D(q_{f/h^2})$ dans $\bigoplus_{i \geq 0} H_0^1(U_i)$ par : $u \to \bigoplus_{i \geq 0} (u\phi_i)$, et une forme quadratique $q_1(\oplus u_i)$ comme précédemment.

a) Lien entre $\nabla u\phi_i$ et ∇u.

On a :

$$\sum_{i \geq 0} |\nabla u\phi_i|^2 = \sum_{i \geq 0} |\phi_i \nabla u + u(d\phi_i)|^2 = \sum_{i \geq 0} |\phi_i \nabla u|^2 + |u|^2 \sum_{i \geq 0} |d\phi_i|^2 \; .$$

En effet le double produit est nul à cause du choix des ϕ_i :

$$0 = d(\sum_{i \geq 0} \phi_i^2) = 2 \sum_{i \geq 0} \phi_i d\phi_i \; .$$

Par intégration on obtient donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i \geq 0} |\nabla u\phi_i|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i \geq 0} |d\phi_i|^2 |u|^2 \; .$$

De plus, d'après l'inégalité ii) du lemme, on a :

$$\sum_{i\geq 0} |d\phi_i(x)|^2 \leq \sum_{i\in I(x)} |d\phi_i(x)|^2 \leq \frac{c^3}{a_i^2} \leq c^3 c_{\varepsilon,h} ,$$

avec :

$$c_{\varepsilon,h} = 4\varepsilon/h + 1/\varepsilon .$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i\geq 0} |d\phi_i|^2 |u|^2 \leq c^3 c_{\varepsilon,h} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u|^2 .$$

et finalement :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i\geq 0} |\nabla u\phi_i|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla u|^2 + c^3 c_{\varepsilon,h} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u|^2 .$$

b) Minimax pour les nouveaux cubes . — Posons pour simplifier : $u\phi_i = u_i$. D'après ce qui précède on a :

$$q_{f/h^2}(u) \geq \sum_{i\geq 0} \int_{U_i} |\nabla u_i|^2 + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{f(x)}{h^2} y^2 |u|^2 - c^3 c_{\varepsilon,h} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u|^2 .$$

Or : $\sum_{i\geq 0} \phi_i^2 = 1$, donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{f(x)}{h^2} y^2 |u|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i\geq 0} \frac{f(x)}{h^2} y^2 |u|^2 \phi_i^2 = \sum_{i\geq 0} \int_{U_i} \frac{f(x)}{h^2} y^2 |u_i|^2 .$$

$$q_{f/h^2}(u) \geq q_1\Big(\bigoplus_{i\geq 1} u_i\Big) + A_0 - \sum_{i\geq 1} \int_{U_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{h^2} y^2 |u_i|^2 - c^3 c_{\varepsilon,h} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u|^2$$

avec :

$$A_0 = \int_{U_0} |\nabla u_0|^2 + \frac{1}{h^2} \int_{U_0} f(x) y^2 |u_0|^2 .$$

On utilise encore une fois l'hypothèse $(**)$ et le lemme pour les indices i non nuls. Pour le terme concernant l'indice 0, on utilise l'hypothèse $(*)$, qui permet de trouver une constante β strictement positive telle que : $f(x) \geq \beta$ pour tout x dans Ω_0.

On peut alors écrire :

$$\sum_{i\geq 1} \int_{U_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{h^2} y^2 |u|^2 \leq \varepsilon\sqrt{h} \sum_{i\geq 1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{f(x_i)}{h^2} y^2 |u|^2$$

et :

$$A_0 \geq \int_{U_0} |\nabla u_0|^2 + \beta \int_{U_0} \frac{y^2}{h^2} |u_0|^2 .$$

Nous pouvons à présent comparer les deux formes quadratiques :

$$q_{f/h^2}(u) \geq (1-\varepsilon\sqrt{h})q_1\big(\bigoplus_{i\geq 1} u_i\big) - c^3 c_{\varepsilon,h}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u|^2 \; + \int_{U_0} |\nabla u_0|^2 + \int_{U_0} \frac{\beta y^2}{h^2}|u_0|^2 \,.$$

On a alors , en utilisant le principe du minimax :

$$N(\lambda) \leq \sum_{i\geq 1} N_{f(x_i)/h^2, r_i+a_i}\big[\frac{\lambda+K}{1-\varepsilon\sqrt{h}}\big] + N_0$$

avec

$$K = c^3 c_{\varepsilon,h}$$
$$N_0 = N_{\beta/h^2, r_0+a_0}\big[\lambda\big] \,.$$

On obtient donc la majoration suivante :

$$N(\lambda) \leq \sum_{i\geq 1}(r_i+a_i)^n \, \nu_{f(x_i)/h^2}\big[\frac{\lambda+K}{1-\varepsilon\sqrt{h}}\big] + N_0$$

Par des calculs analogues à ceux de la section précédente on peut alors écrire :

$$N(\frac{E}{h^2}) \leq (1+0(\sqrt{\varepsilon}))\Big(\sum_{i\geq 1} r_i^n \, \nu_{f(x_i)/h^2}\big[\frac{E}{h^2}(1+0(h)+0(\varepsilon)+K\big]\Big) + N_0$$

d'où :

$$N(\frac{E}{h^2}) \leq (1+0(\sqrt{\varepsilon}))\int_{x\notin\widetilde{\Omega}_0} \nu_{f(x)/h^2}\big[\frac{E}{h^2}(1+0(h)+0(\varepsilon)) + K_{\varepsilon,h}\big] + N_0 \,.$$

Comme précédemment, on peut faire tendre h vers 0 et conclure, puisque N_0 et $\int_{\widetilde{\Omega}_0} \nu_{f(x)/h^2}\big[\frac{E}{h^2}\big]$ sont alors négligeables devant $\int_{x\notin\widetilde{\Omega}_0} \nu_{f(x)/h^2}\big[\frac{E}{h^2}\big]$:

$$N_h(E) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \nu_{f(x)/h^2}\big[\frac{E}{h^2}\big] \,.$$

Bibliographie

[CV1] Y. Colin de Verdière. — *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Comm.Math.Phys. **105** (1986), 327–335.

[CV2] Y. Colin de Verdière. — *Calcul du spectre de certaines nilvariétés compactes de dimension 3*, Séminaire Grenoble Chambéry **2** (1983-84), exposé 5.

[CV3] Y. Colin de Verdière. — *Minorations de sommes de valeurs propres et conjecture de Polya*, Séminaire Grenoble Chambéry **3** (1984-85), exposé 6.

[DU] A. Dufresnoy. — *Un exemple de champ magnétique dans* $\mathbb{R}^\nu$, Duke Math.J. **50** (1983), 729–734.

[HE] B. Helffer. — *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, Lec. notes in Math.(1336), Springer-Verlag, 1988.

[HE-NO] B. Helffer, J. Nourrigat. — *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Progress in Math.(58), Birkhäuser , 1985.

[KD] D. Khuat-Duy. — Thèse, Paris IX,1992.

[R] D. Robert. — *Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs du type Schrödinger à potentiel dégénéré*, J.Math.pures et appl. **61** (1982), 275–300.

[RO] D. Robert. — *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Math. (Birkhäuser), 1987.

[RS] M. Reed, B. Simon. — *Analysis of Operators IV*, Methods of Math.Physics (Academic Press), 1978.

[T] F. Truc. — *Semi-classical asymptotics for magnetic bottles*, Asymptotic Analysis **15** (1997), 385–395.

– ◊ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(28 mai 1998)