DÉTERMINANTS ET INTÉGRALES DE FRESNEL

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Institut Universitaire de France
et Institut Fourier (UMR CNRS-UJF 5582)

RÉSUMÉ. On présente ici une approche directe pour le calcul des *déterminants* d'opérateurs de type Schrödinger sur un graphe fini. Du calcul de l'*intégrale de Fresnel* associée, on déduit le déterminant. Le calcul des intégrales de Fresnel est grandement facilité par l'utilisation simultanée du théorème de Fubini et d'une version linéaire du calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier. On obtient de façon directe une formule générale exprimant le déterminant en terme des conditions aux bords et du propagateur. Dans le cas d'un opérateur de Sturm-Liouville, le propagateur s'exprime simplement à l'aide de l'application de Poincaré. Le passage au continu permet de retrouver directement la formule de Levit-Smilansky pour le déterminant d'un opérateur de Sturm-Liouville : on introduit et on calcule une régularisation des déterminants d'opérateurs de Sturm-Liouville, appelée régularisation de Feynman, parce que c'est celle qu'on doit utiliser pour calculer la limite semi-classique à partir des intégrales de Feynman. On peut ainsi donner une preuve directe des formules de traces semi-classiques en restant proche de l'intuition des intégrales de Feynman.

1. Introduction

Soit A une matrice réelle $n \times n$, symétrique et non dégénérée de signature σ ($\sigma = n_+ - n_-$ où n_- (resp. n_+) est l'indice de Morse de $q_A(x) = \frac{1}{2} < Ax|x >$ (resp. $-q_A(x)$)). L'intégrale de Fresnel (semi-convergente) associée à A est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i q_A(x)} |dx| = \frac{1}{|\det(A)|^{\frac{1}{2}}} e^{i\sigma\pi/4} .$$

Dans cet article, les calculs d'intégrales de Fresnel sont utilisés comme outil pour calculer des déterminants de matrices symétriques. On particularise le calcul symbolique des opérateurs intégraux de Fourier à ces intégrales. Le calcul des intégrales de Fresnel (et par suite des déterminants) peut alors se faire de façon purement symbolique (une version linéaire exacte du calcul des opérateurs

Date: 11 mai 1998.

Classification mathématique. 05C50, 15A15, 34B24, 35J10, 35J25, 35S30, 58G20.

Mots clés. Déterminant, intégrale de Fresnel, intégrale de Feynman, opérateur de Schrödinger, graphe, Dirichlet to Neumann, lagrangien, symplectique, opérateur intégral de Fourier, réseau électrique, conditions au bord.

intégraux de Fourier de [21], [9], voir aussi [10] et [17]). Cela donne une approche directe aux formules pour les déterminants de *laplaciens* sur les graphes et les variétés *à bord* et leur relation avec la *réponse* (voir [7], [5]) ou l'opérateur *Dirichlet to Neumann* (voir [15], [16], [24]). On peut passer du cas de la dimension finie à celui de la dimension infinie grâce à la définition des intégrales de Feynman par approximations de dimension finie ([13]). On obtient en particulier un calcul simple et direct des déterminants d'opérateurs de Sturm-Liouville discrets ou continus (formule de Levit-Smilansky [24]). Le terme associé à une trajectoire périodique dans la *formule de Gutzwiller* ([18], [1], [2], [6], [4], [12], [27], [19]) s'en déduit facilement.

A chaque fonction d'onde classique (demi-densité) $T = ae^{2\pi i Q(x)}|dx|^{\frac{1}{2}}$ où Q est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel X de dimension n, on associe le *sous-espace lagrangien* L_Q de $X \oplus X'$ graphe de l'application linéaire symétrique $A : X \to X'$ telle que $Q(x) = \frac{1}{2} < Ax|x >$ et la *demi-densité* $\sigma(T) = q^\star(|a||dx|^{\frac{1}{2}}) \in \Omega^{\frac{1}{2}}(L_Q)$ sur L_Q où $q : L \to X$ est la projection canonique. On peut prolonger par continuité (phase stationnaire) cette correspondance aux distributions du type $a\delta(Y)e^{2\pi i Q(y)}|dx|^{\frac{1}{2}}$ où $Y \subset X$ est un sous-espace et Q une forme quadratique sur Y. On se focalisera sur deux opérations de base :

1) Le *produit scalaire* $\int T_1\bar{T}_2$ qui est défini comme une mesure sur $q(L_1 \cap L_2)$ et qui se calcule grâce à un produit scalaire de demi-densités.

2) L'image par un *opérateur intégral* de noyau

$$K(x,y) = ae^{2\pi i Q(x,y)}|dxdy|^{\frac{1}{2}}$$

associé à la relation canonique R_Q de fonction génératrice Q, i.e. dont le graphe est

$$\{(y, \eta = -\frac{\partial Q}{\partial y} \; ; x, \xi = \frac{\partial Q}{\partial x})\} \; .$$

2. Conventions et notations

2.1. Phases. On ne fera que des calculs d'amplitude, les phases seront correctes à un décalage de $k\frac{\pi}{4}$ près. En particulier, on n'insistera pas pour calculer le signe des déterminants.

2.2. Espaces de phases. En général, X, Y désigneront des espaces vectoriels réels de dimension finie ; $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ seront les espaces de phases associés : si X' est le dual de X, $\mathcal{X} = X \oplus X'$. On notera x, y les vecteurs des espaces de configuration, ξ, η ceux de leurs duaux. On notera $\mathcal{L}_X$ la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de $\mathcal{X}$. On notera $|dx|$ une mesure de Lebesgue sur X et $|dxd\xi|$ la mesure de Liouville.

2.3. Demi-densités. Si Z est un espace vectoriel de dimension finie, on note $\Omega^{\frac{1}{2}}(Z)$ le cône réel de dimension 1 des $a|dz|^{\frac{1}{2}}$, $a \geq 0$. Si $L : X \to Z$ est un isomorphisme linéaire et que X (resp. Z) est muni d'une mesure $|dx|$ (resp.

$|dz|$), on peut définir le déterminant de L et on a $L^\star(a|dz|^{\frac{1}{2}}) = a|\det(L)|^{\frac{1}{2}}|dx|^{\frac{1}{2}}$. Le carré d'une demi-densité est une densité (i.e. une mesure de Lebesgue).

2.4. **Distributions.** On note $\mathcal{S}(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$ l'espace des demi-densités $f(x)|dx|^{\frac{1}{2}}$ où f est une fonction de la classe de Schwartz sur X. Le dual est noté $\mathcal{S}'(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$. On a

$$\mathcal{S}(X, \Omega^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{S}'(X, \Omega^{\frac{1}{2}}) \ .$$

On note $T = \delta(0)|dx|^{-\frac{1}{2}}$ la distribution de $\mathcal{S}'$ donnée par $< T \mid f|dx|^{\frac{1}{2}} >= f(0)$.

Plus généralement si $Y \subset X$ est un sous-espace et $X = Y \oplus Z$, on introduit des distributions de Dirac

$$T = \delta(Y)|dy|^{\frac{1}{2}}|dz|^{-\frac{1}{2}}$$

définies par

$$< T \mid f(y, z)|dydz|^{\frac{1}{2}} >= \int_Y f(y, 0)|dy| \ .$$

2.5. **Opérateurs symétriques et formes quadratiques.** Si $A : X \to X'$ est une application linéaire symétrique, on note $q_A(x) = \frac{1}{2} < Ax|x >$ la forme quadratique associée et $\Gamma_A = \{(x, Ax)\} \subset \mathcal{X}$ son graphe.

Définition 1. *Si $Y \subset X$ et $B : Y \to Y'$ est symétrique, le couple (Y, B) sera appelé* opérateur symétrique avec domaine. *On lui associe la forme $q_B(y) = \frac{1}{2} < By|y >$ sur Y et le graphe*

$$\Gamma_{Y,B} = \{(y, \xi) \mid y \in Y, \ \xi_{|Y} = By\} \ .$$

On rappelle le :

Théorème 1. [8] *L'application $\Phi : (Y, B) \to \Gamma_{Y,B}$ est une bijection de l'ensemble des opérateurs symétriques avec domaine sur la grassmannienne lagrangienne $\mathcal{L}_X$.*

3. Distribution de Fresnel et leurs symboles

Soit L un sous-espace lagrangien de $X \oplus X'$, on note q_L (resp. p_L) les projections de L sur X (resp. X'). On associe à chaque L un sous-espace complexe D_L de dimension 1 de $\mathcal{S}'(E, \Omega^{\frac{1}{2}})$. Si $L = \{(x, Ax)|x \in X\}$, $D_L = \{ae^{2\pi i q_A(x)}|dx|^{\frac{1}{2}} \mid a \in \mathbb{C}\}$.

Si $L = 0 \oplus X'$,

$$D_L = \{a\delta(0)|dx|^{-\frac{1}{2}} \mid a \in \mathbb{C}\} \ .$$

Si $L = \Gamma_{Y,B}$,

$$D_L = \{ae^{2i\pi q_B(y)}|dy|^{\frac{1}{2}}|dz|^{-\frac{1}{2}} \mid a \in \mathbb{C}\} \ .$$

La collection des D_L est un fibré vectoriel de rang 1 sur la grassmannienne lagrangienne. Pour le voir au voisinage de (Y, B), on utilise une transformée de Fourier partielle par rapport à la variable z.

On va définir, pour tout $T \in D_L$, son symbole $\sigma(T) \in \Omega^{\frac{1}{2}}(L)$. On aura

$$\sigma(\lambda T) = |\lambda| \sigma(T) \ .$$

Définition 2. *(Voir [30], [10]) A la distribution $T = a e^{2\pi i q_A(x)} |dx|^{\frac{1}{2}}$ de D_{Γ_A} on associe son* symbole*, la demi-densité $\sigma(T)$ sur Γ_A définie par :*

$$\sigma(T) = q^{\star}_{\Gamma_A}(|a||dx|^{\frac{1}{2}}) \ .$$

Si $T = a e^{2i\pi q_B(y)} |dy|^{\frac{1}{2}} |dz|^{-\frac{1}{2}}$, et $\Pi : L_{Y,B} \to Y \oplus Z'$ est la projection canonique, $\sigma(T) = \Pi^{\star}(|a||dy|^{\frac{1}{2}} |d\zeta|^{\frac{1}{2}})$ où $|d\zeta|$ est telle que $|dz d\zeta|$ est la mesure de Liouville sur $\mathcal{Z}$.

La méthode de la phase stationnaire montre que

$$T_\varepsilon = |(\det(Q/\varepsilon)|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i Q(x)/\varepsilon} |dx|^{\frac{1}{2}} \to e^{ik\pi/4} \delta(0) |dx|^{-\frac{1}{2}} \ ,$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \Omega^{\frac{1}{2}})$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Or

$$\sigma(T_\varepsilon) = p^{\star}_{L_\varepsilon}(|d\xi|^{\frac{1}{2}}) \ ,$$

d'où l'on déduit la continuité du calcul symbolique.

L'application $T \to \sigma(T)$ est une application continue fibrée du fibré $(D_L \to \mathcal{L})$ sur le fibré $(\Omega^{\frac{1}{2}}(L) \to \mathcal{L})$.

4. Le produit scalaire

4.1. **Produit de demi-densités.** Soient L_1 et L_2 deux espaces lagrangiens et $\omega_i \in \Omega^{\frac{1}{2}}(L_i)$, $i = 1, 2$, on leur associe une densité $\omega_1 \star \omega_2$ sur $L_1 \cap L_2$. Si $L_1 \cap L_2 = 0$, $L_1 \oplus L_2 = \mathcal{X}$ et on a ainsi une demi-densité $\omega_1 \times \omega_2$ sur $\mathcal{X}$. On pose

$$\omega_1 \star \omega_2 = \frac{\omega_1 \times \omega_2}{|dx d\xi|^{\frac{1}{2}}} \ ,$$

qui est un élément de $\Omega^1(0)$ qui s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}$.

Si $L_1 \cap L_2 = K$, soit $W = K^o/K$ l'espace symplectique réduit associé et M_i les images des L_i par la réduction. On a les isomorphismes $L_i = K \oplus M_i$,

$$\Omega^{\frac{1}{2}}(L_i) = \Omega^{\frac{1}{2}}(K) \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}(M_i)$$

ce qui permet de se ramener au cas précédent : si $\omega_i = k_i \otimes \mu_i$, on pose $\omega_1 \star \omega_2 = (k_1 k_2) \otimes (\mu_1 \star \mu_2)$ où le produit $k_1 k_2$ est le produit de 2 demi-densités dans K qui est une densité sur K.

Proposition 1. *Supposons X muni d'une mesure de Lebesgue $|dx|$, on peut alors définir le déterminant d'une application linéaire de X dans X', car X' est muni d'une mesure de Lebesgue $|d\xi|$ associée à $|dx|$, on demande à $|dx d\xi|$ d'être la mesure de Liouville.*

Si $L_1 \cap L_2 = 0$ et que $L_i = \{(x, A_i x)\}$, le produit $p = q^\star_{L_1}(|dx|^{\frac{1}{2}}) \star q^\star_{L_2}(|dx|^{\frac{1}{2}})$ vaut

$$p = \frac{1}{|\det(A_1 - A_2)|^{\frac{1}{2}}} \ .$$

Preuve.–

On doit calculer le déterminant de l'application

$$C : X \oplus X \to X \oplus X'$$

définie par

$$C(x, y) = (x + y, A_1 x + A_2 y) \ .$$

Il est clair que

$$|\det(C)| = |\det(A_1 - A_2)|,$$

d'où l'on déduit le résultat.

□

4.2. **Produit scalaire de distributions.** Si on souhaite calculer $\int T_1 \bar{T}_2$, on obtient une intégrale de Fresnel si $L_1 \cap L_2 = 0$ dont la valeur absolue est $\sigma(T_1) \star \sigma(T_2)$.

En général cette intégrale n'est calculable que transversalement à $Z = \pi(L_1 \cap L_2)$ et donne lieu à une mesure sur Z.

Théorème 2. *Si $f : x \to z$ est une projection linéaire de X sur Z et $\varphi \in C^\infty_o(Z)$, $\varphi \geq 0$, on a :*

$$|\int_X T_1 \bar{T}_2 \varphi(f(x))| = \int_Z \varphi(z) d\mu(z)$$

où $d\mu = \sigma(T_1) \star \sigma(T_2)$.

Preuve.–

Soit, pour $j = 1, 2$, $T_j = a_j e^{2\pi i Q_j(x)} |dx|^{\frac{1}{2}}$ et supposons $Q_j(x) = \frac{1}{2} < A_j x | x >$ avec $\ker(A_1 - A_2) = 0$, on a :

$$|\int T_1 \bar{T}_2| = \frac{|a_1 \bar{a}_2|}{|\det(A_1 - A_2)|^{\frac{1}{2}}} \ .$$

C'est exactement le produit $\sigma(T_1) \star \sigma(T_2)$ d'après la proposition 1. Le cas général s'obtient par continuité du calcul symbolique et par produits tensoriels.

□

5. Opérateurs unitaires

Soit $\mathcal{X} = X \oplus X'$ et $\mathcal{Y} = Y \oplus Y'$.

Définition 3. *Soit $\chi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un isomorphisme canonique. Le graphe de χ est muni d'une demi-densité canonique, notée ω_χ transportée de celle de $\mathcal{X}$ ou de $\mathcal{Y}$.*

Si la projection canonique $\pi : \Gamma_\chi \to X \oplus Y$ est un isomorphisme, la demi-densité canonique ω_χ s'exprime en terme de x et y par

$$\omega_\chi = \pi^\star(|\theta|^{-\frac{1}{2}}|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}})$$

où θ est le déterminant des applications exponentielles

$$\alpha : (x, \xi) \to (x, y) \text{ ou } \beta : (y, \eta) \to (y, x) \ ,$$

définies par la condition que si $\chi(x, \xi) = (y, \eta)$

$$\alpha(x, \xi) = (x, y) \ .$$

Définition 4. *Soit χ la transformation canonique de fonction génératrice $Q(x, y)$, i.e.*

$$\chi(y, -\frac{\partial Q}{\partial y}) = (x, \frac{\partial Q}{\partial x}) \ .$$

*L'*opérateur unitaire *associé à χ est l'opérateur dont le noyau (au sens de l'intégrale de Fresnel) est :*

$$K_\chi(x, y)|dxdy|^{\frac{1}{2}} = |\theta|^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i Q(x,y}|dxdy|^{\frac{1}{2}} \ .$$

On a alors le :

Théorème 3. *Si $T_0|dy|^{\frac{1}{2}} \in D_{L_0}$ et $\sigma(T_0) = \omega_0$,*

$$\int K_\chi(x, y)T_0(y)|dy||dx|^{\frac{1}{2}} = T_1(x)|dx|^{\frac{1}{2}}$$

où $T_1(x)|dx|^{\frac{1}{2}} \in D_{\chi(L_0)}$ et $\sigma(T_1(x)|dx|^{\frac{1}{2}}) = \chi^\star\big(\sigma(T_0(y)|dy|^{\frac{1}{2}})\big)$.

Corollaire 1.

$$\int K_{\chi_1}(x, y)K_{\chi_2}(y, z)|dy| = K_{\chi_1 \circ \chi_2}(x, z) \ ,$$

à une phase près.

Preuve.–

Soit

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} < Ax|x > + < Bx|y > + \frac{1}{2} < Cy|y > ,$$

on a alors :

$$\theta = |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} \ .$$

On doit évaluer

$$I = \int a\theta^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i(Q(x,y)+Q_0(y))}|dy||dx|^{\frac{1}{2}} \ .$$

Par la phase stationnaire, on trouve :

$$I = \theta^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i Q_1(x)} |\det(C + A_0)|^{-\frac{1}{2}} |dx|^{\frac{1}{2}} \ .$$

La demi-densité

$$\theta^{-\frac{1}{2}} |\det(C + A_0)|^{-\frac{1}{2}} |dx|^{\frac{1}{2}}$$

est bien l'image de $a|dy|^{\frac{1}{2}}$ par $y \to x = -B^{-1}(A_0 + C)y$ qui est l'application résultant des flèches évidentes :

$$X \to L_0 \xrightarrow{\chi} L_1 \to X \ .$$

□

6. Problèmes à bord

On suppose maintenant que $X = X_b \oplus X_i$ et on écrit $x = (y, z)$. On suppose X_i muni d'une mesure de Lebesgue et X_b d'une structure euclidienne. On se donne une forme quadratique $Q = Q(y, z)$ sur X. On pose

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = Az + Cy, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = C^\star z + By \ .$$

On supposera (bien que ce ne soit pas nécessaire) que A est inversible.

Définition 5. *L'application* réponse $R_Q : X_b \to X_b'$, *est l'application linéaire symétrique définie par $R_Q(y) = C^\star z + By$ où z vérifie $Az + Cy = 0$.*

Si $L = L_Q \subset \mathcal{X}$, $R = L_{R_Q}$ est la réduite symplectique de L par rapport à l'espace coisotrope $\zeta = 0$. Dans le langage de Hörmander ([10], [21]*) Q est une* fonction phase *de R. Dans le langage des EDP, R_Q est l'*application Dirichlet to Neumann*(voir* [29]*). Dans le langage des réseaux électriques (*[7]*), R_Q est la* réponse.

Définition 6. *On définit le* propagateur *associé à Q comme la distribution $\mathcal{P} \in D_R$ définie par l'intégrale de Fresnel*

$$\mathcal{P} = \left(\int_{X_i} e^{2i\pi Q(y,z)} |dz| \right) |dy|^{\frac{1}{2}} \ ,$$

et son symbole $\sigma(\mathcal{P}) \in \Omega^{\frac{1}{2}}(R)$.

Soit maintenant (W, B) un opérateur symétrique sur $W \subset X_b$. On lui associe la forme quadratique de domaine $X_i \oplus W$ définie par : $Q_B(y, z) = Q(y, z) + q_B(y)$. Comme $X_i \oplus W$ est muni de la mesure de Lebesgue $|dx_i| \otimes |dw|$ ($|dw|$ est la mesure euclidienne), on peut définir le déterminant de la forme quadratique Q_B.

Définition 7. *La distribution $\mathcal{B} \in D_{W,B}$ appelée* distribution limite *est définie par :*

$$\mathcal{B}(y) = e^{-2i\pi q_B(w)}|dw|^{\frac{1}{2}}|dv|^{-\frac{1}{2}} \ ,$$

où $y = (v, w) \in Y$.

On s'intéresse au calcul de $|\det(Q_B)|$; on aimerait en particulier connaitre sa dépendance par rapport à B.

Avec les notations précédentes, on a :

Théorème 4. *Si $Q_B = Q + q_B$ est non dégénérée,*

$$|\det(Q_B)| = |\sigma(\mathcal{P}) \star \sigma(\mathcal{B})|^{-2}$$

est le produit $\star$ des symboles du propagateur et de la distribution limite. On convient dans cette formule et dans la suite de poser $\sigma(\mathcal{P}) \star \sigma(\mathcal{B}) = \infty$ si les 2 variétés lagrangiennes R et $L_{W,B}$ ne se coupent pas transversalement.

Preuve.–

En effet

$$I = |\det(Q_B)|^{-\frac{1}{2}} = \int e^{2\pi i(Q(y,z)+q_B(y))}|dy||dz|$$

et cette intégrale I se calcule en intégrant d'abord par rapport à z, ce qui donne

$$I =< \mathcal{P}|\mathcal{B} >$$

et donc I est le produit $\star$ des symboles.

□

L'objectif de ce qui suit est de calculer le symbole du propagateur dans un contexte géométrique (graphes ou opérateurs de Sturm-Liouville).

7. Déterminants d'opérateurs différentiels sur un graphe fini

Le formalisme précédent peut s'appliquer au cas d'un graphe fini $G = (V, E)$; V désigne l'ensemble (fini) des sommets de G et E l'ensemble (fini) des arêtes (paires de sommets). On introduit un espace euclidien $X_G = \oplus_{j \in V} X_j$ où les X_j sont des espaces euclidiens de dimension n que l'on identifie une fois pour toutes à un unique espace euclidien X_1. Soit $V_0 \subset V$ (le bord de G) et $V_1 = V \setminus V_0$. On note E_1 l'ensemble des arêtes dont au moins un des sommets est dans V_1. On pose $X_i = \oplus_{j \in V_1} X_j$ et $X_b = \oplus_{j \in V_0} X_j$. On note z (resp. y) le vecteur générique de X_i (resp. X_b) et $x = (x_i) = (y, z)$.

7.1. **Le propagateur.**

Définition 8. *La forme quadratique*

$$Q(x) = \sum_{\{i,j\}\in E_1} c_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{j\in V} q_j(x_j)$$

où les q_j sont des formes quadratiques sur X_j et les $c_{i,j}$ des formes bilinéaires non dégénérées sur $X_i \times X_j$ est dite subordonnée à G.

On définit alors comme au paragraphe 6 la réponse R (voir aussi [7] et [5]) et le propagateur $\mathcal{P} \in D_R$ par

$$\mathcal{P} = \left(\int_{X_i} e^{2i\pi Q(y,z)} |dz| \right) |dy|^{\frac{1}{2}} \ .$$

On s'intéressera plus bas aux calculs de propagateurs, mais on peut déjà noter la formule de composition suivante. Si G' et G" sont deux graphes disjoints et qu'on a identifié une partie W du bord de G' à une partie du bord de G" : $V'_0 = W'_0 \cup W$, $V"_0 = W"_0 \cup W$. On a alors 3 propagateurs naturels $\mathcal{P}'(y'_0, z)$, $\mathcal{P}"(z, y"_0)$ et $\mathcal{P}(y', y")$ qui sont reliés par

$$\mathcal{P}(y', y") = \int_{\mathbb{R}^W} \mathcal{P}'(y', w)\mathcal{P}"(w, y")|dw| \ . \tag{1}$$

7.2. **Les distributions limites.** Donnons quelques exemples de distributions limites.

Exemple 1 : problème de Dirichlet.

On prend $W = \{0\}$ et $\mathcal{B} = \delta(0)|dy|^{-\frac{1}{2}}$.

Exemple 2 : problème périodique.

Soit $V_0 = A \cup B$ une partition du bord en 2 sous-ensembles de mêmes cardinaux et $\sigma : A \to B$ une bijection. On prend $W = \{y = (\cdots, y_a, \cdots ; \cdots, y_b, \cdots) \mid \forall a \in A,\ y_{\sigma(a)} = y_a\}$. Si $X_b = W \oplus W'$ est une décomposition orthogonale, on pose

$$\mathcal{B} = \delta(W)|dw'|^{-\frac{1}{2}}|dw|^{\frac{1}{2}} \ .$$

Exemple 3 : problème de Neumann.

On prend $W = X_b$ et $\mathcal{B} = 0$.

7.3. **Les déterminants.** Le déterminant de Q_B se calcule à partir du propagateur et de la distribution $\mathcal{B}$ comme dans le théorème 4.

Le but est de calculer exactement les propagateurs, mais on a en tout cas une formule relative :

Proposition 2. *Supposons $Q(y, z)$ donnée ; soient $\omega_0 \in \Omega^{\frac{1}{2}}(R) \setminus 0$, et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux distributions limites, on a :*

$$\frac{|\det(Q_1)|}{|\det(Q_2)|} = \left| \frac{\omega_0 \star \sigma(\mathcal{B}_1)}{\omega_0 \star \sigma(\mathcal{B}_2)} \right|^{-2} \ . \tag{2}$$

8. Propagateurs d'opérateurs de Sturm-liouville discrets

8.1. Le cas d'un graphe linéaire. On considère le cas où $G = P_N$ est un chemin à $N+1$ sommets : $V = \{0, 1, \cdots, N\}$, $V_0 = \{0, N\}$ et $E = \{\{i, i+1\} | i = 0, \cdots, N-1\}$. Soit

$$Q(x_0, \cdots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{N} q_i(x_i) \ ,$$

avec $q_i(x) = \frac{1}{2} < A_i x | x >$ et $c_i(x_i, x_{i+1}) =< x_i | C_i x_{i+1} >=< C_i^\star x_i | x_{i+1} >$. On pose $\gamma_i = |\det(c_i)| > 0$.

8.2. Réponse et application de Poincaré. La réponse R est liée de façon simple à l'application de Poincaré. On définit pour $0 \leq i \leq N-1$

$$\chi_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{X}_{i+1}$$

comme la transformation canonique de fonction génératrice $S_i(x_i, x_{i+1}) = q_i(x_i) + c_i(x_i, x_{i+1})$. On a donc, pour $0 \leq i \leq N-1$:

$$\chi_i(x_i, -A_i x_i - C_i x_{i+1}) = (x_{i+1}, C_i^\star x_i) \ .$$

Soit $\chi = \chi_{N-1} \circ \cdots \circ \chi_0 : \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_N$ la transformation canonique (application de Poincaré) qui, à $(x_0, -A_0 x_0 - C_0 x_1)$, associe $(x_N, C_{N-1}^\star x_{N-1} + A_N x_N)$ où x_i satisfait pour $1 \leq i \leq N-1$:

$$C_{i-1}^\star x_{i-1} + A_i x_i + C_i x_{i+1} = 0 \ . \tag{3}$$

La réponse R est l'ensemble des

$$(x_0, x_N; A_0 x_0 + C_0 x_1, C_{N-1}^\star x_{N-1} + A_N x_N)$$

tels que (x_i) satisfait l'équation (3) et aussi l'ensemble des

$$(x_0, x_N; -\xi_0, \xi_N)$$

tels que

$$\big((x_0, \xi_0)(x_N, \xi_N)\big)$$

soit dans le graphe de χ.

8.3. Le propagateur de Sturm-Liouville. L'énoncé qui suit est un des principaux résultat de cet article. Il a comme conséquence, via le théorème 4, une version discrète du théorème de Levit-Smilansky [24].

Théorème 5. *Le propagateur de Sturm-Liouville a pour symbole*

$$\sigma(\mathcal{P}) = \prod_{i=0}^{N-1} |\gamma_i|^{-\frac{1}{2}} \omega_{can} \ , \tag{4}$$

où ω_{can} est la demi-densité canonique sur le graphe de l'application de Poincaré χ.

Preuve.–

Pour $0 \leq j \leq N-1$ les opérateurs de noyaux

$$\mathcal{P}_j(x_j, x_{j+1}) = \gamma_j^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi\left(q_j(x_j)+c_j(x_j,x_{j+1})\right)} |dx_j dx_{j+1}|^{\frac{1}{2}}$$

sont unitaires et l'opérateur $\mathcal{R}$ est $|\prod \gamma_j|^{-\frac{1}{2}}$ fois le composé des unitaires $\mathcal{P}_j$. Le théorème résulte donc du théorème 3.

□

Corollaire 2. *Le déterminant de l'opérateur de Sturm-Liouville est donné par :*

$$|\det(Q_{W,B})| = |\prod_{j=0}^{N-1} \gamma_j| \frac{1}{|\omega_\chi \star \sigma(\mathcal{B})|^2} \ . \tag{5}$$

8.4. **Le cas des arbres.** On se place dans le cas où le graphe $T = (V, E)$ est un arbre et $V_0 = \{1, \cdots, p\}$ est l'ensemble des sommets de degré 1. Cela contient aussi le cas d'un graphe arbitraire en prenant pour G un arbre maximal. On pose

$$Q(x) = \sum_{\{i,j\}\in E} c_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{j\in V} q_j(x_j) \ .$$

Théorème 6. *Soit $\mathcal{P} = ae^{2\pi i R(y)}|dy|^{\frac{1}{2}}$ le propagateur associé à Q avec*

$$R(y) = \sum_{1\leq i<j\leq p} r_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{1\leq j\leq p} t_j(x_j) \ ,$$

et $\gamma_{i,j} = |\det(c_{i,j})|$. On a, pour toute paire $i_0, j_0 \in V_0$, $i_0 \neq j_0$:

$$a = \left(\prod_{k=0}^{N-1} |\gamma_{i_k,i_{k+1}}|^{-\frac{1}{2}}\right) |\det(r_{i,j})|^{\frac{1}{2}} \ ,$$

où $\Gamma = \{i_0 = i, i_1, \cdots, i_N = j\}$ est le chemin de i_0 à j_0 dans l'arbre T.

Preuve.–

On fait le calcul pour les $x_j = 0$ sauf x_{i_0} et x_{j_0}. On se ramène au cas de Sturm-Liouville en calculant d'abord l'intégrale par rapport aux sommets non situés sur le chemin Γ de i_0 à j_0.

□

8.5. **Le cas des cylindres.** C'est le cas d'un produit cartésien d'un graphe Γ par le chemin P_N. On se ramène au cas du chemin. Cela permet de traiter le cas des rectangles et des tores.

8.6. **Transformations élémentaires des graphes.** Il s'agit de contrôler l'action au niveau du propagateur des transformations électriques élémentaires : série, parallèle, étoile-triangle (voir [5]). L'idée est que ces transformations n'agissent pas sur la réponse, mais uniquement sur l'amplitude du propagateur suivant des formules simples.

9. Déterminants régularisés

9.1. **Opérateurs de Sturm-Liouville.** Soit $A : [0,T] \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ une application continue et $S = \frac{1}{2}\big(-\frac{d^2}{dt^2} + A(t)\big)$ l'opérateur de Sturm-Liouville vectoriel formellement symétrique associé. L'application de Poincaré (ou résolvante) χ est le difféomorphisme canonique de $\mathcal{X}_0 = T^\star\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{X}_T = T^\star\mathbb{R}^n$ défini par

$$\chi\big(x(0), x'(0)\big) = \big(x(T), x'(T)\big)$$

où $x(t)$ est solution de $Sx = 0$. Une extension autoadjointe $S_{W,B}$ de S est donnée par une forme quadratique avec domaine (W,B) sur $X_0 \oplus X_T$. On pose $l = \dim(W)$.

$S_{W,B}$ est l'extension de Friedrichs de la forme quadratique

$$Q_{W,B}(x) = \frac{1}{2}\int_0^T (|x'|^2 + < A(t)x(t)|x(t) >)dt + B(x(0), x(T))$$

définie sur $H^1([0,T], \mathbb{R}^n) \cap \{(x(0), x(T)) \in W\} = H^1_W$.

Le spectre de $S_{W,B}$ est de la forme

$$\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_k \le \cdots$$

avec $\lambda_k \sim Ck^2$.

9.2. **Déterminants régularisés.** On veut donner un sens au déterminant régularisé de $S_{W,B}$. La méthode la plus standard est la ζ-régularisation (voir [28]). Elle n'est pas bien adaptée ici. On va considérer une régularisation à partir d'une discrétisation par éléments finis qui correspond exactement à la définition de l'intégrale de Feynman (voir [13]) et appelée *régularisation de Feynman.*

On définit une discrétisation $Q^N_{W,B}$ de $Q_{W,B}$. Soit $N \ge 1$ donné, $\delta = \frac{T}{N}$ et, pour $0 \le i \le N$, $t_i = \delta i$, on pose

$$Q^N_{W,B}(x_0, \cdots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\|x_{i+1} - x_i\|^2}{2\delta^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} < A(t_i)x_i|x_i > + \frac{1}{\delta}B(x_0, x_N)\ ,$$

avec $(x_0, x_T) \in W$. La forme $Q^N_{W,B}$ s'identifie à la restriction de forme $Q_{W,B}$ à l'espace A_N des fonctions continues affines par morceaux sur la subdivision régulière de $[0,T]$ en N intervalles (modulo renormalisation pour que la norme L^2 corresponde à la norme euclidienne sur $\oplus X_i$).

Il est facile de montrer que les valeurs propres de $Q^N_{W,B}$ convergent simplement (et uniformément en A si la norme L^∞ de A reste bornée) vers celles de $S_{W,B}$; c'est une conséquence du fait que tout sous-espace de dimension finie de H^1_W est approchable à ε près au sens H^1 par un A_N et du minimax.

On a le :

Théorème 7. *Si d_N est le déterminant de $Q^N_{W,B}$, $\delta^{l+2nN} d_N$ a une limite* $\det_f(S_{W,B})$ *quand $N \to \infty$. On dit que* $\det_f$ *est le* déterminant régularisé au sens de Feynman *de $S_{W,B}$.*

On a :

$$\det{}_f(S_{W,B}) = |\omega_\chi \star \sigma(\mathcal{B})|^{-2} ,$$

où χ est l'application de Poincaré.

Corollaire 3. *Si*

(6) $$\chi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ,$$

on a, pour les problèmes de Dirichlet, Neumann et périodique, les formules :

(7)
$$|\det{}_f(S_{dir})| = |\det(B)| , \ |\det{}_f(S_{neu})| = |\det(C)| , \ |\det{}_f(S_{per})| = |\det(\mathrm{Id} - \chi)| .$$

Preuve.–

On applique le corollaire 2 à $\delta Q^N_{W,B}$ avec $c_i(x_i, x_{i+1}) = -\frac{x_i x_{i+1}}{\delta}$. On obtient ainsi :

$$d_N = \delta^{-(l+2nN)} |\omega_{\chi_N} \star \sigma(\mathcal{B})|^{-2}$$

où χ_N est l'application de Poincaré pour δQ^N. Il suffit de remarquer que $\chi_N \to \chi$ lorsque N tend vers l'infini ; en effet l'application χ_N est définie par composition des χ_j définies par :

$$\chi_j(x_j, p_j) = (x_j + \delta p_j + \delta^2 A(t_j) x_j , \ p_j + \delta A(t_j) x_j)$$

et correspond donc à une discrétisation de type Euler de

$$\frac{dx}{dt} = p, \ \frac{dp}{dt} = A(t) x .$$

□

Problème : comparer la régularisation de Feynman à la ζ-régularisation.

Théorème 8. *Soient S_1 et S_2 2 opérateurs de Sturm-Liouville sur $[0, T]$ avec des conditions au bord (W, B). On a*

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(S_1)}{\lambda_k(S_2)} \right| = \left| \frac{\det_f(S_1)}{\det_f(S_2)} \right| .$$

On aura besoin du :

Lemme 1. *Supposons $A_j(t)$, $j = 1, 2$ et (W, B_j) fixés, si $\lambda^j_{k,N}$, $k = 1, \cdots, n_N$ sont les valeurs propres des formes quadratiques $\delta Q^{N,j}_{W,B_j}$ discrétisées de S^j à l'ordre N, il existe $\alpha > 0$ et β tels que, uniformément en N, on ait :*

$$\lambda^j_{k,N} \geq \alpha k^2 + \beta .$$

Et on a :

$$\prod_{k=m_o+1}^{n_N} \frac{\lambda^1_{k,N}}{\lambda^2_{k,N}} = 1 + O(\frac{1}{m_o}) .$$

Preuve.–

(du lemme 1) Les formes $Q^{N,j}_{W,B_j}$ peuvent s'obtenir par restriction à $x_{-1}=0$ de formes $\tilde{Q}^N$ sur le cercle $x_{N+1}=x_{-1}$ qui s'écrivent

$$\tilde{Q}^N = \frac{1}{2\delta^2}\sum_{i=-1}^{N} \|x_i - x_{i+1}\|^2 + R^{N,j}(x) + \frac{1}{\delta}B_j(x_0, x_N) \ ,$$

où les $R^{N,j}$ sont uniformément bornées. L'estimation provient alors du calcul exact du spectre de $\sum_{i=-1}^{N}|x_i - x_{i+1}|^2$ sur le cycle à $N+2$ points.

La deuxième estimation provient du minimax qui implique

$$|\lambda^1_{k,N} - \lambda^2_{k,N}| = O(1) \ .$$

□

Preuve.–

(du théorème 8)

$$P = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k(S^1)}{\lambda_k(S^2)} = \left(\prod_{k=1}^{m_o}\frac{\lambda_k(S^1)}{\lambda_k(S^2)}\right)\left(1+O(\frac{1}{m_o})\right) \ .$$

Puis par la convergence simple des valeurs propres des $Q^{N,j}_{W,B}$ vers celles de S^j :

$$P = \left(\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{m_o}\frac{\lambda^1_{k,N}}{\lambda^2_{k,N}}\right)\left(1+O(\frac{1}{m_o})\right) \ .$$

Et d'après le lemme 1 :

$$P = \left(\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{n_N}\frac{\lambda^1_{k,N}}{\lambda^2_{k,N}}\right)\left(1+O(\frac{1}{m_o})\right) \ .$$

Et donc :

$$|P| = \lim_{N\to\infty}\left|\frac{d^1_N}{d^2_N}\right|\left(1+O(\frac{1}{m_o})\right) \ ,$$

et par définition de $\det_f(S^j)$:

$$|P| = \left|\frac{\det_f(S^1)}{\det_f(S^2)}\right|\left(1+O(\frac{1}{m_o})\right) \ .$$

La preuve se termine en prenant la limite quand m_o tend vers l'infini.

□

REFERENCES

[1] R. Balian, C. Bloch, *Distribution of Eigenfrequencies for the Wave Equation in a finite Domain I, II et III,* Ann. of Physics, 60,64,69,(1970, 1971, 1972), 401, 271,76.

[2] R. Balian, C. Bloch, *Solution of the Schrödinger Equation in Terms of classical Paths,* Ann. Phys., 85 (1974), 514-....

[3] D. Burghelea, L. Friedlander et T. Kappeler. *Meyer-Vietoris type Formula for Determinants of elliptic differential Operators,* J. Funct. Anal. 107, No.1, 34-65 (1992).

[4] J. Chazarain, *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes,* Invent. Math. 24 1974 65-82

[5] Yves Colin de Verdière, I. Gitler, D. Vertigan. *Réseaux électriques planaires II,* Comment. Math. Helvetici, 71:144-167, 1996.

[6] Y. Colin de Verdière, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I et II,* Compositio Mathematica, 27, 1973, 80–106 et 159–184.

[7] Yves Colin de Verdière, *Réseaux électriques planaires I,* Commentarii Math. Helv., 69:351-374, 1994.

[8] Yves Colin de Verdière, *Multiplicities of Eigenvalues and Tree-width of Graphs,* J. Comb. Theory, ser. B (à paraitre).

[9] J. Duistermaat, L. Hörmander, *Fourier Integral Operators II,* Acta Math. 128, 1972, 183-269.

[10] J. Duistermaat, *Fourier Integral Operators.* Birkhäuser (1996).

[11] J. Duistermaat, *Oscillatory Integrals,....,* Comm. Pure Appl. Math., 27, 1974, 207-281.

[12] J. Duistermaat, V. Guillemin, *The Spectrum of Positiv Elliptic Operators and Periodic Geodesics,* Invent. Math., 29, 1975, 39-79.

[13] R. Feynman, A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals.* McGraw-Hill (New-York), 1965.

[14] G. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space.* Princeton, 1989.

[15] R. Forman, *Determinants, Finite-Difference Operators and Boundary Value Problems,* Commun. Math. Phys 147, 485-526 (1992).

[16] R. Forman, *Functional Determinants and Geometry,* Invent. Math. 88, 447-493 (1987).

[17] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics.* Cambrige University Press, 1984.

[18] M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics.* Springer (New-York), 1990.

[19] M.J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin, *Chaos and Quantum Physics (école des Houches 1989).* North-Holland, 1991.

[20] D. Hejhal, *The Selberg Trace Formula and the Riemann ζ Function,* Duke Math. J., 43, 1976, 441-482.

[21] L. Hörmander, *Fourier Integral Operators I,* Acta Math., 127, 1971, 79-183.

[22] L. Landau, E. Lifshitz, *Mécanique quantique non relativiste.* Mir (Moscou), 1974.

[23] J. Leray, *Analyse lagrangienne et mécanique quantique.* IRMA (Strasbourg), 1978.

[24] S. Levit, U. Smilansky, *A Theorem on infinite Products of Eigenvalues of Sturm Type Operators,* Proc. AMS, 65, 1977, 299-303.

[25] G. Mackey, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* Benjamin, 1963.

[26] V. Maslov, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques.* Dunod, Gauthiers-Villars, Paris 1972.

[27] E. Meinrenken, *Semi-classical principal Symbols and Gutzwiller's Trace Formula,* Rep. Math. Phys., 31, 1992, 279-295.

[28] D.B. Ray et I.M. Singer. *R-torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds,* Advances Math. 7, 145-210 (1971).

[29] J. Sylvester,G. Uhlmann. *A global uniqueness Theorem for an inverse boundary Value Problem,* Ann. Math., 125, 153-169 (1987).

[30] A. Weinstein, *Lectures on Symplectic Manifolds.* Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics. No.29.: American Mathematical Society. (1977).

Institut Fourier, BP 74, F-38402-St Martin d'Hères Cedex,
E-mail address: yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr