Mouvement Brownien
et
Formule de Tanaka en Analyse

Lucien Chevalier

Mots-clés : Formule de Tanaka, Densité de l'intégrale d'aire, Mouvement brownien, Temps local.

Classification : 42B25, 42B30, 60G46, 60J65.

1. — Introduction

Nous avons montré dans [5] qu'il était possible d'obtenir, dans le cadre de l'analyse harmonique dans $\mathbb{R}^n$, une écriture non triviale et utile de la valeur absolue d'une fonction, inspirée de la célèbre "formule de Tanaka" de la théorie des martingales, et susceptible d'avoir un certain nombre d'applications intéressantes. Les méthodes utilisées dans [5] relèvent de l'analyse réelle, et plus précisément sont basées sur la théorie de Calderón-Zygmund. Le fait que la formule de Tanaka originale concerne les martingales, et les relations bien connues entre les martingales browniennes et l'analyse harmonique, laissaient évidemment prévoir la possibilité d'obtenir de manière purement probabiliste les principaux résultats de [5]. Ces nouvelles démonstrations, entièrement indépendantes de celles de [5], font l'objet du présent article. Elles nous permettent d'obtenir, pour certaines constantes, des résultats indépendants de la dimension, ce qui n'était pas le cas dans notre article précédent.

Etant donné une martingale M, la formule de Tanaka donne, comme chacun sait, la décomposition de Doob-Meyer de la sous-martingale $|M|$. Plus précisément, elle fournit une égalité de la forme

$$|M| = \tilde{M} + L^0 \ ,$$

où $\tilde{M}$ est une intégrale stochastique explicite par rapport à la martingale initiale M et le processus croissant L^0 est le temps local en 0 associé à M. Dans le cas où M est le mouvement brownien sur la droite, cette égalité figure, sans être mentionnée explicitement, dans l'article [17] de H. Tanaka (dont elle n'est pas le but principal) [1]. Elle a été généralisée à plusieurs reprises, notamment dans [15] et [13].

Bien que le temps local soit connu depuis fort longtemps et toujours très étudié, ce n'est qu'au début des années 80 qu'on a vu apparaître une notion similaire dans le contexte de l'analyse harmonique dans $\mathbb{R}^n$, lorsque la *densité de l'intégrale d'aire* a été introduite et étudiée par R. F. Gundy dans [10], puis par R. F. Gundy et M. L. Silverstein dans [11]. Cette nouvelle fonctionnelle a déjà permis, sous une forme ou sous une autre, d'obtenir plusieurs résultats nouveaux en analyse (Cf. [10], [11] et [3]), inspirés par des résultats probabilistes de même nature concernant le temps local. Il faut dire à ce propos qu'il y a de nombreuses variantes possibles de cette notion, de la même manière qu'il existe de nombreuses fonctionnelles quadratiques qui portent le nom plus ou moins justifié d'"intégrale d'aire". Parmi ces fonctionnelles, une seule est "de nature probabiliste" (en un sens que nous préciserons plus loin) et c'est à elle que nous aurons affaire ; il s'agit de l'opérateur g_*^2 de Littlewood-Paley, parfois appelé "intégrale d'aire complète".

Avant d'entrer dans le détail des notations et définitions précises, nous rappelons, de manière schématique, la stratégie standard permettant d'obtenir de manière probabiliste certains résultats d'analyse harmonique dans $\mathbb{R}^n$ à partir de résultats probabilistes de même nature (Cf. [12]) : Partant d'une fonction f, définie et suffisamment intégrable dans $\mathbb{R}^n$, on lui associe son intégrale de Poisson $P(f)$, qui est définie et harmonique dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^{n+1}$. En composant cette fonction avec le mouvement brownien B dans le demi-espace, on obtient une martingale M. On fait appel à la théorie des martingales pour obtenir des égalités ou des inégalités probabilistes portant sur M, puis on revient aux fonctions définies dans $\mathbb{R}^n$ au moyen de l'opérateur d'espérance conditionnelle $E(\cdot/B_\tau)$, où τ désigne le temps de sortie du demi-espace pour le mouvement brownien B, en prenant (schématiquement) pour mesure initiale la "mesure de Lebesgue sur l'hyperplan à l'infini". Par exemple, on a ainsi $E(\langle M,M\rangle_\tau/B_\tau) = g_*^2(f)(B_\tau)$ (c'est en ce sens que l'opérateur g_*^2 est "probabiliste"), ce qui a permis d'obtenir certaines inégalités entre les normes L^p de f et $g_*(f)$ à partir des inégalités de Burkholder (Cf. [12]).

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'introduire quelques notations et définitions. On désigne par n un entier ≥ 1, fixé une fois pour toutes, et par $\mathbb{R}_+^{n+1}$ le demi-espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Le point courant de $\mathbb{R}_+^{n+1}$ est généralement noté $z = (x, y)$. Pour tout point $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note p_ξ le noyau de Poisson relatif au point ξ, défini dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$p_\xi(z) = \frac{c_n y}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{(n+1)/2}},$$

où c_n désigne la constante de normalisation habituelle.

1. L'article est consacré à la représentation des fonctionnelles additives du mouvement brownien unidimensionnel. Le temps local n'apparaît pas explicitement dans cet article, mais le lecteur qui appliquera l'égalité 3.2 du théorème 2 à la représentation du temps local et identifiera, dans ce cas, les différents termes de cette égalité sera récompensé en voyant apparaître la "formule de Tanaka". Nous remercions P. A. Meyer d'avoir attiré notre attention sur cette référence peu connue.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(0,1)|f(\xi)|\, d\xi < +\infty.$$

En d'autres termes, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des applications *prolongeables*, au sens de la définition de [14], p. 139. A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on peut associer son intégrale de Poisson $P(f)$, définie dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$P(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(z) f(\xi)\, d\xi.$$

On note $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}^z)_{z\in\mathbb{R}^{n+1}})$ la réalisation canonique du processus de Wiener dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Le processus $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est donc le mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{P}^z$ désigne, pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, la probabilité du mouvement brownien issu du point z, et l'espérance mathématique correspondante est notée $\mathbb{E}^z$.

Pour tout $a > 0$, on notera λ_a la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{a\}$, $\mathbb{P}^{\lambda_a}$ la mesure $\sigma -$ finie sur Ω définie par

$$\mathbb{P}^{\lambda_a} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}^{(x,a)}\, dx$$

et $\mathbb{E}^{\lambda_a}$ l'espérance mathématique correspondante.

On notera τ le temps de sortie du demi-espace pour le mouvement brownien. Il est classique que, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, la loi de B_τ sous $\mathbb{P}^z$ est la mesure harmonique relative au point z. On a donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{M}$ (ou à valeurs ≥ 0) et tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, l'égalité

$$\mathbb{E}^z(f(B_\tau)) = P(f)(z)\ . \tag{1}$$

Un autre lien très utile entre l'analyse et les probabilités est fourni par l'expression suivante, également connue, de certains potentiels de Green ([12], p. 131) : Pour toute fonction borélienne φ à valeurs ≥ 0 (ou suffisamment intégrable) définie dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$, et tout $a > 0$, on a l'égalité[2]

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\int_0^\tau \varphi(B_t)\, dt\right) = 2\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (y \wedge a)\varphi(z)\, dz\ . \tag{2}$$

A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on peut associer la fonction de Littlewood-Paley $g_*^2(f)$, définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$g_*^2(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z)|\nabla P(f)(z)|^2\, dz.$$

On pose en outre, pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$D_*^r(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z)\Delta|P(f) - r|(dz).$$

2. Le mouvement brownien que nous utilisons n'étant pas le même que celui utilisé dans [12], il faut en tenir compte lors de la transcription de certaines formules.

Les fonctions $|P(f) - r|$ étant sous-harmoniques, leurs laplaciens au sens des distributions sont des mesures positives, et par suite la collection des fonctionnelles D_*^r ($r \in \mathbb{R}$) est bien définie. Cette collection constitue la *densité de l'intégrale d'aire*, étant entendu que l'intégrale d'aire considérée est l'opérateur de Littlewood-Paley g_*^2. Cette appellation est justifiée par le fait que, pour toute fonction φ définie dans $\mathbb{R}$, mesurable et à valeurs ≥ 0, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(r) D_*^r(f)(\xi)\, dr = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \varphi(P(f)(z)) y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2\, dz \tag{3}$$

(Cf. [11], où le calcul est fait pour une autre variante de l'intégrale d'aire). Cette formule est bien entendu l'analogue de la formule de densité suivante, bien connue en probabilités

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(r) L_T^r(M)\, dr = \int_0^T \varphi(M_s) d\langle M, M\rangle_s\ , \tag{4}$$

où M est une martingale, $(L^r(M))_{r\in\mathbb{R}}$ la collection de ses temps locaux, $\langle M, M\rangle$ sa variation quadratique et T un temps d'arrêt.

Il est possible de préciser cette analogie. Dans l'égalité (4), prenons pour M la martingale définie par $M_t = P(f)(B_{t\wedge\tau})$, où $f \in \mathcal{M}$, et $T = \tau$. En utilisant les deux égalités (3) et (4), et les méthodes de [12], il n'est pas difficile de montrer que, pour tout $a > 0$ on a $\mathbb{P}^{\lambda_a} -$ p. s.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(r) \mathbb{E}^{\lambda_a} (L_\tau^r(M)/B_\tau)\, dr = \int_{\mathbb{R}} \varphi(r) D_{*,a}^r(f)(B_\tau)\, dr$$

pour toute fonction borélienne φ à valeurs ≥ 0, où

$$D_{*a}^r(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (y \wedge a) p_\xi(z) \Delta |P(f) - r|(dz)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. On en déduit alors que, $\mathbb{P}^{\lambda_a} -$ p. s.

$$\mathbb{E}^{\lambda_a} (L_\tau^r(M)/B_\tau) = D_{*a}^r(f)(B_\tau) \tag{5}$$

pour presque tout $r \in \mathbb{R}$.

Dans toute la suite, nous aurons à considérer la fonctionnelle D_*^0 *isolément*; nous devrons donc établir un résultat plus précis, i. e. que l'égalité (5) est vraie pour $r = 0$ (donc pour tout $r \in \mathbb{R}$). Pour tout $a > 0$, la loi de B_τ sous $\mathbb{P}^{\lambda_a}$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ et par suite, en utilisant l'égalité (5) avec $r = 0$ et en faisant tendre a vers l'infini, on définit de manière probabiliste $D_*^0(f)(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sauf mention contraire, les espaces L^p considérés sont relatifs à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, et la norme usuelle dans L^p est notée $\|\cdot\|_p$. On montrera au cours de la preuve de notre résultat principal que, si $f \in \bigcup_{1\leq p<+\infty} L^p$, alors $D_*^0(f)$ est presque partout à valeurs finies, ce qui n'est pas toujours le cas pour une fonction $f \in \mathcal{M}$ (par exemple, si $n = 1$ et si f est l'application

$x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$, un calcul simple montre que $D_*^0(f) \equiv +\infty$). Pour cette raison, nous devons introduire le sous-ensemble $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ constitué des fonctions f telles que $D_*^0(f)$ soit finie presque partout. On peut montrer (Cf. [5]) que si $f \in \mathcal{M}$ et si $D_*^0(f) \not\equiv +\infty$, alors $D_*^0(f) \in \mathcal{M}$, donc les conditions $D_*^0(f) < +\infty$ presque partout et $D_*^0(f) \not\equiv +\infty$ sont équivalentes pour toute fonction $f \in \mathcal{M}$. Cette propriété admet aussi une démonstration probabiliste, que nous laissons comme exercice au lecteur.

Pour toute fonction harmonique u dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$, la mesure $\Delta|u|$ est évidemment portée par l'ensemble des zéros de u. Par suite, si $f \in \mathcal{M}_0$, la définition de $D_*^0(f)$ montre intuitivement que $D_*^0(f)(\xi)$ est d'autant plus grand que $P(f)$ oscille beaucoup autour de 0 là où $p_\xi(z)$ est grand, c'est à dire près de ξ. On conçoit donc que les fonctions $f \in \mathcal{M}_0$ pour lesquelles on dispose d'un contrôle convenable de $D_*^0(f)$ jouissent de propriétés analogues à celles connues précédemment pour les fonctions à valeurs ≥ 0 (pour lesquelles $D_*^0(f) \equiv 0$). Ce point de vue est à la base de l'article [3], lui-même inspiré par le résultat probabiliste antérieur de [2]. Les méthodes utilisées dans [3] sont à la fois probabilistes, potentialistes et analytiques. Notre "formule de Tanaka" permet de donner une démonstration directe (Cf. [5]) des résultats de [3], basée uniquement sur des arguments d'analyse réelle.

Il faut aussi remarquer que l'efficacité de la fonctionnelle D_*^0 comme "instrument de mesure du défaut de positivité" a un certain coût, car la détermination de la mesure $\Delta|P(f)|$ n'est pas évidente, en dehors du cas de quelques exemples bien choisis. En effet, même pour une fonction $f \in \mathcal{M}_0$ raisonnablement régulière, l'ensemble des zéros de $P(f)$ peut être un peu compliqué. Par exemple, un résultat de [7] montre qu'il existe une fonction f définie dans $\mathbb{R}$, appartenant à toutes les classes de Lipschitz Lip_α d'indice < 1, et un compact $K \subset \mathbb{R}$ de mesure > 0, tels que, pour tout $\xi \in K$, toute droite issue de ξ rencontre l'ensemble des zéros de $P(f)$ une infinité de fois dans tout voisinage de ξ. Toutefois, un autre résultat de [7] montre qu'il suffit de connaître f et l'ensemble des zéros de $P(f)$ pour obtenir $D_*^0(f)$, et donc que le calcul de la mesure $\Delta|P(f)|$ n'est pas nécessaire.

Terminons cette introduction en rappelant une définition des espaces H^1 et BMO en analyse et en probabilités. A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on associe sa fonction maximale non tangentielle $N(f)$, définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$N(f)(\xi) = \sup_{|\xi - x| < y} |P(f)(x,y)| \, .$$

L'espace $H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ est défini comme l'ensemble des fonctions $f \in L^1$ telles que $\|f\|_{H^1} = \|N(f)\|_1 < +\infty$, et l'espace $\mathrm{BMO} = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ est défini comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{M}$ telles que [3]

$$\|f\|_* = \sup_{z \in \mathbb{R}_+^{n+1}} P(|f - P(f)(z)|)(z) < +\infty \, .$$

3. Cette définition est la plus utile dans notre contexte. Il est classique (Cf. [8], ou [14], p. 143) qu'elle est équivalente à la définition "historique" de BMO.

Du coté probabiliste, on dit qu'une P - martingale locale (brownienne, donc continue) $M \in \mathrm{BMO}_p(P)$, où P est une probabilité sur Ω, s'il existe une constante c telle que

$$M_0^2 + E(\langle M, M\rangle_\infty / \mathcal{F}_T) - \langle M, M\rangle_T \leq c^2 \quad P - \text{p. s.}\,,$$

et la plus petite de ces constantes c est notée $\|M\|_{\mathrm{BMO}_p(P)}$. On dit qu'une P - martingale locale $M \in H_p^1(P)$ si $E(M^*) < +\infty$, où $M^* = \sup_{t\geq 0}|M_t|$. Pour tout $a > 0$, on définit de même les espaces $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ et $H_p^1(\mathbb{P}^{\lambda_a})$, ainsi que les normes correspondantes, en remplaçant dans les définitions précédentes P par $\mathbb{P}^{\lambda_a}$ et E par $\mathbb{E}^{\lambda_a}$.

Il y a de bonnes relations entre la version analytique et les différentes versions probabilistes des espaces H^1 et BMO (Cf. [14] : th. 5, p. 147 et th. 2, p. 167).

2. — Le résultat principal

Dans les énoncés et les démonstrations qui suivent interviennent de nombreuses constantes. Celles qui ne dépendent que de la dimension n sont systématiquement notées C. Pour les autres, on utilise la notation $C(\cdot)$, en faisant figurer entre parenthèses les paramètres, autres que la dimension n, dont ces constantes dépendent.

Le résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME. — *Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_0$, la fonction $\tilde{f}$ définie par la "formule de Tanaka"*

$$|f| = \tilde{f} + D_*^0(f) \tag{6}$$

possède les propriétés suivantes :

(i) *Si $f \in L^1$, alors $\tilde{f} \in L^1$ et $\|\tilde{f}\|_1 \leq 2\|f\|_1$.*
(ii) *Si $f \in L^p$, avec $1 < p < +\infty$, alors $\tilde{f} \in L^p$ et $\|\tilde{f}\|_p \leq C(p)\|f\|_p$.*
(iii) *Si $f \in H^1$, alors $\tilde{f} \in H^1$ et $\|N(\tilde{f})\|_1 \leq C\|N(f)\|_1$.*
(iv) *Si $f \in \mathrm{BMO} \bigcap \mathcal{M}_0$, alors $\tilde{f} \in \mathrm{BMO}$ et $\|\tilde{f}\|_* \leq C\|f\|_*$.*

Démonstration :

Il s'agit donc de montrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ (qui n'a aucune propriété de linéarité ni même de sous-linéarité) conserve les espaces fonctionnels cités dans l'énoncé précédent [4]. Ces espaces fonctionnels ont des analogues probabilistes et, si nous écrivons la formule de Tanaka ([17])

$$|M_t| = \tilde{M}_t + L_t^0\,, \tag{7}$$

4. Les méthodes de [5] montrent que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ conserve en fait *tous* les espaces fonctionnels sur lesquels agissent les opérateurs de Calderón-Zygmund vérifiant des conditions d'annulation convenables.

où

$$\tilde{M}_t = |M_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(M_s) dM_s$$

des propriétés bien connues en théorie des martingales (dont les inégalités de Burkholder-Gundy) permettent de voir que l'application $M \mapsto \tilde{M}$ conserve les espaces L^p $(1 \leq p < +\infty)$, H^1 et BMO probabilistes. Ceci suggère d'utiliser la formule (7) pour démontrer le théorème.

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous noterons $\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}$ l'ensemble des points $z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tels que $y > \varepsilon$, et par τ_ε le temps de sortie de $\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}$ pour le mouvement brownien. Nous fixons deux nombres ε et a tels que $0 < \varepsilon < a$ et une fonction $f \in \mathcal{M}$. Nous posons

$$u = P(f) \quad \text{et} \quad v = P(|f|) \ ,$$

et nous désignons par M le processus défini par

$$M_t = u(B_{t \wedge \tau}) \ .$$

Ce processus est une martingale pour toute loi $\mathbb{P}^z$, et nous désignons par L^0 son temps local en 0. La première étape de la démonstration du théorème est le résultat technique suivant.

LEMME 1. — *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et tout temps d'arrêt $T \leq \tau_\varepsilon$, on a les deux estimations*

$$\mathbb{E}^{\lambda_a} \left(\int_0^T |\nabla u(B_s)||\nabla p_\xi(B_s)| \, ds \right) \leq C(p, a, \varepsilon) \|f\|_p \tag{8}$$

et

$$\mathbb{E}^{\lambda_a} \left(\int_0^T |\nabla u(B_s)||\nabla p_\xi(B_s)| \, ds \right) \leq C(a, \varepsilon)(\|f\|_* + v(\xi, 1)) \tag{9}$$

Démonstration :

L'égalité (2) permet d'écrire

$$\mathbb{E}^{\lambda_a} \left(\int_0^T |\nabla u(B_s)||\nabla p_\xi(B_s)| \, ds \right) \leq 2 \int_{\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) |\nabla u(z)||\nabla p_\xi(z)| dz \ .$$

En utilisant les majorations évidentes $y|\nabla p_\xi(z)| \leq C p_\xi(z)$, $y|\nabla u(z)| \leq C v(z)$ et $v(z) \leq C\|f\|_p y^{-n/p}$, on montre aisément que

$$\int_{\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}} ((y - \varepsilon) \wedge (a - \varepsilon)) \, |\nabla u(z)||\nabla p_\xi(z)| \, dz$$
$$\leq C \int_{\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}} \frac{(y - \varepsilon) \wedge (a - \varepsilon)}{y^2} v(z) p_\xi(z) \, dz \leq C(p, a, \varepsilon) \|f\|_p \ , \tag{10}$$

ce qui prouve (8). Pour prouver (9), on procède de la même manière, en remplaçant l'inégalité $v(z) \leq C\|f\|_p y^{-n/p}$ par l'inégalité $v(z) \leq C(\|f\|_* \ln y + v(x,1))$ (pour tout $z = (x,y)$ tel que $y \geq 1$). Cette estimation se déduit facilement de l'inégalité $|v(x,2y) - v(x,y)| \leq 2\|f\|_*$, conséquence immédiate de notre définition de BMO. On obtient ainsi

$$\int_{\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}} \frac{(y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)}{y^2} v(z) p_\xi(z)\, dz \leq C(a,\varepsilon)(\|f\|_* + v(\xi,1)) \ , \tag{11}$$

ce qui prouve (9).

La deuxième étape de la démonstration du théorème consiste à prouver l'égalité suivante, qui sera utilisée plusieurs fois dans la suite.

LEMME 2. — *Si* $f \in \bigcup_{1 \leq p \leq +\infty} L^p$, *ou si* $f \in$ BMO, *on a, pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *les égalités*

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \operatorname{sgn}(u(B_s)) \nabla u(B_s)\, dB_s\right) p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right)$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) \operatorname{sgn}(u(z)) \nabla u(z) \nabla p_\xi(z)\, dz \ , \tag{12}$$

et toutes les intégrales sont absolument convergentes.

Démonstration :

Posons $X_t = \int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} \operatorname{sgn}(u(B_s)) \nabla u(B_s)\, dB_s$ et $Y_t = p_\xi(B_{t\wedge\tau_\varepsilon})$. Nous avons à montrer que la variable aléatoire $X_{\tau_\varepsilon} Y_{\tau_\varepsilon}$ est $\mathbb{P}^{\lambda_a}$ - intégrable et à calculer $\mathbb{E}^{\lambda_a}(X_{\tau_\varepsilon} Y_{\tau_\varepsilon})$. Si $f \in \bigcup_{1 \leq p \leq +\infty} L^p$, la martingale M arrêtée au temps τ_ε est bornée, donc est fermée dans $L^2(\mathbb{P}^z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Si $f \in$ BMO, il est classique ([14], p. 147) que $M \in \mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^z)$, et par suite M est fermée dans $L^2(\mathbb{P}^z)$. Ceci est vrai aussi pour la martingale X, qui a même variation quadratique que la précédente, ainsi que pour la martingale Y, qui est bornée. Par conséquent la martingale $((XY - \langle X, Y\rangle)_{t\wedge\tau_\varepsilon})$ appartient à l'espace $H_p^1(\mathbb{P}^z)$, et par suite est $\mathbb{P}^z$- uniformément intégrable. On peut donc appliquer le théorème d'arrêt de Doob et écrire $\mathbb{E}^z(X_{\tau_\varepsilon} Y_{\tau_\varepsilon}) = \mathbb{E}^z(\langle X, Y\rangle_{\tau_\varepsilon})$. On obtient ainsi

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}(X_{\tau_\varepsilon} Y_{\tau_\varepsilon}) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \nabla u(B_s) \nabla p_\xi(B_s)\, ds\right)$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}_\varepsilon^{n+1}} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) \operatorname{sgn}(u(z)) \nabla u(z) \nabla p_\xi(z)\, dz \ ,$$

d'après l'égalité (2). La convergence absolue de ces intégrales résulte des inégalités (8), (9), (10) et (11).

Le résultat suivant permet de calculer explicitement certaines espérances conditionnelles.

LEMME 3. — *Soient* T *un temps d'arrêt tel que* $T < \tau \quad \mathbb{P}^z$*- p. s. pour tout* $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ *et* X *une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$ *- mesurable telle que* $\mathbb{E}^{\lambda_a}\ (|X|p_\xi(B_T)) < +\infty$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$. *On a, en posant* $\varphi(\xi) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\ (Xp_\xi(B_T))$,

$$\varphi(B_\tau) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\ (X/B_\tau) \quad \mathbb{P}^{\lambda_a} -\ p.\ s\ .$$

Démonstration :

La variable aléatoire X n'étant pas supposée $\mathbb{P}^{\lambda_a}$- intégrable, il s'agit de montrer que, pour toute fonction borélienne bornée ψ définie dans $\mathbb{R}^n$ telle que l' application $\xi \to \psi(\xi)\mathbb{E}^{\lambda_a}\ (|X|p_\xi(B_T))$ soit intégrable, on a l'égalité

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\ (\varphi(B_\tau)\psi(B_\tau)) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\ (X\psi(B_\tau))\ . \tag{13}$$

Le premier membre de cette égalité est égal à

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega X(\omega)p_{B_\tau(\omega')}(B_T(\omega))\mathbb{P}^{\lambda_a}(d\omega)\right)\psi(B_\tau(\omega'))\mathbb{P}^{\lambda_a}(d\omega')$$

$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega \psi(B_\tau(\omega'))p_{B_\tau(\omega')}(B_T(\omega))\mathbb{P}^{\lambda_a}(d\omega')\right)X(\omega)\mathbb{P}^{\lambda_a}(d\omega)$$

$$= \int_\Omega P(\psi)(B_T(\omega))X(\omega)\mathbb{P}^{\lambda_a}(d\omega)\ ,$$

grâce à l'égalité (1). On observe que $P(\psi)(B_T)$ n'est autre que Y_T, où Y est la martingale (pour toute loi $\mathbb{P}^z$) bornée définie par $Y_t = P(\psi)(B_{t\wedge\tau})$, et dont la variable terminale est $\psi(B_\tau)$. La variable aléatoire X étant $\mathcal{F}_T$ - mesurable, l'intégrale précédente est égale à $\mathbb{E}^{\lambda_a}\ (X\psi(B_\tau))$, et l'égalité (13) est prouvée. Si $X \geq 0$, l'hypothèse d'intégrabilité portant sur les fonctions ψ peut évidemment être remplacée par la positivité de ces fonctions.

La prochaine étape consiste à préciser la relation, annoncée dans notre introduction, entre le temps local et la densité de l'intégrale d'aire.

LEMME 4. — *Si* $f \in \bigcup_{1\leq p\leq+\infty} L^p$, *ou si* $f \in \mathrm{BMO}$, *on a l'égalité*

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}(L^0_{\tau_\varepsilon}/B_\tau) = D^{0,\varepsilon}_{*a}(f)(B_\tau) \quad \mathbb{P}^{\lambda_a} -\ p.\ s.\ , \tag{14}$$

où

$$D^{0,\varepsilon}_{*a}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon}((y-\varepsilon)\wedge(a-\varepsilon))p_\xi(z)\Delta|u|(dz)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration :

En vue d'utiliser certains résultats de [12], nous avons besoin d'une version régularisée de $|u|$, ce qui nécessite l'introduction de quelques notations. Nous considérons une fonction k de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, à valeurs ≥ 0, à support inclus dans la boule unité et telle que $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} k(z)dz = 1$. Pour tout $\delta \in]0, \varepsilon/2]$, et tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, nous posons $k_\delta(z) = \delta^{-n} k(z/\delta)$. Nous définissons ensuite les fonctions u_δ dans $\mathbb{R}^{n+1}_{\varepsilon/2}$ en posant $u_\delta(z) = k_\delta * |u|(z)$. Les fonctions u_δ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{n+1}_{\varepsilon/2}$ et sous-harmoniques, puisque $\Delta u_\delta = k_\delta * \Delta|u|$ sur cet ensemble. Nous avons besoin de quelques estimations simples concernant ces fonctions et leurs gradients. On a évidemment $u_\delta \leq k_\delta * v$ et $|\nabla u_\delta| \leq k_\delta * |\nabla u|$ (car le gradient au sens des distributions de $|u|$ s'identifie à la fonction $\mathrm{sgn}(u)\nabla u$). D'autre part, si g est une fonction positive dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ vérifiant $g(z') \leq Ag(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon$ et tout z' vérifiant $|z - z'| \leq \varepsilon/2$, on a évidemment $k_\delta * g(z) \leq Ag(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon$ puisque $\delta \leq \varepsilon/2$. Ceci s'applique notamment aux fonctions $y \mapsto y^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (vérification immédiate), p_ξ et v (en raison des inégalités de Harnack), ainsi qu'aux produits de ces fonctions. On obtient ainsi, en particulier, $u_\delta(z) \leq C(\varepsilon)v(z)$ et $|\nabla u_\delta(z)| \leq C(\varepsilon)v(z)/y$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon$.

Soit M^δ le processus défini par $M^\delta_t = u_\delta(B_{t\wedge\tau_\varepsilon})$, et soit

$$\varphi_\delta(B_\tau) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\tau_\varepsilon} \Delta u_\delta(B_s)\, ds \Big/ B_\tau\right) .$$

Pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a, en vertu de la formule d'Itô et du lemme 3,

$$\begin{aligned}\varphi_\delta(\xi) = \mathbb{E}^{\lambda_a}&\left(M^\delta_{\tau_\varepsilon} p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right) - \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(M^\delta_0 p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right) \\ &- \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \nabla u_\delta(B_s)\, dB_s\right) p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right) .\end{aligned}$$

Nous allons identifier la limite de chacun des termes du second membre de l'égalité précédente lorsque δ tend vers 0. On a l'égalité

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(M^\delta_{\tau_\varepsilon} - |M_{\tau_\varepsilon}|\right) = \int_{\mathbb{R}^n} (u_\delta(x,\varepsilon) - |u(x,\varepsilon)|) p_\xi(x,\varepsilon) .$$

Comme $|u_\delta(x,\varepsilon) - |u(x,\varepsilon)|| \leq C(\varepsilon)v(x,\varepsilon)$, et que $\int_{\mathbb{R}^n} v(x,\varepsilon)p_\xi(x,\varepsilon)dx = v(\xi, 2\varepsilon)$, quantité finie, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(M^\delta_{\tau_\varepsilon} p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(|M_{\tau_\varepsilon}| p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right) .$$

De la même manière, on voit que

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(M^\delta_0 p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(|M_0| p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right) .$$

Par ailleurs, l'égalité (12) est vraie aussi avec ∇u_δ à la place de $\nabla|u|$ ($= \mathrm{sgn}(u)\nabla u$) (elle se démontre de la même manière, en remplaçant la formule de Tanaka par la formule d'Itô ; les estimations nécessaires à la validation des calculs résultent des inégalités $u_\delta(z) \leq C(\varepsilon)v(z)$ et $|\nabla u_\delta(z)| \leq C(\varepsilon)v(z)/y$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon$). On a donc

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} (\nabla u_\delta(B_s) - \mathrm{sgn}(u(B_s))\nabla u(B_s))\, dB_s\right) p_\xi(B_{\tau_\varepsilon})\right)$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon))(\nabla u_\delta(z) - \operatorname{sgn}(u(z))\nabla u(z))\nabla p_\xi(z)|\, dz \, .$$

L'estimation $|\nabla u_\delta(z) - \operatorname{sgn}(u(z))\nabla u(z)| \leq C(\varepsilon)v(z)/y$ et les inégalités (10) ou (11) permettent de recourir au théorème de convergence dominée pour conclure que cette intégrale tend vers 0 lorsque δ tend vers 0. On a donc montré que

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbb{E}^{\lambda_a} \left(\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \nabla u_\delta(B_s)\, dB_s \right) p_\xi(B_{\tau_\varepsilon}) \right)$$
$$= \mathbb{E}^{\lambda_a} \left(\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \operatorname{sgn}(u(B_s))\nabla u(B_s)\, dB_s \right) p_\xi(B_{\tau_\varepsilon}) \right) \, .$$

Posons $\varphi(\xi) = \lim_{\delta \to 0} \varphi_\delta(\xi)$. En utilisant les expressions obtenues ci-dessus pour les trois limites et l'égalité (conséquence de la formule (7))

$$L^0_{\tau_\varepsilon} p_\xi(B_{\tau_\varepsilon}) = |u(B_{\tau_\varepsilon})| p_\xi(B_{\tau_\varepsilon}) - |u(B_0)| p_\xi(B_{\tau_\varepsilon}) - \left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \operatorname{sgn}(u(B_s))\nabla u(B_s)\, dB_s \right) p_\xi(B_{\tau_\varepsilon}) \, , \qquad (15)$$

on voit que

$$\varphi(\xi) = \mathbb{E}^{\lambda_a} \left(L^0_{\tau_\varepsilon} p_\xi(B_{\tau_\varepsilon}) \right) \, .$$

D'autre part, le lemme fondamental de [12], p. 131 fournit l'égalité

$$\varphi_\delta(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z)\, dz$$

et par suite, pour achever la preuve du lemme, il suffit de vérifier que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) p_\xi(z)\, \Delta|u|(dz). \qquad (16)$$

En utilisant uniquement le fait que $\Delta u_\delta \to \Delta|u|$ au sens des distributions quand $\delta \to 0$ et la positivité de ces mesures, on voit que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z) dz \geq \int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) p_\xi(z) \Delta|u|(dz)$$

ce qui prouve la finitude de cette dernière intégrale. On pose ensuite $Y^a_\varepsilon(z) = (y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)$ pour tout $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon$, et on observe que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon} ((y-\varepsilon) \wedge (a-\varepsilon)) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_{\varepsilon/2}} (Y^a_\varepsilon p_\xi \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon}) * k_\delta(z)\, \Delta|u|(dz).$$

L'estimation $(Y^a_\varepsilon p_\xi \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{n+1}_\varepsilon}) * k_\delta(z) \leq C(\varepsilon) y p_\xi(z) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{n+1}_{\varepsilon/2}}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ et la finitude de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_{\varepsilon/2}} y p_\xi(z) \Delta|u|(dz)$ permettent d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'obtenir ainsi la propriété (16), ce qui termine la démonstration du lemme 4.

Les résultats précédents vont nous permettre de démontrer une forme préliminaire de l'égalité (6), que nous utiliserons pour démontrer les assertions (i), (ii) et (iii) de notre théorème.

LEMME 5. — *Si* $f \in \bigcup_{1\le p<+\infty} L^p$ *on a, pour presque tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *l'égalité*

$$|f(\xi)| = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,a)| p_\xi(x,a)\, dx + \tilde{f}_a(\xi) + D^0_{*a}(f)(\xi) \tag{17}$$

où

$$\tilde{f}_a(B_\tau) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\int_0^\tau \operatorname{sgn}(u)(B_s)\nabla u(B_s)\, dB_s \Big/ B_\tau \right) \quad \mathbb{P}^{\lambda_a} - p.\ s. \tag{18}$$

Démonstration :

En utilisant l'égalité (15) et les lemmes 2 à 4, on obtient l'égalité

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}(|u(B_{\tau_\varepsilon})|/B_\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,a)| p_{B_\tau}(x,a)\, dx$$
$$+ \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \operatorname{sgn}(u)(B_s)\nabla u(B_s)\, dB_s \Big/ B_\tau \right) + D^{0,\varepsilon}_{*a}(f)(B_\tau) \quad \mathbb{P}^{\lambda_a} - \text{p. s.} \tag{19}$$

Il s'agit de faire tendre ε vers 0 dans cette égalité.

Si $f \in L^p$, avec $1 \le p < +\infty$, $u(B_{\tau_\varepsilon}) \to f(B_\tau)$ dans $L^p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, le premier membre de l'égalité (19) a une limite dans $L^p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ quand $\varepsilon \to 0$, qui est $\mathbb{E}^{\lambda_a}(|f(B_\tau)|/B_\tau) = |f(B_\tau)|$. D'autre part, dans l'égalité (19), la variable aléatoire $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,a)| p_{B_\tau}(x,a)\, dx$ est un élément de $L^p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ qui ne dépend pas de ε. Par conséquent, il suffit maintenant de montrer que, lorsque ε tend vers 0,

$$D^{0,\varepsilon}_{*a}(f)(B_\tau) \longrightarrow D^0_{*a}(f)(B_\tau)$$

et

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \operatorname{sgn}(u)(B_s)\nabla u(B_s)\, dB_s \Big/ B_\tau \right)$$
$$\longrightarrow \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\int_0^{\tau} \operatorname{sgn}(u)(B_s)\nabla u(B_s)\, dB_s \Big/ B_\tau \right)$$

dans $L^p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$. En utilisant l'égalité (7) aux temps τ_ε et τ, le lemme 4 et la bornitude de l'espérance conditionnelle dans $L^p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$, on voit qu'il suffit de prouver que l'une *ou* l'autre des propriétés suivantes est satisfaite :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} L^0_{\tau_\varepsilon} = L^0_\tau \quad \text{dans} \quad L^p(\mathbb{P}^{\lambda_a}) \tag{20}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\tau_\varepsilon} \operatorname{sgn}(u)(B_s)\nabla u(B_s)\,dB_s$$
$$= \int_0^{\tau} \operatorname{sgn}(u)(B_s)\nabla u(B_s)\,dB_s \quad \text{dans} \quad L^p(\mathbb{P}^{\lambda_a})\ . \tag{21}$$

Si $p = 1$, on utilise la formule (7) et le théorème d'arrêt de Doob pour montrer que $\mathbb{E}^{\lambda_a}(L^0_{\tau_\varepsilon}) \leq \|f\|_1$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve (20). Si $p > 1$, on prouve que la propriété (21) est satisfaite. Pour cela, les inégalités de Burkholder-Gundy permettent d'écrire

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\left|\int_{\tau_\varepsilon}^{\tau} \operatorname{sgn}(u(B_s))\nabla u(B_s)\,dB_s\right|^p\right)$$
$$\leq C(p)\,\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\left(\int_{\tau_\varepsilon}^{\tau}(\nabla u(B_s))^2\,d_s\right)^{p/2}\right) \leq C(p)\,\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(|f(B_\tau) - u(B_{\tau_\varepsilon})|^p\right)\,,$$

et cette quantité tend vers 0 avec ε.

Fin de la démonstration du théorème :

Dans le cas où $f \in \bigcup_{1\leq p<+\infty} L^p$, on montre que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{a\to+\infty}\tilde{f}_a(\xi) = \tilde{f}(\xi)\ . \tag{22}$$

Pour cela, on commence par observer que, comme $|u(x,a)| \leq C\|f\|_p a^{-n/p}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,a)|p_\xi(x,a)\,dx$ tend vers 0 lorsque a tend vers l'infini, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ensuite, la comparaison des égalités (6) et (17) montre que, pour prouver l'égalité (22), il suffit de prouver que $D^0_*(f)$ est à valeurs finies presque partout. Mais en fait $D^0_*(f) \in L^p$. En effet on a, d'après (17), $\|D^0_*(f)\|_p \leq \|f\|_p + \|\tilde{f}_a\|_p$ et on voit, en utilisant les égalités (1) et (18), que

$$\|\tilde{f}_a\|_p^p = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\left|\tilde{f}_a(B_\tau)\right|^p\right) \leq \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\left|\int_0^{\tau}\operatorname{sgn}(u(B_s))\nabla u(B_s)\,dB_s\right|^p\right)\ .$$

Enfin, en reprenant les arguments de la fin de la démonstration du lemme 5, on voit que $\|\tilde{f}_a\|_p \leq C(p)\|f\|_p$, (et que $C(1) = 2$ convient). On a donc établi l'égalité (22) ; par suite, les estimations $\|\tilde{f}\|_p \leq C(p)\|f\|_p$ résultent immédiatement des estimations $\|\tilde{f}_a\|_p \leq C(p)\|f\|_p$ et du lemme de Fatou. Remarquons que notre démonstration prouve aussi que $D^0_{*a}(f) \to D^0_*(f)$ dans L^p quand $a \to +\infty$.

Passons maintenant à la preuve de l'assertion (iii) du théorème, qui concerne l'espace H^1. Un ingrédient essentiel de notre démonstration est la possibilité d'évaluer de manière probabiliste la norme dans cet espace, de la manière suivante : Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}$, l'application $a \mapsto \mathbb{E}^{\lambda_a}(\sup_{t<\tau}|P(f)(B_t)|)$ est croissante ([14], p. 153), ce qui permet de poser

$$\|f\|_{H^1_p} = \lim_{a\to+\infty}\mathbb{E}^{\lambda_a}(\sup_{t<\tau}|P(f)(B_t)|) = \sup_{a>0}\mathbb{E}^{\lambda_a}(\sup_{t<\tau}|P(f)(B_t)|)\ .$$

On dit alors que $f \in H^1_p$ si $f \in \mathcal{M}$ et si $\|f\|_{H^1_p} < +\infty$. Une partie du classique théorème de Burkholder-Gundy-Silverstein ([4] ; [14], th. 2, p. 167) affirme que les espaces H^1 et H^1_p sont identiques, et que les normes $\|\cdot\|_{H^1_p}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ sont équivalentes. Nous aurons également à utiliser un autre résultat connu, permettant de tester l'appartenance à l'espace H^1 au moyen d'un sous-ensemble convenable de la boule unité de BMO. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $g \in \mathrm{BMO}$ telles que $\|g\|_* \leq 1$ et telles que la fonction $g/p_0(\cdot, 1)$ soit bornée. On a, pour toute fonction $f \in \mathcal{M}$ (observons que $\mathcal{BM} \subset L^1$)

$$\|f\|_{H^1_p} \leq C \sup_{g\in\mathcal{B}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx \right|$$

d'après le théorème 6 de [14], p. 160. Nous fixons une fonction $f \in H^1$ et une fonction $g \in \mathcal{B}$. D'après les résultats que nous venons de rappeler, il suffit de montrer que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)g(x)\, dx \right| \leq C\|f\|_{H^1_p} .$$

Il suffit pour cela de montrer que, pour tout $a > 0$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_a(x)g(x)\, dx \right| \leq C\|f\|_{H^1_p} , \tag{23}$$

car g est bornée et $\tilde{f}_a$ tend vers $\tilde{f}$ dans L^1 lorsque a tend vers l'infini. Pour justifier cette affirmation (qui est fausse, en général, si $f \in L^1$), on se reporte à l'égalité (17); comme on sait déjà que $D^0_{*a}(f) \to D^0_*(f)$ dans L^1 quand $a \to +\infty$, il reste à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,a)| p_\xi(x,a)\, dx \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,a)|\, dx$$

tend vers 0 lorsque a tend vers l'infini. Ceci résulte facilement du théorème de convergence dominée, car $|u(\cdot,a)| \leq C\|f\|_1 a^{-n}$ et $|u(\cdot,a)| \leq N(f)$ pour tout $a > 0$.

Prouvons donc l'estimation (23). En utilisant successivement l'égalité (1), le théorème de Fubini et l'égalité (18), on obtient l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_a(x)g(x)\, dx = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\tilde{M}_\tau g(B_\tau)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}^{(x,a)}\left(\tilde{M}_\tau g(B_\tau)\right) dx , \tag{24}$$

où $\tilde{M}$ est la martingale définie par

$$\tilde{M}_t = \int_0^{t\wedge\tau} \mathrm{sgn}(u)(B_s)\nabla u(B_s)\, dB_s .$$

Posons, pour tout $t > 0$, $N_t = P(g)(B_{t\wedge\tau})$. Puisque $\|g\|_* \leq 1$, le théorème 5 de [14], p. 147 permet d'affirmer que $\|N - N_0\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^z)} \leq C$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. D'autre part, l'inégalité de Fefferman probabiliste ([14], p. 153) nous donne

$$\left| \mathbb{E}^{(x,a)}\left(\tilde{M}_\tau g(B_\tau)\right) \right| \leq C\|\tilde{M}\|_{H^1_p(\mathbb{P}^z)}\|N - N_0\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^z)} . \tag{25}$$

Enfin, puisque $\langle \tilde{M}, \tilde{M} \rangle = \langle M, M \rangle$, les inégalités de Burkholder-Gundy montrent que, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $\|\tilde{M}\|_{H_p^1(\mathbb{P}^z)} \leq C\|M\|_{H_p^1(\mathbb{P}^z)}$. Par suite, on déduit de (24) et de (25) que, pour tout $a > 0$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_a(x) g(x)\, dx \right| \leq C\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(M_\tau^*\right),$$

ce qui prouve (23), et termine la démonstration de l'assertion (iii).

Prouvons pour terminer l'assertion (iv) du théorème. En reprenant la notation $\tilde{M}$ introduite précédemment, et en utilisant la formule (7), on obtient l'égalité $\mathbb{P}^{\lambda_a}$ - presque sûre des variables aléatoires $|f(B_\tau)|$ et $|f(B_0)| + \tilde{M}_\tau + L_\tau^0$. Ces variables aléatoires étant à valeurs ≥ 0, leurs espérances conditionnelles sont bien définies et on a, pour tout $t \geq 0$, l'égalité

$$\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(|f(B_\tau)|/\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left((|u(B_0)| + \tilde{M}_\tau + L_\tau^0)/\mathcal{F}_t\right)\ \mathbb{P}^{\lambda_a} - \text{p. s.} \qquad (26)$$

Puisque $f \in \mathrm{BMO}$, $|f| \in \mathrm{BMO}$ et par suite le processus $(v(B_{t\wedge\tau}))$ est, relativement à toute loi $\mathbb{P}^z$, une martingale fermée dans L^2 par la variable aléatoire $|f(B_\tau)|$. Il en résulte que le premier membre de l'égalité (26) est égal à $(v(B_{t\wedge\tau}))$. De même la martingale $\tilde{M}$, qui a même variation quadratique que M est, relativement à toute loi $\mathbb{P}^z$, une martingale fermée dans L^2 par la variable aléatoire $\tilde{M}_\tau$. On en déduit que $\mathbb{E}^{\lambda_a}(\tilde{M}_\tau X) = \mathbb{E}^{\lambda_a}(\tilde{M}_t X)$ pour toute variable X $\mathcal{F}_t$ - mesurable telle que $\tilde{M}_\tau X \in L^1(\mathbb{P}^{\lambda_a})$, ce qui nous autorise à écrire $\mathbb{E}^{\lambda_a}\left(\tilde{M}_\tau/\mathcal{F}_t\right) = \tilde{M}_t$. Par suite on déduit de (26) que, pour tout $t \geq 0$,

$$v(B_{t\wedge\tau}) - v(B_0) = |u(B_0)| - v(B_0) + \tilde{M}_t + \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(L_\tau^0/\mathcal{F}_t\right). \qquad (27)$$

Puisque $|f| \in \mathrm{BMO}$, le premier membre de l'égalité précédente est une martingale dont la norme dans $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ est majorée par $C\||f|\|_*$ ([14], th. 5, p. 147), donc par $C\|f\|_*$. La variable aléatoire $|u(B_0)| - v(B_0)$ est $\mathcal{F}_0$ - mesurable et $||u(B_0)| - v(B_0)| \leq P(|f - P(f)(B_0)|)(B_0) \leq \|f\|_*$; on peut donc la considérer comme la valeur au temps t d'une martingale constante, dont la norme dans $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ est majorée par $\|f\|_*$. Enfin on a aussi $\|\tilde{M}\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^{\lambda_a})} \leq \|f\|_*$, car $\tilde{M}$ est une martingale nulle en 0 qui a même variation quadratique que la martingale $(u(B_{t\wedge\tau}) - u(B_0))$, dont la norme dans $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ est majorée par $C\|f\|_*$ en raison d'un résultat déjà cité. De toutes ces remarques et de l'égalité (27) résulte le fait que, si on pose $Q_t = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(L_\tau^0/\mathcal{F}_t\right)$, on définit une martingale $Q \in \mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^{\lambda_a})$ telle que $\|Q\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{P}^{\lambda_a})} \leq C\|f\|_*$. Par conséquent, les résultats de [14] (lemme 4, p. 160 et lemme 13, p.165) permettent d'affirmer que, si h est une fonction telle que $h(B\tau) = \mathbb{E}^{\lambda_a}\left(L_\tau^0/B_\tau\right)$, on a l'alternative suivante : ou bien $h \equiv +\infty$ presque partout, ou bien $h \in \mathrm{BMO}$ et $\|h\|_* \leq C\|f\|_*$. En utilisant notre lemme 4 et le théorème de convergence monotone, on voit que la première possibilité est exclue puisque $f \in \mathcal{M}_0$, et que par suite $\|D_{*a}^0(f)\|_* \leq C\|f\|_*$. Enfin, comme $D_{*a}^0(f)(\xi)$ tend vers $D_*^0(f)(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ lorsque a tend vers l'infini, une nouvelle application du lemme 13 de [14], p. 165 montre que $\|D_*^0(f)\|_* \leq C\|f\|_*$, et donc que $\|\tilde{f}\|_* \leq C\|f\|_*$, ce qui achève la démonstration.

Terminons par quelques *remarques*:

— Comme on l'a vu, l'assertion (iv) résulte du fait que $D^0_*(f) \in \mathrm{BMO}$ si $f \in \mathrm{BMO} \bigcap \mathcal{M}_0$. Ce résultat, ainsi qu'un résultat similaire concernant d'autres variantes de la densité de l'intégrale d'aire, a été démontré dans [1] (où il faut rétablir l'hypothèse $f \in \mathcal{M}_0$, omise dans l'énoncé).

— Les constantes $C(p)$ qui figurent dans l'assertion (ii) du théorème ne dépendent que des constantes "probabilistes" qui apparaissent dans les inégalités de Burkholder-Gundy et de Doob. Elles sont donc indépendantes de la dimension.

— Le théorème 1 de [5] comporte une assertion supplémentaire, relative à l'action *locale* sur H^1 de l'opérateur $f \mapsto \tilde{f}$, au sens suivant: Pour tout couple (B_1, B_2) de boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ telles que $\overline{B_1} \subset B_2$, l'intégrabilité de $N(f)$ sur B_2 implique l'intégrabilité de $N(\tilde{f})$ sur B_1. Cette propriété ne semble pas avoir de preuve probabiliste simple et naturelle. Ce qui fait défaut est l'analogue, pour l'intégrale stochastique, des propriétés d'action locale sur H^1, au sens précédents, des opérateurs de Calderón-Zygmund vérifiant la condition d'annulation *ad hoc*. Nous avons dû établir ces propriétés, pour la circonstance, dans [6].

— Pour des exemples d'applications de notre "formule de Tanaka", nous renvoyons à [5] et [7] (voir aussi le th. 6 de [6], qui achève l'extension au cas général, commencée dans [3], de tous les résultats de [16] concernant le cas des fonctions positives). Compte tenu des nombreuses utilisations de la formule de Tanaka probabiliste, et des liens qui existent entre les martingales browniennes et les fonctions harmoniques, on peut penser que d'autres applications de notre théorème à l'analyse réelle suivront.

Références

[1] R. Bañuelos and J. Brossard. — *The area integral and its density for BMO and VMO functions.* Ark. Mat. **31** (1993), 175-196.

[2] J. Brossard et L. Chevalier. — *Classe L log L et temps local.* C. R. Acad. Sci. Sér. 1 Math. **305** (1987), 135-137.

[3] J. Brossard et L. Chevalier. — *Classe L log L et densité de l'intégrale d'aire dans* $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Ann. of Math. **128** (1988), 603-618.

[4] D. L. Burkholder, R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *A maximal function characterization of the class* H^p. Trans. Amer. Math. Soc. **157**, 1971, 137-153.

[5] L. Chevalier. — *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications.* Adv. in Math. (A paraître).

[6] L. Chevalier. — *Localisation de l'espace de Hardy* H^1 *et opérateurs de Calderón-Zygmund.* A paraître.

[7] L. Chevalier et A. Dufresnoy. — *Densité de l'intégrale d'aire, Intégrales singulières et Changements de signe d'une fonction harmonique.* A paraître.

[8] Ch. Fefferman and E. M. Stein . — *H^p spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[9] R. F. Gundy. — *On the class L log L, martingales, and singular integrals.* Studia Math. **33** (1969), 109-118.

[10] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983), 138-149.

[11] R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *The density of the area integral in* $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 215-229.

[12] P. A. Meyer. — *Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley.* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics **511** (1976), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 126-140.

[13] P. A. Meyer. — *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics **511** (1976), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 246-354.

[14] P. A. Meyer. — *Le dual de* $H^1(\mathbb{R}^\nu)$ *: Démonstrations probabilistes.* Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Mathematics **581** (1977), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 135-195.

[15] P. W. Millar. — *Stochastic integrals and processes with stationary independant increments.* Proc. Sixth Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. **3** (1972), 307-332.

[16] E. M. Stein. — *Note on the class L log L.* Studia Math. **32** (1969), 305-310.

[17] H. Tanaka. — *Note on continuous additive functionals of the one-dimensional Brownian path.* Z. Warscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **1** (1963), 251-257.

Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
e-mail : lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr