SYMBOLES MODULAIRES ET METHODE DE RANKIN

par Fabienne Jory

Les symboles modulaires ont été introduits dans les années 1970 par Mazur, Manin, comme moyen principal pour la construction de fonctions L p–adiques de formes modulaires et courbes elliptiques. Ces symboles modulaires représentent certaines classes d'homologie sur les courbes modulaires et ils possèdent certaines propriétés d'intégralité, provenant du fait que l'on peut les réaliser comme éléments du réseau d'homologie à coefficients entiers sur cette courbe.

Du point de vue analytique, ces symboles modulaires sont les intégrales suivantes : $P(x,r,f) = \int_x^{\mathbf{i}\infty} f(z) z^r dz$, avec $0 \leqslant r \leqslant k-2$ où k est le poids de f. Le premier objectif de ce travail est de donner une expression explicite pour les symboles modulaires en termes de produit scalaire de Petersson de deux formes modulaires. Ce calcul est motivé par le fait qu'il existe beaucoup d'autres constructions de fonctions L, en particulier celles utilisant la méthode de Rankin. Il se trouve que les mesures p–adiques attachées aux formes modulaires et courbes elliptiques s'expriment d'une part en termes de symboles modulaires, et d'autre part comme produit scalaire de Petersson de certaines formes modulaires. C'est pourquoi on peut légitimement espérer exprimer les symboles modulaires qui interviennent dans cette construction directement par la méthode de Rankin.

Le but principal de ce travail est de donner une réponse affirmative à cette question. Ayant fixé un caractère auxiliaire ξ mod B, nous montrons qu'il existe des séries de Fourier $F_{x,r,j}$ (proposition **14.1**) telles que les symboles modulaires s'expriment comme combinaisons linéaires :

$$P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \times \langle f^\rho, F_{x,r,j} \rangle_{CM_0B^2}$$

($x = a/M$, avec $(a,M) = 1$; $\xi\chi(-1) = (-1)^\ell$; ξ est choisi de telle sorte que $L_f(j+\ell,\xi)$ soit non nul ; $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$; $(C, MB^2) = 1$; C est le niveau de f et $M_0 = \prod_{p|M} p$). Il faut souligner le fait que les coefficients $L_f(j+\ell,\xi)^{-1}$ ne dépendent ni de x ni de r, mais dépendent seulement de f. Nous calculons explicitement les coefficients de Fourier des formes modulaires $F_{x,r,j}$, et il se trouve que ce sont des nombres algébriques de $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$, l'extension maximale abélienne de $\mathbf{Q}$ (propositions **15.2** et **16.3**).

Il s'ensuit de cette description que les formes modulaires $F_{x,r,j}$ peuvent être développées sur une base (finie) de formes propres des opérateurs de Hecke, dont un élément est f^ρ, avec des coordonnées dans $\overline{\mathbf{Q}}$: $F_{x,r,j} = \lambda_{x,r,j} f^\rho + h$, où $\lambda_{x,r,j} \in \overline{\mathbf{Q}}$ et $\langle f^\rho, h \rangle_{CM_0B^2} = 0$. Ceci implique :

$$P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} \frac{\langle f, f \rangle_{CM_0B^2}}{L_f(j+\ell,\xi)} \bar{\lambda}_{x,r,j},$$

Mots-clés : symboles modulaires, formes modulaires, séries de Dirichlet, valeurs spéciales de fonctions L.
Classification Mathématique : 11F67, 11F03, 11F11, 11F33, 11F37, 11F66, 19F15.

c'est–à–dire que les symboles modulaires s'expriment comme combinaisons linéaires d'un nombre fini de nombres algébriques, et les coefficients $\pi^{j+\ell}\langle f,f\rangle_{CM_0B^2}L_f(j+\ell,\xi)^{-1}$ peuvent être considérés comme des sortes de "périodes", qui sont des constantes essentielles attachées à la forme f.

Nous montrons aussi que si M est une puissance de p, il existe un entier naturel N non nul qui ne dépend pas de x tel que $NM^rP(x,r,f)$ est p–entier, dans le sens où $NM^r\lambda_{x,r,j}$ est un entier algébrique dans $\overline{\mathbf{Q}}$ (proposition **17.1**). Cette propriété est essentielle pour des constructions de fonctions L p–adiques. Nous envisageons à la suite de ce travail de déduire explicitement une construction des fonctions L p–adiques à partir de ce résultat.

Voici le contenu de ce travail :

1 : Symboles modulaires (définitions et généralités).

Fixons tout d'abord les principales notations utilisées.

On pose $q = e(z) = \exp(2\mathbf{i}\pi z)$. Rappelons les définitions des opérateurs U_d, V_d, T_d (T_d est dit opérateur de Hecke). Pour $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ série de Fourier formelle, on pose :

$$f|_k U_d(z) = d^{k/2-1} \sum_{u \bmod d} f|_k \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & d \end{pmatrix} = d^{k/2-1} \sum_{u \bmod d} f\Big((z+u)/d\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nd} q^n,$$

$$f|_k V_d(z) = f(dz) = d^{-k/2} f|_k \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{nd}$$

$$f|_k T_d(z) = \sum_{n|d} \psi(n) n^{k-1} f|_k U_{d/n} V_n.$$

Une forme vieille $f \in M_k^{\mathrm{old}}\big(\Gamma_1(C)\big)$ est une combinaison linéaire de formes des deux types suivants : pour un $c > 1$ qui divise C, une forme de $M_k\big(\Gamma_1(C/c)\big)$ que l'on plonge dans $M_k\big(\Gamma_1(C)\big)$ ou une forme qui résulte de l'action de l'opérateur V_c sur $M_k\big(\Gamma_1(C/c)\big)$ (pour les définitions standard, voir [16, ch. 2] ou [10, ch. 2 et 4]). L'ensemble des formes nouvelles, $S_k^{\mathrm{new}}\big(\Gamma_1(C)\big)$, est l'orthogonal de $S_k^{\mathrm{old}}\big(\Gamma_1(C)\big)$ pour le produit scalaire de Petersson (voir section **12**).

Soit ψ un caractère de Dirichlet modulo C. On considère ici une forme $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k(C, \psi)$ primitive c'est-à-dire $f \in S_k^{\mathrm{new}}(C, \psi)$ fonction propre des opérateurs de Hecke T_n pour n premier avec C et U_n pour $n \mid C$, et aussi normalisée par $a_1 = 1$ (donc les coefficients a_n coïncident avec les valeurs propres λ_n, définies par $f|_k T_n = \lambda_n f$, pour n premier avec C). Notons aussi que dans ce cas les coefficients a_n sont des entiers algébriques ([16, ch. 3]).

Définition 1.1 : Soient $x \in \mathbf{Q}$, $x = \dfrac{a}{M}$, avec $(a, M) = 1$, et $r \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant r \leqslant k-2$. Les symboles modulaires attachés à f sont les nombres suivants :

$$P(x, r, f) = \int_x^{\mathbf{i}\infty} f(z) z^r dz.$$

2 : Expression des symboles modulaires en fonction de caractères additifs.

Nous établissons la première formule pour les symboles modulaires, à l'aide d'un calcul élémentaire sur les intégrales.

Proposition 2.1 : Pour x, r, f choisis en **1**, on a :

$$P(x, r, f) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j! \sum_{n=1}^{\infty} a_n e(nx) n^{-(j+1)}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_x^{\mathbf{i}\infty} f(z)z^r dz &= \mathbf{i}\int_0^\infty f(x+\mathbf{i}y)(x+\mathbf{i}y)^r dy \\
&= \mathbf{i}\sum_{n=0}^\infty a_n \exp(2\mathbf{i}\pi nx)\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} x^{r-j}\mathbf{i}^j \int_0^\infty y^j \exp(-2\pi ny)dy \\
&= \mathbf{i}\sum_{n=0}^\infty a_n e(nx)\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} x^{r-j}\mathbf{i}^j (2\pi n)^{-j-1}\int_0^\infty t^j e^{-t}dt \\
&= \mathbf{i}\sum_{n=0}^\infty a_n e(nx)\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} x^{r-j}\mathbf{i}^j (2\pi n)^{-j-1}\Gamma(j+1) \\
&= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} x^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j!\sum_{n=0}^\infty a_n e(nx) n^{-(j+1)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque : On peut voir dans cette proposition l'expression des symboles modulaires comme combinaisons linéaires d'intégrales p–adiques, lorsque M est une puissance de p :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nx) n^{-(j+1)} = \int_{\mathbf{Z}_p} e(yx)\, d\mu_f(y)$ où $x = \frac{a}{p^m} \in \mathbf{Q}_p$, y la variable de $\mathbf{Z}_p$ et la mesure μ_f est définie par la série partielle suivante : $\mu_f(b + p^N\mathbf{Z}_p) = \sum_{\substack{n=0 \\ n\equiv b \bmod p^N}}^{\infty} a_n n^{-(j+1)}$. Ensuite on peut encore généraliser en passant à $\hat{\mathbf{Z}} = \varprojlim_M \mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$ et définir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nx) n^{-(j+1)} = \int_{\hat{\mathbf{Z}}} e(yx)\, d\mu_f(y)$: les ouverts de $\hat{\mathbf{Z}}$ proviennent des images réciproques des points de $\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$ par la projection $\hat{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$ avec un M convenable ; la fonction $y \mapsto e(yx)$ est une fonction localement constante sur $\hat{\mathbf{Z}}$ avec pour valeurs des racines de l'unité (donc dans $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$), et l'intégrale se réduit à une somme finie.

3 : Caractères (définitions et propriétés).

Rappelons les notations et résultats principaux concernant les caractères de Dirichlet.

Un caractère trivial ε_N est un caractère modulo N défini sur $\mathbf{Z}$ par

$$\varepsilon_N(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv 1 \bmod N, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et étendu à $\mathbf{Q}$ de manière usuelle : $\varepsilon_N(b) = 0$ si $b \notin \mathbf{Z}$.

Nous noterons δ le caractère suivant : $\delta(a) = 1$ si $a \in \mathbf{Z}$ et $\delta(a) = 0$ si $a \notin \mathbf{Z}$. (δ pourra aussi désigner un indice de sommation).

$\sum_{n \bmod M}^{*}$ signifie que dans la somme, on impose $(n, M) = 1$.

Somme de Gauss pour χ caractère modulo M :

$$\mathcal{G}(\chi) = \sum_{n \bmod M}^{*} \chi(n)e(n/M) = \sum_{n \bmod M} \chi(n)e(n/M).$$

Sommes de Gauss décalées pour χ caractère modulo M et $a \in \mathbf{Z}$:

$\mathcal{G}_a(\chi) = \sum\limits_{n \bmod M} \chi(n) e(na/M)$, et $\mathcal{G}_{a,MM'}(\chi) = \sum\limits_{n \bmod MM'} \chi(n) e\big(na/(MM')\big)$.

μ la fonction de Möbius : $\zeta(s)^{-1} = \prod\limits_p (1-p^{-s}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$.

On peut noter les propriétés suivantes :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Lemme 3.1 : Si χ est un caractère primitif modulo M, $\mathcal{G}_a(\chi) = \chi(a)^{-1}\mathcal{G}(\chi)$. Si χ n'est pas primitif modulo M et si χ_0 modulo M/M' est le caractère primitif associé à χ, alors on a : $\chi(b) = \sum\limits_{t|(b,M')} \chi_0(b)\mu(t)$ et $\mathcal{G}_a(\chi) = \mathcal{G}(\chi_0) M' \sum\limits_{t|M'} \mu(t)\chi_0(t) t^{-1} \delta\Big(\frac{at}{M'}\Big) \bar{\chi}_0\Big(\frac{at}{M'}\Big)$.

(voir [12, (4.20)]). En particulier pour $a = 1$: $\mathcal{G}(\chi) = \mathcal{G}(\chi_0)\mu(M')\chi_0(M')$, car le seul t est M'.

Pour tout caractère χ mod M, $\sum\limits_{n \bmod M} \chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ non trivial,} \\ M & \text{sinon ;} \end{cases}$

$\sideset{}{^*}\sum\limits_{n \bmod M} \chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ non trivial,} \\ \varphi(M) & \text{sinon.} \end{cases}$

$\sum\limits_{a \bmod N} e(ad/N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \nmid d \text{ c'est-à-dire } d \not\equiv 0 \bmod N, \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$

4 : Passage du caractère additif $n \mapsto e(nx)$ à des caractères multiplicatifs χ.

Les $\chi(n/\delta)$ pour $\delta \mid M$ et χ mod M/δ forment une base de $\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$ dans laquelle s'expriment les $e(na/M)$ pour a mod M :

$$e(na/M) = \sum_{\delta|M} \sum_{\chi \bmod M/\delta} c_{a,\chi,M/\delta}\, \chi(n/\delta).$$

Nous donnons maintenant une formule explicite pour les coefficients $c_{a,\chi,M/\delta}$ et nous en déduirons une expression des symboles modulaires en fonction des caractères χ de Dirichlet.

Lemme 4.1 : Calcul des coefficients : $\qquad c_{a,\chi,M/\delta} = \varphi(M/\delta)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})$.

Démonstration. — *Cas où $M = 1$:* Alors $\delta = 1$ et le caractère χ mod 1 est trivial : $\chi(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Pour $n = 0$, on obtient $e(na) = 1$. Donc $c_{a,\chi,1} = 1$.

Cas où $M = p$ premier :

$$e(na/p) = \sum_{\delta|p} \sum_{\chi \bmod p/\delta} c_{a,\chi,p}\, \chi(n/\delta).$$

Il y a deux termes, correspondant à $\delta = 1$ et $\delta = p$ (qui donne le caractère trivial) :

$$e(na/p) = \sum_{\chi \bmod p} c_{a,\chi,p}\, \chi(n) + 1.$$

On introduit un caractère auxiliaire ψ modulo p. On a par définition $\sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n)e(na/p) = \mathcal{G}_a(\psi)$ et aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n)e(na/p) &= \sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n)\Big(\sum_{\chi \bmod p} c_{a,\chi,p}\, \chi(n) + 1\Big) \\
&= \sum_{\chi \bmod p} c_{a,\chi,p} \sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n)\chi(n) + \sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n) \\
&= \sum_{\chi \bmod p} c_{a,\chi,p} \sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n)\chi(n).
\end{aligned}$$

Or $\sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n)\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq \bar{\psi} \\ \varphi(p) & \text{sinon} \end{cases}$ où φ est la fonction d'Euler. Alors l'expression devient $\sum_{n \bmod p}^{*} \psi(n)e(na/p) = c_{a,\bar{\psi},p}\, \varphi(p)$.

On obtient (pour $\chi \bmod p$) : $c_{a,\chi,p} = \varphi(p)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})$.

Cas où $M = p^K$ avec p premier :

$$e(na/p^K) = \sum_{\delta | p^K} \sum_{\chi \bmod p^K/\delta} c_{a,\chi,p^K/\delta}\, \chi(n/\delta),$$

$$e(na/p^K) = \sum_{\chi \bmod p^K} c_{a,\chi,p^K}\, \chi(n) + \sum_{\substack{\delta | p^K \\ \delta \neq 1, \delta \neq p^K}} \sum_{\chi \bmod p^K/\delta} c_{a,\chi,p^K}\, \chi(n/\delta) + 1.$$

Fixons n premier avec p ; pour $\delta \mid p^K$ et $\delta \neq 1$, $\delta = p^\alpha$ avec $\alpha > 0$ et on a $\frac{n}{\delta} = \frac{n}{p^\alpha} \notin \mathbf{Z}$, donc si on a aussi $\delta \neq p^K$ $(\chi \neq 1)$, $\chi(n/\delta) = 0$; il reste dans la somme : $e(na/p^K) = \sum_{\chi \bmod p^K} c_{a,\chi,p^K}\chi(n)+1$.

On introduit un caractère auxiliaire ψ modulo p^K. On a encore : $\sum_{n \bmod p^K}^{*} \psi(n)e(na/p^K) = \mathcal{G}_a(\psi)$, et aussi :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \bmod p^K}^{*} \psi(n)e(na/p^K) &= \sum_{n \bmod p^K}^{*} \psi(n)\Big(\sum_{\chi \bmod p^K} c_{a,\chi,p^K}\, \chi(n) + 1\Big) \\
&= \sum_{\chi \bmod p^K} c_{a,\chi,p^K} \sum_{n \bmod p^K}^{*} \psi(n)\chi(n) + \sum_{n \bmod p^K}^{*} \psi(n) \\
&= \sum_{\chi \bmod p^K} c_{a,\chi,p^K} \sum_{n \bmod p^K}^{*} \psi(n)\chi(n) \\
&= c_{a,\bar{\psi},p^K}\, \varphi(p^K)
\end{aligned}$$

(le seul terme non nul est celui correspondant à $\psi\chi = 1$).

On obtient (pour $\chi \bmod p^K$) : $c_{a,\chi,p^K} = \varphi(p^K)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})$.

Cas général : $M = p_1^{K_1} \cdots p_s^{K_s}$ *avec* p_i *premiers distincts :*

$$\mathbf{Z}/M\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/p_1^{K_1}\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/p_s^{K_s}\mathbf{Z}$$
$$\big(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}\big)^* \simeq \big(\mathbf{Z}/p_1^{K_1}\mathbf{Z}\big)^* \times \cdots \times \big(\mathbf{Z}/p_s^{K_s}\mathbf{Z}\big)^*$$
$$n \mapsto (n_{p_1}, \cdots, n_{p_s})$$

$e(na/M)$ est un caractère additif mais à valeurs dans $\big(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z}\big)^*$; on pose :

$$e_{p_i,a}(n) = \exp(2i\pi n_{p_i} a/p_i^{K_i}) = e(n_{p_i} a/p_i^{K_i})$$
$$e(na/M) \mapsto \prod_{p_i|M} e_{p_i,a}(n)$$

$\chi(n)$ est un caractère multiplicatif, on définit ses composantes $\chi_{p_i} = \chi \bmod p_i^{K_i}$ c'est–à–dire : $\chi_{p_i}(n) = \chi(1, 1, \cdots, n_{p_i}, \cdots, 1)$.

$$\chi(n) \mapsto \prod_{p_i|M} \chi_{p_i}(n)$$

On peut alors pour chaque composante utiliser les résultats précédents.

Cas où $M = p_1^{K_1} p_2^{K_2}$ *avec* p_1 *et* p_2 *premiers distincts :*

$$\begin{aligned}
e(na/M) &= e_{p_1,a}(n) e_{p_2,a}(n) \\
&= e(n_{p_1} a/p_1^{K_1}) e(n_{p_2} a/p_2^{K_2}) \\
&= \Big(\sum_{\chi_{p_1} \bmod p_1^{K_1}} c_{a,\chi_{p_1},p_1^{K_1}} \chi_{p_1}(n) + 1 \Big) \Big(\sum_{\chi_{p_2} \bmod p_2^{K_2}} c_{a,\chi_{p_2},p_2^{K_2}} \chi_{p_2}(n) + 1 \Big) \\
&= \Big(\sum_{\chi_{p_1} \bmod p_1^{K_1}} \varphi(p_1^{K_1})^{-1} \mathcal{G}_a(\bar\chi_{p_1}) \chi_{p_1}(n) + 1 \Big) \Big(\sum_{\chi_{p_2} \bmod p_2^{K_2}} \varphi(p_2^{K_2})^{-1} \mathcal{G}_a(\bar\chi_{p_2}) \chi_{p_2}(n) + 1 \Big) \\
&= \sum_{\chi_{p_1} \bmod p_1^{K_1}} \sum_{\chi_{p_2} \bmod p_2^{K_2}} \varphi(p_1)^{-1} \varphi(p_2^{K_2})^{-1} \mathcal{G}_a(\bar\chi_{p_1}) \mathcal{G}_a(\bar\chi_{p_2}) \chi_{p_1}(n) \chi_{p_2}(n) \\
&\quad + \sum_{\chi_{p_1} \bmod p_1^{K_1}} \varphi(p_1^{K_1})^{-1} \mathcal{G}_a(\bar\chi) \chi_{p_1}(n) + \sum_{\chi_{p_2} \bmod p_2^{K_2}} \varphi(p_2^{K_2})^{-1} \mathcal{G}_a(\bar\chi) \chi_{p_2}(n) + 1.
\end{aligned}$$

Or $\varphi(p_1^{K_1})^{-1} \varphi(p_2^{K_2})^{-1} = \varphi(p_1^{K_1} p_2^{K_2})^{-1} = \varphi(M)^{-1}$; $\chi_{p_1}(n)\chi_{p_2}(n) = \chi(n)$ où $\chi = \chi_{p_1}\chi_{p_2}$ modulo $p_1^{K_1} p_2^{K_2} = M$; et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_a(\bar\chi_{p_1}) \mathcal{G}_a(\bar\chi_{p_2}) &= \Big(\sideset{}{^*}\sum_{m \bmod p_1^{K_1}} \bar\chi_{p_1}(m, 1) e(ma/p_1^{K_1}) \Big) \Big(\sideset{}{^*}\sum_{m' \bmod p_2^{K_2}} \bar\chi_{p_2}(1, m') e(m'a/p_2^{K_2}) \Big) \\
&= \sideset{}{^*}\sum_{n \bmod p_1^{K_1} p_2^{K_2}} \bar\chi_{p_1}(n) \bar\chi_{p_2}(n) e_{p_1,a}(n) e_{p_2,a}(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_a(\bar{\chi}_{p_1})\mathcal{G}_a(\bar{\chi}_{p_2}) &= \sum_{n \bmod p_1^{K_1}p_2^{K_2}}^{*} \bar{\chi}(n)e(na/p_1^{K_1}p_2^{K_2}) \\
&= \sum_{n \bmod M}^{*} \bar{\chi}(n)e(na/M) \\
&= \mathcal{G}_a(\bar{\chi}).
\end{aligned}$$

Donc pour $M = p_1^{K_1}p_2^{K_2}$,

$$\begin{aligned}
e(na/M) = &\sum_{\chi \bmod M} \varphi(M)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(n) \\
&+ \sum_{\chi_{p_1} \bmod p_1^{K_1}} \varphi(p_1^{K_1})^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi_{p_1}(n) + \sum_{\chi_{p_2} \bmod p_2^{K_2}} \varphi(p_2^{K_2})^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi_{p_2}(n) + 1 \\
= &\sum_{\delta | M} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \varphi(M/\delta)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(n/\delta).
\end{aligned}$$

On peut donc écrire pour $\chi \bmod p_1^{K_1}p_2^{K_2}$: $c_{a,\chi,p_1^{K_1}p_2^{K_2}} = \varphi(p_1^{K_1}p_2^{K_2})^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})$.

De même par récurrence pour $\chi \bmod Np_i^{K_i}$ avec $(N, p_i^{K_i}) = 1$. La formule donnant $c_{a,\chi,M}$ est donc multiplicative par rapport à M et on a pour tout $M > 1$: $c_{a,\chi,M} = \varphi(M)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})$.

Revenons au cas où $M = 1$: Nous avons vu que χ est trivial et $c_{a,\chi,1} = 1$; on peut calculer $\varphi(1)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi}) = \mathcal{G}_a(\bar{\chi}) = 1$ donc la formule générale est aussi vérifiée dans le cas $M = 1$.

Finalement : $c_{a,\chi,M} = \varphi(M)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})$ pour tout $M \geqslant 1$. $\square$

La formule du début de cette section **4** s'écrit donc :

$$e(na/M) = \sum_{\delta | M} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \varphi(M/\delta)^{-1}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(n/\delta).$$

En utilisant la proposition **2.1** et le lemme **4.1**, on obtient directement l'expression des symboles modulaires en fonction des $\chi(n/\delta)$:

Proposition 4.2 : Pour x, r, f comme en **1**, on a :

$$P(x,r,f) = \sum_{\delta | M} \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi}) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j! \sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi(n/\delta)n^{-(j+1)},$$

où $\mathcal{G}_a(\bar{\chi}) = \sum_{u \bmod M/\delta} \bar{\chi}(u)e\big(ua/(M/\delta)\big)$, et la sommation porte sur tous les caractères de Dirichlet modulo M/δ.

5 : Opérateur U et fonction L attachée à f.

Dans cette partie, on exprime la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi(n/\delta)n^{-(j+1)}$ comme la valeur en $j+1$ de la fonction L attachée à la fonction $f|_kU_\delta$ tordue par le caractère χ.

On fixe $\delta \mid M$. Si $n/\delta \notin \mathbf{Z}$, $\chi(n/\delta) = 0$. Dans la somme, on effectue le changement de variable $m = n/\delta$, $m \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n/\delta) n^{-(j+1)} &= \sum_{\substack{n=1 \\ \delta \mid n}}^{\infty} a_n \chi(n/\delta) n^{-(j+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{m\delta} \chi(m) (m\delta)^{-(j+1)} \\ &= \delta^{-(j+1)} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m\delta} \chi(m) m^{-(j+1)}\end{aligned}$$

Rappelons que l'on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(nz)$, et l'action de l'opérateur U_δ s'exprime par :

$$f|_k U_\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\delta} q^n = \delta^{k/2-1} \sum_{u \bmod \delta} f|_k \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \delta^{k/2-1} \sum_{u \bmod \delta} f\Big((z+u)/\delta\Big).$$

On définit aussi la fonction L de Dirichlet attachée à f par $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, éventuellement tordue par un caractère ω : $L_f(s, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega(n) n^{-s}$.

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n/\delta) n^{-(j+1)} = \delta^{-(j+1)} L_{f|_k U_\delta}(j+1, \chi)$, et on peut écrire la proposition suivante :

Proposition 5.1 : Pour x, r, f comme en **1**, on a :

$$P(x,r,f) = \sum_{\delta \mid M} \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi}) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^{r-j} \mathrm{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j!\ \delta^{-(j+1)} L_{f|_k U_\delta}(j+1, \chi).$$

6 : Expression de $L_f(s)$ et $L_f(s,\omega)$ en produit eulérien.

Nous écrivons ici de manière générale le développement de la fonction L attachée à f comme un produit eulérien, c'est–à–dire un produit portant sur tous les nombres premiers.

Rappelons que comme f est une forme primitive et normalisée, on a l'égalité entre ses coefficients et ses valeurs propres pour tous les indices premiers avec le niveau de f : $a_n = \lambda_n$ pour $(n, C) = 1$.

De plus $f|_k T_n T_m = \sum_{d \mid (m,n)} \psi(d) d^{k-1} f|_k T_{mn/d^2}$ donc $a_n a_m = \sum_{d \mid (m,n)} \psi(d) d^{k-1} a_{mn/d^2}$. Et si $(n,m) = 1$ on a $a_{nm} = a_n a_m$, donc $L_f(s) = \prod_p \big(\sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r} p^{-rs} \big)$.

Or $T_p = U_p + \psi(p) p^{k-1} V_p$.

Ceci permet d'écrire : $\lambda_p \sum a_n q^n = \lambda_p f = f|_k T_p = \sum a_{np} q^n + \psi(p) p^{k-1} \sum a_{n/p} q^n$, donc pour tout n, $\lambda_p a_n = a_{np} + \psi(p)p^{k-1} a_{n/p}$ et pour $n = p^r$ $(r \geqslant 1)$, $a_p a_{p^r} = a_{p^{r+1}} + \psi(p)p^{k-1} a_{p^{r-1}}$, d'où $\big(\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_{p^r} X^r\big)\big(1 - a_p X + \psi(p)p^{k-1}X^2\big) = 1$. On a donc :

$$L_f(s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Soit maintenant ω un caractère fixé. $L_f(s,\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \omega(n) n^{-s}$, et on a $a_{nm}\omega(nm) = a_n\omega(n) a_m \omega(m)$ pour $(n,m) = 1$. On peut alors écrire $L_f(s,\omega) = \prod\limits_p \big(\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_{p^r}\omega(p^r) p^{-rs}\big)$, et après calcul, on a l'égalité : $\big(\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_{p^r}\omega(p^r) X^r\big)\big(1 - a_p\omega(p) X + \psi\omega^2(p) p^{k-1} X^2\big) = 1$. Donc :

$$L_f(s,\omega) = \prod_p (1 - a_p \omega(p) p^{-s} + \psi\omega^2(p) p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Ceci montre le résultat suivant :

Lemme 6.1 : En posant : $1 - a_p X + \psi(p)p^{k-1}X^2 = (1 - \alpha_p X)(1 - \alpha'_p X)$, on a $\alpha_p + \alpha'_p = a_p$, $\alpha_p \alpha'_p = \psi(p) p^{k-1}$ et :

$$L_f(s) = \prod_p \big[(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \alpha'_p p^{-s})\big]^{-1},$$
$$L_f(s,\omega) = \prod_p \big[(1 - \alpha_p \omega(p) p^{-s})(1 - \alpha'_p \omega(p) p^{-s})\big]^{-1}.$$

7 : Etude de $f|_k U_\delta$.

On montre ici le résultat suivant :

Lemme 7.1 : Pour $f \in S_k(C,\psi)$, on a : $f|_k U_\delta \in S_k(C\delta, \psi)$ et $f|_k U_\delta$ est fonction propre des T_p pour $(p, C\delta) = 1$ avec les mêmes valeurs propres λ_p que f.

Démonstration. —

7.1. — Si $f_1 \in M_k\big(\Gamma(N)\big)$ et $\sigma \in M_2(\mathbf{Z})$ avec $\det\sigma = m$ alors $f_1|_k\sigma \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$:

En effet, soient $f_1 \in M_k\big(\Gamma(N)\big)$, $\sigma \in M_2(\mathbf{Z})$ avec $\det\sigma = m$, et $\gamma \in \Gamma(Nm)$. On peut écrire $\gamma = I_2 + Nm\alpha$ avec $\alpha \in M_2(\mathbf{Z})$, où I_2 est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} f_1|_k\sigma\gamma &= f_1|_k\sigma(I_2 + Nm\alpha) \\ &= f_1|_k\sigma(I_2 + Nm\alpha)\sigma^{-1}\sigma \\ &= f_1|_k\big(\sigma I_2\sigma^{-1} + N\sigma\alpha(m\sigma^{-1})\big)\sigma \\ &= f_1|_k\big(I_2 + N\sigma\alpha(m\sigma^{-1})\big)\sigma. \end{aligned}$$

Or $m\sigma^{-1}$ est à coefficients dans $M_2(\mathbf{Z})$ donc $I_2 + N\sigma\alpha(m\sigma^{-1}) \in \Gamma(N)$ et f_1 est invariante sous l'action de cette matrice. Finalement $f_1|_k\sigma\gamma = f_1|_k\sigma$, donc $f_1|_k\sigma \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$. $\square$

7.2. — Si $f_1 \in M_k\big(\Gamma(N)\big)$ *alors* $f_1|_kV_m \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$ *ainsi que* $f_1|_kU_m$ *et* $f_1|_kT_m$ *pour* $(m,N)=1$ *:*

En effet, soit $f_1 \in M_k\big(\Gamma(N)\big)$.

$f_1|_kV_m = m^{-k/2}f_1|_k\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Or pour $\sigma = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on a $f_1|_k\sigma \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$ d'après *7.1*, donc $f_1|_kV_m \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$.

$f_1|_kU_m = m^{k/2-1}\sum\limits_{u \bmod m} f_1|_k\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & m\end{pmatrix}$. Or pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & m\end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$, on a encore d'après *7.1* $f_1|_k\sigma \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$, donc $f_1|_kU_m \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$.

Pour $(m,N)=1$, $f_1|_kT_m = \sum\limits_{d|m}\psi(d)d^{k-1}f_1|_kU_{m/d}V_d$. Or ce qui précède montre que pour $d \mid m$, $f_1|_kU_{m/d} \in M_k\big(\Gamma(Nm/d)\big)$ et $f_1|_kU_{m/d}V_d \in M_k\Big(\Gamma\big((Nm/d)d\big)\Big) = M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$. Donc $f_1|_kT_m \in M_k\big(\Gamma(Nm)\big)$. $\square$

Remarque : En fait on peut même montrer que $f_1|_kT_m \in M_k\big(\Gamma(N)\big)$ si $(m,N)=1$. Pour la démonstration générale, qui utilise des systèmes de représentants de $\Gamma_0(N)\backslash\Delta_m(N)$ où $\Delta_m(N) = \left\{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}), c \equiv 0 \bmod N, \det\gamma = m\right\}$, voir [16]. Dans ce qui précède, il s'agit d'une forme modulaire $f_1 \in M_k\big(\Gamma(N)\big)$ quelconque ; évidemment si f_1 est fonction propre des opérateurs de Hecke, on a $f_1|_kT_m = \lambda_k f_1$ donc $f_1|_kT_m \in M_k\big(\Gamma(N)\big)$ comme f_1.

7.3. — Retour à f :

Reprenons la fonction $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nq^n \in S_k(C,\psi)$ primitive normalisée. D'après *7.2*, pour $\delta \mid M$ fixé, $f|_kU_\delta \in S_k(C\delta,\psi)$ (et même $f|_kU_\delta \in S_k(C,\psi)$ si $\delta \mid C$).

De plus f est fonction propre des opérateurs T_p pour $(p,C)=1$ avec les valeurs propres λ_p. Or pour p premier avec $C\delta$, on a $(p,\delta)=1$ donc U_δ et T_p commutent, et on a aussi $(p,C)=1$ donc $f|_kT_p = \lambda_p f$; alors $f|_kU_\delta T_p = f|_kT_pU_\delta = \lambda_p f|_kU_\delta$, ce qui montre que $f|_kU_\delta$ est fonction propre des T_p pour $(p,C\delta)=1$ avec les mêmes valeurs propres λ_p que f. $\square$

8 : Passage de $L_{f|_kU_\delta}(j+1,\chi)$ à $L_f(j+1,\chi)$ et à des polynômes $\mathcal{A}_p(X)$.

Dans cette (longue) section, on utilise l'expression sous forme de produit eulérien de la fonction L attachée à f pour transformer la fonction L attachée à $f|_kU_\delta$ (qui apparaît dans les symboles modulaires) en le produit de L_f par un nombre fini de polynômes $\mathcal{A}_p(X)$ très simples ;

autrement dit, on remplace l'action de U_δ par un polynôme dont les coefficients dépendent de f.

Fixons $\delta \mid M$ et appelons $S(n)$ le support de n : $S(n) = \{p, p \text{ premier}, p \mid n\}$.

Lemme 8.1 : Première expression de $L_{f|_kU_\delta}(s)$:

$$L_{f|_kU_\delta}(s) = \left(\sum_{\substack{n \text{ tel que} \\ S(n)\subset S(C\delta)}} a_{n\delta}n^{-s}\right) \times \prod_{p\not| C\delta}\left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p)p^{k-1-2s}\right)^{-1}.$$

Démonstration. — On définit pour simplifier l'écriture $C' = C\delta$ et $f' = f|_kU_\delta$ avec pour coefficients les $a'_n = a_{n\delta}$:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n q^n = f|_kU_\delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\delta}q^n.$$

Avec ces notations, on a $f' \in S_k(C', \psi)$ et pour $(p, C') = 1$, $f'|_kT_p = \lambda_p f'$ (d'après le lemme **7.1**).

$L_f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod\limits_p (1 - a_p p^{-s} + \psi(p)p^{k-1-2s})^{-1}$.

$L_{f'}(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a'_m m^{-s} = \prod\limits_p \sum\limits_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty} \sum\limits_{r=0}^{\infty} a'_{np^r}(np^r)^{-s} = \prod\limits_p \sum\limits_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty} n^{-s}\sum\limits_{r=0}^{\infty} a'_{np^r}p^{-rs}$.

Fixons p premier qui ne divise pas C' et étudions l'expression $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a'_{np^r}p^{-rs}$:

On a $T_p = U_p + \psi(p)p^{k-1}V_p$. Ceci permet d'écrire :

$\lambda_p \sum a'_n q^n = \lambda_p f' = f'|_kT_p = f'|_kU_p + \psi(p)p^{k-1}f'|_kV_p = \sum a'_{np}q^n + \psi(p)p^{k-1}\sum a'_{n/p}q^n$, donc en identifiant les coefficients, on obtient pour tout n, $\lambda_p a'_n = a'_{np} + \psi(p)p^{k-1}a'_{n/p}$. On change alors n en np^r avec $(n,p) = 1$ et $r \geqslant 1$: $a'_{np^{r+1}} - \lambda_p a'_{np^r} + \psi(p)p^{k-1}a'_{np^{r-1}} = 0$, soit encore pour $(n,p) = 1$ et $r \geqslant 2$: $a'_{np^r} - \lambda_p a'_{np^{r-1}} + \psi(p)p^{k-1}a'_{np^{r-2}} = 0$.

D'où le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{r=0}^{\infty} a'_{np^r}X^r\Big)\big(1 - \lambda_p X + \psi(p)p^{k-1}X^2\big) \\
&\qquad = a'_n + (a'_{np} - \lambda_p a'_n)X + \sum_{r=2}^{\infty}(a'_{np^r} - \lambda_p a'_{np^{r-1}} + \psi(p)p^{k-1}a'_{np^{r-2}})X^r \\
&\qquad = a'_n + (a_{\delta np} - a_p a_{\delta n})X \\
&\qquad = a'_n
\end{aligned}$$

car p est premier avec δn (premier avec n et avec $C' = C\delta$) ce qui implique $a_{\delta np} = a_p a_{\delta n}$ (propriété des valeurs propres de f).

Substituons p^{-s} à X : $\big(\sum\limits_{r=0}^{\infty} a'_{np^r}p^{-rs}\big)\big(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p)p^{k-1-2s}\big) = a'_n$ ce qui revient à :

$\sum\limits_{r=0}^{\infty} a'_{np^r}p^{-rs} = a'_n\big(1-\lambda_p p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s}\big)^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned}
L_{f'}(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} a'_m m^{-s} \\
&= \prod_p \sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty} n^{-s} \sum_{r=0}^{\infty} a'_{np^r}p^{-rs} \\
&= \prod_p \sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty} a'_n n^{-s}\big(1-\lambda_p p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s}\big)^{-1},
\end{aligned}$$

et on recommence avec $\sum\limits_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty} a'_n n^{-s} = \prod\limits_{p'\neq p} \sum\limits_{\substack{n=1\\(n,p')=1}}^{\infty} n^{-s} \sum\limits_{r=0}^{\infty} a'_{np'^r}p'^{-rs}$, où le produit porte sur les nombres premiers p' autres que p : on étudie l'expression $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a'_{np'^r}p'^{-rs}$ pour p' fixé ne divisant pas C', ce qui donne :

$$L_{f'}(s) = \Bigg(\prod_{p\nmid C'} \sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty} a'_n n^{-s}\Bigg) \times \prod_{p\nmid C'} \big(1-\lambda_p p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s}\big)^{-1}$$

$$L_{f'}(s) = \Bigg(\sum_{\substack{n \text{ tel que}\\ S(n)\subset S(C')}} a'_n n^{-s}\Bigg) \times \prod_{p\nmid C'} \big(1-\lambda_p p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s}\big)^{-1}.$$

Le lemme **8.1** est démontré. □

Nous devons fixer d'autres notations :

Définition 8.2 : Nous avons déjà défini le support de n : $S(n) = \{p, p \text{ premier}, p \mid n\}$. Posons $S(M)\cup S(C) = \{q_1,\cdots,q_t\}$ où les q_i sont des nombres premiers distincts, $M = q_1^{\alpha_1}\cdots q_t^{\alpha_t}$, $\alpha_i \geqslant 0$, $C = q_1^{\beta_1}\cdots q_t^{\beta_t}$, $\beta_i \geqslant 0$, et pour $\delta \mid M$, $\delta = q_1^{\gamma_1}\cdots q_t^{\gamma_t}$, $0 \leqslant \gamma_i \leqslant \alpha_i$. Ainsi le support de C' est $S(C') = S(C\delta) = \{q_1,\cdots,q_t\}$.

Nous allons maintenant exprimer la somme $\sum\limits_{\substack{n \text{ tel que}\\ S(n)\subset S(C')}} a'_n n^{-s}$ à l'aide de polynômes :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \text{ tel que}\\ S(n)\subset S(C')}} a'_n n^{-s} &= \sum_{\substack{n \text{ tel que}\\ S(n)\subset S(C')}} a_{n\delta} n^{-s} \\
&= \prod_{q_i\mid C'} \sum_{m=0}^{\infty} a_{(q_i{}^m\, q_i{}^{\gamma_i})} q_i^{-ms}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{n \text{ tel que} \\ S(n)\subset S(C')}} a'_n n^{-s} = \prod_{q_i|C'} q_i^{\gamma_i s} \sum_{m=0}^{\infty} a_{q_i{}^{m+\gamma_i}} q_i^{-(m+\gamma_i)s}$$

$$= \delta^s \prod_{q_i|C'} \sum_{m=\gamma_i}^{\infty} a_{q_i{}^m} q_i^{-ms}.$$

Or le facteur eulérien correspondant au nombre premier q_i dans $L_f(s)$ s'écrit : $\sum_{m=0}^{\infty} a_{q_i{}^m} X^m = \left(1 - \lambda_{q_i} X + \psi(q_i) q_i^{k-1} X^2\right)^{-1}$. Alors

$$\sum_{m=\gamma_i}^{\infty} a_{q_i{}^m} X^m = \left(1 - \lambda_{q_i} X + \psi(q_i) q_i^{k-1} X^2\right)^{-1} - \sum_{m=0}^{\gamma_i - 1} a_{q_i{}^m} X^m$$

$$= \left(1 - \lambda_{q_i} X + \psi(q_i) q_i^{k-1} X^2\right)^{-1} \times \Big[1 - \sum_{m=0}^{\gamma_i-1} a_{q_i{}^m} X^m \left(1 - \lambda_{q_i} X + \psi(q_i) q_i^{k-1} X^2\right)\Big].$$

Définition 8.3 : Posons $\mathcal{A}_{q_i}(X) = 1 - \sum_{m=0}^{\gamma_i-1} a_{q_i^m} X^m (1 - a_{q_i} X + \psi(q_i) q_i^{k-1} X^2)$. C'est un polynôme de degré au plus $\gamma_i + 1$, dont les coefficients sont des entiers algébriques. Remarquons que cette définition inclut le cas $\gamma_i = 0$, où l'on a $\mathcal{A}_{q_i}(X) = 1$.

On a alors :

$$\sum_{m=\gamma_i}^{\infty} a_{q_i{}^m} X^m = \left(1 - \lambda_{q_i} X + \psi(q_i) q_i^{k-1} X^2\right)^{-1} \times \mathcal{A}_{q_i}(X),$$

$$\sum_{\substack{n \text{ tel que} \\ S(n)\subset S(C')}} a'_n n^{-s} = \delta^s \prod_{q_i|C'} \left(1 - \lambda_{q_i} q_i^{-s} + \psi(q_i) q_i^{k-1-2s}\right)^{-1} \mathcal{A}_{q_i}(q_i^{-s})$$

$$\sum_{\substack{n \text{ tel que} \\ S(n)\subset S(C')}} a'_n n^{-s} = \delta^s \prod_{p|C'} \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1} \times \prod_{p|C'} \mathcal{A}_p(p^{-s}),$$

où l'on note pour simplifier l'écriture p l'un des q_i du support de C', avec $\gamma = \gamma_i$ correspondant. Or $C' = C\delta$, et pour $p \mid C$, on a $\mathcal{A}_p(X) = 1$; on peut donc écrire :

$$\sum_{\substack{n \text{ tel que} \\ S(n)\subset S(C')}} a'_n n^{-s} = \delta^s \prod_{p|C'} \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1} \times \prod_{p|\delta} \mathcal{A}_p(p^{-s}).$$

Nous pouvons maintenant exprimer $L_{f|_k U_\delta}$ en fonction de L_f et d'un nombre fini de polynômes $\mathcal{A}_p(X)$:

Lemme 8.4 : Deuxième expression de $\mathrm{L}_{f|_k U_\delta}$:

$$L_{f|_k U_\delta}(s) = \delta^s \times \prod_{p|\delta} \mathcal{A}_p(p^{-s}) \times L_f(s).$$

Preuve. —

$$L_{f'}(s) = \left(\sum_{\substack{n \text{ tel que} \\ S(n) \subset S(C')}} a'_n n^{-s} \right) \times \prod_{p \nmid C'} \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1} \qquad \text{(lemme } \mathbf{8.1}\text{)}$$

$$= \delta^s \prod_{p \mid C'} \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1} \times \prod_{p \mid \delta} \mathcal{A}_p(p^{-s}) \times \prod_{p \nmid C'} \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

$$= \delta^s \times \prod_{p \mid \delta} \mathcal{A}_p(p^{-s}) \times \prod_{p} \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \psi(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

$$= \delta^s \times \prod_{p \mid \delta} \mathcal{A}_p(p^{-s}) \times L_f(s). \qquad \square$$

On peut de la même manière avec un caractère ω fixé, exprimer $L_{f|_k U_\delta}(s, \omega)$ en fonction de $L_f(s, \omega)$ et des polynômes $\mathcal{A}_p(X)$. On a par définition :

$$L_f(s, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega(n) n^{-s} = \prod_p \left[(1 - \alpha_p \omega(p) p^{-s})(1 - \alpha'_p \omega(p) p^{-s})\right]^{-1}.$$

Il suffit de reprendre l'expression du lemme **8.4** en remplaçant p^{-s} par $\omega(p) p^{-s}$ ou q_i^{-s} par $\omega(q_i) q_i^{-s}$. On a alors pour $q_i \mid C'$:

$$\mathcal{A}_{q_i}(\omega(q_i) {q_i}^{-s}) = 1 - \sum_{m=0}^{\gamma_i - 1} a_{q_i^m} \omega(q_i^m) {q_i}^m (1 - a_{q_i} \omega(q_i) q_i + \psi \omega^2(q_i) q_i^{k-1} {q_i}^2),$$

avec aussi $\mathcal{A}_{q_i}(\omega(q_i) {q_i}^{-s}) = 1$ si $\gamma_i = 0$; et l'on peut écrire :

Lemme 8.5 : Expression de $L_{f|_k U_\delta}(s, \omega)$ pour un caractère ω :

$$L_{f|_k U_\delta}(s, \omega) = \delta^s \times \prod_{p \mid \delta} \mathcal{A}_p(\omega(p) p^{-s}) \times L_f(s, \omega).$$

Nous montrons maintenant, en utilisant une technique due à Rankin, comment la définition des polynômes $\mathcal{A}_p(X)$ peut être considérablement simplifiée, à l'aide du lemme suivant :

Lemme 8.6 : Si $\sum_{r=0}^{\infty} a(r) X^r = \dfrac{1}{(1 - \alpha X)(1 - \alpha' X)}$, alors on a pour tout r : $a(r) = \dfrac{\alpha^{r+1} - \alpha'^{r+1}}{\alpha - \alpha'} = \sum_{m=0}^{r} \alpha^{r-m} \alpha'^m$.

Preuve. — Si $\alpha \neq \alpha'$:

$$\frac{1}{(1 - \alpha X)(1 - \alpha' X)} = \frac{1}{\alpha - \alpha'} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha X} - \frac{\alpha'}{1 - \alpha' X}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha (\alpha X)^n - \alpha' (\alpha' X)^n)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{n+1} - \alpha'^{n+1}) X^n.$$

De plus, $a(r)$ est un polynôme en α et α'. En se plaçant dans le corps des séries formelles en X à coefficients dans $\mathbf{Q}(\alpha,\alpha')$ où α et α' sont deux indéterminées, on a formellement $a(r) = \dfrac{\alpha^{r+1}-\alpha'^{r+1}}{\alpha-\alpha'} = \sum\limits_{m=0}^{r} \alpha^{r-m}\alpha'^{m}$. Donc on a bien l'égalité même si les nombres α et α' sont égaux. On peut bien sûr retrouver ce résultat par le calcul (dans le cas où $\alpha=\alpha'$) : d'une part le polynôme $a(r)=(r+1)\alpha^r$ et d'autre part $\dfrac{1}{(1-\alpha X)^2}$ est α^{-1} fois la dérivée de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha X)^n$. □

Les polynômes $\mathcal{A}_p(X)$ prennent alors la forme :

Lemme 8.7 : Pour $p \mid \delta$ (p est l'un des q_i du support de C', avec $\gamma=\gamma_i$ correspondant), on a :

$$\mathcal{A}_p(X) = a_{p^\gamma}X^\gamma - \psi(p)p^{k-1}a_{p^{\gamma-1}}X^{\gamma+1},$$

et pour $p \mid C$, $p \not\mid \delta$, $\mathcal{A}_p(X)=1$.

Preuve. —

$$L_f(s) = \prod_p \Big(\sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r}p^{-rs}\Big) = \prod_p (1-a_p p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Définition 8.8 : Pour chaque p, posons $1-a_pX+\psi(p)p^{k-1}X^2 = (1-\alpha_pX)(1-\alpha'_pX)$.

Reprenons la preuve du lemme **8.7** : avec ces notations,

$$L_f(s) = \prod_p \big[(1-\alpha_p p^{-s})(1-\alpha'_p p^{-s})\big]^{-1}.$$

Fixons p. On a $\alpha_p+\alpha'_p = a_p$, et $\alpha_p\alpha'_p = \psi(p)p^{k-1}$. On applique le lemme **8.6** avec $a(r)=a_{p^r}$, $\alpha=\alpha_p$, et $\alpha'=\alpha'_p$ ($\alpha_p\neq\alpha'_p$) : $a_{p^m} = \dfrac{\alpha_p^{m+1}-{\alpha'_p}^{m+1}}{\alpha_p-\alpha'_p} = \sum\limits_{k=0}^{m}\alpha_p^{m-k}{\alpha'_p}^{k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_p(X) &= 1-\sum_{m=0}^{\gamma-1} a_{p^m}X^m(1-a_pX+\psi(p)p^{k-1}X^2)\\
&= 1-\sum_{m=0}^{\gamma-1}\frac{\alpha_p^{m+1}-{\alpha'_p}^{m+1}}{\alpha_p-\alpha'_p}X^m(1-\alpha_pX)(1-\alpha'_pX)\\
&= 1-\frac{\alpha_p}{\alpha_p-\alpha'_p}\sum_{m=0}^{\gamma-1}\alpha_p^mX^m(1-\alpha_pX)(1-\alpha'_pX)+\frac{\alpha'_p}{\alpha_p-\alpha'_p}\sum_{m=0}^{\gamma-1}{\alpha'_p}^mX^m(1-\alpha_pX)(1-\alpha'_pX)\\
&= 1-\frac{\alpha_p}{\alpha_p-\alpha'_p}\frac{(1-\alpha_p^\gamma X^\gamma)}{(1-\alpha_pX)}(1-\alpha_pX)(1-\alpha'_pX)+\frac{\alpha'_p}{\alpha_p-\alpha'_p}\frac{(1-{\alpha'_p}^\gamma X^\gamma)}{(1-\alpha'_pX)}(1-\alpha_pX)(1-\alpha'_pX)\\
&= 1-\frac{1}{\alpha_p-\alpha'_p}\Big[\alpha_p(1-\alpha_p^\gamma X^\gamma)(1-\alpha'_pX)+\alpha'_p(1-{\alpha'_p}^\gamma X^\gamma)(1-\alpha_pX)\Big]\\
&= 1-\frac{1}{\alpha_p-\alpha'_p}\Big[\alpha_p(1-\alpha'_pX-\alpha_p^\gamma X^\gamma+\alpha_p^\gamma\alpha'_pX^{\gamma+1})+\alpha'_p(1-\alpha_pX-{\alpha'_p}^\gamma X^\gamma+{\alpha'_p}^\gamma\alpha_pX^{\gamma+1})\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_p(X) &= 1 - \frac{1}{\alpha_p - \alpha'_p}\Big[\alpha_p - \alpha'_p - (\alpha_p^{\gamma+1} - {\alpha'_p}^{\gamma+1})X^\gamma + \alpha_p\alpha'_p(\alpha_p^\gamma - {\alpha'_p}^{\gamma})X^{\gamma+1}\Big] \\
&= \frac{\alpha_p^{\gamma+1} - {\alpha'_p}^{\gamma+1}}{\alpha_p - \alpha'_p}X^\gamma - \alpha_p\alpha'_p\frac{\alpha_p^\gamma - {\alpha'_p}^{\gamma}}{\alpha_p - \alpha'_p}X^{\gamma+1} \\
&= a_{p^\gamma}X^\gamma - \psi(p)p^{k-1}a_{p^{\gamma-1}}X^{\gamma+1}.
\end{aligned}
$$

Dans le cas où $\alpha = \alpha'$, on remplace $\dfrac{\alpha_p^{m+1} - {\alpha'_p}^{m+1}}{\alpha_p - \alpha'_p}$ par $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_p^{m-k}{\alpha'_p}^k$. Comme a_{p^m} est un entier algébrique, c'est un polynôme en α_p et α'_p, et l'égalité formelle sur le polynôme $\mathcal{A}_p$ dans le corps $\mathbf{Q}(\alpha,\alpha')[[X]]$ reste valable. □

Nous pouvons finalement exprimer les symboles modulaires en fonction de $L_f(s,\chi)$ et des polynômes $\mathcal{A}_p(X)$. Il suffit de remplacer dans la proposition **5.1** l'expression de $L_{f|_kU_\delta}(j+1,\chi)$ obtenue par le lemme **8.5**, avec $s = j+1$:

Proposition 8.9 : Pour x, r, f comme en **1** et avec les notations **8.2**, on a :

$$
P(x,r,f) = \sum_{\delta|M}\varphi(M/\delta)^{-1}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\mathcal{G}_a(\bar\chi)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}x^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j!\prod_{p|\delta}\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)})L_f(j+1,\chi)
$$

avec $\mathcal{G}_a(\bar\chi) = \sum\limits_{u \bmod M/\delta}\bar\chi(u)e\big(ua/(M/\delta)\big)$, $\mathcal{A}_p(X) = a_{p^\gamma}X^\gamma - \psi(p)p^{k-1}a_{p^{\gamma-1}}X^{\gamma+1}$ où $p = q_i$, $\gamma = \gamma_i$ correspondant, et $L_f(s,\chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi(n)n^{-s}$.

9 : Une certaine série d'Eisenstein.

Dans cette partie, on établit l'existence d'une série d'Eisenstein G et on exprime le produit de Rankin de f et G en fonction de séries L attachées à f.

Fixons $\chi \bmod M/\delta$ et choisissons un caractère auxiliaire $\xi \bmod B$ tel que $\xi\chi(-1) = (-1)^\ell$ avec $B \geqslant 1$ et $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$, caractère fixé lui aussi. **On supposera désormais que** $(C, MB^2) = 1$**.**

Remarquons que l'on peut supposer ξ primitif modulo B et $B = \mathrm{cond}\,\xi$ le conducteur de ξ. De plus d'après Khoai [5], on peut aussi choisir ξ de telle sorte que $L_f(j+\ell,\xi) \neq 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant r$; cette condition serait automatiquement satisfaite si $j+\ell > (k+1)/2$ parce que $L_f(s)$ est un produit eulérien absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s) > (k+1)/2$.

D'après Hecke [2, Satz 44] ou Miyake [10, theorem 4.7.1], il existe une série d'Eisenstein $G = G_\delta = E_\ell(\xi,\chi) \in S_\ell\big(\Gamma_0(MB/\delta),\xi\chi\big)$ telle que : $L_G(s) = L(s,\xi) \times L(s-\ell+1,\chi)$, donnée explicitement par : $G(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{d|n}\xi(d)\chi(n/d)d^{\ell-1}q^n$. Le terme constant de cette série est nul si ξ et χ ne sont pas triviaux simultanément. Or on peut montrer que χ n'est jamais trivial.

En effet si $\chi \bmod M/\delta$ est trivial,

$$\mathcal{G}_a(\bar{\chi}) = \sum_{\substack{n \bmod M/\delta \\ (n,M/\delta)=1}} e\Big(\frac{na}{M/\delta}\Big) = \sum_{n \bmod M/\delta} e\Big(\frac{na}{M/\delta}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } (M/\delta) \not| \, a \\ M/\delta & \text{sinon} \end{cases} = 0$$

car M/δ est premier avec a du fait que $\delta \mid M$ et $(a, M) = 1$. Donc le terme correspondant à un tel χ disparaît et on peut supposer dans la somme que $\chi \bmod M/\delta$ n'est pas trivial. Par conséquent le terme constant de $G(z)$ est nul.

Introduisons de nouvelles notations :

Définition 9.1 : Ecrivons $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$ et $1 - b_p X + \xi\chi(p)p^{k-1}X^2 = (1-\beta_p X)(1-\beta'_p X)$. On définit la série de Dirichlet et le produit de Rankin attachés à f et G :

$$\begin{aligned} L_{f,G}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s}, \\ D_{f,G}(s) &= \prod_p \big[(1-\alpha_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha_p\beta'_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_p p^{-s})\big]^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$L_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = \prod_p (1 - b_p p^{-s} + \xi\chi(p)p^{\ell-1-2s})^{-1} = \prod_p \big[(1-\beta_p p^{-s})(1-\beta'_p p^{-s})\big]^{-1}.$$

On peut calculer β_p et β'_p :

$$\begin{aligned} L_G(s) &= L(s,\xi)L(s-\ell+1,\chi) \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n n^{-s}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \chi(m)m^{\ell-1-s}\Big) \\ &= \prod_p (1-\xi(p)p^{-s})^{-1} \prod_p (1-\chi(p)p^{\ell-1-s})^{-1} \\ &= \prod_p \big[(1-\xi(p)p^{-s})(1-\chi(p)p^{\ell-1}p^{-s})\big]^{-1}, \end{aligned}$$

d'où $\beta_p = \xi(p)$ et $\beta'_p = \chi(p)p^{\ell-1}$ à l'ordre près. Alors :

$$\begin{aligned} D_{f,G}(s) &= \prod_p \big[(1-\alpha_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha_p\beta'_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_p p^{-s})\big]^{-1} \\ &= \prod_p \big[(1-\alpha_p\xi(p)p^{-s})(1-\alpha'_p\xi(p)p^{-s})(1-\alpha_p\chi(p)p^{\ell-1}p^{-s})(1-\alpha'_p\chi(p)p^{\ell-1}p^{-s})\big]^{-1} \\ &= L_f(s,\xi) \times L_f(s-\ell+1,\chi). \end{aligned}$$

Nous écrivons :

Lemme 9.2 : Avec les notations de **9.1**, on a :

$$D_{f,G}(s) = L_f(s,\xi) \times L_f(s-\ell+1,\chi).$$

10 : Lemme de Rankin et expression des symboles modulaires en fonction de $L_{f,G}(j+\ell)$.

A l'aide du lemme de Rankin, nous donnons une autre expression du produit de Rankin de f et G, qui permet d'établir une formule pour les symboles modulaires en fonction des valeurs de la série L de Dirichlet attachée à f et G.

Lemme 10.1 : Lemme de Rankin :

Si $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a(r)X^r = \dfrac{1}{(1-\alpha X)(1-\alpha' X)}$ et $\sum\limits_{r=0}^{\infty} B(r)X^r = \dfrac{1}{(1-\beta X)(1-\beta' X)}$, alors on a :

$$\sum_{r=0}^{\infty} a(r)B(r)X^r = \frac{1-\alpha\alpha'\beta\beta' X^2}{(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)}.$$

Démonstration.

On a pour tout r d'après le lemme **8.6** : $a(r) = \dfrac{\alpha^{r+1}-\alpha'^{r+1}}{\alpha-\alpha'}$ ainsi que $B(r) = \dfrac{\beta^{r+1}-\beta'^{r+1}}{\beta-\beta'}$ (en supposant $\alpha \neq \alpha'$ et $\beta \neq \beta'$).

$$\begin{aligned}
(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')X\sum_{r=0}^{\infty} a(r)B(r)X^r &\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}(\alpha^{r+1}-\alpha'^{r+1})(\beta^{r+1}-\beta'^{r+1})X^{r+1}\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\big[(\alpha\beta)^{r+1}-(\alpha\beta')^{r+1}-(\alpha'\beta)^{r+1}+(\alpha'\beta')^{r+1}\big]X^{r+1}\\
&= \big(\frac{1}{1-\alpha\beta X}-1\big)-\big(\frac{1}{1-\alpha\beta' X}-1\big)-\big(\frac{1}{1-\alpha'\beta X}-1\big)+\big(\frac{1}{1-\alpha'\beta' X}-1\big)\\
&= \frac{1}{1-\alpha\beta X}-\frac{1}{1-\alpha\beta' X}-\frac{1}{1-\alpha'\beta X}+\frac{1}{1-\alpha'\beta' X},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')X(1-\alpha\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha'\beta' X)\sum_{r=0}^{\infty} a(r)B(r)X^r &\\
= (1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha'\beta' X)-(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha'\beta' X)&\\
-(1-\alpha\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)+(1-\alpha\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta X).&
\end{aligned}$$

Si aucun des nombres α, α', β, β' n'est nul, alors ce dernier polynôme et le polynôme $(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')X(1-\alpha\alpha'\beta\beta' X^2)$, tous deux de degré 3 (car pour chacun le coefficient de X^3 est $-\alpha\alpha'\beta\beta'(\alpha-\alpha')(\beta-\beta') \neq 0$), coïncident aux points $(\alpha\beta)^{-1}$, $(\alpha\beta')^{-1}$, $(\alpha'\beta)^{-1}$, $(\alpha'\beta')^{-1}$ et 0, donc ils sont égaux et on a le résultat.

Si $\alpha = \alpha'$ ou $\beta = \beta'$, on remplace $\dfrac{\alpha^{r+1}-\alpha'^{r+1}}{\alpha-\alpha'}$ par $\sum\limits_{m=0}^{r}\alpha^{r-m}\alpha'^m = (r+1)\alpha^r$ ou $\dfrac{\beta^{r+1}-\beta'^{r+1}}{\beta-\beta'}$ par $\sum\limits_{m=0}^{r}\beta^{r-m}\beta'^m = (r+1)\beta^r$ et les calculs sont formellement les mêmes.

Si par exemple α' est nul, alors $\dfrac{1}{1-\alpha X} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r X^r$; $a(r) = \alpha^r$; $\sum_{r=0}^{\infty} a(r)B(r)X^r = \sum_{r=0}^{\infty} B(r)(\alpha X)^r = \dfrac{1}{(1-\beta\alpha X)(1-\beta'\alpha X)}$ et le lemme est aussi vérifié. □

Utilisons le lemme de Rankin pour chaque p avec $a(r) = a_{p^r}$, $B(r) = b_{p^r}$, $\alpha = \alpha_p$, $\alpha' = \alpha'_p$, $\beta = \beta_p$ et $\beta' = \beta'_p$. Comme $\beta_p = \xi(p)$, $\beta'_p = \chi(p)p^{\ell-1}$ et $\xi(p)$ ainsi que $\chi(p)$ sont des racines de l'unité, on a $\beta_p \neq \beta'_p$. Avec les mêmes réserves que dans le lemme **8.7** sur l'égalité entre α_p et α'_p, on obtient :

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r} X^r = \left[(1-\alpha_p X)(1-\alpha'_p X)\right]^{-1},$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_{p^r} X^r = \left[(1-\beta_p X)(1-\beta'_p X)\right]^{-1},$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r} b_{p^r} X^r = (1-\alpha_p\alpha'_p\beta_p\beta'_p X^2) \times \left[(1-\alpha_p\beta_p X)(1-\alpha_p\beta'_p X)(1-\alpha'_p\beta_p X)(1-\alpha'_p\beta'_p X)\right]^{-1}.$$

Or $\alpha_p\alpha'_p = \psi(p)p^{k-1}$, $\beta_p = \xi(p)$ et $\beta'_p = \chi(p)p^{\ell-1}$, donc on peut écrire :

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r} b_{p^r} X^r = (1-\psi\xi\chi(p)p^{k+\ell-2}X^2) \times \left[(1-\alpha_p\beta_p X)(1-\alpha_p\beta'_p X)(1-\alpha'_p\beta_p X)(1-\alpha'_p\beta'_p X)\right]^{-1}.$$

Alors :

$$\prod_p \sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r} b_{p^r} p^{-rs} = \prod_p (1-\psi\xi\chi(p)p^{k+\ell-2-2s})$$
$$\times \prod_p \left[(1-\alpha_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha_p\beta'_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_p p^{-s})\right]^{-1},$$

d'où :

Lemme 10.2 : Avec les notations rappelées en **9.1** et $L_{f,G}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s}$, on a :

$$L_{f,G}(s) = L(2s+2-k-\ell, \psi\xi\chi)^{-1} \times D_{f,G}(s).$$

En comparant cette expression et celle du lemme **9.2** : $D_{f,G}(s) = L_f(s,\xi) \times L_f(s-\ell+1,\chi)$, on obtient immédiatement : $L_{f,G}(s) = L(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi)^{-1} \times L_f(s,\xi) \times L_f(s-\ell+1,\chi)$, ou encore $L_f(s-\ell+1,\chi) = L(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi) \times L_f(s,\xi)^{-1} \times L_{f,G}(s)$. Remplaçons dans l'expression de la proposition **8.9** avec $s = j+\ell$; nous pouvons écrire :

Proposition 10.3 : Pour x, r, f comme en **1**, et les notations rappelées en **8.9**, **9.1**, **10.2**, et avec $(C, MB^2) = 1$, on a :

$$P(x,r,f) = \sum_{\delta | M} \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar\chi) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j!$$
$$\times \prod_{p|\delta} \mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)}) \times L(2j+\ell-k+2, \psi\xi\chi) \times L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \times L_{f,G}(j+\ell).$$

11 : Généralisation du lemme de Rankin et expression des symboles modulaires comme une convolution.

L'objectif de cette (longue) section est de donner une expression des symboles modulaires en fonction non plus du produit $L_f(j+\ell,\xi)^{-1}L_{f,G}(j+\ell)$ mais de $L_{f|_kU_\delta,G}(j+\ell)$, à l'aide d'un lemme de Rankin plus général ; nous obtenons une expression proche de celle de la proposition **10.3**, corrigée par un produit fini de facteurs explicites (proposition **11.5**).

Lemme 11.1 : Lemme de Rankin généralisé :

Si $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a(r)X^r = \dfrac{1}{(1-\alpha X)(1-\alpha' X)}$, $\sum\limits_{r=0}^{\infty} A(r)X^r = \dfrac{P(X)}{(1-\alpha X)(1-\alpha' X)}$, avec $P(X) = 1 - \left(\sum\limits_{m=0}^{\gamma-1} a(m)X^m\right)\left(1-a(1)X+\alpha\alpha' X^2\right)$ et $\sum\limits_{r=0}^{\infty} B(r)X^r = \dfrac{1}{(1-\beta X)(1-\beta' X)}$, et si on pose $Q(X) = \sum\limits_{m=0}^{\gamma-1} a(m)B(m)X^m$, alors on a :

$$\sum_{r=0}^{\infty} A(r)B(r)X^r = \frac{1-\alpha\alpha'\beta\beta' X^2}{(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)} - Q(X).$$

Démonstration. — On suppose que $\alpha \neq \alpha'$ et $\beta \neq \beta'$. On a par le lemme **8.6** : $a(r) = \dfrac{\alpha^{r+1}-\alpha'^{r+1}}{\alpha-\alpha'}$ et $B(r) = \dfrac{\beta^{r+1}-\beta'^{r+1}}{\beta-\beta'}$. Posons $P(X) = \sum\limits_{m=0}^{\gamma+1} c(m)X^m$, alors $\sum\limits_{r=0}^{\infty} A(r)X^r = P(X)\times\sum\limits_{r=0}^{\infty} a(r)X^r = \left(\sum\limits_{m=0}^{\gamma+1} c(m)X^m\right)\left(\sum\limits_{r=0}^{\infty} a(r)X^r\right)$, donc $A(r) = \sum\limits_{m=0}^{\gamma+1} c(m)a(r-m)$ avec la convention $a(r)=0$ si $r<0$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} A(r)B(r)X^r = \sum_{m=0}^{\gamma+1} c(m)\sum_{r=0}^{\infty} a(r-m)B(r)X^r = \sum_{m=0}^{\gamma+1} c(m)\sum_{r=m}^{\infty} a(r-m)B(r)X^r,$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')X\sum_{r=m}^{\infty} a(r-m)B(r)X^r\\
&\quad= \sum_{r=m}^{\infty}(\alpha^{r-m+1}-\alpha'^{r-m+1})(\beta^{r+1}-\beta'^{r+1})X^{r+1}\\
&\quad= \sum_{r=0}^{\infty}(\alpha^{r+1}-\alpha'^{r+1})(\beta^{m+r+1}-\beta'^{m+r+1})X^{m+r+1}\\
&\quad= X^m\sum_{r=0}^{\infty}\left[\beta^m(\alpha\beta)^{r+1}-\beta'^m(\alpha\beta')^{r+1}-\beta^m(\alpha'\beta)^{r+1}+\beta'^m(\alpha'\beta')^{r+1}\right]X^{r+1}\\
&\quad= X^m\left[\beta^m\left(\frac{1}{1-\alpha\beta X}-1\right)-\beta'^m\left(\frac{1}{1-\alpha\beta' X}-1\right)-\beta^m\left(\frac{1}{1-\alpha'\beta X}-1\right)+\beta'^m\left(\frac{1}{1-\alpha'\beta' X}-1\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= X^m\Big[\frac{\beta^m}{1-\alpha\beta X} - \frac{\beta'^m}{1-\alpha\beta' X} - \frac{\beta^m}{1-\alpha'\beta X} + \frac{\beta'^m}{1-\alpha'\beta' X}\Big],$$

$$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')X\sum_{r=0}^{\infty} A(r)B(r)X^r$$

$$= \sum_{m=0}^{\gamma+1} c(m)X^m\Big[\frac{\beta^m}{1-\alpha\beta X} - \frac{\beta'^m}{1-\alpha\beta' X} - \frac{\beta^m}{1-\alpha'\beta X} + \frac{\beta'^m}{1-\alpha'\beta' X}\Big],$$

$$(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')X\sum_{r=0}^{\infty} A(r)B(r)X^r$$

$$= \frac{P(\beta X)}{1-\alpha\beta X} - \frac{P(\beta' X)}{1-\alpha\beta' X} - \frac{P(\beta X)}{1-\alpha'\beta X} + \frac{P(\beta' X)}{1-\alpha'\beta' X}$$

$$= \frac{P(\beta X)(\alpha-\alpha')\beta X}{(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)} - \frac{P(\beta' X)(\alpha-\alpha')\beta' X}{(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)}$$

$$= (\alpha-\alpha')X\Big[\frac{P(\beta X)\beta}{(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)} - \frac{P(\beta' X)\beta'}{(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)}\Big],$$

$$(\beta-\beta')\sum_{r=0}^{\infty} A(r)B(r)X^r$$

$$= \frac{P(\beta X)\beta}{(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)} - \frac{P(\beta' X)\beta'}{(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)},$$

$$(\beta-\beta')(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)\sum_{r=0}^{\infty} A(r)B(r)X^r$$

$$= P(\beta X)\beta(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X) - P(\beta' X)\beta'(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X).$$

Or $P(X) = 1 - \Big(\sum_{m=0}^{\gamma-1} a(m)X^m\Big)\Big(1 - a(1)X + \alpha\alpha' X^2\Big)$

$$= 1 - \Big(\sum_{m=0}^{\gamma-1} a(m)X^m\Big)\Big(1 - (\alpha+\alpha')X + \alpha\alpha' X^2\Big)$$

$$= 1 - \Big(\sum_{m=0}^{\gamma-1} a(m)X^m\Big)\Big(1-\alpha X\Big)\Big(1-\alpha' X\Big),$$

$$(\beta-\beta')(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)\sum_{r=0}^{\infty} A(r)B(r)X^r$$

$$= \beta(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X) - \sum_{m=0}^{\gamma-1} a(m)\beta^{m+1}X^m(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)$$

$$-\beta'(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X) + \sum_{m=0}^{\gamma-1} a(m)\beta'^{m+1}X^m(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta' X)(1-\alpha'\beta' X)$$

$$= \beta(1-\alpha'\beta'X-\alpha\beta'X+\alpha\alpha'\beta\beta'X)-\beta'(1-\alpha'\beta X-\alpha\beta X+\alpha\alpha'\beta\beta'X)$$
$$-(\beta-\beta')\sum_{m=0}^{\gamma-1}a(m)B(m)X^m(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta'X)(1-\alpha'\beta'X)$$
$$=(\beta-\beta')\Big[1-\alpha\alpha'\beta\beta'X^2-\sum_{m=0}^{\gamma-1}a(m)B(m)X^m(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta'X)(1-\alpha'\beta'X)\Big]$$
$$=(\beta-\beta')\Big[1-\alpha\alpha'\beta\beta'X^2-Q(X)(1-\alpha\beta X)(1-\alpha'\beta X)(1-\alpha\beta'X)(1-\alpha'\beta'X)\Big]. \qquad \square$$

Notations 11.2 : $N=C(M/\delta)B^2$; L_N ou D_N désigne le même produit que L ou D mais pris sur les p qui ne divisent pas N (on enlève dans L ou D les p–facteurs eulériens pour lesquels $p \mid N$).

Lemme 11.3 : Première expression de $L_{f|_k U_\delta, G}(s)$:

$$L_{f',G}(s)=\underset{p\,\mid\, N}{\text{produit fini}}\times\delta^s\times L_N(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi)^{-1}\times D_{N,f,G}(s).$$

Preuve. —

$$L_{f'}(s)=\delta^s\prod_{p|C'}\mathcal{A}_p(p^{-s})L_f(s)$$
$$=\delta^s\prod_{p|C'}\mathcal{A}_p(p^{-s})\prod_p\sum_{r=0}^{\infty}a_{p^r}p^{-rs}$$
$$=\delta^s\prod_{p|C'}\mathcal{A}_p(p^{-s})\prod_p\frac{1}{(1-\alpha_p p^{-s})}\frac{1}{(1-\alpha'_p p^{-s})}.$$

Pour chaque p fixé, on applique le lemme de Rankin généralisé (**11.1**) avec $P(X)=P_p(X)$ et $Q(X)=Q_p(X)$, où si $p\mid C'$ ($p=q_i$ et $\gamma=\gamma_i$), $P_p(X)=\mathcal{A}_p(X)$ et $Q_p(X)=\sum_{m=0}^{\gamma}a_{p^m}b_{p^m}X^m$; et si $p\nmid C'$, $P_p(X)=1$ et $Q_p(X)=0$. De plus, $\alpha_p+\alpha'_p=a_p$, $\alpha_p\alpha'_p=\psi(p)p^{k-1}$, $\beta_p=\xi(p)$, $\beta'_p=\chi(p)p^{\ell-1}$. Il vient :

$$L_{f',G}(s)=\delta^s\prod_p\Big[\frac{1-\psi\xi\chi(p)p^{k+\ell-2-2s}}{(1-\alpha_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha_p\beta'_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta_p p^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_p p^{-s})}-Q_p(p^{-s})\Big].$$

Le produit sur tous les premiers p a différents facteurs selon que p divise $N=C(M/\delta)B^2$ ou non. Si $p\mid C$, alors $\psi(p)=0$, $\alpha_p\alpha'_p=0$. Si $p\mid(M/\delta)$, alors $\chi(p)=0$, $\beta'_p=0$. Si $p\mid B$, alors $\xi(p)=0$, $\beta_p=0$ (Les deux derniers cas peuvent apparaître pour des p communs). Si $p\nmid N$, alors $Q_p(p^{-s})=0$. On obtient :

$$L_{f',G}(s)=\delta^s\times\prod_{p|C}\Big[\frac{1}{(1-a_p\xi(p)p^{-s})(1-a_p\chi(p)p^{\ell-1-s})}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times\prod_{p|(M/\delta)}\Big[\frac{1}{(1-\alpha_p\xi(p)p^{-s})(1-\alpha'_p\xi(p)p^{-s})}-Q_p(p^{-s})\Big]\times$$

$$\times \prod_{p|B}\Big[\frac{1}{(1-\alpha_p\chi(p)p^{\ell-1-s})(1-\alpha'_p\chi(p)p^{\ell-1-s})}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times \prod_{p\nmid N}\left[1-\psi\xi\chi(p)p^{k+\ell-2-2s}\right]\prod_{p\nmid N}\left[(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha_p\beta'_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_pp^{-s})\right]^{-1}$$
$$L_{f',G}(s)=\delta^s\times\prod_{p|C}\Big[\frac{1}{(1-a_p\xi(p)p^{-s})(1-a_p\chi(p)p^{\ell-1-s})}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times\prod_{p|(M/\delta)}\Big[\frac{1}{1-a_p\xi(p)p^{-s}+\psi\xi^2(p)p^{k-1-2s}}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times\prod_{p|B}\Big[\frac{1}{1-a_p\chi(p)p^{\ell-1-s}+\psi\chi^2(p)p^{k+2\ell-3-2s}}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times L_N(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi)^{-1}\times D_{N,f,G}(s). \qquad \square$$

On a aussi :

Lemme 11.4 : Deuxième expression de $L_{f|_kU_\delta,G}(s)$:

$$L_{f',G}(s)=\underset{p\,|\,N}{\text{produit fini}}\times\delta^s\times L_N(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi)^{-1}\times D_{f,G}(s).$$

Pour l'expression explicite :

$$L_{f',G}(s)=\delta^s\times\prod_{p|C}\Big[\frac{1}{(1-a_p\xi(p)p^{-s})(1-a_p\chi(p)p^{\ell-1-s})}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times\prod_{p|(M/\delta)}\Big[\frac{1}{1-a_p\xi(p)p^{-s}+\psi\xi^2(p)p^{k-1-2s}}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times\prod_{p|B}\Big[\frac{1}{1-a_p\chi(p)p^{\ell-1-s}+\psi\chi^2(p)p^{k+2\ell-3-2s}}-Q_p(p^{-s})\Big]$$
$$\times\prod_{p|N}\left[(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha_p\beta'_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_pp^{-s})\right]$$
$$\times L_N(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi)^{-1}\times D_{f,G}(s).$$

Preuve. —

$$\begin{aligned}D_{N,f,G}(s)&=\prod_{p\nmid N}\left[(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha_p\beta'_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_pp^{-s})\right]^{-1}\\&=\prod_{p}\left[(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha_p\beta'_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_pp^{-s})\right]^{-1}\\&\quad\times\prod_{p|N}\left[(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha_p\beta'_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_pp^{-s})\right]\\&=D_{f,G}\times\prod_{p|N}\left[(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha_p\beta'_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta_pp^{-s})(1-\alpha'_p\beta'_pp^{-s})\right],\end{aligned}$$

et on remplace dans **11.3**. □

Nous pouvons maintenant donner une expression explicite pour les symboles modulaires. Rappelons que d'après la proposition **8.9**, on a :

$$P(x,r,f)=\sum_{\delta|M}\varphi(M/\delta)^{-1}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\mathcal{G}_a(\bar\chi)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}x^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j!\prod_{p|\delta}\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)})L_f(j+1,\chi)$$

Or nous savons par le lemme **9.2** que $L_f(j+1,\chi)=L_f(j+\ell,\xi)^{-1}D_{f,G}(j+\ell)$. Utilisons le résultat du lemme **11.4** qui exprime $D_{f,G}(s)$ en fonction de $L_{f|_kU_\delta,G}(s)$; alors nous pouvons écrire :

Proposition 11.5 : Pour x, r, f comme en **1**, avec les mêmes notations qu'en **10.3** et **11.2**, et avec $(C,MB^2)=1$, on a l'expression suivante pour les symboles modulaires :

$$\begin{aligned}P(x,r,f)=&\sum_{\delta|M}\varphi(M/\delta)^{-1}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\mathcal{G}_a(\bar\chi)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}x^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j!\,\delta^{-(j+\ell)}L_f(j+\ell,\xi)^{-1}\\&\times\prod_{p|\delta}\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)})\times\underset{p|N}{\text{produit fini}}\times L_N(2j+\ell-k+2,\psi\xi\chi)\times L_{f|_kU_\delta,G}(j+\ell),\end{aligned}$$

ou plus précisément :

$$\begin{aligned}P(x,r,f)=&\sum_{\delta|M}\varphi(M/\delta)^{-1}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\mathcal{G}_a(\bar\chi)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}x^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j!\,\delta^{-(j+\ell)}L_f(j+\ell,\xi)^{-1}\\&\times\prod_{p|\delta}\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)})\\&\times\prod_{p|C}\Big[\frac{1}{(1-a_p\xi(p)p^{-j-\ell})(1-a_p\chi(p)p^{-j-1})}-Q_p(p^{-j-\ell})\Big]^{-1}\\&\times\prod_{p|(M/\delta)}\Big[\frac{1}{1-a_p\xi(p)p^{-j-\ell}+\psi\xi^2(p)p^{k-1-2j-2\ell}}-Q_p(p^{-j-\ell})\Big]^{-1}\\&\times\prod_{p|B}\Big[\frac{1}{1-a_p\chi(p)p^{-j-1}+\psi\chi^2(p)p^{k-3-2j}}-Q_p(p^{-j-\ell})\Big]^{-1}\\&\times\prod_{p|N}\big[(1-\alpha_p\beta_pp^{-j-\ell})(1-\alpha_p\beta'_pp^{-j-\ell})(1-\alpha'_p\beta_pp^{-j-\ell})(1-\alpha'_p\beta'_pp^{-j-\ell})\big]^{-1}\\&\times L_N(2j+\ell-k+2,\psi\xi\chi)\times L_{f|_kU_\delta,G}(j+\ell),\end{aligned}$$

où si $p\mid C\delta$ ($p=q_i$ et $\gamma=\gamma_i$), $Q_p(X)=\sum_{m=0}^{\gamma}a_{p^m}b_{p^m}X^m$; et si $p\nmid C\delta$, $Q_p(X)=0$.

12 : Produit scalaire de Petersson.

On donne ici la définition du produit scalaire de Petersson de deux formes modulaires de même niveau et même caractère, ainsi que l'expression des séries L comme intégrales et comme certains produits scalaires.

Pour $f_1 \in S_k(N,\psi)$ et $f_2 \in M_k(N,\psi)$, on définit :

$$\langle f_1, f_2\rangle_N = \int_{D_0} \overline{f_1(z)} f_2(z) y^{k-2} dxdy \qquad (z = x+iy,\ y>0)$$

où D_0 est un domaine fondamental de $\Gamma_0(N)\backslash H$ c'est–à–dire de H modulo $\Gamma_0(N)$.

On peut écrire une représentation intégrale pour L_{f_1} :

$$\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} L_{f_1}(s) = \int_0^\infty f_1(iy) y^{s-1} dy,$$

ou encore :

$$\frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^s} L_{f_1}(s) = \int_0^{i\infty} f_1(z) z^{s-1} dz.$$

On peut aussi écrire une représentation intégrale pour la fonction $L_{f_1,f_2}(s)$ à l'aide de $f_1^\rho(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} e(nz)$ si $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e(nz)$:

$$\frac{\Gamma(s)}{(4\pi)^s} L_{f_1,f_2}(s) = \int_0^\infty \int_0^1 \overline{f_1^\rho(z)} f_2(z) y^{s-1} dxdy.$$

Pour $f_1 \in S_k(N,\psi_1)$ et $f_2 \in M_\ell(N,\psi_2)$, on a :

$$\frac{\Gamma(s)}{(4\pi)^s} L_{f_1,f_2}(s) = \langle f_1^\rho, f_2 E^*_{k-\ell,N}(z; s-k+1)\rangle_N$$

avec pour $t \geqslant 0$, $E^*_{t,N}(z;s) = y^s \sum\limits_{(Nc,d)=1}{}' \psi_1\psi_2(d)(Ncz+d)^{-t}|Ncz+d|^{-2s}$, $E^*_{t,N} \in M_{k-\ell}(N, \overline{\psi_1\psi_2})$, où la somme $\sum{}'$ signifie que l'on prend $d=1$ si $c=0$ (voir Miyake [10, (7.22)]).

13 : Expression des symboles modulaires en fonction d'un produit scalaire.

Nous utilisons ici l'expression des séries L comme produit scalaire de Petersson, nous transformons la définition de $E^*_{k-\ell,N}$ en une série d'Eisenstein $E_{k-\ell,N}$ qui contient le facteur $L(2s+2-k-\ell, \psi\xi\chi)$, et nous passons pour le produit scalaire à un niveau fixé, grâce aux opérateurs de la trace et de la projection holomorphe.

Lemme 13.1 : Posons $E_{t,N}(z;s) = y^s \sum\limits_{(c,d)\neq(0,0)} \psi_1\psi_2(d)(Ncz+d)^{-t}|Ncz+d|^{-2s}$, avec $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \xi\chi$, et $N = C(M/\delta)B^2$. Alors :

$$L(2s+2-k-\ell, \psi\xi\chi) \times E^*_{k-\ell, C(M/\delta)B^2}(z; s-k+1) = E_{k-\ell, C(M/\delta)B^2}(z; s-k+1),$$

et $$L(2s+2-k-\ell, \psi\xi\chi) \times L_{f,G_\delta}(s) = \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \langle f^\rho, G_\delta E_{k-\ell, C(M/\delta)B^2}(z; s-k+1)\rangle_{C(M/\delta)B^2}.$$

Démonstration. — Revenons à $f \in S_k(C,\psi)$ et $G = G_\delta \in S_\ell\big(\Gamma_0(MB/\delta), \xi\chi\big)$. Avec $N = C(M/\delta)B^2$, on a $f \in S_k(N,\psi)$ et $G \in S_\ell\big(\Gamma_0(N), \xi\chi\big)$, alors on peut écrire d'après **12** :

$$L_{f,G}(s) = \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \langle f^\rho, G_\delta E^*_{k-\ell,N}(z; s-k+1)\rangle_N,$$

où $E^*_{k-\ell,N}(z;s) = y^s \sum_{(Nc,d)=1}{}' \psi\xi\chi(d)(Ncz+d)^{-k+\ell}|Ncz+d|^{-2s}$.

Calculons :

$$\begin{aligned}
L(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi) &\times E^*_{k-\ell,N}(z;s-k+1)\\
&= \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\psi\xi\chi(n)n^{-(2s+2-k-\ell)}\Big)y^{s-k+1}\Big(\sum_{(Nc,d)=1}{}'\psi\xi\chi(d)(Ncz+d)^{-(k-\ell)}|Ncz+d|^{-2(s-k+1)}\Big)\\
&= y^{s-k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(Nc,d)=1}{}'\psi\xi\chi(nd)(Nncz+nd)^{-(k-\ell)}|Nncz+nd|^{-2(s-k+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(2s+2-k-\ell,\psi\xi\chi) &\times E^*_{k-\ell,N}(z;s-k+1)\\
&= y^{s-k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(Nnc,nd)=n}{}'\psi\xi\chi(nd)(Nncz+nd)^{-(k-\ell)}|Nncz+nd|^{-2(s-k+1)}\\
&= y^{s-k+1}\sum_{(Nc',d')\neq(0,0)}\psi\xi\chi(d')(Nc'z+d')^{-(k-\ell)}|Nc'z+d'|^{-2(s-k+1)}\\
&= E^*_{k-\ell,N}(z;s-k+1). \qquad \square
\end{aligned}$$

En remplaçant la deuxième expression de ce lemme dans la proposition **10.3** avec $s = j+\ell$ et $N = C(M/\delta)B^2$, on obtient l'écriture des symboles modulaires en fonction d'un produit scalaire :

Proposition 13.2 : Pour x, r, f comme en **1**, avec les notations de **8.9** et **13.1**, et $(C, MB^2) = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
P(x,r,f) = \sum_{\delta|M}\varphi(M/\delta)^{-1}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\mathcal{G}_a(\bar\chi)\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}x^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j!\,\frac{(4\pi)^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)}\\
\times\prod_{p|\delta}\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)})\times L_f(j+\ell,\xi)^{-1}\times\langle f^\rho, G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)\rangle_{C(M/\delta)B^2}.
\end{aligned}$$

Le niveau du produit scalaire $N = C(M/\delta)B^2$ n'est pas fixé (δ intervient dans la sommation). On passe dans un premier temps au niveau supérieur CMB^2 par un argument de dénombrement en considérant $\Gamma_0(CMB^2)$ en tant que sous–groupe de $\Gamma_0(N)$:

$$\langle f^\rho, G_\delta E_{k-\ell,N}(z;j+\ell-k+1)\rangle_N = \frac{1}{[\Gamma_0(N):\Gamma_0(CMB^2)]}\langle f^\rho, G_\delta E_{k-\ell,N}(z;j+\ell-k+1)\rangle_{CMB^2}$$

$$\begin{aligned}
[\Gamma_0(N):\Gamma_0(CMB^2)] &= \frac{[SL_2(\mathbf{Z}):\Gamma_0(CMB^2)]}{[SL_2(\mathbf{Z}):\Gamma_0\big(C(M/\delta)B^2\big)]}\\
&= \frac{CMB^2\prod_{p|CMB^2}(1+\frac{1}{p})}{C(M/\delta)B^2\prod_{p|C(M/\delta)B^2}(1+\frac{1}{p})}
\end{aligned}$$

$$[\Gamma_0(N):\Gamma_0(CMB^2)] = \frac{\delta \prod\limits_{p|M}(1+\frac{1}{p})}{\prod\limits_{p|(M/\delta)}(1+\frac{1}{p})}$$
$$= \delta \prod_{\substack{p|M \\ p\nmid(M/\delta)}} (1+\frac{1}{p})$$

Alors $\langle f^\rho, G_\delta E_{k-\ell,N}(z;j+\ell-k+1)\rangle_N = \dfrac{1}{\delta \prod\limits_{\substack{p|M \\ p\nmid(M/\delta)}}(1+\frac{1}{p})} \langle f^\rho, G_\delta E_{k-\ell,N}(z;j+\ell-k+1)\rangle_{CMB^2}$.

On passe ensuite du niveau CMB^2 au niveau inférieur CM_0B^2 ($M_0 = \prod\limits_{q|M} q$) en utilisant l'opérateur de la trace de CMB^2 sur CM_0B^2, $\mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}$:

$$\langle f^\rho, G_\delta E_{k-\ell,N}(z;j+\ell-k+1)\rangle_{CMB^2} = \langle f^\rho, (G_\delta E_{k-\ell,N}(z;j+\ell-k+1))|_k \mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}\rangle_{CM_0B^2}.$$

Définition 13.3 : Rappelons que l'opérateur $\mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}$ est défini pour $f_1 \in M_k\big(\Gamma_0(CMB^2)\big)$ par $f_1|_k\mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2} = \sum\limits_{u \bmod M/M_0} f_1|_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ CM_0B^2u & 1 \end{pmatrix} \in M_k\big(\Gamma_0(CM_0B^2)\big)$; les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ CM_0B^2u & 1 \end{pmatrix}$ pour u modulo M/M_0 formant un système de représentants de $\Gamma_0(CMB^2)/\Gamma_0(CM_0B^2)$.

Enfin on prend la partie holomorphe de $\big(G_\delta E_{k-\ell,N}(z;j+\ell-k+1)\big)|_k\mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}$:

Définition 13.4 : Si $F \in M_{r,k}\big(\Gamma_0(N),\psi\big)$ est une forme modulaire réelle analytique de type r et de poids k (voir Sturm [18], [19]), alors pour tout $f \in S_k\big(\Gamma_0(N),\psi\big)$, le produit scalaire de Petersson $\langle f, F\rangle_N$ est bien défini et il existe une unique forme parabolique $\mathrm{Hol}(F) \in S_k\big(\Gamma_0(N),\psi\big)$ telle que $\langle f, \mathrm{Hol}(F)\rangle_N = \langle f, F\rangle_N$ pour tout $f \in S_k\big(\Gamma_0(N),\psi\big)$. L'application $F \mapsto \mathrm{Hol}(F)$ est appelée opérateur de projection holomorphe. On peut trouver un moyen de calcul des coefficients de la série de Fourier de $\mathrm{Hol}(F)$ en fonction de ceux de F dans [18, théorème 1] ou [12, (3.6)], que nous utiliserons plus loin (*15.3* et *17.2*).

La formule de la proposition **13.2** s'écrit maintenant sous la forme :

Proposition 13.5 : Pour x, r, f comme en **1**, avec les notations de **8.9**, **13.1**, **13.3**, **13.4**, on a :

$$P(x,r,f) = \sum_{\delta|M} \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar\chi) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^{r-j} \mathrm{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j!\, \frac{(4\pi)^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)}$$
$$\times \prod_{p|\delta} \mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)}) \times \frac{1}{\delta \prod\limits_{\substack{p|M \\ p\nmid(M/\delta)}}(1+\frac{1}{p})} \times L_f(j+\ell,\xi)^{-1}$$
$$\times \langle f^\rho, \mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_k \mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}\Big)\rangle_{CM_0B^2}$$

où $M_0 = \prod\limits_{q|M} q$, sous l'hypothèse $(C, MB^2) = 1$.

Des calculs explicites pour $\mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2}\Big)$ sont développés dans la section **15**.

14 : Vers une famille de fonctions universelles.

Le but de cette section est d'exprimer les symboles modulaires comme combinaisons linéaires de produits scalaires, de niveau fixé, entre la fonction f^ρ et des fonctions $F_{x,r,j}$ indépendantes de f.

$f \in S_k(C,\psi)$ est primitive et normalisée, donc pour $q \mid C$, $a_q f = f|_k U_q$ et pour $(q,C)=1$, $a_q f = f|_k T_q$. Fixons $q \mid \delta$. Rappelons que $\delta = q_1^{\gamma_1}\cdots q_t^{\gamma_t}$. Comme $q = q_i$, notons aussi pour simplifier l'écriture $\gamma = \gamma_i$. De plus, $(C, \delta(M/\delta)B^2) = 1$, puisque $(C, MB^2) = 1$, donc $q \mid \delta$ entraîne $(q,C) = 1$.

Nous avons défini le polynôme $\mathcal{A}_p(X) = a_{p^\gamma}X^\gamma - \psi(p)p^{k-1}a_{p^{\gamma-1}}X^{\gamma+1}$, où $p \mid \delta$, $\gamma = \mathrm{ord}_p(\delta)$. Remplaçons maintenant ce polynôme $\mathcal{A}_p(X) \in \mathbf{C}[X]$ dépendant de f par un opérateur $A_p(X)$ agissant sur f^ρ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p(X)\langle f^\rho, g\rangle_{CM_0B^2} &= \langle \overline{\mathcal{A}_p(X)} f^\rho, g\rangle_{CM_0B^2}\\ &= \langle f^\rho|_k A_p(X), g\rangle_{CM_0B^2}\\ &= \langle f^\rho, g|_k A_p^*(X)\rangle_{CM_0B^2}.\end{aligned}$$

Pour cela il suffit de poser, pour tout $X \in \mathbf{C}$: $A_p(X) = T_{p^\gamma}\overline{X}^\gamma - \overline{\psi}(p)p^{k-1}T_{p^{\gamma-1}}\overline{X}^{\gamma+1}$. Comme $f^\rho|_k T_{p^\gamma} = \overline{a_{p^\gamma}} f^\rho$, on a bien $f^\rho|_k A_p(X) = \big(\overline{a_{p^\gamma}}\ \overline{X}^\gamma - \overline{\psi}(p)p^{k-1}\overline{a_{p^{\gamma-1}}}\ \overline{X}^{\gamma+1}\big) f^\rho = \overline{\mathcal{A}_p(X)} f^\rho$. Enfin $A_p^*(X)$ désigne l'adjoint de $A_p(X)$ pour le produit scalaire de niveau CM_0B^2.

Proposition 14.1 : Pour x, r, f comme en **1**, avec les notations de **13.5**, on a :

$$P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \times \langle f^\rho, F_{x,r,j}\rangle_{CM_0B^2}, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned}F_{x,r,j}(z) = \sum_{\delta \mid M} \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar\chi) \binom{r}{j} x^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j!\ \frac{4^{j+\ell}}{(j+\ell-1)!}\ \frac{1}{\delta \prod\limits_{\substack{q \mid M\\ q \nmid (M/\delta)}} (1+\frac{1}{q})}\\ \times \mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2}\Big)\Big|_k \prod_{p \mid \delta} A_p^*(\chi(p)p^{-(j+1)}),\end{aligned}$$

où pour $X \in \mathbf{C}$, $A_p(X) = T_{p^\gamma}\overline{X}^\gamma - \overline{\psi}(p)p^{k-1}T_{p^{\gamma-1}}\overline{X}^{\gamma+1}$ et $A_p^*(X)$ est l'adjoint de $A_p(X)$ pour le produit scalaire de niveau CM_0B^2.

Il faut noter que les coefficients de cette combinaison linéaire dépendent de la forme f. De plus nous n'expliciterons pas $A_p^*(X)$ ici car nous verrons plus loin que la somme des termes dépendant de χ a une expression très simple (proposition **16.2**) et que l'on peut pour $M = p^m$ considérer uniquement les contributions de $\delta = 1$ et $\delta = M$ (section **17**).

15 : Calcul explicite de $\mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2}\Big)$.

Nous prouvons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 15.1 :

$$\mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2}\Big)$$
$$= (M/M_0)^{1-k/2}\,\mathrm{Hol}\Big(G_\delta|_\ell W_{CMB^2} E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_{k-\ell} W_{CMB^2}\Big)\Big|_k U_{M/M_0} W_{CM_0B^2}.$$

Les calculs seront présentés en suivant cette formule. Dans un premier temps, on écrit les développements de Fourier de $G_\delta|_\ell W_{CMB^2}$ *(15.1)* et $E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}$ *(15.2)*, puis celui de $\mathrm{Hol}\Big(G_\delta|_\ell W_{CMB^2} E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_{k-\ell} W_{CMB^2}\Big)$ *(15.3)* et enfin celui de $\mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2}\Big)$ *(15.4)*, où l'on gardera $W_{CM_0B^2}$, qui est de niveau fixé. Nous exprimons ensuite les symboles modulaires comme combinaisons linéaires de certains produits scalaires de niveau fixé :

Proposition 15.2 : $P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \times \langle f^\rho, F_{x,r,j}\rangle_{CM_0B^2}$, avec :

$$F_{x,r,j}(z)$$
$$= \sum_{\delta|M}\varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar\chi)\binom{r}{j}\big(\frac{a}{M}\big)^{r-j}(-1)^{k-\ell}\,\mathrm{i}^{j+1+k-\ell}\,2^{2j-k+2\ell} j!\,\Gamma(j+\ell)^{-1}$$
$$\times \prod_{p|\delta}\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)}) \times \frac{1}{\prod_{\substack{p|M\\ p\nmid(M/\delta)}}(1+\frac{1}{p})} \times \big(\frac{M}{M_0}\big)^{1-k/2}\frac{1}{B}\,\big(\frac{C\delta}{M}\big)^{\ell/2}\delta^{2j+\ell-k+1}$$
$$\times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)}\,\mathcal{G}(\xi)$$
$$\times \Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{\delta^{2j+\ell-k+1}\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)}L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$$
$$\times\,\delta\big(\frac{nM}{M_0C\delta}\big)\big(\frac{nM}{M_0}\big)^j \sum_{\substack{d|\frac{nM}{M_0C\delta}\\ d>0}}\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\,\bar\xi\big(\frac{nM}{dM_0C\delta}\big)\,d^{\ell-1}$$
$$+\sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{M_0}\\ n_1>0,n_2>0}}\delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big)\sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta}\\ d_1>0}}\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\,\bar\xi\big(\frac{n}{d_1C\delta}\big){d_1}^{\ell-1}\delta\big(\frac{n_2}{\delta}\big)\sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2>0}}{d_2}^{2j+\ell-k+1}$$
$$\times\,\psi\xi\chi\big(\frac{n_2}{d_2\delta}\big)\sum_{i=0}^{k-1-j-\ell}(-1)^i\binom{k-1-j-\ell}{i}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-j-\ell-i}\big(\frac{nM}{M_0}\big)^i\Bigg]$$
$$e\big(\frac{nM}{M_0}z\big)\Bigg\}\Bigg|_k W_{CM_0B^2}.$$

Remarque : Les coefficients de Fourier des formes $F_{x,r,j}$, indépendantes de f, sont des nombres algébriques de $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$: combinaisons linéaires de racines de l'unité à coefficients dans $\mathbf{Q}$.

Preuve du lemme 15.1 : Posons momentanément $F = G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z; j+\ell-k+1)$.

$$
\begin{aligned}
F|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2} &= \sum_{u \bmod M/M_0} F|_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ CM_0B^2u & 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{u \bmod M/M_0} F|_k \begin{pmatrix} -CMB^2 & 0 \\ -uCMB^2CM_0B^2 & -CMB^2 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{u \bmod M/M_0} F|_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ CMB^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -uCM_0B^2 & -1 \\ CMB^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{u \bmod M/M_0} F|_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ CMB^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & M/M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ CM_0B^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (M/M_0)^{1-k/2} F|_k W_{CMB^2} \big((M/M_0)^{1-k/2} \sum_{u \bmod M/M_0} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & M/M_0 \end{pmatrix} \big) W_{CM_0B^2}
\end{aligned}
$$

$F|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2} = (M/M_0)^{1-k/2} F|_k W_{CMB^2} U_{M/M_0} W_{CM_0B^2}$,

$\mathrm{Hol}(F|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2}) = (M/M_0)^{1-k/2} \mathrm{Hol}(F|_k W_{CMB^2})|_k U_{M/M_0} W_{CM_0B^2}$,

alors

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z; j+\ell-k+1)|_k \mathrm{Tr}^{CMB^2}_{CM_0B^2}\Big) \\
&= (M/M_0)^{1-k/2}\, \mathrm{Hol}\Big(G_\delta|_\ell W_{CMB^2} E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z; j+\ell-k+1)|_{k-\ell} W_{CMB^2}\Big)\Big|_k U_{M/M_0} W_{CM_0B^2}
\end{aligned}
$$

et le lemme est démontré. □

15.1. — Développement de Fourier de $G_\delta|_\ell W_{CMB^2}$:

Dans ce paragraphe, on transforme G_δ en une série d'Eisenstein $E_{\ell,BM/\delta}((BM/\delta)z, 0, F)$, puis on applique l'involution de niveau CMB^2 et l'on obtient une nouvelle série d'Eisenstein $E_{\ell,BM/\delta}(CMB^2BM/\delta z, 0, F^*)$ dont on écrit ensuite le développement de Fourier.

L'outil principal est l'identité (4.13) de [12] qui, pour une application f définie sur $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ et une série d'Eisenstein $E_{m,N}(z,s,f) = \sum_{(c,d)\neq(0,0)} f(d,c)(cz+d)^{-m}|cz+d|^{-2s}$, donne le développement de Fourier de $E_{m,N}(Nz,s,f)$ à l'aide de la transformation de Fourier partielle $Pf(d,d')$ de f et de la notation $g(x)_{(m)} = g(x) + (-1)^m g(-x)$:

Proposition15.3 :
$$
\begin{aligned}
&\frac{N^{m+2s}\Gamma(m+s)}{(-2\pi\mathbf{i})^{m+2s}(-4\pi y)^{-s}} E_{m,N}(Nz, s; F) \\
&= \frac{(-4\pi y)^s \Gamma(m+s)}{\Gamma(m+2s)} L(1-m-2s, PF(\cdot, 0))
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\Gamma(m+2s-1)}{(4\pi y)^{m+s-1}\Gamma(s)}L(m+2s-1,PF(0,\cdot)_{(m+2s)})+$$
$$+(4\pi y)^s\sum_{dd'>0}(\mathrm{sgn} d)d^{m+2s-1}(PF)(d,d')\times\mathcal{W}(4\pi dd'y,m+s,-s)e(dd'z).$$

([12, (4.13)])

Il apparaît aussi dans cette formule les fonctions de Whittaker définies pour $y>0$, $\alpha\in\mathbf{C}$, $\beta\in\mathbf{C}$, avec $\mathrm{Re}(\beta)>0$: $\mathcal{W}(y,\alpha,\beta)=\Gamma(\beta)^{-1}\int_0^\infty(u+1)^{\alpha-1}u^{\beta-1}e^{-yu}\,du$; on a aussi l'équation fonctionnelle suivante : $\mathcal{W}(y,\alpha,\beta)=y^{1-\alpha-\beta}\mathcal{W}(y,1-\beta,1-\alpha)$ ainsi que l'expression pour $r\geqslant 0$ entier : $\mathcal{W}(y,\alpha,-r)=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-i)}y^{r-i}$.

Explicitons le développement de Fourier de G_δ :

$$\begin{aligned}G_\delta&=\sum_{n=1}^{\infty}b_nq^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\xi(d)\chi(\frac{n}{d})d^{\ell-1}q^n\\&=\sum_{d>0,d'>0}d^{\ell-1}\xi(d)\chi(d')e(dd'z)\\&=\frac{1}{2}\sum_{dd'>0}\mathrm{sgn}(d)\;d^{\ell-1}\xi(d)\chi(d')e(dd'z).\end{aligned}$$

Posons $F(d,d')=\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\xi)\chi(d')=\sum_{b \bmod BM/\delta}\xi(b)e\big(\frac{bd}{BM/\delta}\big)\chi(d')$. Pour appliquer la proposition **15.3**, nous calculons maintenant $PF(d,d')$:

$$\begin{aligned}PF(d,d')&=\sum_{u \bmod BM/\delta}F(u,d')e\big(\frac{ud}{BM/\delta}\big)\\&=\sum_{u \bmod BM/\delta}\mathcal{G}_{u,BM/\delta}(\xi)\chi(d')e\big(\frac{ud}{BM/\delta}\big)\\&=\chi(d')\sum_{u \bmod BM/\delta}\ \sum_{b \bmod BM/\delta}\xi(b)e\big(\frac{bu}{BM/\delta}\big)e\big(\frac{ud}{BM/\delta}\big)\\&=\chi(d')\sum_{b \bmod BM/\delta}\xi(b)\sum_{u \bmod BM/\delta}e\big(\frac{u(b+d)}{BM/\delta}\big)\\&=\chi(d')\sum_{\substack{b \bmod BM/\delta\\(b+d,BM/\delta)=1}}\xi(b)BM/\delta\\&=\chi(d')\xi(-d)BM/\delta\\&=(BM/\delta)\xi(d)\chi(d')\xi(-1).\end{aligned}$$

Donc $\xi(d)\chi(d') = \xi(-1)PF(d,d')/(BM/\delta)$, et l'on peut écrire :

$$G_\delta = \frac{\xi(-1)}{2BM/\delta} \sum_{dd'>0} \operatorname{sgn}(d) d^{\ell-1} PF(d,d') e(dd'z).$$

Or $PF(d,0) = 0$, $PF(0,d') = 0$, donc $L(1-\ell, PF(\cdot,0)) = 0$ et $L(\ell-1, PF(0,\cdot)_{(\ell)}) = 0$. On applique alors la proposition **15.3** avec $m=\ell$, $s=0$, $N = BM/\delta$:

$$\frac{(BM/\delta)^\ell \Gamma(\ell)}{(-2\pi\mathbf{i})^\ell} E_{\ell,BM/\delta}((BM/\delta)z, 0; F) = \sum_{dd'>0} (\operatorname{sgn} d) d^{\ell-1} (PF)(d,d') e(dd'z).$$

Alors :

$$G_\delta = \frac{\xi(-1)}{2} \frac{(BM/\delta)^{\ell-1}\Gamma(\ell)}{(-2\pi\mathbf{i})^\ell} E_{\ell,BM/\delta}((BM/\delta)z, 0, F).$$

Ensuite on applique W_{CMB^2}, en remarquant que l'on a l'identité $(\lambda f)|_\ell W_{CMB^2} = \lambda f|_\ell W_{CMB^2}$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$G_\delta|_\ell W_{CMB^2} = \frac{\xi(-1)}{2} \frac{(BM/\delta)^{\ell-1}\Gamma(\ell)}{(-2\pi\mathbf{i})^\ell} E_{\ell,BM/\delta}((BM/\delta)z, 0, F)|_\ell W_{CMB^2}.$$

$$\begin{aligned}
E_{\ell,N}(Nz,0,F)|_\ell W_{CMB^2} &= (CMB^2)^{\ell/2}(CMB^2Nz)^{-\ell} E_{\ell,BM/\delta}\Big(\frac{-1}{CMB^2Nz}, 0, F\Big)\\
&= (CMB^2)^{-\ell/2}(Nz)^{-\ell} \sum_{(c,d)\neq(0,0)} F(d,c)\Big(\frac{-c}{CMB^2Nz} + d\Big)^{-\ell}\\
&= (CMB^2)^{-\ell/2}(Nz)^{-\ell}(CMB^2Nz)^{\ell} \sum_{(c,d)\neq(0,0)} F(d,c)(-c + dCMB^2Nz)^{-\ell}\\
&= (CMB^2)^{\ell/2} \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\xi)\chi(c)(-c + dCMB^2Nz)^{-\ell}\\
&= (CMB^2)^{\ell/2} \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \mathcal{G}_{c,BM/\delta}(\xi)\chi(-d)(cCMB^2Nz + d)^{-\ell}\\
&= (CMB^2)^{\ell/2} E_{\ell,BM/\delta}(CMB^2Nz, 0, F^*)
\end{aligned}$$

où $F^*(c,d) = F(-d,c)$.

Alors : $G_\delta|_\ell W_{CMB^2} = \dfrac{\xi(-1)}{2} \dfrac{(BM/\delta)^{\ell-1}\Gamma(\ell)}{(-2\pi\mathbf{i})^\ell} (CMB^2)^{\ell/2} E_{\ell,BM/\delta}(CMB^2BM/\delta z, 0, F^*)$.

On va appliquer la proposition **15.3** à $E_{\ell,BM/\delta}(BM/\delta CMB^2 z, 0, F^*)$. Il faut donc calculer $PF^*(d,d')$.

$$\begin{aligned}
PF^*(d,d') &= \sum_{u \bmod BM/\delta} F^*(u,d') e\Big(\frac{ud}{BM/\delta}\Big)\\
&= \sum_{u \bmod BM/\delta} F(-d',u) e\Big(\frac{ud}{BM/\delta}\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PF^*(d,d') &= \mathcal{G}_{-d',BM/\delta}(\xi) \sum_{u \bmod BM/\delta} \chi(u) e\big(\frac{ud}{BM/\delta}\big) \\
&= \xi(-1)\mathcal{G}_{d',BM/\delta}(\xi)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi) \\
&= \xi(-1)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\mathcal{G}_{d',BM/\delta}(\xi), \\
PF^*(0,d') &= \xi(-1)\mathcal{G}_{0,BM/\delta}(\chi)\mathcal{G}_{d',BM/\delta}(\xi) \\
&= \xi(-1) \sum_{u \bmod BM/\delta} \chi(u)\mathcal{G}_{d',BM/\delta}(\xi) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ non trivial mod} BM/\delta \\ \xi(-1)B(M/\delta)\,\mathcal{G}_{d',BM/\delta}(\xi) & \text{sinon} \end{cases} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car on a remarqué dans **9** que χ n'est pas trivial modulo M/δ donc pas trivial non plus modulo BM/δ. Ainsi $L(\ell-1, PF^*(0,\cdot)_{(\ell)} = 0$.

$$\begin{aligned}
PF^*(d,0) &= \xi(-1)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\mathcal{G}_{0,BM/\delta}(\xi) \\
&= \xi(-1)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi) \sum_{u \bmod BM/\delta} \xi(u) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \text{ non trivial mod} BM/\delta \\ \xi(-1)B(M/\delta)\,\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi) & \text{sinon} \end{cases} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car ξ n'est pas trivial modulo B. Alors $L(1-\ell, PF^*(\cdot,0)) = 0$. Maintenant la proposition **15.3** s'écrit :

$$\begin{aligned}
&E_{\ell,BM/\delta}(BM/\delta CMB^2 z, 0, F^*) \\
&= \frac{(-2\pi\mathbf{i})^\ell}{(BM/\delta)^\ell\,\Gamma(\ell)} \sum_{dd'>0} (\mathrm{sgn} d) d^{\ell-1} PF^*(d,d') e(dd'CMB^2 z) \\
&= \frac{(-2\pi\mathbf{i})^\ell \xi(-1)}{(BM/\delta)^\ell\,\Gamma(\ell)} \sum_{dd'>0} (\mathrm{sgn} d) d^{\ell-1} \mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\mathcal{G}_{d',BM/\delta}(\xi) e(dd'CMB^2 z) \\
&= \frac{(-2\pi\mathbf{i})^\ell \xi(-1)}{(BM/\delta)^\ell\,\Gamma(\ell)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} \big(1-(-1)^{\ell-1}\chi\xi(-1)\big) d^{\ell-1} \mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\mathcal{G}_{n/d,BM/\delta}(\xi) e(nCMB^2 z) \\
&= \frac{2(-2\pi\mathbf{i})^\ell \xi(-1)}{(BM/\delta)^\ell\,\Gamma(\ell)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{\ell-1} \mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\mathcal{G}_{n/d,BM/\delta}(\xi) e(nCMB^2 z)
\end{aligned}$$

Enfin $G_\delta|_\ell W_{CMB^2} = \dfrac{(CMB^2)^{\ell/2}}{BM/\delta} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{\ell-1} \mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\mathcal{G}_{n/d,BM/\delta}(\xi) e(nCMB^2 z)$. Rappelons que l'on a : $\mathcal{G}_{n/d,BM/\delta}(\xi) = \sum_{u \bmod BM/\delta} \xi(u) e\big(\frac{nu/d}{BM/\delta}\big)$ et que ξ est supposé primitif modulo B. Ecrivons ce résultat sous la forme :

Lemme 15.4 : $G_\delta|_\ell W_{CMB^2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e(nz)$, avec :

$$B_n = \delta\Big(\frac{n}{CMB^2}\Big)\frac{(CMB^2)^{\ell/2}}{BM/\delta} \sum_{\substack{d|\frac{n}{CMB^2} \\ \text{et } d>0}} d^{\ell-1}\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi) \sum_{u \bmod BM/\delta} \xi(u) e\Big(\frac{nu/(dCMB^2)}{BM/\delta}\Big).$$

15.2. — Développement de Fourier de $E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z; s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}$:

Dans cette partie, on exprime la série $E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s)|_{k-\ell}W_{CMB^2}$ en fonction de $E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(\delta z, s, f)$; puis à l'aide de la proposition **15.3**, on obtient le développement de Fourier de $E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(C(M/\delta)B^2 z, s, f)$. Enfin on substitue δz à $C(M/\delta)B^2 z$, et $s-k+1$ à s.

Nous utiliserons les notations de Deligne–Ribet : $z^{k+|s|} = z^k|z|^s$. D'autre part la définition des séries $E_{m,N}(z,s)$ est : $E_{m,N}(z,s) = y^s \sum_{(c,d)\neq 0} \psi\xi\chi(d)(Ncz+d)^{-m+|-2s|}$.

$$\begin{aligned}
&E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z,s)|_{k-\ell}W_{CMB^2} \\
&= (CMB^2)^{(k-\ell)/2}(CMB^2 z)^{-(k-\ell)} E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}\Big(\frac{-1}{CMB^2 z}, s\Big) \\
&= (CMB^2)^{-(k-\ell)/2} z^{-(k-\ell)} \Big(CMB^2 \frac{y}{|CMB^2 z|^2}\Big)^s \\
&\qquad\qquad \times \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \psi\xi\chi(d)\Big(-\frac{C(M/\delta)B^2 z}{CMB^2 z} + d\Big)^{-(k-\ell)-|2s|} \\
&= (CMB^2)^{-(k-\ell)/2-s} z^{-(k-\ell)-|2s|} y^s \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \psi\xi\chi(d)\Big(-\frac{c}{\delta z} + d\Big)^{-(k-\ell)-|2s|} \\
&= (CMB^2)^{-(k-\ell)/2-s} z^{-(k-\ell)-|2s|} y^s (\delta z)^{k-\ell+|2s|} \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \psi\xi\chi(d)(-c+d\delta z)^{-(k-\ell)-|2s|} \\
&= (CMB^2)^{-(k-\ell)/2-s} \delta^{k-\ell+2s} y^s \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \psi\xi\chi(c)(c\delta z+d)^{-(k-\ell)-|2s|} \\
&= (CMB^2)^{-(k-\ell)/2-s} \delta^{k-\ell+2s} y^s E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(\delta z, s, f),
\end{aligned}$$

où $f(c,d) = \psi\xi\chi(d) \bmod C(M/\delta)B^2$.

Calculons maintenant $Pf(d,d')$:

$$\begin{aligned}
Pf(d,d') &= \sum_{a \bmod C(M/\delta)B^2} f(a,d') e\Big(\frac{ad}{C(M/\delta)B^2}\Big) \\
&= \psi\xi\chi(d') \sum_{a \bmod C(M/\delta)B^2} e\Big(\frac{ad}{C(M/\delta)B^2}\Big) \\
&= \delta\Big(\frac{d}{C(M/\delta)B^2}\Big) C(M/\delta)B^2 \psi\xi\chi(d').
\end{aligned}$$

Alors $Pf(d,0) = 0$ et $L(1-(k-\ell)-2s, Pf(\cdot,0)) = 0$.

D'autre part :

$$Pf(0,d') = C(M/\delta)B^2\psi\xi\chi(d'),$$
$$Pf(0,d')_{k-\ell+2s} = Pf(0,d') + (-1)^{k-\ell+2s}Pf(0,-d')$$
$$Pf(0,d')_{k-\ell+2s} = \big(1+(-1)^{k-\ell+2s}\psi\xi\chi(-1)\big)C(M/\delta)B^2\psi\xi\chi(d')$$
$$Pf(0,d')_{k-\ell+2s} = 2C(M/\delta)B^2\psi\xi\chi(d'),$$
$$L(k-\ell+2s-1, Pf(0,\cdot)_{k-\ell+2s}) = 2C(M/\delta)B^2L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi).$$

On peut maintenant substituer dans la proposition **15.3** :

$$\begin{aligned}
&\frac{(C(M/\delta)B^2)^{k-\ell+2s}\Gamma(k-\ell+2s)}{(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}(-4\pi y)^sE_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(C(M/\delta)B^2z,s,f)\\
&=\frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi y)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)}\times 2C(M/\delta)B^2L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)\\
&+(4\pi y)^s\sum_{dd'>0}\operatorname{sgn}(d)d^{k-\ell+2s-1}\delta\big(\frac{d}{C(M/\delta)B^2}\big)C(M/\delta)B^2\psi\xi\chi(d')\mathcal{W}(4\pi dd'y,k-\ell+s,s)e(dd'z)\\
&=C(M/\delta)B^2\Bigg[\frac{2\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi y)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)}L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)+(4\pi y)^s\sum_{n=1}^{\infty}\big(1+(-1)^{k-\ell+2s}\psi\xi\chi(-1)\big)\\
&\qquad\times\sum_{\substack{d|n\\d>0}}\delta\big(\frac{d}{C(M/\delta)B^2}\big)d^{k-\ell+2s-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d})\mathcal{W}(4\pi ny,k-\ell+s,s)e(nz)\Bigg]\\
&=2C(M/\delta)B^2\Bigg[\frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi y)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)}L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)\\
&\qquad+(4\pi y)^s\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\d>0}}\delta\big(\frac{d}{C(M/\delta)B^2}\big)d^{k-\ell+2s-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d})\mathcal{W}(4\pi ny,k-\ell+s,s)e(nz)\Bigg].
\end{aligned}$$

Dans la somme, on a $d\mid n$ et $C(M/\delta)B^2\mid d$, donc $C(M/\delta)B^2\mid n$. On effectue le changement d'indices suivant : $n=n_1\times C(M/\delta)B^2$, $d=d_1\times C(M/\delta)B^2$ (n_1, d_1 seront encore notés n, d).

$$\begin{aligned}
&\frac{(C(M/\delta)B^2)^{k-\ell+2s-1}\Gamma(k-\ell+2s)}{2(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}(-4\pi y)^sE_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(C(M/\delta)B^2z,s,f)\\
&=\frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi y)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)}L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)\\
&+(4\pi y)^s\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\d>0}}(C(M/\delta)B^2d)^{k-\ell+2s-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d})\mathcal{W}(4\pi nC(M/\delta)B^2y,k-\ell+s,s)e(nC(M/\delta)B^2z).
\end{aligned}$$

On remplace maintenant $C(M/\delta)B^2z$ par δz :

$$\frac{(C(M/\delta)B^2)^{k-\ell+2s-1}\Gamma(k-\ell+2s)}{2(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}\big(\frac{-4\pi\delta y}{C(M/\delta)B^2}\big)^sE_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(\delta z,s,f)=$$

$$= \frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{\left(\frac{4\pi\delta y}{C(M/\delta)B^2}\right)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)} L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)$$

$$+\left(\frac{4\pi\delta y}{C(M/\delta)B^2}\right)^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n\\ d>0}} (C(M/\delta)B^2 d)^{k-\ell+2s-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d})\mathcal{W}(4\pi n\delta y, k-\ell+s, s)e(n\delta z).$$

Alors on obtient :

$$\frac{\Gamma(k-\ell+2s)}{2(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}(-4\pi\delta y)^s E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(\delta z, s, f)$$

$$= \frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi\delta y)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)} L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)$$

$$+ (4\pi\delta y)^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n\\ d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d})\mathcal{W}(4\pi n\delta y, k-\ell+s, s)e(n\delta z).$$

Reprenons au début :

$$E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z,s)|_{k-\ell}W_{CMB^2}$$

$$= (CMB^2)^{-(k-\ell)/2-s}\delta^{k-\ell+2s}y^s E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(\delta z, s, f)$$

$$= (CMB^2)^{-(k-\ell)/2-s}\delta^{k-\ell+2s}\frac{2(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}{\Gamma(k-\ell+2s)(-4\pi\delta)^s}$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi\delta y)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)} L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)\right.$$

$$\left. + (4\pi\delta y)^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n\\ d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d})\mathcal{W}(4\pi n\delta y, k-\ell+s, s)e(n\delta z)\right]$$

$$= \frac{(CMB^2)^{-(k-\ell)/2-s}}{\Gamma(k-\ell+2s)} \times (-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell}2^{2s-1}\pi^s\delta^{k-\ell+2s}(4\pi y)^s$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi\delta y)^{k-\ell+2s-1}\Gamma(s)} L(k-\ell+2s-1,\psi\xi\chi)\right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{n=1\\ \delta|n}}^{\infty} \sum_{\substack{d|n\\ d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d\delta})\mathcal{W}(4\pi n y, k-\ell+s, s)e(nz)\right]$$

Enfin on change s en $s-k+1$:

$$E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z,s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}$$

$$= \frac{(CMB^2)^{-(k-\ell)/2-(s-k+1)}}{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1))} \times (-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell}2^{2(s-k+1)-1}\pi^{(s-k+1)}\delta^{k-\ell+2(s-k+1)}(4\pi y)^{(s-k+1)}$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta y)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)} L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi) + \right.$$

$$+\sum_{\substack{n=1\\ \delta|n}}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\ d>0}} d^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d\delta})\mathcal{W}(4\pi ny,s-\ell+1,s-k+1)e(nz)\Bigg]$$

Ecrivons ce résultat sous la forme :

Lemme 15.5 :

$$E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z,s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}=(4\pi y)^{(s-k+1)}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathcal{W}(4\pi ny,s-\ell+1,s-k+1)e(nz)$$

$$\text{avec}\qquad \mathcal{C}=\frac{(CMB^2)^{-(k-\ell)/2-(s-k+1)}}{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1))}\times(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell}2^{2(s-k+1)-1}\pi^{(s-k+1)}\delta^{k-\ell+2(s-k+1)},$$

$$C_0=C_0(y)=\mathcal{C}\times\frac{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta y)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi),$$

$$C_n=\mathcal{C}\times\delta(\frac{n}{\delta})\sum_{\substack{d|n\\ d>0}}d^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d\delta})\qquad(n\geqslant 1).$$

15.3. — Développement de Fourier de la partie holomorphe du produit $G_\delta|_\ell W_{CMB^2}$ $\times E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}$ *:*

$$\begin{aligned}
&G_\delta|_\ell W_{CMB^2}\times E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}\\
&\quad=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_ne(nz)\Big)\times\Big((4\pi y)^{(s-k+1)}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathcal{W}(4\pi ny,s-\ell+1,s-k+1)e(nz)\Big)\\
&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi y)^{(s-k+1)}B_nC_0(y)e(nz)\\
&\qquad+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_ne(nz)\Big)\times\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi y)^{(s-k+1)}C_n\mathcal{W}(4\pi ny,s-\ell+1,s-k+1)e(nz)\Big).
\end{aligned}$$

Dans un premier temps, on va calculer $\mathrm{Hol}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi y)^{(s-k+1)}B_nC_0(y)e(nz)\Big)$ en utilisant la définition de la partie holomorphe et l'identité [12, (3.4)] qui calcule la partie holomorphe de certaines séries :

$$\mathrm{Hol}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}A(n,y)e(nx)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}A_0(n)e(nz),\quad\text{où}\quad A_0(n)=\frac{(4\pi n)^{k-1}}{\Gamma(k-1)}\times\int_0^{\infty}A(n,y)e^{-2\pi ny}y^{k-2}dy.$$

Puis on calculera $\mathrm{Hol}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_ne(nz)\Big)\times\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi y)^{(s-k+1)}C_n\mathcal{W}(4\pi ny,s-\ell+1,s-k+1)e(nz)\Big)\Big]$ en utilisant [12, (3.6)] :

$$\mathrm{Hol}\Big[\Big(\sum_{n=0}^{\infty}B_ne(nz)\Big)\times\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(4\pi y)^{-r}C_n\mathcal{W}(4\pi ny,r+m,-r)e(nz)\Big)\Big]=\sum_{n=1}^{\infty}A(n)e(nz),$$

$$A(n)=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0,n_2>0}}B_{n_1}C_{n_2}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\frac{\Gamma(r+m)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(r+m-i)\Gamma(k-1)}n_2^{r-i}n^i.$$

Commençons les calculs pour la première partie :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi y)^{(s-k+1)}B_nC_0(y)e(nz)\Big) &= (4\pi)^{(s-k+1)}\mathrm{Hol}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_nC_0(y)y^{s-k+1}e^{-2\pi ny}e(nx)\Big)\\ &= (4\pi)^{(s-k+1)}\sum_{n=1}^{\infty}A_0(n)e(nz)\end{aligned}$$

où l'on a :

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi n)^{k-1}}A_0(n)=\int_0^{\infty}\Big(B_nC_0(y)y^{s-k+1}e^{-2\pi ny}\Big)e^{-2\pi ny}y^{k-2}dy.$$

L'expression des coefficients B_n est donnée dans le lemme **15.4** et celle de $C_0(y)$ dans le lemme **15.5** :

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi n)^{k-1}}A_0(n)\\ &=\frac{\mathcal{C}B_n\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\\ &\qquad\times\int_0^{\infty}e^{-4\pi ny}y^{-(k-\ell+2(s-k+1)-1)+(s-k+1)+(k-2)}dy\\ &=\frac{\mathcal{C}B_n\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\times\int_0^{\infty}e^{-4\pi ny}y^{\ell-1-(s-k+1)}dy\\ &=\frac{\mathcal{C}B_n\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\\ &\qquad\times(4\pi n)^{-\ell+(s-k+1)}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{\ell-1-(s-k+1)}du\\ &=\frac{\mathcal{C}B_n\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\\ &\qquad\times(4\pi n)^{-\ell+(s-k+1)}\Gamma\big(\ell-(s-k+1)\big).\end{aligned}$$

Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}A_0(n)&=\frac{\mathcal{C}B_n\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\\ &\qquad\times(4\pi n)^{s-\ell}\frac{\Gamma\big(\ell-(s-k+1)\big)}{\Gamma(k-1)}\\ A_0(n)&=\frac{1}{B}(\frac{C}{M})^{\ell/2}\delta^{\ell}\mathcal{G}(\xi)\frac{\mathcal{C}\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)}\frac{\Gamma\big(\ell-(s-k+1)\big)}{\Gamma(k-1)}\\ &\qquad\times L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\delta\big(\frac{n}{C\delta}\big)(4\pi n)^{s-\ell}\sum_{d\mid\frac{n}{C\delta}}\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\bar{\xi}(\frac{n}{dC\delta})d^{\ell-1}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, on remplace r par $-(s-k-1)$ et m par $(s-\ell+1)+(s-k-1)=k-\ell+2(s-k-1)$, avec $k-1-s\geqslant 0$:

$$\mathrm{Hol}\Big(G_\delta|W_{CMB^2}E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|W_{CMB^2}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}A(n)e(nz),$$

$$A(n)=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0,n_2>0}}B_{n_1}C_{n_2}\sum_{i=0}^{k-1-s}(-1)^i\binom{k-1-s}{i}\frac{\Gamma(s-\ell+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(s-\ell+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-s-i}n^i,$$

avec l'expression des coefficients B_{n_1} et C_{n_2} donnée dans les lemmes **15.4** et **15.5** :

$$A(n)=\frac{1}{B}(\frac{C\delta}{M})^{\ell/2}\mathcal{G}(\xi)\,\mathcal{C}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0,n_2>0}}\delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big)\sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta}\\ d_1>0}}\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\bar{\xi}(\frac{n}{d_1C\delta})d_1{}^{\ell-1}\delta\big(\frac{n_2}{\delta}\big)$$

$$\times\sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2>0}}d_2{}^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d_2\delta})\sum_{i=0}^{k-1-s}(-1)^i\binom{k-1-s}{i}\frac{\Gamma(s-\ell+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(s-\ell+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-s-i}n^i.$$

Regroupons les deux calculs :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hol}\Big(G_\delta|_\ell W_{CMB^2}\times E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}\Big)\\&\quad=\mathrm{Hol}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi y)^{(s-k+1)}B_nC_0(y)e(nz)\Big)\\&\quad+\mathrm{Hol}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_ne(nz)\Big)\times\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(4\pi y)^{(s-k+1)}C_n\mathcal{W}(4\pi ny,s-\ell+1,s-k+1)e(nz)\Big)\Big].\end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

Lemme 15.6 :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hol}\Big(G_\delta|_\ell W_{CMB^2}\times E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}\Big)\\
&=\frac{1}{B}(\frac{C\delta}{M})^{\ell/2}\mathcal{G}(\xi)\frac{(CMB^2)^{-(k-\ell)/2-(s-k+1)}}{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1))}\times(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell}2^{2(s-k+1)-1}\pi^{(s-k+1)}\delta^{k-\ell+2(s-k+1)}\\
&\times\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)\Gamma\big(\ell-(s-k+1)\big)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)\Gamma(k-1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\\
&\qquad\times(4\pi)^{(s-k+1)}\delta\big(\frac{n}{C\delta}\big)(4\pi n)^{s-\ell}\sum_{\substack{d|\frac{n}{C\delta}\\ d>0}}\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\bar{\xi}(\frac{n}{dC\delta})d^{\ell-1}\\
&\quad+\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0,n_2>0}}\delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big)\sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta}\\ d_1>0}}\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\bar{\xi}(\frac{n}{d_1C\delta})d_1{}^{\ell-1}\delta\big(\frac{n_2}{\delta}\big)\sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2>0}}d_2{}^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\psi\xi\chi(\frac{n}{d_2\delta})\\
&\qquad\times\sum_{i=0}^{k-1-s}(-1)^i\binom{k-1-s}{i}\frac{\Gamma(s-\ell+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(s-\ell+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-s-i}n^i\Bigg]\,e(nz).\end{aligned}$$

15.4. — Développement de Fourier de la partie holomorphe de la série suivante : $\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;j+\ell-k+1)\Big)\Big|_k \mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}$ *:*

Il suffit maintenant de reprendre l'expression donnée dans le lemme **15.1** :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_k \mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}\Big)\\
&\quad=\big(\frac{M}{M_0}\big)^{1-k/2}\mathrm{Hol}\Big(G_\delta|_\ell W_{CMB^2}E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_{k-\ell}W_{CMB^2}\Big)\Big|_k U_{M/M_0}W_{CM_0B^2}\\
&\quad=\big(\frac{M}{M_0}\big)^{1-k/2}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(4\pi)^{s-k+1}A_0(n)+A(n)\Big]e(nz)\Big\}\Big|_k U_{M/M_0}W_{CM_0B^2}\\
&\quad=\big(\frac{M}{M_0}\big)^{1-k/2}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(4\pi)^{s-k+1}A_0\big(\frac{nM}{M_0}\big)+A\big(\frac{nM}{M_0}\big)\Big]e(nz)\Big\}\Big|_k W_{CM_0B^2}.
\end{aligned}
$$

Nous n'expliciterons pas l'action de $W_{CM_0B^2}$ car cet opérateur est de niveau fixé. Les calculs du paragraphe *15.3* permettent alors d'expliciter les coefficients $A_0\big(\frac{nM}{M_0}\big)$ et $A\big(\frac{nM}{M_0}\big)$:

Lemme 15.7 : Avec $s=j+\ell$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hol}\Big(G_\delta E_{k-\ell,C(M/\delta)B^2}(z;s-k+1)|_k \mathrm{Tr}_{CM_0B^2}^{CMB^2}\Big)\\
&=\big(\frac{M}{M_0}\big)^{1-k/2}\frac{1}{B}\,\big(\frac{C\delta}{M}\big)^{\ell/2}\mathcal{G}(\xi)(-2\pi\mathbf{i}\delta)^{k-\ell}(2\delta)^{2(s-k+1)-1}\delta\pi^{(s-k+1)}\times\frac{(CMB^2)^{-(k-\ell)/2-(s-k+1)}}{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1))}\\
&\times\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{\Gamma(k-\ell+2(s-k+1)-1)\Gamma\big(\ell-(s-k+1)\big)}{(4\pi\delta)^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\Gamma(s-k+1)\Gamma(k-1)}L(k-\ell+2(s-k+1)-1,\psi\xi\chi)\\
&\qquad\times(4\pi)^{(s-k+1)}\delta\big(\frac{nM}{M_0C\delta}\big)\big(\frac{4\pi nM}{M_0}\big)^{s-\ell}\sum_{\substack{d|\frac{nM}{M_0C\delta}\\ d>0}}\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\,\bar{\xi}\big(\frac{nM}{M_0dC\delta}\big)\,d^{\ell-1}\\
&\qquad+\sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{M_0}\\ n_1>0,n_2>0}}\delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big)\sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta}\\ d_1>0}}\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\bar{\xi}\big(\frac{n}{d_1C\delta}\big){d_1}^{\ell-1}\delta\big(\frac{n_2}{\delta}\big)\sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2>0}}{d_2}^{k-\ell+2(s-k+1)-1}\psi\xi\chi\big(\frac{n_2}{d_2\delta}\big)\\
&\qquad\times\sum_{i=0}^{k-1-s}(-1)^i\binom{k-1-s}{i}\frac{\Gamma(s-\ell+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(s-\ell+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-s-i}\big(\frac{nM}{M_0}\big)^i\Bigg]\,e\big(\frac{nM}{M_0}z\big)\Bigg\}\Bigg|_k W_{CM_0B^2}
\end{aligned}
$$

En remplaçant cette expression dans le lemme **13.5**, et s par $j+\ell$, nous pouvons maintenant écrire :

Proposition 15.8 : Expression explicite des symboles modulaires :

$$
\begin{aligned}
&P(x,r,f)\\
&\qquad=\sum_{\delta|M}\varphi(M/\delta)^{-1}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\mathcal{G}_a(\bar{\chi})\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\big(\frac{a}{M}\big)^{r-j}(-1)^{k-\ell}\,\mathbf{i}^{j+1+k-\ell}\,2^{j-k+\ell}j!\,\frac{(4\pi)^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)}\times
\end{aligned}
$$

$$\times \prod_{p|\delta} \mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)}) \times \frac{1}{\prod\limits_{\substack{p|M \\ p\nmid(M/\delta)}} (1+\frac{1}{p})} \times \big(\frac{M}{M_0}\big)^{1-k/2} \frac{1}{B} \big(\frac{C\delta}{M}\big)^{\ell/2} \delta^{2j+\ell-k+1}$$

$$\times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)} L_f(j+\ell,\xi)^{-1}\mathcal{G}(\xi)$$

$$\times \Big\langle f^\rho, \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{\delta^{2j+\ell-k+1}\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)} L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$$

$$\times \delta\big(\frac{nM}{M_0C\delta}\big) \big(\frac{nM}{M_0}\big)^j \sum_{\substack{d|\frac{nM}{M_0C\delta} \\ d>0}} \mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)\, \bar{\xi}\big(\frac{nM}{dM_0C\delta}\big)\, d^{\ell-1}$$

$$+ \sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{M_0} \\ n_1>0,n_2>0}} \delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big) \sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta} \\ d_1>0}} \mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\, \bar{\xi}\big(\frac{n}{d_1C\delta}\big) {d_1}^{\ell-1} \delta\big(\frac{n_2}{\delta}\big) \sum_{\substack{d_2|n_2 \\ d_2>0}} {d_2}^{2j+\ell-k+1}$$

$$\times \psi\xi\chi\big(\frac{n_2}{d_2\delta}\big) \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)} n_2^{k-1-j-\ell-i} \big(\frac{nM}{M_0}\big)^i \Big]$$

$$e\big(\frac{nM}{M_0}z\big)\Big\} \Big|_k W_{CM_0B^2} \Big\rangle_{CM_0B^2}$$

où $f \in S_k(C,\psi)$ primitive ; $x = \dfrac{a}{M}$ avec a et M premiers entre eux ; r entier, $0 \leqslant r \leqslant k-2$; pour chaque caractère χ mod M/δ, ξ mod B primitif, $\xi\chi(-1) = (-1)^\ell$, $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$; C est supposé premier avec MB ; enfin pour $p \mid \delta$, γ est l'ordre en p de δ et $\mathcal{A}_p(X) = a_{p^\gamma}X^\gamma - \psi(p)p^{k-1}a_{p^{\gamma-1}}X^{\gamma+1}$.

Ce qui revient à l'expression annoncée dans la proposition **15.2**. $\square$

16 : Sommation sur les caractères χ modulo M/δ.

Le regroupement et le calcul de tous les termes en χ nous permet dans cette partie de simplifier l'expression précédente.

Les termes dépendant de χ sont de deux types :

$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(p^g)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$$

$$= \sum_{\chi \bmod M/\delta} \sum_{u \bmod M/\delta} \bar{\chi}(u)e\big(\frac{ua}{(M/\delta)}\big)\chi(p^g) \sum_{t \bmod BM/\delta} \chi(t)e\big(\frac{td}{(BM/\delta)}\big)L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$$

et
$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(p^g)\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\psi\xi\chi\big(\frac{n_2}{\delta d_2}\big)$$

$$= \sum_{\chi \bmod M/\delta} \sum_{u \bmod M/\delta} \bar{\chi}(u)e\big(\frac{ua}{(M/\delta)}\big)\chi(p^g) \sum_{t \bmod BM/\delta} \chi(t)e\big(\frac{td_1}{(BM/\delta)}\big)\psi\xi\chi\big(\frac{n_2}{\delta d_2}\big)$$

où $p \mid \delta$, $g = \gamma$ ou $\gamma + 1$ (apparaissant dans $\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)})$).

On connaît le comportement de la fonction zêta de Riemann : $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta(1-m) = 0$ si $m > 1$ est impair et $\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m}$ si $m \geqslant 1$ est pair (B_m sont les nombres de Bernoulli), avec l'équation fonctionnelle $\zeta(s) = \dfrac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)\cos(\pi s/2)}\,\zeta(1-s)$.

Cette situation se généralise avec un caractère χ (primitif ou non) : Si $m \geqslant 1$ est de parité contraire à χ, $L(1-m,\chi) = 0$ mais si $m \geqslant 1$ est de même parité que χ, $L(1-m,\chi) = -\frac{B_{m,\chi}}{m}$. On peut expliciter ces nombres de Bernoulli généralisés : pour χ caractère de Dirichlet modulo K, $B_{m,\chi} = K^{m-1} \sum\limits_{w=1}^{K} \chi(w) \sum\limits_{I=0}^{K} \binom{K}{I} B_I \left(\frac{w}{K}\right)^{m-I}$. De plus on a l'équation fonctionnelle suivante, pour un caractère χ_0 primitif modulo K_0 et pour $s \in \mathbf{C}$ (voir [21, ch. 3], [4, ch. 1], [3, ch. 2]) :

$$\text{si } \chi_0 \text{ est pair : } L(s,\chi_0) = \frac{\mathcal{G}(\chi_0)(2\pi/K_0)^s}{2\Gamma(s)\cos(\pi s/2)} L(1-s,\bar{\chi}_0);$$
$$\text{si } \chi_0 \text{ est impair : } L(s,\chi_0) = \frac{\mathcal{G}(\chi_0)(2\pi/K_0)^s}{2\Gamma(s)\sin(\pi s/2)} L(1-s,\bar{\chi}_0).$$

Remarquons que $\dfrac{\mathcal{G}(\chi_0)(2\pi/K_0)^s}{2\Gamma(s)\cos(\pi s/2)}$ ou $\dfrac{\mathcal{G}(\chi_0)(2\pi/K_0)^s}{2\Gamma(s)\sin(\pi s/2)}$ est une fonction entière, c'est–à–dire holomorphe sur $\mathbf{C}$: les zéros de $\cos(\pi s/2)$ ou $\sin(\pi s/2)$ sont les entiers relatifs, donc parmi les pôles (simples) de la fonction $\Gamma(s)$ (puisque la fonction $\Gamma(s)^{-1}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ avec des zéros simples aux entiers non positifs ; ce qui rend la fonction $\Gamma(s)^{-1}\cos(\pi s/2)^{-1}$ holomorphe ainsi que $\Gamma(s)^{-1}\sin(\pi s/2)^{-1}$.

Remarquons aussi que l'on peut trouver une expression explicite de $L(1,\chi)$ dans [1, ch. 5 : (17) ou theorem 3], [4, ch. 1], [21, theorem 4.9] pour un caractère χ primitif.

On peut cependant se ramener à un caractère χ modulo K non primitif : tout d'abord on a un lien entre χ et le caractère primitif qui lui est associé χ_0 modulo $K_0 = K/K_1$ (voir section **3**) : $\chi(n) = \sum\limits_{t \mid (n,K_1)} \chi_0(n)\mu(t)$, $\mathcal{G}(\chi) = \mathcal{G}(\chi_0)\mu(K_1)\chi_0(K_1)$. Nous prouvons maintenant que $L(s,\chi) = L_{K_1}(s,\chi_0) = \prod\limits_{p \nmid K_1} (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1}$, et $L(s,\chi_0) = L(s,\chi) \times \prod\limits_{p \mid K_1} (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1}$.

En effet :

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t \mid (n,K_1)} \chi_0(n)\mu(t)n^{-s} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,K_1)=1}} \chi_0(n)n^{-s} = \prod_{p \nmid K_1} (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1};$$

$$L(s,\chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_0(n)n^{-s} = \prod_{p} (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1} = \prod_{p \nmid K_1} (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1} \times \prod_{p \mid K_1} (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1}.$$

Ceci permet d'écrire :

Lemme 16.1 : Equation fonctionnelle pour $L(s,\chi)$:

$$\text{si } \chi \text{ est pair : } L(s,\chi) = \frac{\mathcal{G}(\chi_0)(2\pi/K_0)^s}{2\Gamma(s)\cos(\pi s/2)} \prod_{p|K_1} \frac{(1-\chi_0(p)p^{-s})}{(1-\chi_0(p)p^{s-1})} L(1-s,\overline{\chi});$$

$$\text{si } \chi \text{ est impair : } L(s,\chi) = \frac{\mathcal{G}(\chi_0)(2\pi/K_0)^s}{2\Gamma(s)\sin(\pi s/2)} \prod_{p|K_1} \frac{(1-\chi_0(p)p^{-s})}{(1-\chi_0(p)p^{s-1})} L(1-s,\overline{\chi}).$$

Revenons à $L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$: $\psi\xi\chi(-1)=(-1)^{k+\ell}$, $\psi\xi\chi$ a donc la parité de $k+\ell$, et d'autre part $2j+\ell-k+1 = 1-(k-\ell-2j) = 1-m$ avec $m=k-\ell-2j$ de même parité que $\psi\xi\chi$.

Si $m \geqslant 1$: Alors $L(1-m,\psi\xi\chi) = -\frac{B_{m,\psi\xi\chi}}{m}$.

Si $m<1$: Alors on utilise l'équation fonctionnelle, qui exprime $L(1-m,\psi\xi\chi)$ en fonction de $L(m,\overline{\psi\xi\chi}) = L(1-(2j+\ell-k+1),\overline{\psi\xi\chi}) = L(1-m',\overline{\psi\xi\chi})$ et d'un facteur bien défini, où l'on a $\overline{\psi\xi\chi}$ de même parité que $\psi\xi\chi$, et $m'=2j+\ell-k+1$ de parité contraire. Donc $L(1-m',\overline{\psi\xi\chi})=0$, $L(m,\overline{\psi\xi\chi})=0$ et $L(1-m,\psi\xi\chi)=0$.

On a alors pour $m\geqslant 1$ c'est–à–dire $k-\ell-2j\geqslant 1$, avec $K=CMB$:

$$L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi) = -\frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j}\sum_{w=1}^{CMB}\overline{\psi\xi\chi}(w)\sum_{I=0}^{CMB}\binom{CMB}{I}B_I\,\Big(\frac{w}{CMB}\Big)^{k-\ell-2j-I}.$$

Les termes dépendant de χ sont donc nuls ou sous l'une des formes :

$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar\chi)\chi(p^g)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$$

$$= -\sum_{u \bmod M/\delta} e\Big(\frac{ua}{(M/\delta)}\Big)\sum_{t \bmod BM/\delta} e\Big(\frac{td}{(BM/\delta)}\Big)$$

$$\times \frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j}\sum_{w=1}^{CMB}\overline{\psi\xi}(w)\sum_{I=0}^{CMB}\binom{CMB}{I}B_I\,\Big(\frac{w}{CMB}\Big)^{k-\ell-2j-I}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\bar\chi(u)\chi(p^g)\chi(t)\bar\chi(w)$$

et
$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar\chi)\chi(p^g)\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\psi\xi\chi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big)$$

$$= \sum_{u \bmod M/\delta} e\Big(\frac{ua}{(M/\delta)}\Big)\sum_{t \bmod BM/\delta} e\Big(\frac{td_1}{(BM/\delta)}\Big)\psi\xi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big)\sum_{\chi \bmod M/\delta}\bar\chi(u)\chi(p^g)\chi(t)\chi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big).$$

Or
$$\sum_{\chi \bmod M/\delta}\bar\chi(u)\chi(p^g)\chi(t)\bar\chi(w) = \sum_{\chi \bmod M/\delta}\chi(u^{-1}p^gtw^{-1})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } u^{-1}p^gtw^{-1} \not\equiv 1 \bmod M/\delta \\ \varphi(M/\delta) & \text{si } u^{-1}p^gtw^{-1} \equiv 1 \bmod M/\delta \end{cases}$$

et
$$\sum_{\chi \bmod M/\delta}\bar\chi(u)\chi(p^g)\chi(t)\chi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big) = \sum_{\chi \bmod M/\delta}\chi\Big(u^{-1}p^gt\frac{n_2}{\delta d_2}\Big)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } u^{-1}p^gt\frac{n_2}{\delta d_2} \not\equiv 1 \bmod M/\delta \\ \varphi(M/\delta) & \text{si } u^{-1}p^gt\frac{n_2}{\delta d_2} \equiv 1 \bmod M/\delta \end{cases}$$

On change donc encore l'ordre des sommations :

$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(p^g)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$$

$$= - \sum_{t \bmod BM/\delta} e\Big(\frac{td}{(BM/\delta)}\Big)\frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j}\sum_{w=1}^{CMB}\psi\xi(w)$$

$$\times\sum_{I=0}^{CMB}\binom{CMB}{I}B_I\,\Big(\frac{w}{CMB}\Big)^{k-\ell-2j-I}\sum_{\chi \bmod M/\delta}\sum_{u \bmod M/\delta}\chi(u^{-1}p^g tw)e\Big(\frac{ua}{(M/\delta)}\Big),$$

et

$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(p^g)\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\psi\xi\chi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big)$$

$$= \sum_{t \bmod BM/\delta} e\Big(\frac{td_1}{(BM/\delta)}\Big)\psi\xi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big)\sum_{\chi \bmod M/\delta}\sum_{u \bmod M/\delta}\chi\Big(u^{-1}p^g t\frac{n_2}{\delta d_2}\Big)e\Big(\frac{ua}{(M/\delta)}\Big).$$

On peut momentanément fixer p^g, t, w, et ne retenir parmi les indices $u \bmod M/\delta$ que l'unique $u \bmod M/\delta$ défini par les conditions $(u, M/\delta) = 1$ et $u \equiv p^g tw^{-1} \bmod M/\delta$. Alors on peut écrire simplement $\sum_{u \bmod M/\delta}\chi(u^{-1}p^g tw^{-1})e\big(\frac{ua}{(M/\delta)}\big) = \chi(1)e\big(\frac{p^g tw^{-1}a}{(M/\delta)}\big) = e\big(\frac{p^g tw^{-1}a}{(M/\delta)}\big)$. La première somme devient alors :

$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(p^g)\mathcal{G}_{d,BM/\delta}(\chi)L(2j+\ell-k+1,\psi\xi\chi)$$

$$= -\varphi(M/\delta)\sum_{t \bmod BM/\delta} e\Big(\frac{td}{(BM/\delta)}\Big)e\Big(\frac{p^g tw^{-1}a}{(M/\delta)}\Big)$$

$$\times\frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j}\sum_{w=1}^{CMB}\overline{\psi\xi}(w)\sum_{I=0}^{CMB}\binom{CMB}{I}B_I\,\Big(\frac{w}{CMB}\Big)^{k-\ell-2j-I}.$$

De même en fixant p^g, t, $\frac{n_2}{\delta d_2}$, on définit $u \bmod M/\delta$ par $(u, M/\delta) = 1$ et $u \equiv p^g t\frac{n_2}{\delta d_2} \bmod M/\delta$; on obtient $\sum_{u \bmod M/\delta}\chi(u^{-1}p^g t\frac{n_2}{\delta d_2})e\big(\frac{ua}{(M/\delta)}\big) = e\big(\frac{p^g tn_2 a}{Md_2}\big)$. La deuxième somme devient :

$$\sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(p^g)\mathcal{G}_{d_1,BM/\delta}(\chi)\psi\xi\chi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big) = \varphi(M/\delta)\sum_{t \bmod BM/\delta} e\Big(\frac{td_1}{(BM/\delta)}\Big)e\Big(\frac{p^g tn_2 a}{Md_2}\Big)\psi\xi\Big(\frac{n_2}{\delta d_2}\Big).$$

Regroupons maintenant toutes les conditions imposées :

$$(C, MB^2) = 1,$$

$$(CMB^2) \mid \frac{nM}{M_0},$$

$$(t, M/\delta) = 1,$$

$$
\begin{aligned}
&d \mid \frac{nM/M_0}{CMB^2},\\
&(\frac{nM/M_0}{dCMB^2}, B) = 1,\\
&k-\ell-2j \geqslant 1,\\
&(w, M/\delta) = 1,\\
&(w, B) = 1,\\
&(w, C) = 1,\\
&n_1 + n_2 = \frac{nM}{M_0},\\
&(CMB^2) \mid n_1,\\
&d_1 \mid \frac{n_1}{CMB^2},\\
&(t_1, M/\delta) = 1,\\
&(\frac{n_1}{d_1 CMB^2}, B) = 1,\\
&\delta \mid n_2,\\
&d_2 \mid \frac{n_2}{\delta},\\
&(\frac{n_2}{\delta d_2}, B) = 1,\\
&(\frac{n_2}{\delta d_2}, C) = 1,\\
&(\frac{n_2}{\delta d_2}, M/\delta) = 1,\\
&(p^g, M/\delta) = 1.
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire la (principale) expression explicite suivante pour les symboles modulaires :

Proposition 16.2 : Pour x, r, f comme en **1**, avec les notations de **13.5**, on a :

$$
\begin{aligned}
&P(x, r, f)\\
&\quad = \sum_{\delta \mid M} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \left(\frac{a}{M}\right)^{r-j} (-1)^{k-\ell}\, \mathrm{i}^{j+1+k-\ell}\, 2^{j-k+\ell} j!\, \frac{(4\pi)^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)} \times \frac{1}{\prod_{\substack{p \mid M \\ p \nmid (M/\delta)}} (1+\frac{1}{p})}\\
&\quad \times \left(\frac{M}{M_0}\right)^{1-k/2} \frac{1}{B} \left(\frac{C\delta}{M}\right)^{\ell/2} \delta^{2j+\ell-k+1} \times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)}\, L_f(j+\ell, \xi)^{-1} \mathcal{G}(\xi)\\
&\quad \times \Big\langle f^{\rho}, \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{\delta^{2j+\ell-k+1}\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)} \times
\end{aligned}
$$

$$\times \frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{\substack{w=1\\(w,CBM/\delta)=1}}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \left(\frac{w}{CMB}\right)^{k-\ell-2j-I}$$

$$\times \delta\left(\frac{nM}{M_0C\delta}\right) \left(\frac{M}{M_0}\right)^j \sum_{\substack{d|\frac{nM}{M_0C\delta}\\d>0}} \bar{\xi}\left(\frac{nM}{dM_0C\delta}\right) d^{\ell-1} \sum_{\substack{t \bmod BM/\delta\\(t,M/\delta)=1}} e\left(\frac{td}{(BM/\delta)}\right) n^{k-1-\ell}$$

$$\times \prod_{p|\delta} \left[a_{p^\gamma} p^{-\gamma(j+1)} e\left(\frac{p^\gamma tw^{-1}a}{(M/\delta)}\right) - \psi(p)p^{k-1} a_{p^{\gamma-1}} p^{-(\gamma+1)(j+1)} e\left(\frac{p^{\gamma+1}tw^{-1}a}{(M/\delta)}\right)\right]$$

$$+ \sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{M_0}\\n_1>0,n_2>0}} \delta\left(\frac{n_1}{C\delta}\right) \sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta}\\d_1>0}} \sum_{\substack{t \bmod BM/\delta\\(t,M/\delta)=1}} e\left(\frac{td_1}{(BM/\delta)}\right) \bar{\xi}\left(\frac{n}{d_1C\delta}\right) {d_1}^{\ell-1}$$

$$\times \delta\left(\frac{n_2}{\delta}\right) \sum_{\substack{d_2|n_2,d_2>0\\(\frac{n_2}{\delta d_2},M/\delta)=1}} {d_2}^{2j+\ell-k+1} \psi\xi\left(\frac{n_2}{\delta d_2}\right)$$

$$\times \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)} n_2^{k-1-j-\ell-i} \left(\frac{nM}{M_0}\right)^i$$

$$\times \prod_{p|\delta} \left[a_{p^\gamma} p^{-\gamma(j+1)} e\left(\frac{p^\gamma tn_2a}{Md_2}\right) - \psi(p)p^{k-1} a_{p^{\gamma-1}} p^{-(\gamma+1)(j+1)} e\left(\frac{p^{\gamma+1}tn_2a}{Md_2}\right)\right]\Bigg]$$

$$e\left(\frac{nM}{M_0}z\right)\Bigg\} \Bigg|_k W_{CM_0B^2} \Big\rangle_{CM_0B^2}$$

Proposition 16.3 : Pour x, r, f comme en **1**, avec les notations de **13.5**, on a :

$$P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \times \langle f^\rho, F_{x,r,j}\rangle_{CM_0B^2},$$

où

$$F_{x,r,j}(z) = \sum_{\delta|M} \binom{r}{j} \left(\frac{a}{M}\right)^{r-j} (-1)^{k-\ell}\, \mathbf{i}^{j+1+k-\ell}\, 2^{2j-k+2\ell} j!\, \Gamma(j+\ell)^{-1} \times \frac{1}{\prod_{\substack{p|M\\p\nmid(M/\delta)}} (1+\frac{1}{p})}$$

$$\times \left(\frac{M}{M_0}\right)^{1-k/2} \frac{1}{B} \left(\frac{C\delta}{M}\right)^{\ell/2} \delta^{2j+\ell-k+1} \times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)} \mathcal{G}(\xi)$$

$$\times \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[-\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{\delta^{2j+\ell-k+1}\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)}$$

$$\times \frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{\substack{w=1\\(w,CBM/\delta)=1}}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \left(\frac{w}{CMB}\right)^{k-\ell-2j-I}$$

$$\times\delta\big(\frac{nM}{M_0C\delta}\big)\,\big(\frac{M}{M_0}\big)^j\sum_{\substack{d|\frac{nM}{M_0C\delta}\\ d>0}}\bar{\xi}\big(\frac{nM}{dM_0C\delta}\big)\,d^{\ell-1}\sum_{\substack{t \bmod BM/\delta\\ (t,M/\delta)=1}}e\big(\frac{td}{(BM/\delta)}\big)n^{k-1-\ell}$$

$$\times\prod_{p|\delta}\big[a_{p^\gamma}p^{-\gamma(j+1)}e\big(\frac{p^\gamma tw^{-1}a}{(M/\delta)}\big)-\psi(p)p^{k-1}a_{p^{\gamma-1}}p^{-(\gamma+1)(j+1)}e\big(\frac{p^{\gamma+1}tw^{-1}a}{(M/\delta)}\big)\big]$$

$$+\sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{M_0}\\ n_1>0,n_2>0}}\delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big)\sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta}\\ d_1>0}}\sum_{\substack{t \bmod BM/\delta\\ (t,M/\delta)=1}}e\big(\frac{td_1}{(BM/\delta)}\big)\,\bar{\xi}\big(\frac{n}{d_1C\delta}\big){d_1}^{\ell-1}$$

$$\times\delta\big(\frac{n_2}{\delta}\big)\sum_{\substack{d_2|n_2,d_2>0\\ (\frac{n_2}{\delta d_2},M/\delta)=1}}{d_2}^{2j+\ell-k+1}\psi\xi\big(\frac{n_2}{\delta d_2}\big)$$

$$\times\sum_{i=0}^{k-1-j-\ell}(-1)^i\binom{k-1-j-\ell}{i}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-j-\ell-i}\big(\frac{nM}{M_0}\big)^i$$

$$\times\prod_{p|\delta}\big[a_{p^\gamma}p^{-\gamma(j+1)}e\big(\frac{p^\gamma tn_2a}{Md_2}\big)-\psi(p)p^{k-1}a_{p^{\gamma-1}}p^{-(\gamma+1)(j+1)}e\big(\frac{p^{\gamma+1}tn_2a}{Md_2}\big)\big]\Bigg]$$

$$e\big(\frac{nM}{M_0}z\big)\Bigg\}\Bigg|_k W_{CM_0B^2}$$

Remarque : La conséquence essentielle de cette proposition est le développement des formes modulaires $F_{x,r,j}$ sur une base (finie) de formes propres des opérateurs de Hecke, dont le premier élément est f^ρ, avec des coordonnées dans $\overline{\mathbf{Q}}$: on peut écrire

$$F_{x,r,j}=\lambda_{x,r,j}f^\rho+h,$$

où $\lambda_{x,r,j}\in\overline{\mathbf{Q}}$, $\langle f^\rho,h\rangle_{CM_0B^2}=0$, $P(x,r,f)=\sum_{j=0}^{r}\pi^{j+\ell}\frac{\langle f,f\rangle_{CM_0B^2}}{L_f(j+\ell,\xi)}\bar{\lambda}_{x,r,j}$. Les symboles modulaires s'expriment ainsi comme combinaisons linéaires d'un nombre fini de nombres algébriques. Notons aussi que les coefficients $\pi^{j+\ell}\langle f,f\rangle_{CM_0B^2}L_f(j+\ell,\xi)^{-1}$ sont des constantes essentielles attachées à la forme f.

17 : Cas où $M=p^m$ (p premier) : estimation des dénominateurs.

Dans cette dernière partie, nous donnons lorque M est une puissance de p, une expression explicite simplifiée pour les fonctions $F_{x,r,j}$ qui représentent les symboles modulaires, et nous démontrons que, multipliés par un certain nombre entier, les symboles modulaires sont des combinaisons linéaires de produits scalaires de f^ρ et de fonctions $F_{x,r,j}$ dont les coefficients sont à des facteurs fixés près des entiers algébriques.

Proposition 17.1 : Lorsque $M = p^m$:

$$P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \times \langle f^\rho, F_{x,r,j} \rangle_{CpB^2},$$

et il existe un entier naturel N non nul et indépendant de $x = a/M$ tel que pour tout j, $NM^r F_{x,r,j}(z)$ a pour coefficients des entiers algébriques.

Démonstration. — On reprend ici la démarche précédente (section **16**) mais dans ce cas, elle se simplifie considérablement : χ est un caractère modulo M/δ ; le produit $\prod_{q|\delta} \mathcal{A}_q(\chi(q)q^{-(j+1)}) = \prod_{q|\delta} \Big(a_{q^\gamma} q^{-\gamma(j+1)} \chi(q^\gamma) - \psi(q) q^{k-1} a_{q^{-(\gamma+1)(j+1)}} \chi(q^{\gamma+1}) \Big)$ s'entend sur les nombres premiers qui divisent δ ; comme $M = p^m$ et $\delta \mid M$, le seul nombre premier qui divise δ est p. Donc $\chi(p^\gamma) = 0$ sauf si $\gamma = 0$ ou si $M/\delta = 1$; $\chi(p^{\gamma+1}) = 0$ sauf si $\gamma + 1 = 0$ (impossible) ou si $M/\delta = 1$.

On a donc 3 cas :

Ou bien $M/\delta = 1$: alors $\delta = M$, $\gamma = m$ et χ est le caractère trivial modulo 1.

Ou bien $M/\delta > 1$ *et* $\gamma = 0$: alors $\delta = 1$, aucun nombre premier ne divise δ et il n'y a pas de $\mathcal{A}_q$.

Ou bien $M/\delta > 1$ *et* $\gamma > 0$: alors p est l'unique nombre premier qui divise δ, et $\mathcal{A}_p(\chi(p)p^{-(j+1)}) = 0$.

La somme $\sum_{\delta|M}$ se réduit donc aux seuls termes obtenus lorsque $\delta = 1$ ou $\delta = M$:

$$P(x,r,f) = \Big\{ \textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = 1 \Big\} + \Big\{ \textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = M \Big\},$$

$$P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \times \langle f^\rho, F_{x,r,j} \rangle_{CpB^2},$$

et $F_{x,r,j} = \Big\{ \textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = 1 \Big\} + \Big\{ \textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = M \Big\}$, pour tout j.

17.1. — Etude de la partie correspondant à $\delta = 1$:

Reprenons la proposition **16.3** :

$$\Big\{ \textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = 1 \Big\}$$
$$= \binom{r}{j} \Big(\frac{a}{M}\Big)^{r-j} (-1)^{k-\ell}\, \mathrm{i}^{j+1+k-\ell}\, 2^{2j-k+2\ell} j!\, \Gamma(j+\ell)^{-1}$$
$$\times \Big(\frac{M}{p}\Big)^{1-k/2} \frac{1}{B} \Big(\frac{C}{M}\Big)^{\ell/2} \times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)} \mathcal{G}(\xi) \times$$

$$
\times \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[-\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)}
$$

$$
\times \frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{\substack{w=1\\(w,CMB)=1}}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \,(\frac{w}{CMB})^{k-\ell-2j-I}
$$

$$
\times \delta(\frac{nM}{pC})\,(\frac{M}{p})^j \sum_{\substack{d|\frac{nM}{pC}\\d>0}} \bar{\xi}(\frac{nM}{dpC})\, d^{\ell-1} \sum_{\substack{t \bmod BM\\(t,M)=1}} e(\frac{td}{BM}) n^{k-1-\ell}
$$

$$
+ \sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{p}\\n_1>0,n_2>0}} \delta(\frac{n_1}{C}) \sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C}\\d_1>0}} \sum_{\substack{t \bmod BM\\(t,M)=1}} e(\frac{td_1}{BM})\, \bar{\xi}(\frac{n}{d_1C}) {d_1}^{\ell-1}
$$

$$
\times \sum_{\substack{d_2|n_2,d_2>0\\(\frac{n_2}{d_2},M)=1}} {d_2}^{2j+\ell-k+1} \psi\xi(\frac{n_2}{d_2})
$$

$$
\times \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)} n_2^{k-1-j-\ell-i} (\frac{nM}{p})^i \Bigg]
$$

$$
e(\frac{nM}{p}z) \Bigg\} \Bigg|_k W_{CpB^2}
$$

L'idée dominante maintenant est de considérer la somme double $\sum\limits_{\substack{w=1\\(w,CMB)=1}}^{CMB} \sum\limits_{I=0}^{CMB}$ comme correspondant à un certain nombre de Bernoulli vu comme une distribution. On sait en effet qu'il existe une distribution E_m telle que pour toute fonction périodique f, $E_m(f) = B_{m,f}$ ([7]). Ceci signifie que la valeur ne dépend pas du choix de la période. On peut ainsi écrire dans un premier temps :

$$
(CMB)^{k-\ell-2j-1} \sum_{\substack{w=1\\(w,CMB)=1}}^{CMB} \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \,(\frac{w}{CMB})^{k-\ell-2j-I} = B_{k-\ell-2j,\overline{\psi\xi}}
$$

en considérant $\overline{\psi\xi}$ comme un caractère modulo CMB. Mais en tant que caractère modulo CB, on a aussi :

$$
B_{k-\ell-2j,\overline{\psi\xi}} = (CB)^{k-\ell-2j-1} \sum_{\substack{w=1\\(w,CB)=1}}^{CB} \sum_{I=0}^{CB} \binom{CB}{I} B_I \,(\frac{w}{CB})^{k-\ell-2j-I}.
$$

Cette transformation nous permet de nous affranchir de toute référence à M. Il faut aussi noter que cette simplification n'a pas été possible de manière plus générale directement dans la proposition **16.3** à cause du fait que dans la somme $\sum\limits_{\substack{w=1\\(w,CBM/\delta)=1}}^{CMB}$, on avait w premier avec CBM/δ, au lieu de w premier avec CMB ici ($\delta = 1$).

On peut par ailleurs modifier aussi l'écriture de $\sum\limits_{\substack{t \bmod BM \\ (t,M)=1}} e\big(\frac{td}{BM}\big)$ à l'aide du caractère $\chi_{0,M}$ défini par $\chi_{0,M}(x) = 1$ si $(x, M) = 1$ et $\chi_{0,M}(x) = 0$ sinon, à l'aide aussi de la fonction μ de Möbius et du changement de variable $t = bt_1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{t \bmod BM \\ (t,M)=1}} e\big(\frac{td}{BM}\big) &= \sum_{t \bmod BM} \chi_{0,M}(t) e\big(\frac{td}{BM}\big) \\
&= \sum_{t \bmod BM} \sum_{b|(t,M)} \mu(b) e\big(\frac{td}{BM}\big) \\
&= \sum_{b|M} \mu(b) \sum_{t_1 \bmod BM/b} e\big(\frac{t_1 d}{BM/b}\big) \\
&= \sum_{b|M} \mu(b) \frac{BM}{b} \delta\big(\frac{d}{BM/b}\big) \\
&= BM \sum_{b|p^m} \mu(b) b^{-1} \delta\big(\frac{d}{BM/b}\big) \\
&= BM \Big(\delta\big(\frac{d}{BM}\big) - p^{-1} \delta\big(\frac{d}{BM/p}\big)\Big)
\end{aligned}$$

Cette deuxième simplification est elle aussi particulère à la situation $\delta = 1$ car le polynôme $\mathcal{A}_p(X)$, contenant des termes en t, n'apparaît plus.

D'où l'expression suivante :

Proposition 17.2 : Lorsque $M = p^m$:

$$\begin{aligned}
&\Big\{ \textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = 1 \Big\} \\
&= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} (-1)^{k-\ell}\, \mathbf{i}^{j+1+k-\ell}\, 2^{2j-k+2\ell} j!\, \Gamma(j+\ell)^{-1} \\
&\times \big(\frac{M}{p}\big)^{1-k/2} \frac{1}{B} \big(\frac{C}{M}\big)^{\ell/2} \times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)} \mathcal{G}(\xi) BM \\
&\times \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[-\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)} \\
&\qquad\qquad \times \frac{(CB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{\substack{w=1 \\ (w,CB)=1}}^{CB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CB} \binom{CB}{I} B_I \big(\frac{w}{CB}\big)^{k-\ell-2j-I} \\
&\qquad\qquad \times \delta\big(\frac{nM}{pC}\big) \big(\frac{M}{p}\big)^{j} \sum_{\substack{d|\frac{nM}{pC} \\ d>0}} \bar{\xi}\big(\frac{nM}{dpC}\big) d^{\ell-1} \Big(\delta\big(\frac{d}{BM}\big) - p^{-1}\delta\big(\frac{d}{BM/p}\big)\Big) n^{k-1-\ell} +
\end{aligned}$$

$$
+ \sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{p}\\ n_1>0,n_2>0}} \delta\big(\frac{n_1}{C}\big) \sum_{\substack{d_1 | \frac{n_1}{C}\\ d_1>0}} \Big(\delta\big(\frac{d_1}{BM}\big) - p^{-1}\delta\big(\frac{d_1}{BM/p}\big)\Big)\, \bar{\xi}\big(\frac{n}{d_1 C}\big) {d_1}^{\ell-1}
$$

$$
\times \sum_{\substack{d_2 | n_2, d_2>0\\ (\frac{n_2}{d_2},M)=1}} {d_2}^{2j+\ell-k+1} \psi\xi\big(\frac{n_2}{d_2}\big)
$$

$$
\times \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)} n_2^{k-1-j-\ell-i} \big(\frac{nM}{p}\big)^i \Bigg]
$$

$$
e\big(\frac{nM}{p}z\big)\Bigg\}\Bigg|_k W_{CpB^2}
$$

Cette expression montre que, si on laisse de côté les puissances de p fixées, les puissances de M sont : $M^{-(r-j)+1-k/2-\ell/2-j-1+(k-\ell)/2+1} = M^{-r-\ell+1}$ pour les facteurs communs, et respectivement M^j puis M^i pour les termes de la somme. Par ailleurs, on a $j \geqslant 0$, $i \geqslant 0$, et on peut toujours choisir $\ell = 0$ ou 1. Donc les puissances de M sont au minimum M^{-r}.

Autrement dit, nous avons démontré le résultat suivant (où il suffit de choisir par exemple pour N_1 le produit de tous les dénominateurs hormis les puissances de M) :

Proposition 17.3 : Lorsque $M = p^m$, il existe un entier naturel N_1 non nul et indépendant de $x = a/M$ tel que pour tout j :

$$
N_1 \times M^r \times \Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = 1\Big\} \text{ a pour coefficients des entiers algébriques,}
$$

ce que l'on peut écrire sous la forme $N_1 \times M^r \times \Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = 1\Big\} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{ab}}[[q]]$ où $q = e(nz)$, $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$ désigne l'extension maximale abélienne (cyclotomique) de $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}^{\mathrm{ab}}$ l'anneau de tous les entiers algébriques de $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$.

17.2. — Etude de la partie correspondant à $\delta = M$:

La proposition **16.3** donne la formule suivante :

$$
\Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = M\Big\}
$$

$$
= \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} (-1)^{k-\ell}\, \mathbf{i}^{j+1+k-\ell}\, 2^{2j-k+2\ell} j!\, \Gamma(j+\ell)^{-1} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{p})}
$$

$$
\times \big(\frac{M}{M_0}\big)^{1-k/2} \frac{1}{B}\, C^{\ell/2} M^{2j+\ell-k+1} \times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)}\, \mathcal{G}(\xi)
$$

$$
\times \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[-\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{M^{2j+\ell-k+1}\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)}
$$

$$
\times \frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{\substack{w=1\\ (w,CB)=1}}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \big(\frac{w}{CMB}\big)^{k-\ell-2j-I} \times
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \delta\big(\frac{n}{pC}\big)\ \big(\frac{M}{p}\big)^j \sum_{\substack{d|\frac{n}{pC}\\ d>0}} \bar{\xi}\big(\frac{n}{dpC}\big)\ d^{\ell-1} \sum_{t \bmod B} e\big(\frac{td}{B}\big) n^{k-1-\ell}\\
&\times \big[a_M M^{-(j+1)} e(p^\gamma t w^{-1} a) - \psi(p) p^{k-1} a_{M/p} (Mp)^{-(j+1)} e(Mptw^{-1}a)\big]\\
+ &\sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{p}\\ n_1>0, n_2>0}} \delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big) \sum_{\substack{d_1|\frac{n_1}{C\delta}\\ d_1>0}} \sum_{t \bmod B} e\big(\frac{td_1}{B}\big)\ \bar{\xi}\big(\frac{n}{d_1 CM}\big) {d_1}^{\ell-1}\\
&\times \delta\big(\frac{n_2}{M}\big) \sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2>0}} {d_2}^{2j+\ell-k+1} \psi\xi\big(\frac{n_2}{Md_2}\big)\\
&\times \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)} n_2^{k-1-j-\ell-i} \big(\frac{nM}{p}\big)^i\\
&\times \Big[a_M M^{-(j+1)} e\big(\frac{tn_2 a}{d_2}\big) - \psi(p) p^{k-1} a_{M/p} (Mp)^{-(j+1)} e\big(\frac{ptn_2 a}{d_2}\big)\big]\Big]\\
&e\big(\frac{nM}{p} z\big)\Big\}\Big|_k W_{CpB^2}
\end{aligned}
$$

Dans cette expression, les puissances de M pour les facteurs communs sont :

$$M^{-(r-j)+1-k/2+2j+\ell-k+1-j-1+(k-\ell)/2} = M^{-r+1+2j+\ell/2-k}.$$

Ici encore nous allons considérablement simplifier la somme double $\sum\limits_{\substack{w=1\\ (w,CB)=1}}^{CMB} \sum\limits_{I=0}^{CMB}$:

$\overline{\psi\xi}$ est un caractère modulo CB donc si w n'est pas premier avec CB, on a $\overline{\psi\xi}(w) = 0$ et l'on peut écrire :

$$\sum_{\substack{w=1\\ (w,CB)=1}}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \big(\frac{w}{CMB}\big)^{k-\ell-2j-I} = \sum_{w=1}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \big(\frac{w}{CMB}\big)^{k-\ell-2j-I}$$

Ensuite il reste à considérer, comme en *17.1*, $\overline{\psi\xi}$ successivement comme un caractère modulo CMB puis modulo CB :

$$
\begin{aligned}
&\frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{\substack{w=1\\ (w,CB)=1}}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \big(\frac{w}{CMB}\big)^{k-\ell-2j-I}\\
&\qquad = \frac{(CMB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{w=1}^{CMB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CMB} \binom{CMB}{I} B_I \big(\frac{w}{CMB}\big)^{k-\ell-2j-I}\\
&\qquad = B_{k-\ell-2j, \overline{\psi\xi}}\\
&\qquad = \frac{(CB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{w=1}^{CB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CB} \binom{CB}{I} B_I \big(\frac{w}{CB}\big)^{k-\ell-2j-I}
\end{aligned}
$$

La partie pour $\delta = M$ peut donc prendre la forme suivante :

Proposition 17.4 : Lorsque $M = p^m$,

$$\Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = M\Big\}$$
$$= \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} (-1)^{k-\ell}\, \mathbf{i}^{j+1+k-\ell}\, 2^{2j-k+2\ell} j!\, \Gamma(j+\ell)^{-1} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{p})}$$
$$\times \big(\frac{M}{p}\big)^{1-k/2} \frac{1}{B}\, C^{\ell/2} M^{2j+\ell-k+1} \times \frac{(CMB^2)^{-j-1+(k-\ell)/2}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)}\, \mathcal{G}(\xi)$$
$$\times \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[-\frac{\Gamma(2j+\ell-k+2)\Gamma(k-j-1)}{M^{2j+\ell-k+1}\Gamma(j+\ell-k+1)\Gamma(k-1)}$$
$$\times \frac{(CB)^{k-\ell-2j-1}}{k-\ell-2j} \sum_{w=1}^{CB} \overline{\psi\xi}(w) \sum_{I=0}^{CB} \binom{CB}{I} B_I \big(\frac{w}{CB}\big)^{k-\ell-2j-I}$$
$$\times \delta\big(\frac{n}{pC}\big) \big(\frac{M}{p}\big)^{j} \sum_{\substack{d \mid \frac{n}{pC} \\ d>0}} \bar{\xi}\big(\frac{n}{dpC}\big)\, d^{\ell-1} \sum_{t \bmod B} e\big(\frac{td}{B}\big) n^{k-1-\ell}$$
$$\times \big[a_M M^{-(j+1)} e(p^{mtw^{-1}a}) - \psi(p) p^{k-1} a_{M/p} (Mp)^{-(j+1)} e(Mptw^{-1}a)\big]$$
$$+ \sum_{\substack{n_1+n_2=\frac{nM}{p} \\ n_1>0, n_2>0}} \delta\big(\frac{n_1}{C\delta}\big) \sum_{\substack{d_1 \mid \frac{n_1}{C\delta} \\ d_1>0}} \sum_{t \bmod B} e\big(\frac{td_1}{B}\big)\, \bar{\xi}\big(\frac{n}{d_1 CM}\big) {d_1}^{\ell-1}$$
$$\times \delta\big(\frac{n_2}{M}\big) \sum_{\substack{d_2 \mid n_2 \\ d_2>0}} {d_2}^{2j+\ell-k+1} \psi\xi\big(\frac{n_2}{Md_2}\big)$$
$$\times \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)} n_2^{k-1-j-\ell-i} \big(\frac{nM}{p}\big)^i$$
$$\times \big[a_M M^{-(j+1)} e\big(\frac{tn_2 a}{d_2}\big) - \psi(p) p^{k-1} a_{M/p} (Mp)^{-(j+1)} e\big(\frac{ptn_2 a}{d_2}\big)\big]\Bigg]$$
$$e\big(\frac{nM}{p} z\big)\Bigg\}\Bigg|_k W_{CpB^2}$$

Les puissances de M à l'intérieur du produit scalaire sont donc respectivement : $M^{-2j-\ell+k-1-(j+1)}$ et $M^{i-(j+1)}$, et nous avons vu que pour les facteurs communs il s'agissait de $M^{-r+1+2j+\ell/2-k}$, ce qui donne globalement $M^{-r-\ell/2-(j+1)}$ et $M^{-r+1+2j+\ell/2-k+i-(j+1)}$. Autrement dit, si l'on multiplie la partie pour $\delta = M$ par $M^{k-\ell-2j-1+(j+1)+r+\ell/2} = M^{r+k-\ell/2-j}$, il reste $M^{k-\ell-2j-1}$ et M^i. Remarquons que l'on a $i \geqslant 0$, $k-\ell-2j-1 \geqslant 0$ et $k-\ell/2-j \geqslant 0$ (car $k-\ell-2j \geqslant 1$).

On a donc le résultat suivant :

Proposition 17.5 : Lorsque $M = p^m$, il existe un entier naturel N_2 , indépendant de $x = a/M$ tel que pour tout j :

$$N_2 \times M^{r+k-\ell/2-j} \times \Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = M\Big\} \text{ a pour coefficients des entiers algébriques.}$$

Ce qui n'est pas très satisfaisant comparé à la partie pour $\delta = 1$ où l'on avait seulement M^r. Reprenons alors cette étude un peu plus finement. Regardons la partie pour $\delta = M$ dans la proposition **13.2** où χ devient le caractère trivial (modulo 1) :

$$\Big\{\textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = M\Big\} = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j!\, \frac{(4\pi)^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)} L_f(j+\ell,\xi)^{-1}$$
$$\times \mathcal{A}_p(p^{-(j+1)}) \langle f^\rho, G_M E_{k-\ell,CB^2}(z; j+\ell-k+1)\rangle_{CB^2}.$$

De plus, $\gamma = m$, et $\mathcal{A}_p(X) = a_{p^m} X^m - \psi(p) p^{k-1} a_{p^{m-1}} X^{m+1}$. Comme dans la section **14**, on transforme le polynôme $\mathcal{A}_p(X)$ en un opérateur agissant sur f^ρ : on définit pour tout $x \in \mathbf{C}$, $A_p(X) = T_{p^m} \overline{X}^m - \overline{\psi}(p) p^{k-1} T_{p^{m-1}} \overline{X}^{m+1}$. On a $p \mid M$ et $(C, MB) = 1$, donc p ne divise pas C qui est le niveau de $f \in S_k(C,\psi)$; alors $f|_k T_p = a_p f$ et on obtient :

$$\mathcal{A}_p(X) \langle f^\rho, g\rangle_{CB^2} = \langle f^\rho, g|_k A_p^\star(X)\rangle_{CB^2}.$$

Ici $A_p^\star(X)$ désigne l'adjoint de $A_p(X)$ pour le produit scalaire de niveau CB^2. —Il faut bien noter que la situation est différente de celle des sections **14** et **15** où le niveau du produit scalaire considéré CM_0B^2 était divisible par p.— Or p^m et p^{m-1} sont premiers avec le niveau CB^2, et on peut considérer $f \in S_k(C,\psi)$ comme $f \in S_k(CB^2,\psi)$. Alors on peut utiliser un résultat de Rankin qui dit que le produit scalaire de Petersson est ψ–hermitien (voir [13] ou [14]) : $T_{p^m}^\star = \psi(p^m) T_{p^m}$ et $T_{p^{m-1}}^\star = \psi(p^{m-1}) T_{p^{m-1}}$ pour le niveau CB^2. D'où :

$$A_p^\star(X) = \psi(p^m) T_{p^m} X^m - \psi(p) p^{k-1} \psi(p^{m-1}) T_{p^{m-1}} X^{m+1} = \psi(M) X^m \big(T_M - p^{k-1} T_{M/p} X\big).$$

On substitue $p^{-(j+1)}$ à X : $A_p^\star(p^{-(j+1)}) = \psi(M) p^{-m(j+1)} \big(T_M - p^{k-j-2} T_{M/p}\big)$, et on obtient :

Proposition 17.6 : Lorsque $M = p^m$,

$$\Big\{\textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = M\Big\}$$
$$= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j!\, \frac{(4\pi)^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)} L_f(j+\ell,\xi)^{-1} \psi(M) M^{-(j+1)}$$
$$\times \langle f^\rho, \mathrm{Hol}\Big(G_M E_{k-\ell,CB^2}(z; j+\ell-k+1)\Big)\Big|_k \big(T_M - p^{k-j-2} T_{M/p}\big)\rangle_{CB^2},$$

$$\Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = M\Big\}$$
$$= \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j!\, \frac{4^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)} \psi(M) M^{-(j+1)}$$
$$\times \mathrm{Hol}\Big(G_M E_{k-\ell,CB^2}(z; j+\ell-k+1)\Big)\Big|_k \big(T_M - p^{k-j-2} T_{M/p}\big).$$

On calcule le développement de Fourier de $E_{k-\ell,CB^2}(z;j+\ell-k+1)$ à l'aide encore de la proposition **15.3**, puis celui de la partie holomorphe du produit $G_M E_{k-\ell,CB^2}(z;j+\ell-k+1)$ de la même manière que dans la section *15.3*.

$$E_{k-\ell,CB^2}(z;s) = y^s \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \psi\xi(d)(CB^2cz+d)^{-(k-\ell)-|2s|} = y^s E_{k-\ell,CB^2}(z;s,f)$$

où $f(c,d)=\psi\xi(c)$ modulo CB^2 et $E_{m,CB^2}(z;s,f) = \sum\limits_{(c,d)\neq(0,0)} f(d,c)(cz+d)^{-m-|2s|}$.

On commence donc par calculer $Pf(d,d')$:

$$Pf(d,d') = \sum_{u \bmod CB^2} f(a,d')e\big(\frac{ud}{CB^2}\big) = \sum_{\substack{u \bmod CB^2\\(u,CB^2)=1}} \psi\xi(u)e\big(\frac{ud}{CB^2}\big) = \mathcal{G}_{d,CB^2}(\psi\xi),$$

$$Pf(d,0) = \sum_{\substack{u \bmod CB^2\\(u,CB^2)=1}} \psi\xi(u)e\big(\frac{ud}{CB^2}\big),$$

$$L\big(1-k+\ell-2s, Pf(\cdot,0)\big) = \sum_{\substack{u \bmod CB^2\\(u,CB^2)=1}} \psi\xi(u)\big(\frac{u}{CB^2}\big)^{k-\ell+2s-1} = (CB^2)^{1-k+\ell-2s}\sum_{\substack{u \bmod CB^2\\(u,CB^2)=1}} \psi\xi(u)u^{k-\ell+2s-1},$$

$$Pf(0,d') = \sum_{u \bmod CB^2} \psi\xi(u) = 0,$$

$$L(k-\ell+2s-1, Pf(0,\cdot)_{(k-\ell+2s)}) = 0.$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
&\sum_{dd'>0} (\operatorname{sgn} d)d^{k-\ell+2s-1}Pf(d,d')\mathcal{W}(4\pi dd'y, k-\ell+s,s)e(dd'z)\\
&\quad= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\d>0}} \Big[d^{k-\ell+2s-1}\mathcal{G}_{d,CB^2}(\psi\xi) - (-d)^{k-\ell+2s-1}\mathcal{G}_{-d,CB^2}(\psi\xi)\Big]\mathcal{W}(4\pi ny, k-\ell+s,s)e(nz)\\
&\quad= \Big[1+(-1)^{k-\ell}\psi\xi(-1)\Big]\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\mathcal{G}_{d,CB^2}(\psi\xi)\mathcal{W}(4\pi ny, k-\ell+s,s)e(nz)\\
&\quad= \Big[1+(-1)^{k-\ell}(-1)^k(-1)^\ell\chi(-1)\Big]\sum_{\substack{d|n\\d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\mathcal{G}_{d,CB^2}(\psi\xi)\mathcal{W}(4\pi ny, k-\ell+s,s)e(nz)\\
&\quad= 2\sum_{\substack{d|n\\d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\mathcal{G}_{d,CB^2}(\psi\xi)\mathcal{W}(4\pi ny, k-\ell+s,s)e(nz).
\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant dans la proposition **15.3**, avec $s=j+\ell-k+1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(CB^2)^{k-\ell+2s}\Gamma(k-\ell+s)}{(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}(-4\pi)^s E_{k-\ell,CB^2}(z;s)\\
&\quad= \frac{(CB^2)^{k-\ell+2s}\Gamma(k-\ell+s)}{(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}(-4\pi y)^s E_{k-\ell,CB^2}(CB^2z,s;f)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-4\pi y)^s\Gamma(k-\ell+s)}{\Gamma(k-\ell+2s)}L(1-k+\ell-2s, Pf(\cdot,0))\\
&\qquad + \frac{\Gamma(k-\ell+2s-1)}{(4\pi y)^{k-\ell+s-1}\Gamma(s)}L(k-\ell+2s-1, Pf(0,\cdot)_{(k-\ell+2s)})\\
&\qquad + (4\pi y)^s \sum_{dd'>0} (\mathrm{sgn} d) d^{k-\ell+2s-1} Pf(d,d')\mathcal{W}(4\pi dd'y, k-\ell+s, s)e(dd'z)\\
&= \frac{(-4\pi y)^s\Gamma(k-\ell+s)}{\Gamma(k-\ell+2s)}(CB^2)^{1-k+\ell-2s} \sum_{\substack{u \bmod CB^2\\ (u,CB^2)=1}} \psi\xi(u)u^{k-\ell+2s-1}\\
&\qquad +2\,(4\pi y)^s \sum_{\substack{d|n\\ d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\mathcal{G}_{d,CB^2}(\psi\xi)\mathcal{W}(4\pi ny, k-\ell+s, s)e(nz).
\end{aligned}
$$

Ceci peut s'écrire sous la forme :

Proposition 17.7 : $E_{k-\ell,CB^2}(z;s) = (4\pi y)^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{W}(4\pi ny, -s+(k-\ell+2s), s)e(nz)$,

avec $c_0 = \dfrac{(-2\pi \mathbf{i})^{k-\ell+2s}(CB^2)^{1-2(k-\ell+2s)}}{\Gamma(k-\ell+2s)(4\pi)^s} \displaystyle\sum_{\substack{u \bmod CB^2\\ (u,CB^2)=1}} \psi\xi(u)u^{k-\ell+2s-1}$

et pour $n \geqslant 1$, $c_n = \dfrac{2(-2\pi\mathbf{i})^{k-\ell+2s}}{\Gamma(k-\ell+s)(-4\pi)^s(CB^2)^{k-\ell+2s}} \displaystyle\sum_{\substack{d|n\\ d>0}} d^{k-\ell+2s-1}\mathcal{G}_{d,CB^2}(\psi\xi)$.

Rappelons que : $G_M = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e(nz) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\sum_{d|n} \xi(d)d^{\ell-1}\big)q^n$.

Alors on a :

$$G_M E_{k-\ell,CB^2}(z; j+\ell-k+1) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n e(nz)\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (4\pi y)^{j+\ell-k+1} c_n \mathcal{W}(4\pi ny, j+1, j+\ell-k+1)e(nz)\Big).$$

Contrairement à ce qui se passait dans le calcul de la section *15.3*, ici tous les coefficients c_n y compris c_0 ne dépendent pas de y, donc on peut calculer directement la partie holomorphe de ce produit :

$$\mathrm{Hol}\Big(G_M E_{k-\ell,CB^2}(z; j+\ell-k+1)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} A'(n)e(nz),$$

avec :

$$A'(n) = \sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0, n_2\geqslant 0}} b_{n_1}c_{n_2} \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(+1-i)\Gamma(k-1)} n_2^{k-1-j-\ell-i} n^i$$

$$A'(n) = b_n c_0 \sum_{i=0}^{k-1-j-\ell} (-1)^i \binom{k-1-j-\ell}{i} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)} n^i +$$

$$+\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0,n_2>0}} b_{n_1}c_{n_2}\sum_{i=0}^{k-1-j-\ell}(-1)^i\binom{k-1-j-\ell}{i}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-j-\ell-i}n^i$$

$$A'(n)=\frac{(-2\pi\mathbf{i})^{2j+\ell-k+2}}{(4\pi)^{j+\ell-k+1}(CB^2)^{2j+\ell-k+2}}$$

$$\times\left[\frac{(CB^2)^{1-(2j+\ell-k+2)}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)}\sum_{\substack{u \bmod CB^2\\ (u,CB^2)=1}}\psi\xi(u)u^{2j+\ell-k+1}\sum_{\substack{d|n\\ d>0}}\xi(d)d^{\ell-1}\right.$$

$$\times\sum_{i=0}^{k-1-j-\ell}(-1)^i\binom{k-1-j-\ell}{i}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(+1-i)\Gamma(k-1)}n^i$$

$$+\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0,n_2>0}}\frac{2(-1)^{j+\ell-k+1}}{\Gamma(j+1)}\sum_{\substack{d_1|n_1\\ d_1>0}}\xi(d_1)d_1^{\ell-1}\sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2>0}}d_2^{2j+\ell-k+1}\mathcal{G}_{d_2,CB^2}(\psi\xi)$$

$$\left.\times\sum_{i=0}^{k-1-j-\ell}(-1)^i\binom{k-1-j-\ell}{i}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-j-\ell-i}n^i\right]$$

On obtient :

Proposition 17.8 : Lorsque $M=p^m$,

$$\left\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta=M\right\}$$

$$=\binom{r}{j}\left(\frac{a}{M}\right)^{r-j}\mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)}j!\,\frac{4^{j+\ell}}{\Gamma(j+\ell)}\psi(M)M^{-(j+1)}\frac{(-2\pi\mathbf{i})^{2j+\ell-k+2}}{(4\pi)^{j+\ell-k+1}(CB^2)^{2j+\ell-k+2}}$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(CB^2)^{1-(2j+\ell-k+2)}}{\Gamma(2j+\ell-k+2)}\sum_{\substack{u \bmod CB^2\\ (u,CB^2)=1}}\psi\xi(u)u^{2j+\ell-k+1}\right.\right.$$

$$\times\sum_{\substack{d|n\\ d>0}}\xi(d)d^{\ell-1}\sum_{i=0}^{k-1-j-\ell}(-1)^i\binom{k-1-j-\ell}{i}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)}n^i$$

$$+\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1>0,n_2>0}}\frac{2(-1)^{j+\ell-k+1}}{\Gamma(j+1)}\sum_{\substack{d_1|n_1\\ d_1>0}}\xi(d_1)d_1^{\ell-1}\sum_{\substack{d_2|n_2\\ d_2>0}}d_2^{2j+\ell-k+1}\mathcal{G}_{d_2,CB^2}(\psi\xi)$$

$$\left.\times\sum_{i=0}^{k-1-j-\ell}(-1)^i\binom{k-1-j-\ell}{i}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(k-i-1)}{\Gamma(j+1-i)\Gamma(k-1)}n_2^{k-1-j-\ell-i}n^i\right]$$

$$\left.e(nz)\right\}\Bigg|_k\left(T_M-p^{k-j-2}T_{M/p}\right).$$

Cette expression montre que, si l'on ne compte pas les puissances de p fixées, les puissances de $M=p^m$ sont, avant le produit scalaire : $M^{-(r-j)-(j+1)}=M^{-r-1}$. En ce qui concerne les termes de la somme, il suffit de regarder l'expression explicite des $A'(n)$ pour voir qu'ils ne contiennent aucune puissance de M. Quant à l'action des opérateurs de Hecke, elle ne change pas les puissances de M ; en effet :

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A'(n)e(nz)\Big) \Big|_k T_M = \sum_{t=0}^{m} \psi(p^t)p^{t(k-1)}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A'(n)e(nz)\Big) \Big|_k U_{p^{m-t}}V_{p^t}$$
$$= \sum_{t=0}^{m} \psi(p^t)p^{t(k-1)} \sum_{n=1}^{\infty} A'(np^{m-t})e(np^t z),$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A'(n)e(nz)\Big) \Big|_k \big(T_M \ - p^{k-j-2}T_{M/p}\big)$$
$$= \sum_{t=0}^{m} \psi(p^t)p^{t(k-1)} \sum_{n=1}^{\infty} A'(np^{m-t})e(np^t z) - \sum_{t=0}^{m-1} \psi(p^t)p^{t(k-1)+k-j-2} \sum_{n=1}^{\infty} A'(np^{m-1-t})e(np^t z)$$
$$= \psi(M)M^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} A'(n)e(nMz) + \sum_{t=0}^{m-1} \psi(p^t)p^{t(k-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \big(A'(np^{m-t}) - p^{k-j-2}A'(np^{m-1-t})\big)e(np^t z)$$

mais sans puissance de M en commun.

On en déduit :

Proposition 17.9 : Lorsque $M=p^m$, il existe un entier naturel N_3 non nul et indépendant de $x=a/M$ tel que pour tout j :

$$N_3 \times M^{r+1} \times \Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = M\Big\} \text{ a pour coefficients des entiers algébriques.}$$

Au vu des résultats de la partie pour $\delta=1$ (proposition **17.3**), nous pouvons déjà en conclure :

Proposition 17.10 : Lorsque $M=p^m$, il existe un entier naturel N' non nul et indépendant de $x=a/M$ tel que pour tout j :

$$N' \times M^{r+1} \times F_{x,r,j} \text{ a pour coefficients des entiers algébriques.}$$

Mais l'on peut espérer un meilleur résultat, où l'on aurait M^r au lieu de M^{r+1}. Il faut donc reprendre l'étude de la partie pour $\delta=M$. Nous avons montré que la somme $\sum_{\delta|M}$ se réduit aux seuls termes obtenus lorsque $\delta=1$ ou $\delta=M$:

$$P(x,r,f) = \Big\{\textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = 1\Big\} + \Big\{\textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = M\Big\}.$$

Reprenons l'expression de la proposition **4.2** :

$$P(x,r,f) = \sum_{\delta|M} \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M/\delta} \mathcal{G}_a(\bar{\chi}) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^{r-j} \mathbf{i}^{j+1}(2\pi)^{-(j+1)} j! \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n/\delta) n^{-(j+1)}.$$

On en déduit (en remarquant que dans ce cas χ est trivial, modulo 1) :

$$\Big\{\textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = M\Big\} = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j! \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(j+1)}$$
$$= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j! L_f(j+1).$$

Les puissances de M sont donc M^{-r+j} avec $j \geqslant 0$, donc au minimum M^{-r}. On a donc le résultat souhaité :

Proposition 17.11 : Lorsque $M = p^m$, il existe un entier naturel N_4 non nul et indépendant de $x = a/M$ tel que pour tout j :

$N_4 \times M^r \times \Big\{\textit{partie de } F_{x,r,j} \textit{ pour } \delta = M\Big\}$ a pour coefficients des entiers algébriques.

Remarque : Notons tout de même que la proposition **4.2** donne aussi de manière très simple le résultat de la partie pour $\delta = 1$:

$$\Big\{\textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = 1\Big\}$$
$$= \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M} \mathcal{G}_a(\bar{\chi}) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j! \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-(j+1)}$$
$$= \varphi(M/\delta)^{-1} \sum_{\chi \bmod M} \mathcal{G}_a(\bar{\chi}) \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j! L_f(j+1, \chi).$$

On peut effectuer simplement la somme sur les caractères χ :

$$\sum_{\chi \bmod M} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(n) = \sum_{\chi \bmod M} \sum_{u \bmod M} \bar{\chi}(u) e\big(\frac{ua}{M}\big)\chi(n) = \sum_{u \bmod M} \sum_{\chi \bmod M} \chi(nu^{-1}) e\big(\frac{ua}{M}\big).$$

Or on a $\sum\limits_{\chi \bmod M} \chi(nu^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } nu^{-1} \not\equiv 1 \bmod M \\ \varphi(M) & \text{si } nu^{-1} \equiv 1 \bmod M \end{cases}$. On choisit donc pour chaque n fixé, l'unique u modulo M défini par $nu^{-1} \equiv 1 \bmod M$, c'est–à–dire $u \equiv n \bmod M$; alors $\sum\limits_{\chi \bmod M} \mathcal{G}_a(\bar{\chi})\chi(n) = \varphi(M) e\big(\frac{na}{M}\big)$, ce qui donne l'expression suivante :

$$\Big\{\textit{partie de } P(x,r,f) \textit{ pour } \delta = 1\Big\} = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \big(\frac{a}{M}\big)^{r-j} \mathbf{i}^{j+1} (2\pi)^{-(j+1)} j! \sum_{n=1}^{\infty} a_n e\big(\frac{na}{M}\big) n^{-(j+1)}$$

où l'on voit aisément que les seules puissances de M sont M^{-r+j} avec $j \geqslant 0$ donc au minimum M^{-r}.

Nous avons ainsi démontré la proposition essentielle (**17.1**) :

Lorsque $M = p^m$:

$$P(x,r,f) = \sum_{j=0}^{r} \pi^{j+\ell} L_f(j+\ell, \xi)^{-1} \times \langle f^\rho, F_{x,r,j} \rangle_{CpB^2},$$

et il existe un entier naturel N non nul et indépendant de $x = a/M$ tel que pour tout j, $NM^r F_{x,r,j}(z)$ a pour coefficients des entiers algébriques.

Bibliographie

[1] Z. I. BOREVITCH ET I. R. CHAFAREVITCH . — *Théorie des nombres*, Academic Press, 1966.

[2] E. HECKE . — *Uber Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung II*, Math. Ann. **114** (1937), 316–351.

[3] H. HIDA . — *Elementary theory of L–functions and Eisenstein series* , London Math. Soc. Student Texts **26** (1993).

[4] K. IWASAWA . — *Lectures on p–adic L–functions*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press **74** (1972).

[5] H. H. KHOAI . — *Sur les séries L associées aux formes modulaires* , Bull. Soc. Math. Fr. **120-1** (1992), 1-13.

[6] K. KITAGAWA . — *On standard p–adic L–functions of families of elliptic cusp forms* , Contemporary Math. Providence Am. Math. Soc. **165** (1994), 81-110.

[7] S. LANG . — *Introduction to modular forms*, Springer Verlag, 1976.

[8] Ju. I. MANIN . — *Periods of parabolic forms and p–adic Hecke series*, Mat. Sbornik **93** (1973), 371-393.

[9] Ju. I. MANIN AND M. M. VISIK . — *p–adic Hecke series of imaginary quadratic fields*, Math. Ussr Sbornik **24** (1974), 345-371.

[10] T. MIYAKE . — *Modular forms*, Springer, 1989.

[11] A. A. PANCHISHKIN . — *Fonctions zeta automorphes non archimédiennes (en russe)*, Moskva Izdatel'stvo Mosk. Univ., 1988.

[12] A. A. PANCHISHKIN . — *Sur les séries de Hecke non archimédiennes (en russe)*, Collection de travaux d'algèbre, éd. A. I. Kostrikine, Univ. Moscou (1989), 95–141.

[13] R. A. RANKIN . — *The adjoint Hecke operator*, Int. Conf. Khabarovsk USSR 1988 (1990), 163–166.

[14] R. A. RANKIN . — *The adjoint Hecke operator II*, Pap. Ramanujan Colloq. Bombay India 1988, Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math. **12** (1989), 161–175.

[15] J. P. SERRE . — *Cours d'arithmétique*, Springer, 1973.

[16] G. SHIMURA . — *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press, 1971.

[17] G. SHIMURA . — *On the periods of modular forms*, Math. Ann. **229** (1977), 211-221.

[18] J. STURM . — *Special values of zeta functions and Eisenstein series of half–integer weight*, Amer. J. Math. **102** (1980), 219-240.

[19] J. STURM . — *The critical values of zeta functions associated to the symplectic group* , Duke Math. J. **48** (1981), 327-350.

[20] M. M. VISIK . — *Non archimedian measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR Sbornik **28-2** (1976), 216-228.

[21] L. C. WASHINGTON . — *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Math., Springer **83** (1980).

Fabienne Jory
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères Cedex
France
adresse électronique : fjory@mozart.ujf-grenoble.fr

(2 mars 1998)