

SUR LES RECORDS D'UN PROCESSUS DE POISSON PONCTUEL

Jean BROSSARD et Christophe LEURIDAN

Résumé

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $]0; +\infty[$. On suppose que la mesure caractéristique μ est infinie, mais que $0 < \mu]a; +\infty[< +\infty$ pour tout $a > 0$. On démontre qu'il n'est pas possible d'énumérer les instants de records *larges* du processus X par une suite strictement croissante de temps d'arrêt (indexée par \mathbf{Z}). La preuve repose sur l'inexistence de chaînes de Markov *indexées par \mathbf{Z}* pour les probabilités de transition $\pi_x = \mathbb{1}_{]x; +\infty[} \mu / \mu[x; +\infty[= \mu[\cdot] [x; +\infty[$. Lorsque l'on s'intéresse aux records *stricts*, ce résultat peut être mis en défaut : nous donnons une condition nécessaire et suffisante sur la mesure μ pour que l'on puisse énumérer les instants de records stricts par une suite strictement croissante de temps d'arrêt.

1. Introduction

On considère un processus de Poisson ponctuel $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $]0; +\infty[$, de mesure caractéristique μ , où μ est une mesure positive sur $]0; +\infty[$ de masse totale infinie, telle que $0 < \mu]a; +\infty[< +\infty$ pour tout $a > 0$. Ces hypothèses assurent qu'avant un instant $t > 0$ fixé, le processus X prend une infinité (dénombrable) de valeurs strictement positives, mais seulement un nombre fini de valeurs supérieures à n'importe quel réel $a > 0$ donné. On convient de poser $X_t = 0$ lorsque X_t n'est pas défini. Pour $t > 0$, on note

$$M_t = \sup\{X_s; 0 \leq s \leq t\},$$

et on appelle D l'ensemble des instants de records larges du processus X :

$$D = \{t > 0 : X_t \geq M_{t-}\}.$$

Il est facile de montrer que l'ensemble aléatoire D est optionnel, et qu'il est isomorphe à \mathbf{Z} pour l'ordre. L'objet principal de ce travail est de montrer qu'il n'est cependant pas possible de trouver une suite strictement croissante $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de temps d'arrêt telle que D soit exactement égal à l'ensemble des instants $\{T_n; n \in \mathbf{Z}\}$ (nous dirons qu'une telle suite **énumère** D). Ce résultat fait l'objet du théorème 2.4.

Pour cela nous supposerons en effet qu'une telle suite de temps d'arrêt existe, et nous montrerons alors que la suite des records $(X_{T_n})_{n \in \mathbf{Z}}$ serait une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_x)_{x > 0}$, où :

$$\pi_x = \mathbb{1}_{]x; +\infty[} \mu / \mu[x; +\infty[= \mu[\cdot] [x; +\infty[.$$

Classification math. : 60G55, 60J05.

Mots-clés : processus de Poisson ponctuels, énumération optionnelle, chaînes de Markov indexées par \mathbf{Z} .

Puis nous verrons (lemme 2.1) qu'il n'existe pas de chaîne de Markov *indexée par \mathbf{Z}* admettant ces probabilités de transition.

Que se passe-t-il si l'on regarde l'ensemble des records stricts? Il est facile de montrer qu'on passe d'un record strict au suivant avec les probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x>0}$, en notant $\pi_{x+} = \mathbb{1}_{]x; +\infty[}[\mu/\mu]x; +\infty[= \mu[\cdot]x; +\infty[$. Mais contrairement à ce qu'on pourrait penser, il existe des mesures μ pour lesquelles on peut énumérer l'ensemble des instants de records stricts par une suite de temps d'arrêt. Nous donnerons une caractérisation de ces mesures dans le théorème 6.3.

Origine du problème. — Le problème ci-dessus est une reformulation et une généralisation d'un problème soulevé par M. Emery aux Journées de Probabilités de 1994, à Marseille-Luminy: on considère un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ dans \mathbf{R} , issu de 0. On appelle **excursion longue** du mouvement brownien toute excursion plus longue que toutes celles qui l'ont précédée. L'ensemble des instants qui sont des fins d'excursions longues est optionnel et isomorphe à \mathbf{Z} pour l'ordre. Peut-on l'énumérer par une suite strictement croissante de temps d'arrêt?

M. Emery a montré par un argument d'ergodicité un résultat un peu plus fort: soit $q \geq 2$ un entier. Notons $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration engendrée par l'ensemble des zéros du mouvement brownien B . Alors dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, il n'est pas possible de numéroter optionnellement et cycliquement par $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ les fins d'excursions longues. Rappelons brièvement la preuve qu'il a exposée lors des Journées de Probabilités: supposons qu'il existe un processus adapté continu à droite $(K_t)_{t > 0}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ qui saute de 1 à chaque fin d'excursion longue, et ne varie pas le reste du temps. En notant L_t la durée de la dernière excursion longue et G_t le dernier zéro avant t du mouvement brownien, on est amené par changement d'échelle à considérer le processus $(\lambda_s, \gamma_s, \kappa_s)_{s \in \mathbf{R}}$ et la filtration $(\Phi_s)_{s \in \mathbf{R}}$ définis par:

$$(\lambda_s, \gamma_s, \kappa_s) = \left(\frac{L_t}{t}, \frac{G_t}{t}, K_t \right) \text{ et } \Phi_s = \mathcal{F}_t, \text{ où } t = e^s.$$

Le processus ainsi obtenu est markovien. On explicite assez facilement son semi-groupe, et on vérifie qu'il est ergodique. Il en est de même pour le processus $(\lambda_s, \gamma_s, \kappa_s + 1)_{s \in \mathbf{R}}$. Ces deux processus indexés par \mathbf{R} doivent donc avoir la même loi (leur semi-groupe commun est ergodique, et la condition initiale se trouve à l'instant $-\infty$). Par ailleurs, comme le processus $(\kappa_s)_{s \in \mathbf{R}}$ est $\Phi_{+\infty}$ -mesurable, et comme le processus $(\gamma_s)_{s \in \mathbf{R}}$ engendre la tribu $\Phi_{+\infty}$, le processus $(\kappa_s)_{s \in \mathbf{R}}$ est une certaine fonctionnelle mesurable F du processus $(\gamma_s)_{s \in \mathbf{R}}$. La loi du couple de processus $((\gamma_s)_{s \in \mathbf{R}}, (\kappa_s)_{s \in \mathbf{R}})$ est donc portée par le graphe de la fonctionnelle F , et celle du couple $((\gamma_s)_{s \in \mathbf{R}}, (\kappa_s + 1)_{s \in \mathbf{R}})$ par le graphe de la fonctionnelle $F + 1$, ce qui contredirait le fait que ces deux couples ont même loi.

En adaptant le raisonnement, on peut montrer qu'il n'est pas possible de numéroter optionnellement et cycliquement par $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ les fins d'excursions longues dans la filtration engendrée par le mouvement brownien. Il suffit de considérer le processus $(\beta_s, \lambda_s, \gamma_s, \kappa_s)_{s \in \mathbf{R}}$ où β est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini par $\beta_s = t^{-1/2} B_t$, où $t = e^s$. Mais cette méthode ne permet pas de prouver le résultat pour n'importe quelle filtration dans laquelle B est un mouvement brownien.

Notre approche est différente puisqu'on s'intéresse essentiellement aux *longueurs* successives (et non aux instants) des excursions longues. On utilise le fait que regardées aux instants

inverses du temps local en 0, les longueurs des excursions forment un processus de Poisson ponctuel à valeurs dans $]0; +\infty[$, de mesure caractéristique μ , où $\mu(dx) = (2\pi)^{-1/2}x^{-3/2}dx$ (μ est la mesure image de la mesure d'Itô par la fonctionnelle qui à une excursion associe sa longueur). Nous renvoyons le lecteur au chapitre XII du livre de D. Revuz et M. Yor – *Continuous martingales and Brownian motion* – (Springer 1991) pour la théorie des excursions browniennes et les propriétés de base des processus de Poisson ponctuels.

Notre méthode – utiliser l'inexistence de chaînes de Markov pour les probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$ – a l'avantage de nous affranchir des problèmes de filtrations. Mais elle ne permet pas de prouver l'impossibilité de numéroter *cycliquement* les fins d'excursions longues.

2. Quelques remarques élémentaires

Nous commençons par énoncer un lemme qui nous servira souvent. Il s'agit d'un cas particulier du lemme 1.13 au chapitre XII du livre de D. Revuz et M. Yor : *Continuous martingales and Brownian motion*.

LEMME 2.1. — Posons $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$ pour $a > 0$. Alors :

- * τ_a suit la loi exponentielle de paramètre $\mu[a; +\infty[$;
- * X_{τ_a} suit la loi $\pi_a = \mu[. | [a; +\infty[$;
- * les variables τ_a et X_{τ_a} sont indépendantes.

Notation. — Si T est un temps d'arrêt fini presque sûrement, on note $\sigma(T)$ le premier instant de record suivant T . Autrement dit :

$$\sigma(T) = \inf\{t > T : X_t \geq M_t\} = \inf\{t > T : X_t \geq M_T\}.$$

On définit par récurrence $\sigma^n(T)$, en posant $\sigma^n(T) = \sigma(\sigma^{n-1}(T))$.

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration dans laquelle le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson ponctuel, c'est-à-dire telle que pour tout instant $t > 0$, le processus $(X_{t+s})_{s \geq 0}$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_t . En appliquant la propriété de Markov au temps d'arrêt T , et en utilisant le lemme ci-dessus, on voit que :

- * $\sigma(T)$ est un temps d'arrêt $> T$ et fini presque sûrement ;
- * les variables $\sigma(T) - T$, $X_{\sigma(T)}$ et la tribu \mathcal{F}_T sont indépendantes conditionnellement à M_T ;
- * la loi de $\sigma(T) - T$ sachant que $M_T = a$ est la loi exponentielle de paramètre $\mu[a; +\infty[$;
- * la loi de $X_{\sigma(T)}$ sachant que $M_T = a$ est la loi $\pi_a = \mu[. | [a; +\infty[$.

On en déduit facilement :

COROLLAIRE 2.2. — Pour tout $\epsilon > 0$, on a presque sûrement $D \cap]\epsilon; +\infty[= \{\sigma^n(\epsilon) ; n \in \mathbf{N}^*\}$.

Par ailleurs, la remarque précédente montre que si l'on pouvait énumérer D par une suite strictement croissante $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de temps d'arrêt, la suite des records $(X_{T_n})_{n \in \mathbf{Z}}$ serait une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_x)_{x>0}$. Nous allons donc montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3. — *Il n'existe pas de chaîne de Markov indexée par \mathbf{Z} pour les probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$.*

De ce théorème et des remarques ci-dessus, on déduit :

THÉORÈME 2.4. — *Il n'est pas possible d'énumérer l'ensemble D par une suite strictement croissante de temps d'arrêt indexée par \mathbf{Z} .*

Nous allons maintenant étudier les propriétés des chaînes de Markov admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_x)_{x>0}$ pour montrer ensuite que de telles chaînes ne peuvent être indexées par \mathbf{Z} .

3. Étude des chaînes de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$

On considère une chaîne de Markov $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur $]0; +\infty[$, issue de a sous la probabilité P_a , admettant comme probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$. Pour $b > 0$, on pose :

$$N_b = \inf\{n \in \mathbf{N} : Z_n \geq b\}.$$

On vérifie facilement que $N_b < +\infty$ presque sûrement. Nous allons étudier la famille croissante de temps d'arrêt $(N_b)_{b>0}$. La propriété principale que nous allons établir est l'indépendance des accroissements sous les probabilités P_a et $P_{\pi_a} = \int_{]0; +\infty[} P_z \pi_a(dz)$.

LEMME 3.1. — *Soient $b > a > 0$. Alors sous la probabilité P_a , les variables N_b et Z_{N_b} sont indépendantes, et la variable Z_{N_b} suit la loi π_b .*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout borélien B de \mathbf{R} ,

$$\begin{aligned} P_a[N_b = n ; Z_{N_b} \in B] &= P_a[Z_{n-1} < b \leq Z_n ; Z_n \in B] \\ &= \int_{]0; b[} P_a[Z_{n-1} \in dz] P_z[b \leq Z_1 ; Z_1 \in B] \\ &= \int_{]0; b[} P_a[Z_{n-1} \in dz] \pi_z[B \cap [b; +\infty[) \\ &= \int_{]0; b[} P_a[Z_{n-1} \in dz] \frac{\mu[b; +\infty[}{\mu[z; +\infty[} \times \pi_b(B). \end{aligned}$$

□

Il est remarquable de constater que le résultat précédent reste vrai si l'on remplace la probabilité P_a par P_{π_a} . En revanche, il n'est plus vrai pour la probabilité $P_{\pi_a^2}$, où $(\pi^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est le semi-groupe associé aux probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$ (voir remarque ci-dessous).

LEMME 3.2. — *Soient $b > a > 0$. Alors sous la probabilité P_{π_a} , les variables N_b et Z_{N_b} sont indépendantes, et la variable Z_{N_b} suit la loi π_b .*

Démonstration. — Notons $\tilde{Z}_n = Z_{n+1}$ pour $n \in \mathbf{N}$, et $\tilde{N}_b = \inf\{n \in \mathbf{N} : \tilde{Z}_n \geq b\}$. Alors on a P_a -presque sûrement $\tilde{N}_b = N_b - 1$ et $\tilde{Z}_{\tilde{N}_b} = Z_{N_b}$. Or comme la loi de Z_1 sous P_a est π_a , on a l'identité en loi :

$$(Z_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ sous } P_{\pi_a} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ sous } P_a,$$

d'où :

$$(N_b, Z_{N_b}) \text{ sous } P_{\pi_a} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (N_b - 1, Z_{N_b}) \text{ sous } P_a.$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme précédent. \square

Remarque. — La démonstration ci-dessus ne marche pas pour la loi $P_{\pi_a^2}$. La raison est que si l'on pose $\tilde{Z}_n = Z_{n+2}$ et $\tilde{N}_b = \inf\{n \in \mathbf{N} : \tilde{Z}_n \geq b\}$, l'égalité $\tilde{N}_b = N_b - 2$ n'est pas vraie P_a -presque sûrement : elle est fautive sur l'événement $[Z_1 \geq b]$.

Nous pouvons maintenant énoncer :

THÉORÈME 3.3. — *Soit $a > 0$. Sous les probabilités P_a et P_{π_a} , le processus $(N_b)_{b>0}$ est à accroissements indépendants.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme précédent par récurrence, en remarquant que $(Z'_n) = (Z_{N_b+n})$ est une chaîne de Markov de loi initiale π_b et de mêmes probabilités de transition que (Z_n) , et que pour tout $c > b$, $N_c - N_b = N'_c$, où $N'_c = \inf\{n \in \mathbf{N} : Z'_n \geq c\}$. \square

Nous allons maintenant nous intéresser à la loi des accroissements. Remarquons que par construction, le processus $(N_b)_{b>0}$ est à valeurs dans \mathbf{N} , croissant et continu à gauche. Par ailleurs, pour $c > b$, la différence $N_c - N_b$ représente le temps de séjour de la chaîne (Z_n) dans l'intervalle $[b; c[$.

PROPOSITION 3.4. — *Soient $b > a > 0$. Alors sous les probabilités P_a et P_{π_a} , la variable $\Delta N_b = N_{b+} - N_b$ suit une loi géométrique de paramètre $\pi_b\{b\}$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$P_a[\Delta N_b = n] = P_{\pi_a}[\Delta N_b = n] = (1 - \pi_b\{b\})(\pi_b\{b\})^n.$$

Nous laissons la démonstration de ce résultat au lecteur.

PROPOSITION 3.5. — *Soient $c > b > a > 0$. Supposons que la mesure μ ne possède pas d'atome dans l'intervalle $[b; c[$. Alors sous les probabilités P_a et P_{π_a} , la différence $N_c - N_b$ suit la loi de Poisson de paramètre $\ln \mu[b; +\infty[- \ln \mu[c; +\infty[$.*

Démonstration. — En appliquant la propriété de Markov au temps d'arrêt N_b , on voit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} P_a[N_c - N_b = n] &= P_{\pi_a}[N_c - N_b = n] \\ &= P_{\pi_b}[N_c = n] \\ &= P_{\pi_b}[Z_{n-1} < c \leq Z_n] \\ &= \int_{0 < z_0 \leq \dots \leq z_n} \mathbb{1}_{[z_{n-1} < c \leq z_n]} \pi_b(dz_0) \pi_{z_0}(dz_1) \cdots \pi_{z_{n-1}}(dz_n) \\ &= \int_{b \leq z_0 \leq \dots \leq z_{n-1} < c} \frac{\mu(dz_0) \mu(dz_1) \cdots \mu(dz_{n-1}) \mu[c; +\infty[}{\mu[b; +\infty[\mu[z_0; +\infty[\cdots \mu[z_{n-2}; +\infty[\mu[z_{n-1}; +\infty[} \\ &= \frac{\mu[c; +\infty[}{\mu[b; +\infty[} \times \frac{(\ln \mu[b; +\infty[- \ln \mu[c; +\infty[)^n}{n!}, \end{aligned}$$

car la restriction de la mesure μ à l'intervalle $[b; c[$ est diffuse. \square

Des propositions précédentes découle un résultat remarquable pour le processus de Poisson ponctuel $X = (X_t)_{t \geq 0}$.

COROLLAIRE 3.6. — *Si la mesure μ est diffuse, les valeurs des records larges du processus de Poisson ponctuel $X = (X_t)_{t \geq 0}$ sont réparties suivant une mesure de Poisson aléatoire d'intensité $\frac{\mu(dx)}{\mu[x; +\infty[}$.*

Démonstration. — En effet, pour tout $a > 0$, la suite des records larges $\geq a$ forme une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ de loi initiale π_a , et de probabilités de transition $(\pi_x)_{x > 0}$. On peut donc lui appliquer les résultats du théorème 3.3 et de la proposition 3.5.

Lorsque la mesure μ n'est pas diffuse, la loi des accroissements du processus $(N_x)_{x > 0}$ est plus difficile à expliciter. On peut toutefois donner une équation intégrale satisfaite par les fonctions caractéristiques en un point $\theta \in \mathbf{R}$. \square

PROPOSITION 3.7. — *Pour $y > x > a > 0$, et $\theta \in \mathbf{R}$, on a*

$$P_{\pi_a}[\exp(i\theta(N_y - N_x))] = \frac{\mu[y; +\infty[}{\mu[x; +\infty[} + e^{i\theta} \int_{[x; y[} P_{\pi_a}[\exp(i\theta(N_y - N_z))] \frac{\mu(dz)}{\mu[x; +\infty[}.$$

Démonstration. — Notons $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la filtration engendrée par la chaîne $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$. En remarquant que l'accroissement $N_y - N_x$ est l'analogie du temps d'arrêt N_y pour la chaîne $(Z_{N_x+n})_{n \in \mathbf{N}}$, on obtient par la propriété de Markov

$$P_{\pi_a}[\exp(i\theta(N_y - N_x)) | \mathcal{F}_{N_x}] = f(Z_{N_x}),$$

où pour tout $z \geq x$:

$$f(z) = P_{\pi_a}[\exp(i\theta(N_y - N_x)) | Z_{N_x} = z] = P_z[\exp(i\theta(N_y))].$$

Pour tout $z \geq y$, on a $N_y = 0$ presque sûrement sous P_z , d'où $f(z) = 0$.

Pour tout $z < y$, on a $N_y \geq 1$ presque sûrement sous P_z , d'où en appliquant la propriété de Markov à l'instant 1 :

$$f(z) = P_{\pi_z}[\exp(i\theta(N_y + 1))] = P_{\pi_a}[\exp(i\theta(N_y - N_z + 1))].$$

En d'autres termes, pour $z \in [x; y[$, la loi de $N_y - N_x$ sachant $Z_{N_x} = z$ est égale à la loi de $N_y - N_z + 1$. Ainsi, comme la loi de Z_{N_x} sous P_{π_a} est π_x ,

$$P_{\pi_a}[\exp(i\theta(N_y - N_x))] = \pi_x[y; +\infty[+ \int_{[x; y[} P_{\pi_a}[\exp(i\theta(N_y - N_z + 1))] \pi_x(dz).$$

\square

4. Inexistence d'une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$ indexée par \mathbf{Z} – une preuve “probabiliste”

Nous allons maintenant utiliser les notations et les résultats de la précédente partie pour montrer qu'il n'est pas possible de construire une chaîne de Markov indexée par \mathbf{Z} pour les probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$. Pour cela, on suppose que $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une telle chaîne, et on cherche à obtenir une absurdité.

Dans la preuve “probabiliste”, on est amené à distinguer deux cas, suivant que $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ prend ou non une infinité de valeurs dans A , où A est l'ensemble des atomes < 1 de la mesure μ . Nous commençons par faire quelques remarques préliminaires sous l'hypothèse absurde où $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ de probabilités de transition $(\pi_x)_{x>0}$.

LEMME 4.1. — *On a $Y_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow -\infty$ et $Y_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Autrement dit, les temps d'arrêt $(N_x = \inf\{n \in \mathbf{Z} : Y_n \geq x\})_{x>0}$ ne prennent pas les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$.*

Nous montrons seulement la convergence $Y_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow -\infty$: comme la suite $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est croissante et ne peut pas prendre une infinité de fois la même valeur, Y_n tend vers une variable $L \geq 0$ par valeurs strictement supérieures quand n tend vers $-\infty$. On a donc presque sûrement la convergence étroite $\pi_{Y_n} \rightarrow \pi_{L+}$ quand $n \rightarrow -\infty$, en notant $\pi_{x+} = \mu[\cdot |]x; +\infty[$ pour $x > 0$, et $\pi_{0+} = \delta_0$. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue bornée strictement croissante. L'égalité $\mathbf{E}[f(Y_{n+1})] = \mathbf{E}[\int f(y) \pi_{Y_n}(dy)]$ entraîne $\mathbf{E}[f(L)] = \mathbf{E}[\int f(y) \pi_{L+}(dy)]$ par passage à la limite. Or on a $\int f(y) \pi_{L+}(dy) > f(L)$ sur l'événement $[L > 0]$ (par croissance stricte de f), tandis qu'il y a égalité sur l'événement $[L = 0]$. Donc $L = 0$ presque sûrement.

LEMME 4.2. — *Pour tout $x > 0$, le variable Y_{N_x} est indépendante de N_x , et suit la loi π_x .*

Démonstration. — Pour tout borélien B de $]0; +\infty[$, et tout couple d'entiers $m < n$:

$$\begin{aligned} P[N_x = n; Y_{N_x} \in B; Y_m < x] &= \mathbf{E}[\mathbb{1}_{[Y_m < x]} P_{Y_m}[N_x = n - m; Z_{N_x} \in B]] \\ &= \mathbf{E}[\mathbb{1}_{[Y_m < x]} P_{Y_m}[N_x = n - m]] \pi_x(B) \\ &= P[N_x = n; Y_m < x] \pi_x(B). \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $m \rightarrow -\infty$, on obtient :

$$P[N_x = n; Y_{N_x} \in B] = P[N_x = n] \pi_x(B).$$

□

En appliquant la propriété de Markov aux temps d'arrêt N_x et le théorème 3.3, on obtient alors :

LEMME 4.3. — *Le processus $(N_x)_{x>0}$ est à accroissements indépendants.*

Pour $x \in A$, notons E_x l'événement : “la valeur x est atteinte par la chaîne $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ”. En remarquant que $E_x = [\Delta N_x \neq 0]$, on montre que les événements E_x sont indépendants, et que $P(E_x) = \pi_x\{x\} = \frac{\mu\{x\}}{\mu[x; +\infty[}$. On distingue deux cas, suivant la nature de la série $\sum_{x \in A} P(E_x)$.

Premier cas. — $\sum_{x \in A} P(E_x) = +\infty$.

Par indépendance des accroissements du processus $(N_x)_{x>0}$, on a pour tout $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]| &\leq \prod_{x \in A} |\mathbf{E}[\exp(i\Delta N_x)]| \\
&= \prod_{x \in A} \frac{1 - \pi_x\{x\}}{|1 - \pi_x\{x\} \exp(i\theta)|} \\
&= \prod_{x \in A} \frac{\mu[x; +\infty[}{|\mu[x; +\infty[-\mu\{x\} \exp(i\theta)|} \\
&\leq \prod_{x \in A} \frac{\mu[x; +\infty[}{\mu[x; +\infty[-\mu\{x\} \cos(\theta)} \\
&= \prod_{x \in A} \left(1 + (1 - \cos \theta) \frac{\mu\{x\}}{\mu[x; +\infty[}\right)^{-1} \\
&= 0, \text{ car } \sum_{x \in A} \frac{\mu\{x\}}{\mu[x; +\infty[} = +\infty.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une absurdité.

Second cas. — $\sum_{x \in A} P(E_x) < +\infty$.

Regardons d'abord le cas particulier où la restriction de la mesure μ à l'intervalle $]0; 1[$ est diffuse. D'après les résultats de la partie précédente, on sait que pour tout $x \in]0; 1[$, la différence $N_1 - N_x$ suit la loi de Poisson de paramètre $\ln \mu[x; +\infty[-\ln \mu[1; +\infty[$. Par indépendance des accroissements, on a donc pour tout $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]| &\leq |\mathbf{E}[\exp(i\theta(N_1 - N_x))]| \\
&= \left| \exp\left(\ln \frac{\mu[x; +\infty[}{\mu[1; +\infty[} (e^{i\theta} - 1)\right)\right| \\
&= \exp\left(\ln \frac{\mu[x; +\infty[}{\mu[1; +\infty[} (\cos \theta - 1)\right).
\end{aligned}$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient $\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)] = 0$ pour tout $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$, ce qui est absurde.

Voyons maintenant comment le second cas ($\sum_{x \in A} P(E_x) < +\infty$) se ramène au cas particulier ci-dessus. Soit $\mu' = \mu - \sum_{x \in A} \mu\{x\} \delta_x = \mathbb{1}_A^c \mu$. On vérifie que la mesure μ' satisfait aux mêmes hypothèses que la mesure μ . Le seul point non évident est que μ' est de masse totale infinie. Raisonnons par l'absurde: si μ' était de masse totale finie, cela entraînerait (comme μ est de masse totale infinie) que $\sum_{x \in A} \mu\{x\} = +\infty$, et donc que $\mu[x; +\infty[\sim \sum_{y \in A; y \geq x} \mu\{y\}$ quand x tend vers 0. Comme $\sum_{x \in A} \mu\{x\} / \mu[x; +\infty[= \sum_{x \in A} P(E_x) < +\infty$, on aurait donc:

$$\sum_{x \in A} \frac{\mu\{x\}}{\sum_{y \in A; y \geq x} \mu\{y\}} < +\infty,$$

ce qui contredirait le fait que $\sum_{x \in A} \mu\{x\} = +\infty$.

On définit alors les probabilités de transition $\pi'_x = \mu'[\cdot | [x; +\infty[]$. En modifiant le processus $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, on va construire une chaîne de Markov $(Y'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x > 0}$.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, la chaîne $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ n'atteint presque sûrement qu'un nombre fini de valeurs de A . Le temps d'arrêt $N = \inf\{n \in \mathbf{Z} : Y_n \in A\}$ est donc différent de $-\infty$. On construit le processus $(Y'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de la façon suivante : soit $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x > 0}$, issue de Y_{N-1} , et indépendante du processus $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ conditionnellement à Y_{N-1} . On pose $Y'_n = Y_n$ sur $[n < N]$ et $Y'_n = Z_{n-N+1}$ sur $[n \geq N]$.

Le processus $(Y'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ainsi construit est alors une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x > 0}$. En effet, notons \mathcal{G}_n la tribu engendrée par les variables Y_m et $\mathbb{1}_{[N=m]}Z_k$ pour $m \leq n$ et $0 \leq k \leq n - m + 1$. Le processus $(Y'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est adapté pour la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ puisque N est un temps d'arrêt et

$$Y'_n = \mathbb{1}_{[N > n]}Y_n + \sum_{m \leq n} \mathbb{1}_{[N=m]}Z_{n-m+1} \text{ pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout borélien B de \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} P[Y'_{n+1} \in B | \mathcal{G}_n] &= P[Y'_{n+1} \in B; N > n+1 | \mathcal{G}_n] + P[Y'_{n+1} \in B; N = n+1 | \mathcal{G}_n] \\ &\quad + \sum_{m \leq n} P[Y'_{n+1} \in B; N = m | \mathcal{G}_n] \\ &= P[Y_{n+1} \in B \setminus A; N > n | \mathcal{G}_n] + P[Z_1 \in B; Y_{n+1} \in A; N > n | \mathcal{G}_n] \\ &\quad + \sum_{m \leq n} P[Z_{n-m+2} \in B; N = m | \mathcal{G}_n] \\ &= \mathbb{1}_{[N > n]} \pi_{Y_n}(B \setminus A) + \mathbb{1}_{[N > n]} \pi'_{Y_n}(B) \pi_{Y_n}(A) + \sum_{m \leq n} \mathbb{1}_{[N=m]} \pi'_{Z_{n-m+1}}(B) \\ &= \mathbb{1}_{[N > n]} \frac{\mu'(B \cap [Y_n; +\infty[)}{\mu[Y_n; +\infty[)} \left(1 + \frac{\mu(A \cap [Y_n; +\infty[)}{\mu'[Y_n; +\infty[)}\right) + \mathbb{1}_{[N \geq n]} \pi'_{Y'_n}(B) \\ &= \pi'_{Y'_n}(B). \end{aligned}$$

5. Inexistence d'une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x > 0}$ indexée par \mathbf{Z} – une preuve “analytique”.

Nous donnons maintenant une preuve “analytique” de l'inexistence, en étudiant l'équation intégrale que nous avons établie à la fin de la troisième partie. Supposons que $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x > 0}$, et posons $N_x = \inf\{n \in \mathbf{Z} : Y_n \geq x\}$ pour $x > 0$.

Pour $a > 0$ le processus $(Z_n^a = Y_{N_a+n})_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_x)_{x > 0}$ et de loi initiale π_a . En notant $(N_x^a = \inf\{n \in \mathbf{Z} : Z_n^a \geq x\})_{x > 0}$ pour $x > 0$, on voit que pour $y > x > a > 0$, l'accroissement $N_y - N_x$ est égal à l'accroissement $N_y^a - N_x^a$. Cela montre que l'on a

$$\mathbf{E}[\exp(i\theta(N_y - N_x))] = \frac{\mu[y; +\infty[)}{\mu[x; +\infty[)} + \int_{[x; y[} e^{i\theta} \mathbf{E}[\exp(i\theta(N_y - N_z))] \frac{\mu(dz)}{\mu[x; +\infty[)}$$

pour tout $y > x > 0$, et tout $\theta \in \mathbf{R}$.

Fixons $\theta \in]0; 2\pi[$ assez proche de 0 pour que $\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]$ ne soit pas nul. Par indépendance des accroissements, $|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)]|$ décroît en fonction de x . Donc pour tout $x \in]0; 1[$, $\mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)] \neq 0$ et $\mathbf{E}[\exp(i\theta(N_1 - N_x))] = \mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]/\mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)]$. Donc en posant $F(x) = \mathbf{E}[\exp(i\theta N_x)]^{-1}$, et en prenant $y = 1$ dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$(\mathcal{E}) \quad F(x)\mu[x; +\infty[= F(1)\mu[1; +\infty[+ e^{i\theta} \int_{[x; 1[} F(z)\mu(dz).$$

Nous allons nous intéresser au comportement des différents termes quand $x \rightarrow 0$, et montrer que l'équation (\mathcal{E}) entraîne que $F(x) \rightarrow 0$, ce qui est absurde.

Supposons en effet que $F(x)$ ne tende pas vers 0. Comme $|F|$ est une fonction croissante, on aurait alors $|F(x)| \rightarrow l$, avec $l > 0$. Comme $\mu[x; +\infty[\rightarrow +\infty$, on aurait d'après (\mathcal{E}) :

$$\frac{\int_{[x; 1[} F(y)\mu(dy)}{F(x)\mu[x; +\infty[} \rightarrow e^{-i\theta}.$$

Notons $\phi(x)$ l'argument de $F(x)$ dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. En remarquant que

$$\left| \frac{\int_{[x; 1[} (F(y) - l e^{i\phi(y)}) \mu(dy)}{F(x)\mu[x; +\infty[} \right| \leq \frac{\int_{[x; 1[} (|F(y)| - l) \mu(dy)}{|F(x)|\mu[x; +\infty[} \rightarrow 0,$$

on obtiendrait :

$$\frac{\int_{[x; 1[} l e^{i\phi(y)} \mu(dy)}{F(x)\mu[x; +\infty[} \rightarrow e^{-i\theta},$$

d'où, comme $\frac{|F(x)|}{l} \frac{\mu[x; +\infty[}{\mu[x; 1[} \rightarrow 1$,

$$\frac{\int_{[x; 1[} e^{i(\phi(y) - \phi(x) + \theta)} \mu(dy)}{\mu[x; 1[} \rightarrow 1.$$

Cette dernière égalité indique que pour $x > 0$ assez petit, une certaine combinaison convexe de complexes de module 1 serait proche de 1. Par conséquent, les arguments $\phi(y) - \phi(x) + \theta$ devraient être proches de 0 pour "la plupart" des $y \in [x; 1[$, ce qui conduit rapidement à une contradiction. Précisons ce point.

Pour $x > 0$ tel que $\mu[x; 1[> 0$, notons μ_x la probabilité $\mathbb{1}_{[x; 1[} \mu / \mu[x; 1[= \mu[\cdot]_{[x; 1[}$ et $m(x)$ une valeur médiane de μ_x . D'après ce qui précède,

$$\int (\cos(\phi(y) - \phi(x) + \theta) - 1) \mu_x(dy) \rightarrow 0.$$

En notant $|\cdot|$ la distance à 0 dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et en utilisant l'inégalité $1 - \cos \psi \geq \frac{2}{\pi^2} |\psi|^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\int |\phi(y) - \phi(x) + \theta| \mu_x(dy) \rightarrow 0,$$

ce qui entraîne $\mu_x\{y \in [x; 1[: |\phi(y) - \phi(x) + \theta| \geq \frac{\theta}{2}\} \rightarrow 0$. Pour tout x assez petit, on a donc $\mu_x\{y \in [x; 1[: |\phi(y) - \phi(x) + \theta| \geq \frac{\theta}{2}\} < \frac{1}{2}$, donc il existe $z(x) \in [x; m(x)]$ tel que $|\phi(z(x)) - \phi(x) + \theta| < \frac{\theta}{2}$, d'où $|\phi(z(x)) - \phi(x)| > \frac{\theta}{2}$. En remarquant que l'inégalité

$z(x) \leq m(x)$ entraîne $\mu[z(x); 1[\geq \frac{1}{2} \mu[x; 1[$, d'où $\mu_{z(x)} \leq 2 \mu_x$ et $z(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{2} &< \int |\phi(z(x)) - \phi(x)| \mu_{z(x)}(dy) \\ &\leq \int |\phi(y) - \phi(x) + \theta| \mu_{z(x)}(dy) + \int |\phi(y) - \phi(z(x)) + \theta| \mu_{z(x)}(dy) \\ &\leq 2 \int |\phi(y) - \phi(x) + \theta| \mu_x(dy) + \int |\phi(y) - \phi(z(x)) + \theta| \mu_{z(x)}(dy), \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque le membre de droite tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$.

6. Cas des records stricts

On peut choisir de s'intéresser aux records stricts au lieu des records larges. Nous allons voir que dans certains cas, on peut énumérer l'ensemble $\tilde{D} = \{t > 0 : X_t > M_{t-}\}$ par une suite strictement croissante de temps d'arrêts, contrairement à ce qu'on a vu pour les records larges, qu'il n'est jamais possible d'énumérer.

En effet, on montre comme dans la deuxième partie que si $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une suite strictement croissante de temps d'arrêt énumérant l'ensemble \tilde{D} , alors la suite des records $(X_{T_n})_{n \in \mathbf{Z}}$ serait une chaîne de Markov sur $]0; +\infty[$ admettant comme probabilités de transition la famille $(\pi_{x+})_{x>0}$, où $\pi_{x+} = \mu[\cdot |]x; +\infty[$ pour $x > 0$.

Lorsque la mesure μ est diffuse, les probabilités $(\pi_{x+})_{x>0}$ sont égales aux probabilités $(\pi_x)_{x>0}$, et il n'y a presque sûrement pas de différence entre les records stricts et les records larges. En revanche, lorsque la mesure μ n'est pas diffuse, une différence importante apparaît puisqu'un atome de μ peut réaliser plusieurs fois un record large, mais seulement une fois un record strict. Pour cette raison, les théorèmes 2.3 et 2.4 ne se transposent pas en toute généralité aux records stricts. Nous donnons dans le théorème 6.3 une caractérisation des mesures μ pour lesquelles on peut énumérer l'ensemble $\tilde{D} = \{t > 0 : X_t > M_{t-}\}$ par une suite strictement croissante de temps d'arrêts.

Commençons par quelques résultats préliminaires mettant en évidence le rôle des atomes.

PROPOSITION 6.1. — *Si la mesure μ vérifie $\sum_{x \in A} \min(\pi_x\{x\}, 1 - \pi_x\{x\}) = +\infty$, où A est l'ensemble de ses atomes < 1 , alors il n'existe pas de chaîne de Markov indexée par \mathbf{Z} pour les probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x>0}$.*

Démonstration. — Supposons que $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x>0}$. Posons $N_x = \inf\{n \in \mathbf{Z} : Y_n \geq x\}$ pour $x > 0$. On montre comme avant que le processus $(N_x)_{x>0}$ est à accroissements indépendants, et que pour tout $x > 0$, l'accroissement $\Delta N_x = N_{x+} - N_x$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\pi_x\{x\} = \mu\{x\}/\mu[x; +\infty[$. Par

indépendance des accroissements du processus, on a pour tout $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_1)]|^2 &\leq \prod_{x \in A} |\mathbf{E}[\exp(i\Delta N_x)]|^2 \\
&= \prod_{x \in A} |1 - \pi_x\{x\} + \pi_x\{x\}e^{i\theta}|^2 \\
&= \prod_{x \in A} (1 - 2(1 - \cos \theta)\pi_x\{x\}(1 - \pi_x\{x\})) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car

$$\sum_{x \in A} \pi_x\{x\}(1 - \pi_x\{x\}) \geq 2 \sum_{x \in A} \min(\pi_x\{x\}, 1 - \pi_x\{x\}) = +\infty.$$

On obtient ainsi une absurdité. \square

Dans tout ce qui suit, on note $A_g = \{x \in A : \pi_x\{x\} \geq 1/2\}$, on appelle **gros atomes** les éléments de A_g , et **petits atomes** les éléments de $A \setminus A_g$. Remarquons que pour tout $a > 0$, le fait que $\mu[a; +\infty[< +\infty$ entraîne qu'il n'y a qu'un nombre fini de gros atomes dans l'intervalle $[a; 1[$. Autrement dit, le seul point d'accumulation possible de A_g est 0.

PROPOSITION 6.2. — *Si la mesure μ est discrète et si $\sum_{x \in A} \min(\pi_x\{x\}, 1 - \pi_x\{x\}) < +\infty$, alors il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ strictement croissante de temps d'arrêt énumérant l'ensemble \tilde{D} , et la suite des records stricts $(X_{T_n})_{n \in \mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_{x^+})_{x > 0}$.*

Démonstration. — Comme la mesure μ est discrète et infinie, on a :

$$\sum_{x \in A} \pi_x\{x\} = \sum_{x \in A} (\mu\{x\} / \mu[x; +\infty[) = +\infty.$$

Donc la condition $\sum_{x \in A} \min(\pi_x\{x\}, 1 - \pi_x\{x\}) < +\infty$ entraîne qu'il y a une infinité de gros atomes. Donc l'ensemble A_g est de la forme : $\{a_{-n} ; n \in \mathbf{N}^*\}$, où $(a_{-n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite strictement décroissante de réels convergeant vers 0. On posera $a_0 = a_{-1}$.

Pour $x \in A$, notons E_x l'événement : "la valeur x réalise un record du processus X ". Comme $P(E_x) = \pi_x\{x\}$, on a :

$$\sum_{x \in A_g} P(E_x^c) < +\infty \text{ et } \sum_{x \in A \setminus A_g} P(E_x) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel- Cantelli, tous les gros atomes à un nombre fini d'exceptions près réalisent un record, et aucun petit atome à un nombre fini d'exceptions près ne réalise de record. Notons $S_n = \inf\{t \geq 0 : X_t > a_{n-1}\}$ pour $n \in -\mathbf{N}^*$, et :

$$\tilde{\sigma}(T) = \inf\{t > T : X_t > M_{t-}\} = \inf\{t > T : X_t > M_T\}$$

pour tout instant T . Posons :

$$N = \inf\{n \in -\mathbf{N} : X_{S_n} \neq a_n\}.$$

Autrement dit, N le plus petit entier $n \in -\mathbf{N}$ tel que le premier record $> a_{n-1}$ ne soit pas égal à a_n . Lorsque N est différent de 0, N est donc le plus petit entier $n \in -\mathbf{N}^*$ tel que a_n ne réalise

pas de record ou tel qu'un petit atome appartenant à l'intervalle $]a_{n-1}; a_n[$ réalise un record. D'après ce qui précède, la variable N est à valeurs dans $-\mathbf{N}$ presque sûrement. On peut donc définir une suite $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ d'instants par $T_n = S_n$ sur l'événement $[n \leq N]$ et $T_n = \tilde{\sigma}^{n-N}(S_N)$ sur l'événement $[n > N]$. La suite d'instants ainsi construite est strictement croissante, et énumère bien l'ensemble \tilde{D} . On vérifie que les instants T_n sont bien des temps d'arrêt en écrivant que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$[T_n \leq t] = ([N \geq n] \cap [S_n \leq t]) \cup \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} ([N = n - k] \cap [\tilde{\sigma}^k(S_{n-k}) \leq t]),$$

et en remarquant que pour $m \in -\mathbf{N}$, l'événement $[N = m]$ appartient à la tribu \mathcal{F}_{S_m} . \square

Nous allons maintenant voir une caractérisation des mesures μ pour lesquelles on peut énumérer l'ensemble \tilde{D} par une suite strictement croissante de temps d'arrêt. Lorsque x est un gros atome, on note $s(x)$ le gros atome suivant, autrement dit $s(x) = \inf(A_g \cap]x; +\infty[)$.

THÉORÈME 6.3. — *Il y a équivalence entre :*

- (1) *on peut énumérer l'ensemble \tilde{D} par une suite strictement croissante de temps d'arrêt ;*
- (2) *il existe une chaîne de Markov indexée par \mathbf{Z} pour les probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x > 0}$;*
- (3) *l'ensemble A_g est infini, et les sommes $\sum_{x \in A_g} \pi_x]x; +\infty[$, $\sum_{x \in A_g} \pi_{x+}]x; s(x)[$ sont finies ;*
- (4) *il existe une suite strictement décroissante $(a_{-n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ de réels convergeant vers 0 telle que $\prod_{n \leq -2} \pi_{a_n+} \{a_{n+1}\} > 0$.*

De plus, lorsque ces conditions sont vérifiées, on peut prendre la suite des gros atomes rangés dans l'ordre décroissant comme suite $(a_{-n})_{n \in \mathbf{N}^}$.*

Démonstration. — On montre les implications (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).

— L'implication (1) \Rightarrow (2) a déjà été vue : il suffit d'adapter les raisonnements de la deuxième partie.

— (2) \Rightarrow (3) : supposons que $(Y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi_{x+})_{x > 0}$. D'après la proposition 6.2, on a $\sum_{x \in A} \min(\pi_x \{x\}, 1 - \pi_x \{x\}) < +\infty$, ce qui entraîne que les sommes $\sum_{x \in A_g} \pi_x]x; +\infty[$ et $\sum_{x \in A \setminus A_g} \pi_x \{x\}$ sont finies. Il reste donc à montrer que l'ensemble A_g est infini, et que $\sum_{x \in A_g} \pi_{x+}]x; s(x)[< +\infty$.

Soit $\mu' = \mu - \sum_{x \in A \setminus A_g} \mu \{x\} \delta_x = \mathbb{1}_{(A \setminus A_g)^c} \mu$. En raisonnant comme dans le "second cas" de la quatrième partie, on vérifie que la mesure μ' satisfait aux mêmes hypothèses que la mesure μ , et on construit une chaîne de Markov $(Y'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de probabilités de transition $(\pi'_{x+})_{x > 0}$, où $\pi'_{x+} = \mu' [\cdot]]x; +\infty[$. Comme A_g est l'ensemble de tous les atomes < 1 de μ' , A_g est infini (sans quoi, la restriction de la mesure μ' à un certain intervalle $]0; a[$ serait diffuse, et sur cet intervalle, la chaîne $(Y'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ se comporterait comme une chaîne de Markov de probabilités de transition $(\pi'_x)_{x > 0}$, où $\pi'_x = \mu' [\cdot]]x; +\infty[$).

Notons $(a_{-n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite des éléments de A_g rangés dans l'ordre décroissant, et posons $N'_x = \inf\{n \in \mathbf{Z} : Y'_n \geq x\}$ pour $x > 0$. Alors pour tout entier $n \leq -2$, la restriction de la mesure μ' à l'intervalle $]a_n ; a_{n+1}[$ est diffuse, donc l'accroissement $N'_{a_{n+1}} - N'_{a_n}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\ln \mu']a_n ; +\infty[- \ln \mu']a_{n+1} ; +\infty[$. Par indépendance des accroissements, on a pour tout $\theta \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}[\exp(i\theta N_{a_{-1}})]| &\leq \prod_{n \leq -2} |\mathbf{E}[\exp(i\theta(N'_{a_{n+1}} - N'_{a_n}))]| \\
&= \prod_{n \leq -2} \left| \exp\left(\ln \frac{\mu']a_n ; +\infty[}{\mu']a_{n+1} ; +\infty[} (e^{i\theta} - 1)\right) \right| \\
&= \prod_{n \leq -2} \left(\frac{\mu']a_n ; +\infty[}{\mu']a_{n+1} ; +\infty[}\right)^{\cos \theta - 1} \\
&= \prod_{n \leq -2} \left(1 - \frac{\mu']a_n ; a_{n+1}[}{\mu']a_n ; +\infty[}\right)^{1 - \cos \theta} \\
&= \left(\prod_{n \leq -2} (1 - \pi'_{a_n}]a_n ; a_{n+1}[)\right)^{1 - \cos \theta}
\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{E}[\exp(i\theta N_{a_{-1}})] \neq 0$ pour θ assez proche de 0, le produit infini doit donc être non nul, ce qui entraîne que la somme $\sum_{n \leq -2} \pi'_{a_n}]a_n ; a_{n+1}[$ est finie. Or:

$$\begin{aligned}
\pi_{a_n}]a_n ; a_{n+1}[&= \frac{\mu]a_n ; a_{n+1}[}{\mu]a_n ; +\infty[} \\
&= \frac{\mu']a_n ; a_{n+1}[}{\mu]a_n ; +\infty[} + \sum_{x \in A \setminus A_g ; a_n < x < a_{n+1}} \frac{\mu \{x\}}{\mu]a_n ; +\infty[} \\
&\leq \frac{\mu']a_n ; a_{n+1}[}{\mu']a_n ; +\infty[} + \sum_{x \in A \setminus A_g ; a_n < x < a_{n+1}} \frac{\mu \{x\}}{\mu [x ; +\infty[} \\
&= \pi'_{a_n}]a_n ; a_{n+1}[+ \sum_{x \in A \setminus A_g ; a_n < x < a_{n+1}} \pi_x \{x\}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n \leq -2} \pi_{a_n}]a_n ; a_{n+1}[\leq \sum_{n \leq -2} \pi'_{a_n}]a_n ; a_{n+1}[+ \sum_{x \in A \setminus A_g ; x < a_{-1}} \pi_x \{x\} < +\infty,$$

ce qui montre que $\sum_{x \in A_g} \pi_{x+}]x ; s(x)[< +\infty$.

— (3) \Rightarrow (4) : supposons que l'ensemble A_g est infini, et que les sommes $\sum_{x \in A_g} \pi_x]x ; +\infty[$, $\sum_{x \in A_g} \pi_{x+}]x ; s(x)[$ sont finies. Alors l'ensemble A_g est de la forme : $\{a_{-n} ; n \in \mathbf{N}^*\}$, où $(a_{-n})_{n \in \mathbf{N}^*}$

est une suite strictement décroissante de réels convergeant vers 0, et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq -2} (1 - \pi_{a_n+}\{a_{n+1}\}) &= \sum_{n \leq -2} \frac{\mu]a_n; a_{n+1}[+ \mu]a_{n+1}; +\infty[}{\mu]a_n; +\infty[} \\
&\leq \sum_{n \leq -2} \left(\frac{\mu]a_n; a_{n+1}[}{\mu]a_n; +\infty[} + \frac{\mu]a_{n+1}; +\infty[}{\mu]a_{n+1}; +\infty[} \right) \\
&= \sum_{n \leq -2} \pi_{a_n+}\{a_{n+1}\} + \sum_{n \leq -2} \pi_{a_{n+1}}\{a_{n+1}\} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\prod_{n \leq -2} \pi_{a_n+}\{a_{n+1}\} > 0$.

— (4) \Rightarrow (1) : supposons qu'il existe une suite strictement décroissante $(a_{-n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ de réels convergeant vers 0 telle que $\prod_{n \leq -2} \pi_{a_n+}\{a_{n+1}\} > 0$.

Pour $n \in -\mathbf{N}^*$, posons $S_n = \inf\{t \geq 0 : X_t > a_{n-1}\}$. Alors $P[X_{S_n} = a_n] = 1 - \pi_{a_{n-1}+}\{a_n\}$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a donc presque sûrement $X_{S_n} = a_n$ sauf pour un nombre fini d'entiers n . La variable $N = \inf\{n \in -\mathbf{N} : X_{S_n} \neq a_n\}$ est donc à valeurs dans $-\mathbf{N}$, et on construit une suite $(T_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de temps d'arrêt en posant $T_n = S_n$ sur l'événement $[n < N]$ et $T_n = \sigma^{n-N}(S_N)$ sur l'événement $[n \geq N]$. La suite d'instantanés ainsi construite est strictement croissante, et énumère bien l'ensemble \tilde{D} . \square

Jean BROSSARD et Christophe LEURIDAN
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)