GROUPE DES OBSTRUCTIONS POUR LES DÉFORMATIONS
DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES

Roland Gillard

Depuis l'article fondateur de Mazur [2], on sait que les problèmes de déformation des représentations galoisiennes sont (pro)-représentables sous des conditions raisonnables; les anneaux sont de la forme $R = \mathscr{O}[[T_1, .., T_d]]/I$, avec $\mathscr{O}$ un anneau de Witt. On sait aussi que pour que l'idéal I, idéal des relations soit nul (le problème alors appelé sans obstruction), il suffit qu'un certain groupe de cohomologie H^2 soit nul.

Le but de cette note est de préciser ce résultat en construisant un groupe d'obstructions, sous groupe du H^2 ci-dessus, et en montrant que le rang de ce groupe est exactement le nombre minimal de générateurs de I. La méthode de démonstration reprend celle de Vistoli [5] prouvant un résultat analogue dans un cadre géométrique.

Une question qui se pose donc est de savoir si on peut trouver des exemples où le sous groupe serait nul sans que le groupe de cohomologie le soit. Une autre serait l'expression directe du sous-groupe en termes du problème initial (par exemple le module galoisien de départ).

Le paragraphe 1 décrit les conditions de Schlessinger d'existence d'une algèbre universelle. Le paragraphe 2 axiomatise la méthode de Vistoli en supposant que le foncteur possède une théorie linéaire d'obstruction. Ceci permet de reprendre plus explicitement la construction de R, d'introduire le groupe d'obstruction O_F et de montrer que sa dimension et égale au nombre de relations dans R. Discuter les conditions d'existence d'une telle théorie nous aurait entraîné trop loin, surtout que sur chaque exemple classique de foncteur de déformations, cette question ne présente guère de difficulté. Le paragraphe 3 s'intéresse au cas introduit par Mazur des représentations d'un groupe, cependant en adoptant le cadre plus général des schémas en groupes lisses comme dans Tilouine [4].

1. Foncteurs pour les anneaux artiniens

1.1. Catégories

On fixe un nombre premier p et une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau de valuation $\mathscr{O}$, d'uniformisante π, de valuation π-adique $v_{\mathscr{O}}$ et de corps résiduel k. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des $\mathscr{O}$-algèbres locales artiniennes complètes de corps résiduel k. Pour A dans $\mathscr{C}$, on note $\mathfrak{m}_A$ son idéal maximal. Pour n entier, on appelle $\mathscr{C}_n$ la sous catégorie pleine des algèbres A annulées par $\mathfrak{m}_A^{n+1}$. On appelle 1-extension une surjection $A' \to A$ dans $\mathscr{C}$ dont le noyau I est annulé par $\mathfrak{m}$.

Mots Clés : déformations, obstructions, représentations galoisiennes.
Classification math. : 13D10, 14D15, 12F10.

Un morphisme de 1-extensions est un diagramme commutatif défini par des morphismes $A' \to B'$ et $A \to B$. Une 1-extension est dite petite si en plus I est un idéal principal. La catégorie $\mathscr{C}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\bar{\mathscr{C}}$ des $\mathscr{O}$-algèbres locales noethériennes, complètes de corps résiduel k.

1.2. Foncteurs

On fixe un foncteur covariant F de $\mathscr{C}$ dans Ens la catégorie des ensembles. L'espace tangent de F est par définition $t_F = F(k[\epsilon])$. Pour R un anneau de $\mathscr{C}$, on note h_R le foncteur $\mathrm{Hom}(R, \bullet)$. On considère des couples (A, a) avec A dans $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_n$ et a dans $F(A)$; un morphisme de couples $(A', a') \to (A, a)$ est un morphisme $u : A' \to A$ tel que $a = F(u)(a')$. Si R est dans $\bar{\mathscr{C}}$, un couple (R, ξ) est R complété par une suite cohérentes de $\xi_n \in F(R_n)$, avec $R_n = R/\mathfrak{m}_R^{n+1}$. Un morphisme de couples $(R, \xi) \to (A, a)$ est un morphisme $(R_n, \xi_n) \to (A, a)$ pour n assez grand. On dit qu'un couple (R, ξ) représente (ou est universel pour) F si le morphisme de foncteurs $h_R \to F : \mathrm{Hom}(R, A) = \mathrm{Hom}(R_n, A) \to F(A),\ p \to F(p)(\xi_n)$ est un isomorphisme pour tout n et pour tout A dans $\mathscr{C}_n$; Si un tel couple existe on dit que F est pro-représentable. On dit que (R, ξ) est versel si ce morphisme est lisse: ceci revient à demander que pour tout morphisme de couples comme ci-dessus où u est une 1-extension, tout morphisme $u : (R, \xi) \to (A, a)$ se relève en $u' : (R, \xi) \to (A', a')$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & (A', a') \\ & \nearrow & \downarrow \\ (R, \xi) & \to & (A, a) \end{array} \quad .$$

On dit que (R, ξ) est une enveloppe si ce couple est versel et si de plus $h_R \to F$ induit un isomorphisme sur les espaces tangents: $(\mathfrak{m}_R/(\pi) + \mathfrak{m}_R^2)^* \to F(k[\epsilon])$. Enfin on dit que (R, ξ) est n-versel (resp. est une n-enveloppe) si cet anneau est dans $\mathscr{C}_n$ et y est versel (resp. est une enveloppe) pour la restriction de F. Si (R, ξ) est versel (resp. n-versel) pour R dans $\bar{\mathscr{C}}$ (resp. $\mathscr{C}_m$), alors (R_n, ξ_n) est versel pour $n \leqslant m$ (resp. où ξ_m est l'image de ξ_n). Cette remarque vaut aussi pour les couples universels ou les enveloppes.

1.3. Conditions de Schlessinger

Soit F un foncteur de $\mathscr{C}$ vers Ens avec $F(k) = \{e\}$, l'ensemble à un point. Soit $p : A' \to A$ et $p' : A'' \to A$ deux morphismes de $\mathscr{C}$. On a une application canonique:

$$\Phi : F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'') \tag{1.1}$$

Rappelons le théorème fondamental de [3]

Théorème 1.1. — *Le foncteur F a une enveloppe si et seulement si les 3 conditions suivantes sont vérifiées:*

H1. Φ est une surjection pour tout p et toute petite surjection p'.

H2. Φ est une bijection si $A = k$ et $A'' = k[\epsilon]$.

H3. t_F est un k-espace vectoriel de dimension finie.

De plus, ces conditions étant supposées satisfaites, F est pro-représentable si et seulement si

H4. Φ *est un isomorphisme si* $p = p'$ *et est une petite surjection.*

On sait en effet que H2 implique que t_F est un k-espace vectoriel. Si V est un k espace vectoriel de dimension finie, $k[V]$ désigne l'anneau $k \oplus V$ où la restriction de la multiplication à $V \times V$ est nulle. Par récurrence avec H2, on obtient un isomorphisme canonique: $F(k[V]) \tilde{\to} t_F \otimes_k V$. Pour toute 1-extension de noyau I, $p : A' \to A$, l'isomorphisme $A' \otimes k[I] \tilde{\to} A' \times_A A'$, inverse de [3] (2.16) induit compte tenu de H2 une surjection:

$$F(A') \times t_F \otimes_k I \to F(A') \times_{F(A)} F(A') \tag{1.2}$$

Lemme 1.2. — *La surjection précédente munit* $F(A')$ *d'une action de* $t_F \otimes_k I$ $\sigma : a' \to \sigma \bullet a'$, *respectant les fibres de* $F(A') \to F(A)$ *et y induisant une action transitive.*

Dans toute la suite on suppose que F vérifie les conditions H1,H2,H3.

1.4. Fonctorialités

1.4.1. Changement de 1-extension.

Un morphisme de 1-extensions $(A' \to A) \to (B' \to B)$, de noyaux respectifs I et J induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(A') & \to & F(B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A) & \to & F(B) \end{array}$$

ainsi qu'un morphisme $t_F \otimes I \to t_F \otimes J$ et $F(A') \to F(B')$ est équivariant pour les actions décrites dans la section 1.3.

1.4.2. Changement de foncteur.

Un morphisme de foncteurs $\varphi\, F \to F'$ vérifiant tous les deux les conditions de Schlessinger induit un morphisme d'anneaux $\varphi^* : R' \to R$, de sorte que le diagramme naturel induit

$$\begin{array}{ccc} h_R & \to & h_{R'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \to & F' \end{array}$$

soit commutatif.

2. Obstructions

2.1. Théorie linéaire des obstructions

On dit qu'un foncteur F possède une théorie linéaire des obstructions si

– i) il existe un k-espace vectoriel T_F

– ii) il existe pour chaque 1-extension $p : A' \to A$ de noyau I et chaque élément $a \in F(A)$ un élément $o_{p,a} \in T(I) := T_F \otimes_k I$ dépendant fonctoriellement des données $(A' \to A, a)$.

– iii) $o_{p,a}$ est nul si et seulement si a est dans l'image de l'application $F(A') \to F(A)$; on dit alors que a se relève à A'.

2.2. Relèvement maximal

Soit $A' \to A$ une 1-extension de noyau I et $a \in F(A)$.

LEMME 2.1. — *Il existe un plus petit sous-idéal I_a de I tel que a se relève à $A_a := A'/I_a$*

Ce lemme est déjà dans [3], bas de la page 213: il suffit de considérer $\mathscr{S}$ l'ensemble fini non vide (il contient I) des idéaux $K \subset I$ tel que a se relève à $A_K = A'/K$ et d'observer que $\mathscr{S}$ est stable par intersection. En effet si K_1 et K_2 sont deux tels idéaux, quitte à agrandir K_1 sans changer $K_1 \cap K_2$, on peut supposer que $K_1 + K_2 = I$; de sorte que

$$A_{K_1} \times A_{K_2} \xrightarrow{\sim} A_{K_1 \cap K_2}$$

et on conclut avec la surjection de (1.1)

$$F(A_{K_1} \cap K_2) \xrightarrow{\sim} F(A_{K_1} \times_A A_{K_2}) \twoheadrightarrow F(A_{K_1}) \times_{F(A)} F(A_{K_2})$$

fournie par H1 et une récurrence pour étendre la propriété des petites extensions aux 1-extensions.

2.3. Groupe des obstructions

Il peut arriver que T_F soit trop gros; on va étudier ce qui intervient réellement, c'est à dire son sous-k- espace vectoriel O_F engendré par tous les éléments $(Id \otimes \varphi)(o_{p,a})$ fournis par les p et a avec p petite extension ainsi que $\varphi : \ker p \to k$ induisant

$$T_F \otimes_k \ker p \xrightarrow{Id \otimes \varphi} k \xrightarrow{\sim} k\,.$$

Ceci nous permet d'énoncer l'analogue de [5], résultat principal de cette note:

THÉORÈME 2.2. — *Soit F un foncteur vérifiant les conditions de Schlessinger et ayant une théorie linéaire des obstructions cf.2.1. Soient r et s les dimensions respectives de t_F et O_F sur k: l'anneau (uni-)versel de F peut être écrit comme quotient d'un anneau de séries formelles sur $\mathscr{O}$ à r indéterminées par un idéal de relations dont s est le nombre minimal de générateurs.*

Ce théorème ne sera démontré qu'en 2.7. Commençons par quelques lemmes sur les $o_{p,a}$.

LEMME 2.3. — *Soit $p : A' \to A$ une 1-extension de noyau I: $o_{p,a}$ est dans le sous-groupe $O_F \otimes_k I$ de $T_F \otimes_k I$.*

Démonstration: Comme dans [5], on prend une base e_i de I pour écrire $o_{p,a} = \sum o_i \otimes e_i$. Pour voir que les o_i sont tous dans O_F, on utilise la fonctorialité des $o_{p,a}$ en considérant l'idéal I_i engendré par tous les e_j sauf e_i ainsi que la petite extension $A'/I_i \to A$.

Ceci permet de préciser le lemme 2.1 en choisissant une base une base ω_i, $i = 1, \cdots, s$ de O_F; en reprenant les mêmes notations, on peut alors écrire $o_{p,a} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes x_i$ avec $x_i \in I$.

LEMME 2.4. — *L'idéal I_a est engendré par les x_i.*

Démonstration. Soit J l'idéal engendré par les x_i. L'image de $o_{p,a}$ dans $O_F \otimes I/J$ est nulle donc a se relève à A_J; par minimimalité, $I_a \subset J$. Comme a se relève à A/I_a, l'image de $o_{p,a}$ dans $O_F \otimes I/I_a$ est nulle, ce qui impose la nullité des images de chaque x_i dans I/I_a, d'où $J \subset I_a$. Ceci se voit comme plus haut en utilisant la petite extension correspondant à un supplémentaire de la k-droite engendrée par l'image de x_i dans I/I_a; on forme ainsi un quotient de A_a où a n'a pas de relèvement, ce qui est absurde.

2.4. Construction d'une 1-enveloppe

On part de $R_0 = k[t_F^*]$. On prend une base e_i, $i = 1, \cdots, r$ de t_F et on appelle e_i^* la base duale, on considère l'anneau $\Lambda = \Lambda_r$ des séries formelles à r variables $X_1, \cdots X_r$ sur $\mathscr{O}$, X_i correspondant à e_i^*. C'est le complété de l'algèbre symétrique de t_F^* sur $\mathscr{O}$; on a canoniquement $t_\Lambda \simeq t_F$. On munit Λ de v_Λ, la valuation $\mathfrak{m}_\Lambda$-adique. On peut compléter R_0 par ξ_0 de façon à obtenir un couple universel dans la catégorie $\mathscr{C}_0'$ des $\mathscr{O}$-algèbres A annulées par $(\pi) + \mathfrak{m}_A^2$. En effet $R_0 \to k$ possède une section donc l'élément de $F(k)$ se relève dans R_0. H2 implique que l'application (1.1) est une bijection ce qui montre que $F(R_0)$ est en bijection avec $t_F \otimes_k t_F^* \simeq$ End (t_F). Il est alors facile de voir que $\sum e_i \otimes e_i^*$ est universel puisqu'il correspond à l'identité de End (t_F).

Partant de (R_0, ξ_0) comme plus haut, considèrons la 1-extension

$$\tilde{R}_1 = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^2 \to R_0$$

et appliquons le lemme 2.4 avec $a = \xi_0$: on a une obstruction au relèvement de ξ_0 à $\tilde{R}_1$ $o_1 = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes x_i$ et on obtient un idéal qu'on note $\overline{I}_1$ (engendré par les x_i) dans $\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^2$ d'image réciproque notée I_1 dans Λ: comme une base de $(\pi) + \mathfrak{m}_\Lambda^2/\mathfrak{m}_\Lambda^2$ est fournie par les images de π et des πX_i, on peut prendre comme générateurs de I_1 des polynômes de la forme $a_0 + \sum_1^r a_i X_i$ avec les a_i dans l'idéal (π) de $\mathscr{O}$. Ainsi ξ_0 se relève à $R_1 = \Lambda/I_1$. on choisit un relèvement quelconque ξ_1. L'anneau R_1 admet toujours t_F comme espace tangent.

LEMME 2.5. — *Le couple (R_1, ξ_1) est une 1-enveloppe.*

Démonstration: Il suffit de prouver que ce couple est 1-versel. On se place dans la situation de 1.2 avec $A' \to A$ une petite extension de $\mathscr{C}_1$. La première étape consiste à simplement compléter le diagramme de $\mathscr{O}$-algèbres:

$$\begin{array}{ccc} & & A' \\ & & \downarrow \\ R_1 & \to & A \end{array} \tag{2.1}$$

avec une diagonale montante $R_1 \to A'$. Utilisant que R_0 est versel dans $\mathscr{C}_0'$ pour obtenir

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A'_0 \\ & & & \nearrow & \downarrow \\ R_1 & \to & R_0 & \to & A_0 \end{array}$$

avec $A_0 = A/(\pi)$ et $A'_0 = A'/(\pi) = A'/(\pi)$, d'où un relèvement de $R_1 \to A$ en $u'_0 : R_1 \to A \times_{A_0} A'_0 \simeq A'/I \times A'/(\pi) \simeq A'/I \cap (\pi)$.

Soit $J = I \cap (\pi)$; il reste à relever $u'_0 : R_1 \to A'/J$ à A'. On note a'_0 l'image de a' dans $F(A'/J)$. Considérons alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_1 & \to & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_1 & \to & A'/J \end{array}$$

obtenu en relevant u'_0 à Λ et observant que ce relèvement se factorise par $\tilde{R}_1$. De plus, u'_0 induit la deuxième ligne du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_1 & \to & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_0 & \to & A'/(\pi) \end{array}$$

Par fonctorialité des obstructions aux relèvements, l'image de $o_1 \in T_F \otimes \pi \tilde{R}_1$ dans $T_F \otimes \pi A'$ est nulle; ainsi l'image de I_1 est nulle dans $\pi A'$, si bien que l'homomorphisme $\tilde{R}_1 \to A'$ se factorise par R_1 fournissant le relèvement $u' : R_1 \to A'$ de u recherché dans cette première étape.

Il reste maintenant à modifier u' pour que le diagramme de couples

$$\begin{array}{ccc} & & (A', a') \\ & \nearrow & \downarrow \\ (R_1, \xi_1) & \to & (A, a) \end{array}$$

soit commutatif. Pour cela, on considère le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(R_1, A') & \to & F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(R_1, A) & \to & F(A) \end{array}$$

les flèches horizontales étant définies par $v \to F(v)(\xi_1)$.

Sur la fibre de u dans la première colonne, cf. lemme 1.2, on a une action homogène de $t_{R_1} \otimes$I, sur celle de a dans la deuxième, une action homogène de $t_F \otimes I$; les deux éléments de $F(A')$ sont reliés par un $\sigma \in t_F \otimes I$: $a' = \sigma \bullet F(u')(\xi_1)$. Si on identifie t_{R_1} à t_F il suffit de prendre $v = \sigma \bullet v$ pour assurer $a' = F(v)(\xi_1)$ et achever la démonstration.

2.5. Construction d'une *n*-enveloppe

On suppose construit un couple (R_n, ξ_n), qui soit une n-enveloppe pour F; nous construisons maintenant une $(n+1)$-enveloppe (R_{n+1}, ξ_{n+1}). Les raisonnements ressemblent à ceux développés pour passer de R_0 à R_1. On suppose que R_n est de la forme Λ/I_n avec I_n idéal contenant $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$. On considère la 1-extension $\tilde{R}_{n+1} = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda I_n \to R_n$ et ξ_n; on applique le lemme 2.4 en écrivant l'obstruction au relèvement $o_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes u_i$, en utilisant la même base de O_F et des éléments u_i de $I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n$ qu'on relève par des éléments de même nom dans I_n. L'idéal I_{n+1} qu'ils engendrent avec $\mathfrak{m}_\Lambda I_n$ dans Λ définit le quotient maximal R_{n+1} de $\tilde{R}_{n+1}$ où ξ_n se relève. On choisit un relèvement ξ_{n+1}.

Lemme 2.6. — *. Le couple (R_{n+1}, ξ_{n+1}) est une $(n+1)$-enveloppe.*

Par récurrence, on déduit que $I_{n+1} \subset (\pi) + \mathfrak{m}_\Lambda^2$ si bien que l'espace tangent de R_{n+1} est bien égal à celui de F. Il suffit donc de vérifier la $(n+1)$-versalité en procédant en gros comme dans le lemme 2.5 avec une petite extension maintenant dans $\mathscr{C}_{n+1}$ et des morphisme de couples $(R_{n+1}, \xi_{n+1}) \to (A, a)$ et $(A', a') \to (A, a)$.

La première étape consiste à compléter le diagramme de $\mathscr{O}$-algèbres

$$\begin{array}{ccc} & & A' \\ & & \downarrow \\ R_{n+1} & \to & A \end{array} \tag{2.1}$$

avec un morphisme $R_{n+1} \to A'$. On commence par constater l'existence d'un relèvement au produit fibré $A \times_{A_n} A'_n$, où A_n (resp. A'_n) désigne le quotient de cet anneau par la puissance $(n+1)$ ième de l'idéal maximal. Cet anneau s'identifie à A'/J_{n+1} avec $J_{n+1} = I_n \cap \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$. On relève alors le morphisme $R_{n+1} \to A'/J_{n+1}$ en un morphisme $\Lambda \to A'$. Comme le noyau de $A' \to A$ est annulé par $\mathfrak{m}$, et que le noyau de $\Lambda \to R_{n+1}$ est I_{n+1}, on voit que $\mathfrak{m}_\Lambda I_{n+1}$ est dans le noyau de ce relèvement: on a une factorisation en $\tilde{R}_{n+1} \to A'$. On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_{n+1} & \to & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_n & \to & A'_n \end{array} \tag{2.2}$$

pour conclure que le noyau de $\tilde{R}_{n+1} \to A'$ contient I_{n+1} par le même argument de fonctorialité des obstructions. Dans la deuxième étape, on ajuste alors le relèvement trouvé grâce au lemme 1.2 et à l'isomorphisme $t_{R_{n+1}} \otimes I \xrightarrow{\sim} t_F \otimes I$ comme dans la section 2.4

2.6. Sur les générateurs de I_n

Dans cette section, on reprend la méthode de [5] pour étudier I_n.

Lemme 2.7. — *La famille des idéaux I_n vérifie la relation de récurrence:*

$$I_{n+1} + \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} = I_n$$

Démonstration: L'inclusion du membre de gauche dans I_n est claire. La surjection naturelle qui en résulte est un isomorphisme par unicité de l' enveloppe de F dans $\mathscr{C}_n$ cf. [3] prop. 2.9.

Considérons des éléments de Λ, u_i $(i = 1, \cdots, s)$, comme dans 2.5 dont les images engendrent $I_{n+1}/\mathfrak{m}_\Lambda I_n$; soit J_{n+1} l'idéal de Λ engendré par ces u_i: on a donc $I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda . I_n + J_{n+1}$

Lemme 2.8. — *On a les égalités d'idéaux de Λ*

i) $I_n = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + J_{n+1}$

ii) $I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+2} + J_{n+1}$

Démonstration: L'inclusion $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} \subset I_n$ se voit par récurrence puisque $\mathfrak{m}_\Lambda I_n \subset I_{n+1}$. De plus les u_i sont dans $I_{n+1} \subset I_n$.

On a aussi $I_n = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + \mathfrak{m}_\Lambda.I_n + J_{n+1}$ et on en déduit i). En reportant dans la relation $I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda.I_n + J_{n+1}$. on en tire ii) grâce au lemme de Nakayama. Rappelons le lemme élémentaire [5] (7.11).

LEMME 2.9. — *Soit M un module de type fini sur un anneau local Λ; Deux systèmes de générateurs x_i et y_i $(i = 1, \cdots, s)$ ayant même nombre d'éléments sont reliés par une matrice carrée inversible $\Theta = (\theta_{i,j})$ à coefficients dans Λ: $y_i = \sum_1^s \theta_{i,j} x_j$.*

LEMME 2.10. — *Les idéaux I_n peuvent être engendrés par $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$ et s polynômes $f_i^{(n)}$ de degré $\leqslant n$ de façon à avoir: $f_i^{(n)} = f_i^{(n+1)} \bmod \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$.*

Démonstration: Fabriquons les $f_i^{(n)}$ par récurrence en prenant comme $f_i^{(1)}$ les u_i trouvés en 2.4. On peut les choisir de degré $\leqslant 1$. Appliquons le lemme 2.9 aux u_i de 2.5 et aux $f_i^{(n)}$ en prenant comme module le quotient $I_n/\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$ et en tenant compte du lemme 2.8 i): on touve des $\theta_{i,j} \in \Lambda$ tels que $f_i^{(n)} = \sum_1^s \theta_{i,j} u_j \bmod m^{n+1}$; on peut donc engendrer$I_{n+1}$ par $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+2}$ etdes $f_i^{(n+1)}$ tels que $f_i^{(n+1)} = \sum_1^s \theta_{i,j} u_j \bmod \mathfrak{m}_\Lambda^{n+2}$. Pour cela on peut choisir $f_i^{(n+1)}$ de forme $f_i^{(n)} + g_i^{(n+1)}$, $g_i^{(n+1)}$ somme de monômes $aX_1^{n_1} \cdots X_1^{n_r}$ avec $v_\Lambda(aX_1^{n_1} \cdots X_1^{n_r}) = n+1$.

Ainsi chaque suite $f_i^{(n)}$ est convergente vers une limite f_i dans Λ. Si on note I l'idéal engendré par les f_i, on a $I_n = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + I$ et il est clair que en posant $R = \Lambda/I$ et en appelant ξ la suite des ξ_n, le couple (R, ξ) est une enveloppe pour F.

2.7. Démonstration du théorème 2.2

On procède comme dans [5]. Notons $\overline{I}_n$ l'image de I (ou de I_n) dans $\Lambda_n = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$: Le lemme d'Artin-Rees implique que la surjection canonique $I/\mathfrak{m}_\Lambda I \to \overline{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_n$ est un isomorphisme pour n assez gros. Considérons la situation de 2.5 avec la 1-extension $\tilde{R}_{n+1} = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda I_n \to R_n = \Lambda/I_n$ et le couple (R_n, ξ_n); l'obstruction à relever ξ_n a déjà été écrite sous la forme $o_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes u_i$, en utilisant notre base ω_i de O_F et des éléments u_i de $I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n$. Pour i fixé, choisissons une petite extension $p_i : A'_i \to A_i$, un élément $a_i \in F(A_i)$ et $\varphi : \ker p_i \xrightarrow{\sim} k$ de façon que ω_i soit égal à $\varphi(o_{p,a_i}) \in O_F$. On construit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} f'_i: & \tilde{R}_{n+1} & \to & A'_i \\ & \downarrow & & \downarrow \\ f_i: & R_n & \to & A_i \end{array} \tag{2.1}$$

En fait puisque A'_i est supposée être dans $\mathscr{C}_n$, f'_i se factorise par le quotient de $\tilde{R}_{n+1}$ par la puissance $n+1$-ième de son idéal maximal, soit encore le quotient $\tilde{R}_n$ de Λ par $I + \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$, nous donnant le nouveau diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} f_i": & \tilde{R}_n & \to & A'_i \\ & \downarrow & & \downarrow \\ f_i: & R_n & \to & A_i \end{array} \tag{2.2}$$

L'obstruction à relever ξ_n à $\tilde{R}_n$ est l'image $\overline{o}_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes \overline{u}_i$ de $o_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes u_i$ dans $\mathcal{O}_F \otimes \overline{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_n$. Par restriction aux noyaux, f_i" induit un homomorphisme $\overline{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_n \xrightarrow{\sim} I + \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}/\mathfrak{m}_\Lambda I + m_\Lambda^{n+1} \to \ker p_i$ d'où

$$\mathcal{O}_F \otimes I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n \to \mathcal{O}_F \otimes \overline{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_n \to \mathcal{O}_F \otimes \ker p_i \xrightarrow{Id\otimes\varphi} \mathcal{O}_F$$

envoyant par fonctorialité o_{n+1} sur ω_i. L'élément $\overline{o}_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes \overline{u}_i$ fournit une application $(\overline{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_n)^* \to O_F$: $g \to (Id \otimes g)(\overline{o}_{n+1})$. Le raisonnement précédent montre que pour n assez gros pour que $\mathcal{C}_n$ contienne toutes les algèbres A'_i, $i = 1, \cdots, s$, cette application est surjective; ceci montre bien que s est le nombre minimal de générateurs de $\overline{I}_n$ donc de I. Ceci achève la démonstration du théorème 2.2.

2.8. Générateurs de I et fonctorialité

On a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \overline{I}_{n+1}/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_{n+1} \arrow[rr, "\overline{\Phi}_n"] \arrow[dr, "i_n"'] & & \overline{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_n , \\ & I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n \arrow[ur, "s_n"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

avec $\overline{\Phi}_n$ et s_n surjectives et i_n injective. Pour n assez gros $\overline{\Phi}_n$ est bijective. la démonstration du lemme 2.10 montre que im i_n, l'image de i_n est engendrée par les u_i. On déduit du précédent un nouveau diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{I}_{n+1}/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_{n+1} \arrow[rr, "\overline{\Phi}_n"] \arrow[dr, "i_n"'] & & \overline{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \overline{I}_n . \\ & \mathrm{im}\, i_n \arrow[ur, "s_n"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

De plus l'application canonique

$$I_{n+1}/\mathfrak{m}_\Lambda I_{n+1} \xrightarrow{\Phi_n} I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n$$

induit un isomorphisme Φ : im $i_{n+1} \to$ im i_n pour n assez grand. Notons maintenant $u_i^{(n)}$ l'élémént de Λ noté u_i dans 2.6. On voit ainsi que dans le raisonnement du lemme 2.10, on peut prendre $f_i^{(n)} \equiv u_i^{(n)} \mathrm{mod}\, \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$, on a alors $f_i^{(n+1)} \equiv u_i^{(n)} \mathrm{mod}\, \mathfrak{m}_\Lambda^{n+2}$. On remarque que, puisque o_{n+2} s'envoit sur o_{n+1}, $\Phi_n(u_i^{(n+1)}) = u_i^{(n)}$, si bien que les congruences ci-dessus sont vérifiées par récurrence pour tout entier $m > n$: On peut donc assurer l'égalité

$$f_i^{(m+1)} \equiv u_i^{(m)} \mathrm{mod}\, \mathfrak{m}_\Lambda^{m+2} .$$

Ceci prouve la conséquence suivante de 2.1 iii):

Proposition 2.11. — *On suppose que les s générateurs $f_1, \dots, f_s$ de I sont choisis comme on vient de le faire. Etant donné une petite surjection $p : A' \to A$ et un élémént a de $F(A)$, correspondant à un homomorphisme $\Phi : R_n \to A$ pour n assez gros; pour tout $\tilde{\Phi} : \Lambda \to A'$ relèvement de Φ, on a*

$$o_{p,a} = \sum_i \omega_i \otimes \tilde{\Phi}(f_i) .$$

3. Relations pour les déformations de représentations

3.1. Introduction

Fixons un groupe Π vérifiant les conditions de finitude de [2]: on demande que la pro-complétion de chaque sous-groupe ouvert ait un nombre fini de générateurs topologiques. Comme dans [4], considérons un schéma en groupes $\mathbf{G}$ lisse sur $\mathscr{O}$ linéaire, réductif et déployé. On note $Z_{\mathbf{G}}$ son centre; pour un tel groupe, on note $\overline{\mathbf{G}}$ le groupe algébrique sur k défini par sa fibre spéciale ainsi que $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\overline{\mathbf{G}}$.

On fixe une représentation $\overline{\rho} : \Pi \to \mathbf{G}(k)$. Pour chaque $\mathscr{O}$-algèbre A artinienne on considère V_A l'ensemble des représentations $\rho : \Pi \to \mathbf{G}(A)$ qui par composition avec $\mathbf{G}(A) \to \mathbf{G}(k)$ donnent $\overline{\rho}$. On forme le quotient $F(A)$ de V_A par l'action par conjugaison de $\hat{\mathbf{G}}(A) = \ker \mathbf{G}(A) \to \mathbf{G}(k)$. On obtient ainsi un foncteur F. On sait, par [4] (prolongeant [2]), que F est représentable moyennant des conditions sur le centre: il suffit qu'au niveau des composantes connexes, le centralisateur de l'image de $\overline{\rho}$ dans $\mathbf{G}$ soit égal au centre de $\overline{\mathbf{G}}$ et que le centre de $\mathbf{G}$ soit formellement lisse sur $\mathscr{O}$: en effet, dans ces conditions les hypothèses Hi de 1.3 sont vérifiées. Pour toute 1-extension de noyau I, l'application exponentielle induit une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{g} \otimes_k I \to \mathbf{G}(A') \to \mathbf{G}(A) \to 1$$

si bien, cf. [1] que la question des relèvements d'une représentation $\Pi \to \mathbf{G}(A)$ à $\mathbf{G}(A')$ s'étudie à l'aide de la cohomologie de Π à valeurs dans $\mathfrak{g} \otimes_k I$. Ce k-espace vectoriel est considéré comme un Π-module grâce à l'action adjointe de $\mathbf{G}(k)$ sur $\mathfrak{g}$ composée avec $\overline{\rho}$. On en déduit que

$$t_F \xrightarrow{\sim} H^1(\Pi, \mathfrak{g}) \ .$$

Il est aussi classique, cf. [2] et [4], qu'en prenant

$$T_F = H^2(\Pi, \mathfrak{g}) \ ,$$

on obtient une théorie linéaire des obstructions.

3.2. Description de l'anneau universel

Le foncteur possède donc toutes les propriétés décrites plus haut.

THÉORÈME 3.1. — *Soit F le foncteur des déformations de $\overline{\rho}$ et O_F le sous k-espace vectoriel de $T_F = H^2(\Pi, \mathfrak{g})$ engendré par les obstructions des petites extensions. Désignons par r et s les dimensions respectives de $H^1(\Pi, \mathfrak{g})$ et O_F sur k: l'anneau universel R de F peut être écrit comme quotient d'un anneau de séries formelles sur $\mathscr{O}$ à r indéterminées par un idéal de relations dont s est le nombre minimal de générateurs.*

En commentaire, la question de [2] reprise dans [4] sur l'égalité de la dimension relative de R sur $\mathscr{O}$ se décompose en deux parties:

i) L'anneau R est-il une intersection complète relative sur $\mathscr{O}$?

ii) Le k-espace vectoriel $H^2(\Pi, \mathfrak{g})$ est-il engendré par les obstructions définies par toutes les petites extensions?

Il est intéressant de remarquer que la démonstration classique [2] et [4] de l'inégalité $\dim H^2(\Pi, \mathfrak{g}) \geqslant \dim_k(I_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda I)$ se fait en prouvant que l'application canonique définie par ξ_n (n assez gros)

$$(I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n)^* \to H^2(\Pi, \mathfrak{g})$$

est injective; cette application se factorise évidemment par $\mathscr{O}_F$ et la méthode suivie ici montre en fait $(I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n)^* \to O_F$ est surjective; elle est aussi injective puisqu'on a vu que $s = \dim_k O_F$ majore le nombre minimal de générateurs de I.

Références

[1] LANG, SERGE. *Topics in cohomology of groups.* Lecture Notes in Mathematics. 1625. Berlin: Springer, vi, 226 p. (1996).

[2] B. MAZUR. « Deforming Galois Representations ». In K. Ribet et J.-P. Serre Y. IHARA, editor, *Galois Groups over Q*, number 16 in MSRI, pages 385–437, 1987.

[3] M. SCHLESSINGER. « Functor of Artin rings ». *Trans. Am. Math. Soc.*, 130:218–22, 1968.

[4] J. TILOUINE. *Deformations of Galois representations and Hecke algebras.* à paraître, 1997.

[5] A. VISTOLI. « The deformation theory of local complete intersections ». prépublication électronique: alg-geom/9703008, 1997.

Roland Gillard

Institut Fourier, UMR 5582
Université Joseph FOURIER et C.N.R.S.
BP 74,
F-38402 Saint Martin d'Hères