

# SPECTRE D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SUR LES GRAPHERS\*

Y. Colin de Verdière\*\*

6 juin 1997

\* "Random walks and discrete potential theory" (Cortona, 22-28 june 1997)

\*\* Institut Fourier, Unité mixte de recherche CNRS-UJF 5582  
BP 74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex (France)  
yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr

## Abstract

Dans cet exposé de survey, nous commençons par présenter des ensembles naturels d'opérateurs de type Schrödinger associés à un graphe fini.

Nous étudions ensuite les limites singulières (au sens de la  $\Gamma$ -convergence) de tels opérateurs et montrons qu'elles sont associées à des relations naturelles entre graphes (mineurs, transformation étoile-triangle) ou à des limites d'un intérêt indépendant (processus de Markov (recuit simulé), réseaux électriques).

Cela conduit à introduire la notion de stabilité structurelle pour une valeur propre multiple d'un opérateur d'une famille en utilisant la transversalité dans les espaces d'opérateurs symétriques.

Les invariants numériques de graphes ainsi construits sont liés à des problèmes classiques de la combinatoire des graphes : planarité, genre, plongement non-noué dans  $\mathbb{R}^3$ , largeur d'arbre.

Mots clés : graphes, opérateurs de Schrödinger, mineurs, étoile-triangle, arbres, limites singulières

AMS Subject Classification : 05C10, 05C50, 35B25, 35J10.

# 1 Introduction

La théorie spectrale des opérateurs différentiels dont le prototype est le laplacien sur une variété riemannienne compacte a connu un grand développement durant les 30 dernières années. En particulier, l'asymptotique des grandes valeurs propres, liée à la dynamique classique (géodésiques périodiques) a fait l'objet de nombreux travaux. Les propriétés purement spectrales (i.e. non asymptotiques, purement quantiques) présentent également un grand intérêt ; il se trouve, ainsi que cette conférence le montre bien, qu'un cadre, a priori plus simple, se prête bien à l'étude spectrale des opérateurs différentiels : il s'agit de comprendre le spectre des opérateurs différentiels de type laplacien ou Schrödinger sur les graphes. En retour, on attend en particulier de nouveaux résultats pour le cas continu !!

Les *ensembles* d'opérateurs considérés dans la suite se rencontrent dans de nombreux domaines des mathématiques (discrétisation par éléments finis [8],[11], effet tunnel semi-classique [21], processus de Markov [12], limites de laplaciens de surfaces de Riemann à courbure  $-1$  lorsque certaines géodésiques fermées simples ont des longueurs qui tendent vers 0 [9]) et de la physique (supraconducteurs [35], physique quantique [30], spectres moléculaires [24] ou même plus anciennement [29]).

A chaque graphe fini  $G = (V, E)$  (on pose  $n = |V|$ ), on associe des *ensembles* d'opérateurs différentiels auto-adjoints sur l'espace de Hilbert (de dimension finie)  $H_G = \mathcal{C}^V$  muni du produit scalaire

$$(f|g) = \sum_{i \in V} f(i)\bar{g}(i) .$$

Un *opérateur différentiel* sur  $G$  est un endomorphisme linéaire  $A$  de  $H_G$  qui est *local*, c'est-à-dire que  $Af(i) = \sum_j a_{i,j}f(j)$  où les  $a_{i,j}$  sont nuls si  $\{i, j\}$  n'est pas une arête et  $i \neq j$  (on peut considérer qu'il y a des arêtes  $\{i, i\}$  pour chaque  $i \in V$ ) ; autrement dit  $Af(i)$  ne dépend que de  $f(j)$  pour  $j$  voisin de  $i$ .

Un opérateur différentiel  $A$  sur  $G$  est dit *elliptique* si  $a_{i,j} \neq 0$  pour toute arête  $\{i, j\}$ ,  $i \neq j$ .

$A$  est dit *auto-adjoint* s'il l'est comme opérateur sur  $H_G$ .

$M_G$  est l'ensemble de tous les opérateurs elliptiques auto-adjoints sur  $G$  ; on dira d'un élément de  $M_G$  que c'est un *opérateur de Schrödinger avec champ magnétique* sur  $G$ .  $M_G$  est une sous-variété de dimension  $|V| + 2|E|$  de l'espace des matrices hermitiennes  $V \times V$ .

$O_G$  est le sous-ensemble de  $M_G$  formé des matrices symétriques réelles dont les coefficients  $a_{i,j}$  sont  $< 0$  pour toute arête  $\{i, j\}$ . On dira d'un élément de  $O_G$  que c'est un *opérateur de Schrödinger* sur  $G$ .  $O_G$  est une sous-variété de dimension  $|V| + |E|$  de  $S(H_G)$ , l'espace des endomorphismes symétriques de  $H_G$ .

$L_G$  est le sous-ensemble des  $A \in O_G$  tels que  $A1 = 0$ . Ce sont les *laplaciens*.  $L_G$  est de dimension  $|E|$ .

Les laplaciens canoniques habituellement considérés

$$\Delta_0 f(i) = \sum_{\{i,j\} \in E} (f(i) - f(j)), \quad \Delta_1 f(i) = - \sum_{\{i,j\} \in E} f(j),$$

sont des éléments de  $O_G$ , et pour  $\Delta_0$  de  $L_G$ . Le laplacien

$$\Delta_2 f(i) = \frac{1}{d_i} \sum_{\{i,j\} \in E} (f(i) - f(j)),$$

n'est pas auto-adjoint pour la métrique canonique sur  $H_G$  sauf si le degré  $d_i$  du sommet  $i$  est constant. Il est autoadjoint pour la métrique  $\sum d_i x_i^2$  sur  $H_G$ . On peut le rendre auto-adjoint pour la métrique canonique par la transformation  $(Ux)_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}} x_i$  ; alors  $U^{-1} \Delta_2 U$  est dans  $O_G$ .

Des généralisations possibles de ces ensembles sont les suivantes :

a) on attribue à chaque arête un signe  $\pm$  et on impose le signe correspondant aux  $a_{i,j}$ . Le lien avec les diagrammes de noeuds et les invariants associés reste alors à éclaircir : le graphe médial d'un diagramme de noeud est de façon naturelle un graphe planaire avec des signes  $\pm$  sur chaque arête qui indique quel brin passe dessus ou dessous.

b) On considère le cas vectoriel, i.e. celui où  $H_G^N = \oplus_{i \in V} \mathcal{C}^N$ . Cela intervient aussi comme outil lorsque l'on considère des produits de graphes.

c) Le cas des graphes infinis : on doit alors bien préciser les conditions de croissance des coefficients si possible de façon à avoir un spectre discret.

d) Dans le cas de  $M_G$ , il peut être utile de considérer des arêtes doubles et, si  $\{i, j\}$  double, le coefficient  $a_{i,j}$  de  $A \in M_G$  peut être nul ( $a_{i,j} = a + (-a)$ ,  $a \neq 0$ ).

Soit  $G = (V, E)$  donné. Le problème de départ est le suivant :

**étant donné une suite  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  et un des 3 ensembles précédents notés de façon générique  $Z_G$ , existe-t-il  $A \in Z_G$  dont le spectre soit la suite précédente ?**

Je vais commenter ce programme :

1) Tel quel le problème est mal posé (ou trop difficile), car non monotone par rapport à la complexité du graphe : la réponse est triviale pour un graphe sans arête, car  $O_G = M_G$  est l'ensemble des matrices diagonales réelles, tout spectre est alors possible pour un opérateur convenable de  $O_G$ .

On sait par ailleurs que, si  $G$  est connexe et  $A \in O_G$  la première valeur propre est de multiplicité 1 (Perron-Frobenius).

2) On va insister sur l'aspect ensemble d'opérateurs : ce n'est pas tant un opérateur isolé qui va nous intéresser, mais la position relative de  $Z_G$  et d'une variété  $W$  donnée par des conditions spectrales, par exemple  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Cela permet d'introduire des idées de transversalité et donc de gagner une monotonie : tout ce qu'on peut faire avec un graphe  $G$  doit pouvoir être fait avec tout graphe  $G'$  plus complexe que  $G$ . On peut aussi rapprocher cela de la théorie des discriminants (Arnold, Vassiliev), qui consiste

à regarder les objets singuliers de l'ensemble considéré, ici l'ensemble des opérateurs dont au moins une valeur propre est multiple.

3) Les arguments de transversalité permettent ainsi de construire des nouveaux invariants des graphes qui sont reliés à la théorie classique des graphes : plongements dans les surfaces, arbres, mineurs.

4) Un argument simple permet de montrer que toute suite  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$  de  $n$  nombres distincts est le spectre d'un  $A \in O_G$  :

on considère les applications

$$\Phi_\varepsilon : \{u_1 < u_2 < \dots < u_n\} \rightarrow \lambda_1(\varepsilon) < \dots < \lambda_n(\varepsilon)$$

où les  $\lambda_i(\varepsilon)$  sont les valeurs propres (simples pour  $\varepsilon > 0$  petit) de la forme quadratique

$$q_{\varepsilon,u} = \sum u_i x_i^2 + \varepsilon \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2 .$$

Pour  $\varepsilon = 0$ ,  $\Phi_\varepsilon = Id$  et donc l'application du théorème des fonctions implicites donne le résultat.

Le problème se concentre donc sur les multiplicités.

On notera  $W_{l,k}$  la sous-variété de  $S(H)$  formée des opérateurs  $A$  dont le spectre vérifie :

$$\dots \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+l-1} < \lambda_{k+l} \leq \dots .$$

On note  $W_l = \cup_k W_{l,k}$ .

On note aussi  $m_k^Z(G)$  le plus grand  $l$  tel que  $Z_G \cap W_{l,k} \neq \emptyset$ .

Par exemple  $m_1^O(G)$  est le nombre de composantes connexes de  $G$  ;  $m_2^O(G)$  est déjà un invariant moins trivial (voir plus loin).

### Exemple 1.1 : les chemins.

Soit  $P_n$  le chemin à  $n$  sommets  $\{1, \dots, n\}$  et les arêtes  $\{i, i+1\}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ . Toutes les valeurs propres d'un opérateur quelconque de  $M_{P_n}$  sont simples car un vecteur propre  $x$  est entièrement déterminé par  $x_1$ .

### Exemple 1.2 : les graphes cycliques.

Les sommets de ce graphe  $C_n$  sont les éléments de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et les arêtes joignent  $i$  à  $i \pm 1 \pmod{n}$ . On alors, pour tout  $A \in O_{C_n}$  ([21]) :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \dots .$$

Listes de graphes vus plus loin :

$$P_n, C_n, K_n, E_{n+1}, K_{3,3}, S_{2n-1}, T_{\frac{n(n+1)}{2}} ,$$

où l'indice désigne le nombre de sommets.

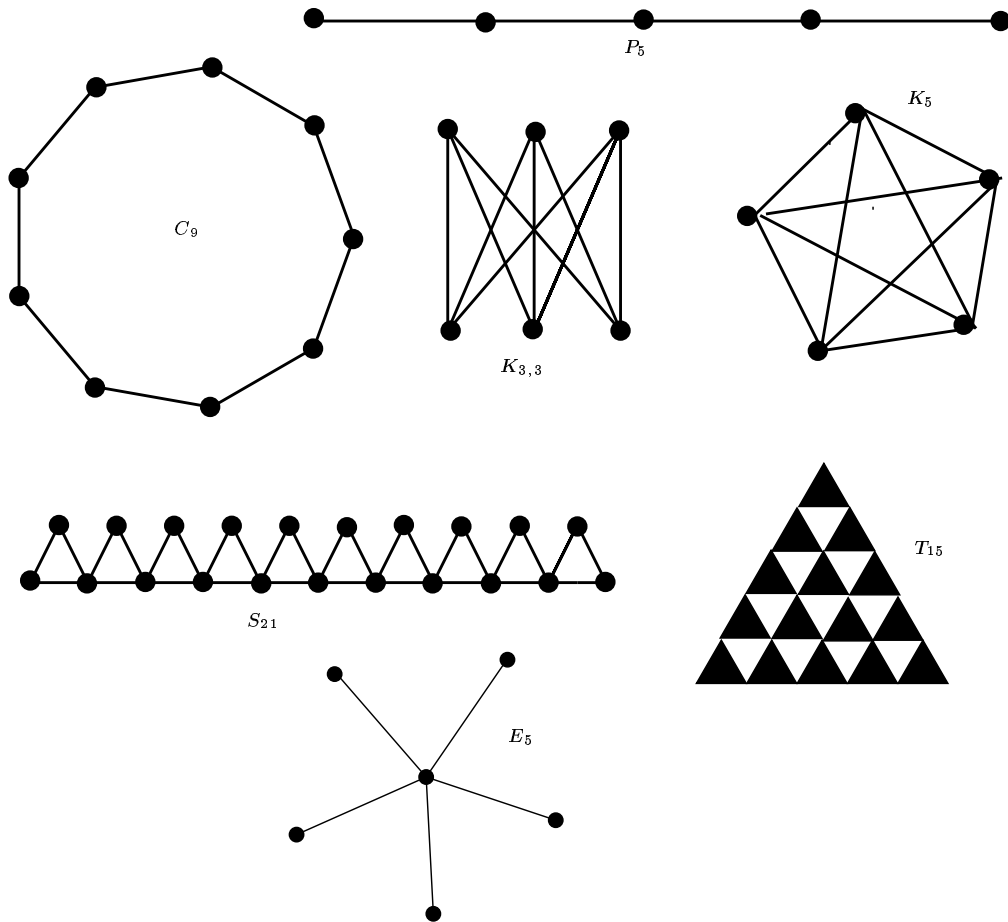


Figure 1: graphes

## 2 Stabilité structurelle

### 2.1 Perturbations des valeurs propres multiples

Soit  $H$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $\varepsilon \rightarrow A_\varepsilon$  une application  $C^2$  d'un voisinage de 0 à valeurs dans  $S(H)$  l'espace des endomorphismes symétriques de  $H$ .

Soit  $\lambda_0$  une valeur propre de  $A_0$  et  $E_0 \subset H$  l'espace propre associé de dimension  $l$ .

Soit  $I$  un intervalle fermé de centre  $\lambda_0$  et tel que  $\sigma(A_0) \cap I = \{\lambda_0\}$  ; alors pour  $\varepsilon$  assez petit,  $I$  contient exactement  $l$  valeurs propres de  $A_\varepsilon$  (comptées avec multiplicités) et notées :

$$\lambda_1(\varepsilon) \leq \dots \leq \lambda_l(\varepsilon) .$$

Soit  $B = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} A_\varepsilon$  et  $q_B$  la forme quadratique sur  $E_0$  définie par

$$q_B(x) = \langle x | B | x \rangle ,$$

et  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_l$  le spectre de  $q_B$ .

Alors, on a [21] :

$$\forall i \text{ tel que } 1 \leq i \leq l, \lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \mu_i + O(\varepsilon^2) .$$

Soit  $W_l^{\lambda_0} = \{A \in S(H) \mid \dim \ker(A - \lambda_0) = l\}$ , alors  $W_l^{\lambda_0}$  est une sous-variété de  $S(H)$  dont l'espace tangent  $T_{A_0} W_l^{\lambda_0}$  est formé des  $B \in S(H)$  tels que  $q_B = 0$ . En particulier,  $W_l^{\lambda_0}$  est de codimension  $\frac{l(l+1)}{2}$ .

*Notations :*

on note aussi  $W_l^{\lambda_0} = \cup_k W_{l,k}^{\lambda_0}$ , où  $A \in W_{l,k}^{\lambda_0}$  si  $\lambda_{k-1}(A) < \lambda_k(A) = \dots = \lambda_{k+l-1}(A) (= \lambda_0) < \dots$ , et  $W_{l,k} = \cup_{\lambda_0} W_{l,k}^{\lambda_0}$ .

$W_{l,k}$  est de codimension  $\frac{l(l+1)}{2} - 1$ .

Pour  $l = 2$ , cette dernière codimension vaut 2 : l'observation que la condition d'avoir une valeur propre double pour une matrice symétrique réelle est de codimension 2 remonte aux années 1930 (Wigner-Von Neumann [41], voir aussi [1], [3]). Donc, si  $t \rightarrow A_t$  est un chemin générique dans  $S(H)$ , il n'y aura de valeurs propres multiples pour  $A_t$  pour aucun  $t$ . On aura typiquement une évolution des valeurs propres faisant apparaître des *croisements évités*.

Soit maintenant  $\Phi : (u, v) \rightarrow A_{u,v}$  une famille à 2 paramètres de matrices symétriques. Supposons que  $\Phi$  coupe transversalement  $W_{2,k}$  en  $(u_0, v_0)$  ; on a donc, en notant  $A_0 = A_{u_0, v_0}$ , le spectre de  $A_0$  qui vérifie

$$\dots \leq \lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} < \dots ,$$

et le graphe simultané de  $\lambda_k$  et  $\lambda_{k+1}$  a l'allure d'un cône.

Soit  $\gamma$  un lacet du plan des  $(u, v)$  qui entoure  $(u_0, v_0)$  sans entourer d'autres points  $(u, v)$  avec  $A_{u,v} \in W_{2,k}$ , soit  $\phi_k(t)$  un vecteur propre de  $A_{\gamma(t)}$  correspondant à la valeur propre simple  $\lambda_k(A_{\gamma(t)})$  supposé réel et de norme 1 et que l'on peut donc suivre par

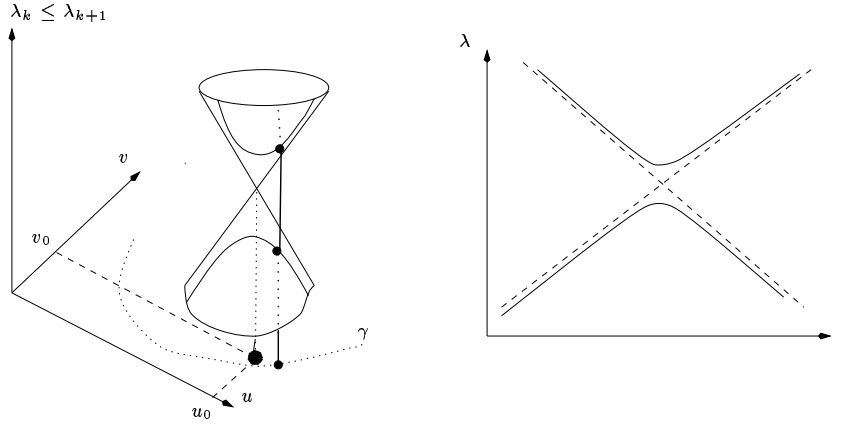


Figure 2: point diablo

continuité autour de  $\gamma$  ; lorsqu'on fait un tour,  $\phi_k(t)$  se transforme en  $-\phi_k(t)$ . Le fibré réel de dimension 1 donné par l'espace propre  $\ker(A_{\gamma(t)} - \lambda_k(t))$  est donc non trivial (ruban de Möbius). Ce fait peut être mise à profit pour détecter des valeurs propres multiples dans une famille d'opérateurs dépendant de 2 paramètres. Voir [6]. La transversalité joue un grand rôle ici : sans elle, la monodromie pourrait être triviale !! C'est cette situation que nous allons généraliser maintenant.

Le cas hermitien complexe peut être traité de façon analogue. Il faut alors remplacer  $\frac{l(l+1)}{2}$  par  $l^2$ , la dimension de l'espace des matrices hermitiennes  $l \times l$ . La variété  $W_{2,k}$  est alors de codimension 3 et l'argument avec le lacet  $\gamma$  doit être remplacé par un argument avec une petite sphère plongée. Le fibré associé à une valeur propre simple est alors un fibré de rang 1 complexe dont la classe de Chern est 1 si la sphère entoure exactement un point de  $W_2$ . Voir [13].

## 2.2 Stabilité structurelle des valeurs propres

On est ainsi conduit à donner une définition générale de la stabilité structurelle d'une valeur propre relativement à une variété  $Z$  d'opérateurs.

**Définition 1** Soit  $A \in Z \subset S(H)$ , où  $Z$  est une sous-variété. Supposons que  $A \in Z_G \cap W_{l,k}$ . On dit que la valeur propre  $\lambda_k$  de  $A$  est  $Z$ -structurellement stable si  $W_{l,k}$  et  $Z$  se coupent transversalement en  $A$ . Autrement dit, l'apparition d'une valeur propre de multiplicité  $l$  dans  $Z$  est un phénomène stable par perturbation de  $Z$ .

On peut tester de façon purement algébrique cette condition de stabilité si on connaît l'espace propre :

si  $\Phi : T_A Z \rightarrow S(E_0)$  (où  $E_0$  est l'espace propre de  $A$  considéré) est donnée par

$$\Phi(B)(x) = \langle x|B|x \rangle ,$$

la condition de stabilité structurelle équivaut à la surjectivité de  $\Phi$ .

## 2.3 Exemples

**Exemple 2.1** Si  $Z = O_G$ , la première valeur propre  $\lambda_1$  n'est stable que si elle est de multiplicité 1.

**Exemple 2.2** Soit  $E_N$  l'étoile à  $N$  branches,  $A \in O_{E_N}$  où  $-A$  est la matrice d'adjacence. La 2ème valeur propre de  $A$  est de multiplicité  $N - 1$  et n'est stable que si  $N \leq 3$ .

**Exemple 2.3 : graphes complets.** Il s'agit des graphes  $K_n$  dont toute paire de sommets est connectée par une arête. Si  $A$  est le laplacien canonique, la seconde valeur propre est de multiplicité  $n - 1$  et  $O_{K_n}$ -stable et même  $L_{K_n}$ -stable.

**Exemple 2.4 : graphe de Kuratowski.** Il s'agit du graphe noté  $K_{3,3}$  dont l'ensemble des sommets est  $V_1 \cup V_2$  (union disjointe), avec  $|V_i| = 3$ , et les 9 arêtes joignent les sommets de  $V_1$  à ceux de  $V_2$ .

Si  $A = \Delta_0$  est le laplacien canonique, son spectre est

$$0 < 3 = 3 = \dots = 3 < 6 ,$$

et la valeur propre 3 de multiplicité 4 est  $O_{K_{3,3}}$ -stable.

**Exemple 2.5 : cas complexe.** Dans le cas hermitien complexe ( $A \in M_G$ ), le théorème de Perron-Frobenius ne s'applique pas et on peut regarder la stabilité de  $\lambda_1$ .

Soit d'abord  $S_{2n-1}$  le graphe planaire formé de  $n - 1$  triangles recollés en une chaîne tel que chacun a un sommet commun avec le suivant. Soit  $A$  tel que la forme quadratique associée est

$$q(x) = \sum |x_i + x_j + x_k|^2 ,$$

où la somme porte sur les triangles  $\{i, j, k\}$ . On voit facilement que  $\ker A = q^{-1}(0)$  est de dimension  $n$  et n'est pas  $M_G$ -stable.

Soit ensuite  $T_{n(n+1)/2}$  le graphe formé en subdivisant un triangle équilatéral en petits triangles équilatéraux grâce à une subdivision des côtés du triangle initial en  $n - 1$  intervalles égaux. Colorions en noir ou en blanc les petits triangles suivant qu'ils pointent vers le haut ou le bas. La même recette que précédemment, en sommant sur les triangles noirs, donne lieu à un fondamental de multiplicité  $n$  qui est  $M_G$ -stable.

## 2.4 Les invariants $\mu_k^Z(G)$

On définit maintenant une famille d'invariants numériques d'un graphe  $G$  grâce à une version stabilisée de  $m_k^Z(G)$ .

**Définition 2** Si  $Z_G$  est un des 3 ensembles d'opérateurs  $M_G$ ,  $O_G$ ,  $L_G$  définis plus haut, on définit

$$\mu_k^Z(G)$$

comme le sup des entiers  $l$  tels qu'il existe  $A \in Z_G$  avec  $\dots < \lambda_k = \dots = \lambda_{k+l-1} < \dots$  et  $\lambda_k(A)$  est  $Z_G$ -stable.



**Exemple 2.6** *Pour tout  $G$ ,  $\mu_1^O(G) = 1$ .*

**Exemple 2.7**  $\mu_2^O(K_n) = n - 1$ .

**Exemple 2.8**  $\mu_2^M(T_{n(n+1)/2}) = n$ .

**Exemple 2.9**  $\mu_2^O(K_{3,3}) = 4$ .

**Exemple 2.10**  $\mu_2^O(E_3) = 2$  et, pour  $N \geq 2$ ,  $\mu_2^O(E_N) = 2$ .

**Exemple 2.11**  $\mu_k^O(C_n) = 1$  si  $k$  est impair et 2 si  $k$  est pair.

## 3 Mineurs des graphes et limites singulières d'opérateurs

### 3.1 Monotonie par mineurs

La propriété principale des invariants introduits précédemment est la monotonie par mineur.

**Définition 3** *Un graphe  $G_1 = (V_1, E_1)$  est dit mineur de  $G_2 = (V_2, E_2)$  si  $G_1$  peut être construit à partir de  $G_2$  de la façon suivante : si*

$$V_2 = \cup_{\alpha \in B} W_\alpha$$

*est une partition de  $V_2$  en sous-ensembles connexes,  $V_1$  est un sous-ensemble de  $B$  et  $E_1$  vérifie la condition suivante :*

$$\{\alpha, \beta\} \in E_1 \text{ implique qu'il existe } i \in W_\alpha, j \in W_\beta \text{ tels que } \{i, j\} \in E_2 .$$

On peut aussi dire que  $G_1$  est un mineur de  $G_2$  si on passe de  $G_2$  à  $G_1$  par une suite finie des opérations élémentaires suivantes : ôter une arête, contracter une arête, ôter un sommet isolé.

On a alors le :

**Théorème 1** *Pour chaque ensemble  $Z = M, O$ , si  $G_1$  est un mineur de  $G_2$  :*

$$\mu_k^Z(G_1) \leq \mu_k^Z(G_2) .$$

Pour montrer ce théorème, il suffit de le montrer dans les cas particuliers où l'on ôte ou contracte une arête de  $G_1$ .

Le cas où l'on ôte une arête est simple, car  $H_{G_1} = H_{G_2}$ . On utilise alors la conservation d'une intersection transversale par perturbation  $C^1$ .

Donnons l'argument plus précis dans le cas de  $O_G$ . Soit  $H$  l'espace de Hilbert considéré et supposons que l'on a numéroté les sommets de  $G_2$  de façon que  $G_1$  s'obtienne

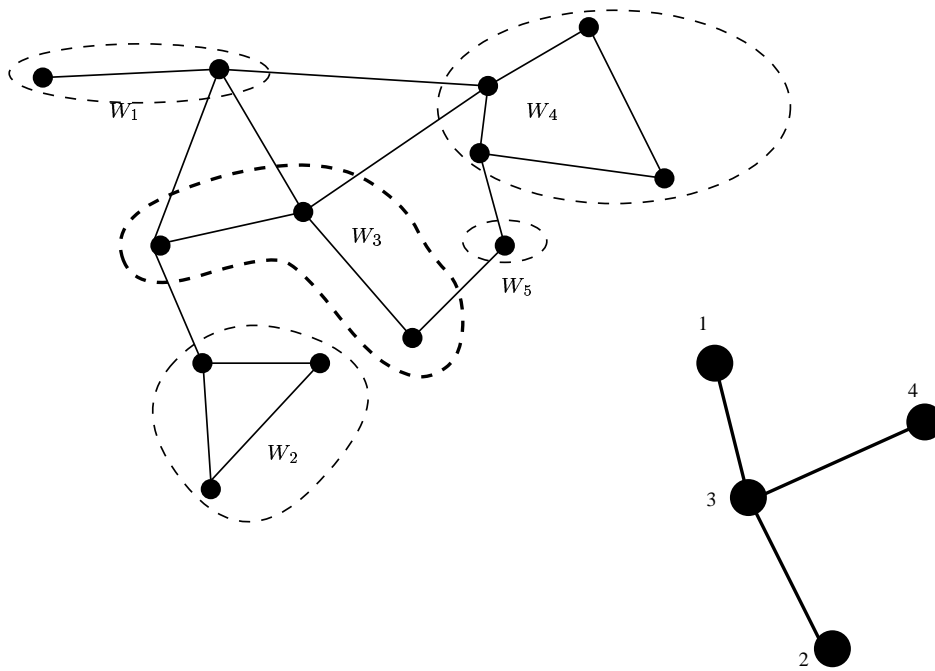


Figure 3: mineurs

en ôtant l'arête  $\{1, 2\}$  de  $G_2$ . Soit  $Z_\epsilon = O_{G_1} + \epsilon(x_1 - x_2)^2$  (où on a écrit les opérateurs comme des formes quadratiques), alors  $Z_\epsilon \subset O_{G_2}$  pour  $\epsilon > 0$ .

On conclut ainsi : si  $Z_0 = O_{G_1}$  et  $W_{l,\lambda}$  se coupent transversalement en  $A$ , il en est de même pour  $Z_\epsilon$  et  $W_{l,\lambda}$  en  $A_\epsilon$  et donc de  $O_{G_2}$  et  $W_{l,\lambda}$  en  $A_\epsilon$ . Il reste à vérifier que le numéro de la valeur propre  $\lambda$  ne change pas.

Le cas où l'on contracte l'arête  $\{1, 2\}$  est plus délicat, car il n'est plus vrai que  $H_{G_1} = H_{G_2}$  ; on a seulement une inclusion  $H_{G_1} \subset H_{G_2}$  en identifiant  $H_{G_1}$  au sous-espace de  $\mathcal{C}^{V_2}$  dont les éléments sont les vecteurs  $x$  tels que  $x_1 = x_2$ .

On doit pour faire marcher l'argument précédent mettre dans une même variété les opérateurs non partout définis. C'est le but du § suivant. Une autre difficulté est que la structure hilbertienne du sous-espace de  $H_{G_2}$  n'est pas la structure canonique de  $H_{G_1}$ .

Cela empêche de montrer le théorème pour  $Z = L$ .

Pour les autres ensembles, on se débrouille par changement de jauge ou plus simplement par translation par  $\lambda Id$  qui ramène à la valeur propre 0 indépendamment de la structure hilbertienne considérée.

### 3.2 $\Gamma$ -convergence

Soit  $H$  un espace euclidien de dimension finie  $n$ . Soit  $A$  un opérateur symétrique sur  $H$ . On note  $q_A$  la forme quadratique associée.

Soit  $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in H\} \subset H \oplus H$  le graphe de  $A$ .

Soit  $Y \subset H$  un sous-espace euclidien de  $H$  et  $B : Y \rightarrow Y$  un opérateur symétrique sur  $Y$ , on dira que le couple  $(Y, B)$  est un opérateur non borné sur  $H$  si  $Y \neq H$ . On étend la définition du graphe aux opérateurs non bornés de la façon suivante.

$$\Gamma(Y, B) = \{(y, z) \in Y \oplus H \mid \forall w \in Y, \langle z|w \rangle = \langle By|w \rangle\}.$$

Comme cas particulier,  $\Gamma(A) = \Gamma(H, A)$ . Il est clair que  $\Gamma(Y, B)$  est toujours un sous-espace de dimension  $n$  de  $H \oplus H$ .

Soit  $\omega$  la forme symplectique définie par

$$\omega((x, y), (x', y')) = \langle y'|x \rangle - \langle x'|y \rangle.$$

Un sous-espace de  $H \oplus H$  de dimension  $n$ , qui est isotrope pour la forme symplectique  $\omega$  est dit *lagrangien*.

On vérifie que tout sous-espace lagrangien est le graphe d'un unique opérateur symétrique, borné ou non, et que réciproquement tout graphe  $\Gamma(Y, B)$  est lagrangien. L'ensemble des opérateurs symétriques avec domaine sur  $H$  est ainsi une compactification  $\Lambda_H$  de l'espace  $S(H)$  des endomorphismes symétriques de  $H$  en une variété compacte de classe  $C^\infty$ .

On dira que  $(Y, B)$  est *inversible* si  $\sigma(\Gamma(Y, B))$ , où  $\sigma(x, y) = (y, x)$ , est le graphe d'une application de  $H$  dans  $Y \subset H$ .

Pour  $\lambda \in \mathcal{C}$ , on définit

$$(Y, \lambda I - B)$$

par son graphe

$$\Gamma(Y, \lambda I - B) = \{(y, \lambda y - \xi), (y, \xi) \in \Gamma(Y, B)\}.$$

Ceci définit du même coup les deux notions de résolvante (inverse de  $\lambda I - B$ ) et de spectre (valeurs singulières de  $\lambda$ ). Ainsi le spectre de  $(Y, B)$  est réunion du spectre de  $B$  et de la valeur propre  $\infty$  répétée  $(n - \dim Y)$  fois.

*Remarque* : seul un ordre cyclique sur les valeurs propres est pertinent ; on ne peut pas distinguer  $-\infty$  de  $+\infty$  sans perdre la continuité du spectre. Si  $A$  décrit un lacet de  $\Lambda_H$  les valeurs propres font collectivement un nombre de tours égal à l'indice de Maslov du chemin ([4]).

**Définition 4** On dira qu'une famille  $A_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  d'opérateurs symétriques sur  $H$   $\Gamma$ -converge vers  $(Y, B)$  si  $\Gamma(A_\varepsilon)$  converge vers  $\Gamma(Y, B)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  au sens de la topologie naturelle de la grassmannienne des sous-espaces de dimension  $n$  de  $H \oplus H$ .

On note

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B).$$

Le résultat suivant étend au cadre de la  $\Gamma$ -convergence les résultats classiques de Kato [32] sur la convergence des spectres de formes quadratiques.

**Théorème 2** Supposons  $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$  . Soient

$$\lambda_1(\varepsilon) \leq \dots \leq \lambda_n(\varepsilon)$$

les valeurs propres de  $A_\varepsilon$ . Alors le spectre de  $A_\varepsilon$  converge vers celui de  $(Y, B)$  au sens de la topologie de  $P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \infty$ .

L'existence de  $\Gamma$ -limites n'est pas exceptionnelle.

**Proposition 1** Soient  $A_i : X \rightarrow X$  des applications linéaires symétriques,  $\alpha_1 < \dots < \alpha_N$  et, pour  $\varepsilon > 0$  :

$$A_\varepsilon = \sum_{i=1}^N A_i \varepsilon^{\alpha_i} .$$

Soit  $Z$  la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de dimension  $n$  de  $X \oplus X$  et  $C_\varepsilon \in Z$  le graphe de  $A_\varepsilon$ .

Alors l'application  $\varepsilon \rightarrow C_\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^+ \setminus 0$  dans  $Z$  se prolonge par continuité en  $\varepsilon = 0$ .

De plus, si les  $\alpha_i$  sont entiers, le prolongement est analytique réel.

La  $\Gamma$ -convergence étant assurée dans de nombreux cas d'intérêt pratique, on cherchera à caractériser une  $\Gamma$ -limite  $(Y, B)$  en décrivant le domaine  $Y$  et les coefficients de la matrice  $B$ .

Dans toute la suite, les opérateurs symétriques sont toujours supposés positifs.

**Définition 5** On note  $x_\varepsilon \xrightarrow{s} x_0$  si  $x_\varepsilon$  converge vers  $x_0$  avec  $Q_\varepsilon(x_\varepsilon) = O(1)$ .

**Lemme 1** Si  $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$ ,  $x_0 \in Y$  ssi il existe  $x_\varepsilon$  tel que  $x_\varepsilon \xrightarrow{s} x_0$ .

**Lemme 2** Soit  $Y_\varepsilon$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $X$  tel que  $Y_\varepsilon$  tend vers  $Y$  et que, pour  $\varepsilon \neq 0$ , la norme de la restriction de  $A_\varepsilon$  à  $Y_\varepsilon$  est bornée.

Soit  $\phi_\varepsilon$  un isomorphisme de  $Y$  dans  $Y_\varepsilon$  tel que pour tout  $y \in Y$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\phi_\varepsilon(y)$  tend vers  $y$  et

$$Q_\varepsilon(y) = \langle \phi_\varepsilon(y) | A_\varepsilon | \phi_\varepsilon(y) \rangle .$$

Alors  $Q_\varepsilon$  admet une limite  $Q_0$  comme forme quadratique sur  $Y$  et si  $B$  est l'opérateur associé, on a :

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B) .$$

Remarquons que l'hypothèse que la norme de la restriction de  $A_\varepsilon$  est bornée entraîne que  $\phi_\varepsilon(y) \xrightarrow{s} y$ . Une version pratique de ce lemme est la suivante : soit  $(y_i)$  une base de  $Y$  et  $y_{i,\varepsilon}$  convergents vers  $y_i$  avec  $A_\varepsilon y_{i,\varepsilon} = O(1)$ , alors la matrice de  $b_{i,j} = \langle y_i | B | y_j \rangle$  de  $B$  est donnée par :

$$b_{i,j} = \lim \langle y_{i,\varepsilon} | A_\varepsilon | y_{j,\varepsilon} \rangle .$$

*Attention* : il ne faut pas prendre pour définition de  $Q_\varepsilon$

$$Q_\varepsilon(y) = \langle y | A_\varepsilon | y \rangle ,$$

qui pourrait ne pas avoir de limite ou une limite incorrecte !

**Exemple 3.1 : contraction d'une arête.**

Soit  $q_\varepsilon(x) = Q(x) + \frac{1}{\varepsilon}(x_1 - x_2)^2$ . Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $q_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$  où  $Y = \{x_1 = x_2\}$  et  $q_B$  est la restriction de  $Q$  à  $Y$ .

Cet exemple permet de traiter la contraction d'une arête comme le cas où l'on ôte une arête.

**Exemple 3.2 : transformations étoile-triangle.**

Voir [5] pour ce qui suit.

Plaçons-nous sur  $H = \mathbb{R}^4$ , avec la forme quadratique

$$Q_\varepsilon(x) = \langle x | A_\varepsilon | x \rangle = \sum_{i=1}^3 \left(x_i - \frac{x_0}{\varepsilon}\right)^2.$$

Prenons  $p = 3$  et  $Y_\varepsilon = \{y_0 = (\varepsilon/3)(y_1 + y_2 + y_3)\}$ . Alors  $Q_0(y) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (y_i - y_{i+1})^2$  et

$$\text{non } \sum_{i=1}^3 y_i^2.$$

On dit que  $G'$  s'obtient de  $G$  par une transformation *étoile-triangle* si on remplace un sommet 0 de degré 3 de  $G$  et les arêtes  $\{0, i\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , qui s'y accrochent par le triangle  $(1, 2, 3)$ .

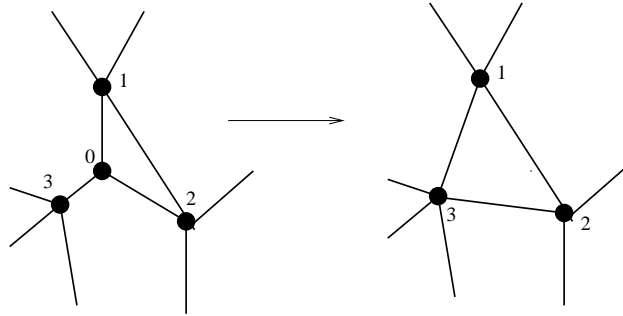


Figure 4: transformation étoile-triangle

$O_{G'}$  est alors une strate de l'adhérence de  $O_G$  dans  $\Lambda_{H_G}$ .

**Exemple 3.3 : recuit simulé.**

Une présentation détaillée de cet exemple est donnée dans [12].

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe fini et  $H : V \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction (énergie). On suppose  $V_0 \neq \emptyset$ . On suppose aussi que, si  $\{i, j\} \in E$ ,  $|H(i) - H(j)| \leq 1$ .

Soit  $T > 0$  et  $\varepsilon = e^{-\frac{1}{2T}}$ . On considère la mesure de probabilité de Gibbs  $\pi_T$  sur  $V$ , à température  $T$  donnée par  $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H(i)}{T}}$ . Lorsque  $T \rightarrow 0^+$  cette mesure de probabilité converge vers la probabilité uniforme sur l'ensemble  $V_0$  des minimas absolus de  $H$ .

On peut donc espérer trouver ces minimas en simulant un processus de Markov ayant  $\pi_T$  comme mesure d'équilibre et en faisant tendre  $T$  vers 0 à une vitesse judicieusement choisie : c'est le principe de base de l'algorithme dit de *recuit simulé*.

On définit le processus de Markov par un opérateur  $\Lambda_T$  défini par

$$(\Lambda_T x)_i = \sum_{j \sim i} \lambda_{i,j} (x_i - x_j) ,$$

avec  $\lambda_{i,j} = 0$  si  $\{i, j\} \notin E$  et :

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } H(j) \geq H(i) ; \\ e^{-\frac{H(j)-H(i)}{T}}, & \text{si } H(j) < H(i) . \end{cases} \quad (1)$$

L'opérateur  $\Lambda_T$  est symétrique sur  $l^2(V, \pi_T)$ . Posant  $y_i = \sqrt{p_i} x_i$ , on obtient un opérateur de  $O_G$  noté  $A_\varepsilon$ , unitairement équivalent à  $\Lambda_T$ , associé à la forme quadratique

$$Q_\varepsilon(x) = \sum_{\{i,j\} \in E, H(i) < H(j)} (\varepsilon^{H(j)-H(i)} x_i - x_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in E, H(i) = H(j)} (x_i - x_j)^2 .$$

On note

$$\lambda_1(\varepsilon) = 0 < \lambda_2(\varepsilon) \leq \dots \leq \lambda_n(\varepsilon) ,$$

les valeurs propres de  $\Lambda_\varepsilon$  (et donc de  $A_\varepsilon$ ).

On souhaite donner une description précise du comportement asymptotique des  $\lambda_i(\varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, et en particulier du gap  $g(\varepsilon) = \lambda_2(\varepsilon)$ .

On a une filtration

$$\dots \subset \mathcal{H}_l \subset \dots \subset \mathcal{H}_0 = \mathbb{R}^V$$

où  $\mathcal{H}_l$  est l'espace engendré par les fonctions propres de valeurs propres  $O(\varepsilon^{2l})$ .

Le but est de décrire cette filtration et l'asymptotique des valeurs propres associées. L'existence de la filtration résulte de Kato et du fait que  $Q_\varepsilon \geq 0$  est isospectral à  $Q_{-\varepsilon}$ : en effet si  $U : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$  est l'opérateur unitaire qui consiste à changer  $x_i$  en  $-x_i$  lorsque  $H(i)$  est impair, on a:  $Q_\varepsilon(Ux) = Q_{-\varepsilon}(x)$ .

$\varepsilon^{-2l} Q_\varepsilon$  admet une  $\Gamma$ -limite  $R_l = (\mathcal{H}_l, S_l)$  qui s'identifie à un élément de  $O_{G_l}$  que l'on va décrire.

Décrivons maintenant les graphes  $G_l$  et les espaces  $\mathcal{H}_l$  (les domaines) par récurrence sur  $l$  :

(i)  $G_1 = (V_1, E_1)$  est ainsi défini:  $i \in V$  sera dit minimum local de  $H$  s'il existe  $A \subset V$  connexe,  $i \in A$  tel que  $H$  est constante sur  $A$  et vaut  $H(i) + 1$  sur les voisins d'un sommet de  $A$  qui ne sont pas dans  $A$ . L'ensemble des ces parties connexes  $A$  est l'ensemble  $V_1$ . Si  $\alpha \in V_1$ , on note  $A_\alpha \subset V$  la composante connexe du minimum local correspondante: les  $A$  s'appelle puits d'ordre 1.

$\mathcal{H}_1$  est l'espace des fonctions constantes sur les  $A \in V_1$  et nulles ailleurs. Sa dimension est bien sûr  $\#V_1$ .

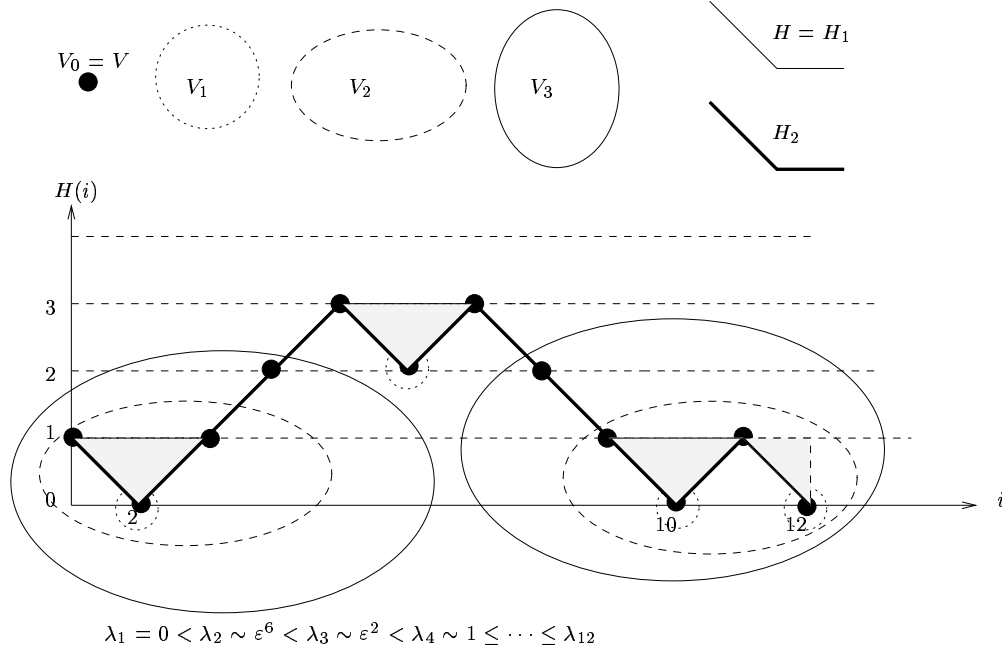


Figure 5: les graphes  $G_l$

(ii) On remplace alors  $H = H_1$  par  $H + 1$  sur chacune de ces parties de  $V_1$ , on obtient une énergie  $H_2$  et on construit ainsi un ensemble de parties  $V_2$  en considérant de même les minimas locaux de  $H_2$ ; les sommets d'une composante d'un minima de  $H_2$  s'appellent puits d'ordre 2; 2 éléments  $A, B$  de  $V_1$  (éventuellement confondues) sont connectés par une arête de  $G_1$  s'ils sont contenus dans un même puits  $C$  de  $V_2$ : le graphe  $G_l$  est donc un graphe avec des boucles.

Et on itère la construction :

(ii) on remplace  $H_2$  par  $H_2 + 1$  sur les ensembles de  $V_2$ , etc...

Soit  $Q_l = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-2l} Q_\epsilon$ , alors  $Q_l$  s'identifie naturellement à un opérateur de type Schrödinger sur  $G_l$  avec un potentiel  $\geq 0$  nul seulement aux sommets qui ont des boucles.

De ceci, on peut calculer le nombre de valeurs propres qui sont  $O(\epsilon^{2l})$  qui est donné par le nombre de sommets de  $G_l$ , ie le nombre de puits d'ordre  $l$ .

En fait les formes  $Q_l$  sont déterminées entièrement en restreignant  $Q_\epsilon$  à un sous-graphe de  $G$ : celui formé des sommets des  $A \in V_l$  et des sommets inondés si on augmente  $H_l$  de  $\eta$ ,  $\eta > 0$  petit sur les  $A \in V_l$ .

Tout ceci détermine l'ordre de grandeur du gap :

$$g(\epsilon) = C\epsilon^{2k}(1 + O(\epsilon^2)) ,$$

où  $k$  est la hauteur du col le plus haut ; un col est un chemin  $\gamma$  entre 2 minimas locaux  $a$  et  $b$  dont l'altitude maximale  $h = \sup_{x \in \gamma} H(x)$  est minimale parmi tous les chemins

qui joignent ces 2 minimas. La hauteur de ce col est

$$H(a, b) = \inf(h - H(a), h - H(b)) .$$

$k$  est aussi le sup des  $l$  tels qu'il existe au moins 2 puits d'ordre  $l$  ( $= 0$  s'il n'existe qu'un minimum local).

*Cette description n'est pas nouvelle. On la déduit classiquement de la théorie de Freidlin et Wentzell ([27]).*

**Exemple 3.4 : limites croissantes.**

Dans le cas particulier d'une suite croissante de formes quadratiques positives, la notion de  $\Gamma$ -limite se ramène à celle de limite simple.

**Proposition 2** *Soit  $A_n$  une suite croissante de formes quadratiques positives définies sur  $X$  et  $q_n(x) = \langle x | A_n | x \rangle$  la suite croissante des formes quadratiques associées. Soit*

$$q_\infty : X \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$$

la limite simple des  $q_n$ , et

$$Y = \{x \in X \mid q_\infty(x) < \infty\} .$$

Soit  $(Y, B)$  la forme quadratique avec domaine associée (si  $y \in Y$ ,  $q_\infty(y) = \langle y | B | y \rangle$ ). Alors

$$A_n \xrightarrow{\Gamma} (Y, B) .$$

On en déduit en particulier le :

**Théorème 3** *L'adhérence dans  $\Lambda_{H_G}$  de l'ensemble  $L_G$  est la réunion des  $L_{G'}$  pour  $G'$  mineur de  $G$  (attention la structure euclidienne sur les  $\mathbb{R}^{V'}$  n'est pas la structure canonique).*

Cette proposition est en particulier utilisée dans [19] et [10] pour montrer que la réponse d'un réseau électrique varie continument lorsque le réseau dégénère.

**Exemple 3.5 : réseaux électriques.**

Un *réseau électrique* est un quadruplet  $R = (V_0, V_1, E, \rho)$  où  $V_0$  et  $V_1$  sont 2 ensembles finis disjoints,  $G = (V = V_0 \cup V_1, E)$  est un graphe fini et  $\rho = (\rho_{i,j}) \in (\mathbb{R}^+ \setminus 0)^E$  est l'ensemble des conductances des arêtes.  $V_0$  est l'ensemble des sommets terminaux,  $V_1$  l'ensemble des sommets intérieurs. L'énergie électrique d'un potentiel  $u \in \mathbb{R}^V$  est donnée par

$$e(u) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\{i,j\} \in E} \rho_{i,j} (u_i - u_j)^2 \right) .$$



Un *potentiel d'équilibre* de  $R$  est un élément de  $u = (u_i) \in \mathbb{R}^V$  tel que, pour tout  $i \in V_1$ ,

$$\sum_{\{i,j\} \in E} \rho_{i,j}(u_i - u_j) = 0 .$$

Les réponses de  $R$  sont les couples  $(u_0, w_0) \in \mathbb{R}^{V_0} \oplus (\mathbb{R}^{V_0})^*$ , où  $u_0$  est la restriction d'un potentiel d'équilibre  $u$  à  $V_0$  et  $(w_0)_i = \sum_{\{i,j\} \in E} \rho_{i,j}(u_i - u_j)$ . On note  $\Phi(R)$  l'ensemble des réponses de  $R$ .

Si  $L_e \subset \mathbb{R}^V \oplus (\mathbb{R}^V)^*$  est le graphe de la différentielle de  $e$ , l'ensemble des réponses est obtenue de  $L_e$  par réduction symplectique et donc  $\Phi(R)$  est un sous-espace lagrangien de  $\mathbb{R}^{V_0} \oplus (\mathbb{R}^{V_0})^*$ .

Soit maintenant  $\rho \in [0, +\infty]$ . A ce  $\rho$ , on associe un nouveau réseau électrique  $(G', \rho')$  dont le graphe  $G'$  sous-jacent est le mineur de  $G$  obtenu en contractant les arêtes telles que  $\rho_{i,j} = \infty$  et en ôtant celles telles que  $\rho_{i,j} = 0$ .  $\rho'$  est défini à partir de  $e$  par restriction à  $\mathbb{R}^{V'} \subset \mathbb{R}^V$ .

On montre ([1]) que l'application  $\Phi$  s'étend continument comme application de  $[0, \infty]^V$  dans la grassmannienne lagrangienne de  $\mathbb{R}^{V_0} \oplus (\mathbb{R}^{V_0})^*$ .

### Exemple 3.6 : limites d'éléments de $O_G$ .

Le théorème suivant montre que toute  $\Gamma$ - limite d'éléments de  $O_G$  est de façon naturelle élément d'un  $O_{G'}$ , où  $G'$  est un mineur généralisé de  $G$ .

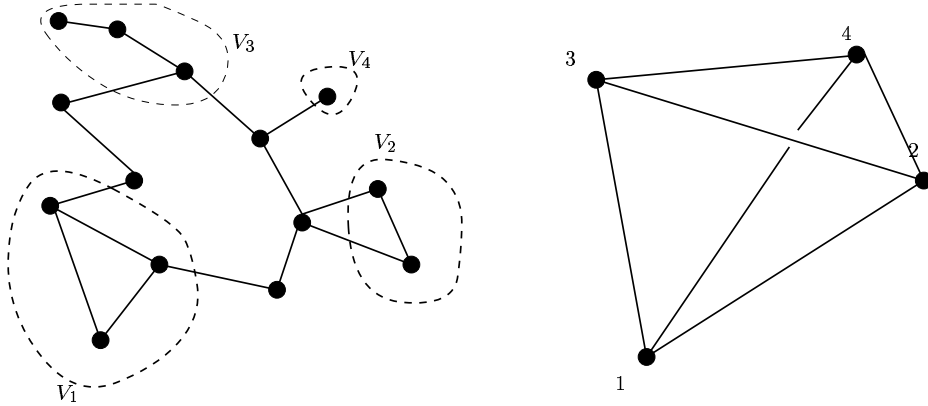


Figure 6:  $G$  et  $G'$

**Théorème 4** Soit  $A_\varepsilon \in O_G$ . Supposons que  $A_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} (Y, B)$  avec  $p = \dim Y$ .

Description de  $Y$  :

il existe une partition (définie par  $A_\varepsilon$ )

$$V = W_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_p ,$$

où les  $V_i$ ,  $i \geq 1$  sont connexes, telle que si  $F_i = \{y \in Y \text{ t.q. } \text{Supp}(y) \subset V_i\}$ , les  $F_i$ ,  $i \geq 1$  sont de dimension 1 et  $Y = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

Chaque  $F_i$  est engendré par une fonction  $\phi_i \geq 0$  de norme 1. Ces  $\phi_i$  forment donc une base orthonormée de  $Y$ .

Description de  $B$  :

la matrice  $(b_{i,j})$  de  $B$  dans la base des  $\phi_i$  est un élément de  $O_{G_0}$  où  $V(G_0) = \{1, \dots, p\}$  et, si  $\{i, j\} \in E(G_0)$ , il existe un chemin  $\gamma$  de  $G$  qui joint  $V_i$  à  $V_j$  sans rencontrer les autres  $V_l$ .

### 3.3 Stabilité structurelle pour les opérateurs non bornés

On se ramène au cas où  $\lambda_0 = 0$ . L'adhérence dans  $\Lambda_H$  de  $W_l^0$  est une sous-variété lisse. En effet, si  $L = H \oplus 0$ ,  $A \in W_l^0$  si et seulement si  $\Gamma(A) \cap L$  est de dimension  $l$ . L'adhérence de  $W_l^0$  est donc l'ensemble des espaces lagrangiens définis par cette condition de dimension. C'est une sous-variété lisse de  $\Lambda_H$ .

Pour l'étude de ces variétés et de la stratification correspondante, voir [2].

On peut ainsi étendre aux opérateurs non bornés la théorie de Kato et la notion de stabilité structurelle.

## 4 Plongements de graphes dans les surfaces

### 4.1 Le théorème de Cheng et sa réciproque

Dans [7], Cheng a prouvé le résultat suivant :

**Théorème 5** *Si  $A = \Delta_g + V$  est un opérateur de Schrödinger sur  $S^2$  munis d'une métrique riemannienne  $g$ , la multiplicité de  $\lambda_2(A)$  est inférieure ou égale à 3 ; cette borne est optimale (cas  $V = 0$  et  $g = g_{can}$ ).*

Les ingrédients de la preuve sont le théorème de Jordan et le théorème de Courant sur les domaines nodaux. La preuve s'appuie sur la structure locale des lignes nodales des fonctions propres.

Voici une esquisse de la preuve du théorème de Cheng : soit  $A$  un opérateur de Schrödinger sur  $S^2$  tel que, si  $F = \ker(A - \lambda_2(A))$ ,  $\dim F \geq 4$ .

Soit  $x_0 \in S^2$ , par un argument d'algèbre linéaire, il existe  $\varphi \in F \setminus 0$  telle que

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \nabla \varphi(x_0) = 0 .$$

Soit  $C = \varphi^{-1}(0)$ . On montre que  $C$  est un graphe plongé dans  $S^2$  dont tous les sommets sont de degré pair (les branches issues d'un sommet  $s$  forment un système équiangulaire dont le degré est  $2p$  si  $p$  est l'ordre d'annulation de  $\varphi$  en  $s$ ). La formule d'Euler montre alors que le nombre de composantes connexes de  $S^2 \setminus C$  est  $\geq 3$  dès que  $C$  a au moins un sommet de degré  $\geq 4$  ce qui est le cas pour le  $\varphi$  choisi.

Il reste à appliquer le théorème de Courant sur les ensembles nodaux qui affirme que, si  $\varphi \in \ker(A - \lambda_k(A))$  où  $A$  est un opérateur de Schrödinger sur une variété quelconque  $X$ , alors le nombre de composantes connexes de  $X \setminus \varphi^{-1}(0)$  est  $\leq k$ , ici 2.

L'extension du théorème de Courant au cas des graphes ne marche pas en toute généralité, mais H. van der Holst a remarqué qu'il s'applique pour  $\varphi \in \ker(A - \lambda_2(A)) = F$ , avec  $A \in O_G$ , pourvu que le support de  $\varphi$  soit minimal dans  $F \setminus 0$ .

Ce théorème a été généralisé aux graphes par Hein van der Holst ([38] et [39]) en le :

**Théorème 6** *Si  $G$  est le 1-squelette d'une triangulation de  $S^2$  et  $A \in O_G$ , la multiplicité de  $\lambda_2(A)$  est au plus 3. Cette borne est optimale et atteinte pour la laplacien canonique de  $K_4$ .*

Utilisant le fait que tout graphe planaire est mineur du 1-squelette d'une triangulation de  $S^2$ , on en déduit que, si  $G$  est planaire,  $\mu_2^O(G) \leq 3$ .

En fait, en utilisant la théorème de Kuratowski qui caractérise les graphes non planaires comme ceux dont  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  est mineur, on montre ([18]) le :

**Théorème 7** *Un graphe  $G$  est planaire si et seulement si :*

$$\mu_2^O(G) \leq 3 .$$

## 4.2 Extension aux autres surfaces : Cheng, Besson, Nadi-rashvili, Sévenec

Des majorations de la multiplicité de la seconde valeur propre d'opérateurs de Schrödinger sur les surfaces ont été obtenues ensuite (voir par exemple [37]) ; par exemple, si  $S$  est orientable, la borne optimale est 6 pour le tore ; la borne prouvée est  $4g$  en général, mais on ne sait pas si elle est optimale.

## 4.3 Les graphes ayant un plongement non-noué et le résultat de Lovasz-Schrijver

Un généralisation intéressante de la classe des graphes planaires est la classe des graphes  $G$  admettant un plongement non noué dans  $\mathbb{R}^3$ , i.e. tel que 2 circuits disjoints quelconques de  $G$  ne soient pas entrelacés comme lacets de  $\mathbb{R}^3$ . L'exemple le plus simple est  $K_5$  qui n'est pas planaire, mais n'admet aucune paire de circuits disjoints.

L'analogie du théorème de Kuratowski est que ces graphes admettent une caractérisation par mineurs exclus : les graphes exclus étant les transformés par étoile-triangle de  $K_6$ . On montre dans [5] que  $\mu_2^O(G) = 5$  pour ces graphes et Lovasz et Schrijver [31] ont réussi à montrer le joli :

**Théorème 8**  *$\mu_2^O(G) \leq 4$  si et seulement si  $G$  admet un plongement non-noué dans  $\mathbb{R}^3$ .*

## 5 Largeur d'arbre

Pour tout ce §, voir [23].

Les invariants  $\mu_k^M(G)$  ne sont pas reliés aux propriétés topologiques des graphes. On peut s'en douter par analogie avec le cas continu : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant  $Bdx \wedge dy$ ,  $B > 0$ , dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ,

$$H = \left(\frac{1}{i}\partial_x - By\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\partial_y\right)^2$$

admet un spectre discret

$$B < 3B < 5B < \dots$$

où chaque valeur propre est de multiplicité infinie (ces valeurs propres sont appelées *niveaux de Landau* en physique). Les graphes importants à considérer ici sont les arbres !

### 5.1 Transformations de jauge

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $D = (\varepsilon_i)_{i \in V}$  une matrice diagonale unitaire. Si  $A = (a_{i,j}) \in M_G$ , il en est de même pour  $A_D = D^{-1}AD$  et  $\sigma(A_D) = \sigma(A)$ . On a :

$$(a_D)_{i,j} = \varepsilon_i^{-1} \varepsilon_j a_{i,j} .$$

Si  $\gamma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  ( $\forall m$  tel que  $1 \leq m \leq k$ ,  $\{i_m, i_{m+1}\} \in E$ ), le produit

$$h(A, \gamma) = (-1)^k a_{i_1, i_2} \cdots a_{i_k, i_1}$$

vérifie :

$$h(A_D, \gamma) = h(A, \gamma) .$$

De plus, on a, bien sûr,  $h(A, \gamma) > 0$  si  $A \in O_G$  et la réciproque est vraie quitte à faire un changement de jauge.

Si  $T = (V, E)$  est un arbre, il n'admet pas de circuit non triviaux et, pour tout  $A \in M_T$ , on peut trouver  $D$  tel que  $A_D \in O_T$ .

On en déduit, par application du théorème de Perron-Frobenius, que

$$m_1^M(T) = 1 .$$

### 5.2 Les $\mu_k^M(T)$

Les arguments suivants sont détaillés dans [23].

On a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 3** *Si  $G = (V, E)$  est connexe et  $\{1, 2\} \in E$  est telle que  $G' = (V, E \setminus \{1, 2\})$  n'est pas connexe, si  $A \in M_G$  et  $F = \ker A$ , si  $r : F \rightarrow \mathbb{C}^2$  est définie par  $r(x) = (x_1, x_2)$ , l'image de  $r$  est de dimension  $\leq 1$ .*

## Démonstration

Soit  $V_1$  la composante connexe dans  $G'$  du sommet 1 et pour tout  $x \in F$  soit  $x'$  la restriction à  $V_1$  étendue par 0. On calcule explicitement le membre de droite de l'égalité :

$$0 = \langle Ax'|y' \rangle - \langle x'|Ay' \rangle ,$$

en fonctions des valeurs de  $x$  et  $y$  en 1 et 2.

On trouve :

$$0 = a_{1,2}(x_2\bar{y}_1 - x_1\bar{y}_2) ,$$

d'où la conclusion. □

**Lemme 4** *Soit  $T$  un arbre dont les sommets sont de degré  $\leq 3$  et pour  $\{i, j\} \in E(T)$ ,  $T'$  et  $T''$  les 2 arbres obtenus en ôtant l'arête  $\{i, j\}$ . On note  $F'$  et  $F''$  les restrictions à  $V'$  et  $V''$  de  $\ker r$ . Si  $\dim F > 2$ , il existe  $\{i, j\} \in E(T)$  telle que  $F' \neq 0$  et  $F'' \neq 0$ .*

On en déduit la :

**Proposition 3** *Si  $T$  est un arbre dont tous les sommets sont de degré  $\leq 3$ ,*

$$\forall k, \mu_k^M(T) \leq 2 .$$

## Démonstration

Soit  $x' \in F' \setminus 0$  et  $x'' \in F'' \setminus 0$ , si on prend ces 2 vecteurs normalisés comme premiers vecteurs d'une base de  $F$ , on contredit la transversalité:  
 $\forall B \in T_{AMG}, q_B(x', x'') = 0$ . □

Du fait que tout arbre est mineur d'un arbre dont les sommets sont de degré  $\leq 3$ , on déduit le

**Théorème 9** *Pour tout arbre  $T$ ,*

$$\forall k, \mu_k^M(T) \leq 2 .$$

### 5.3 Largeur d'arbre

**Définition 6** Soit  $G$  un graphe fini, on définit la largeur d'arbre de  $G$ , notée  $la(G)$  comme le inf des entiers  $k$  tel que  $G$  est mineur d'un graphe  $T \times K$  avec  $|V(K)| = k$ .

On peut alors montrer, à l'aide d'une version vectorielle des arguments précédents, le :

**Théorème 10** Pour tout graphe  $G$ , on a :

$$\mu_1^M(G) \leq la(G) ,$$

et,  $\forall k$ , :

$$\mu_k^M(G) \leq 2la(G) .$$

On peut aussi montrer que  $\mu_1^M(G) = 1$  si et seulement si  $G$  est une forêt. H. van der Holst ([40]) a trouvé une caractérisation des graphes  $G$  tels que  $\mu_1^M(G) \leq 2$  (ce sont exactement ceux tels que  $la(G) \leq 2$ ) et de ceux tels que  $\mu_1^M(G) \leq 3$ .

### 5.4 Fonctions holomorphes discrètes

Les majorations précédentes sont optimales, même dans le cadre des des graphes planaires : on a

$$\mu_1^M(T_{\frac{n(n+1)}{2}}) = n = la(T_{\frac{n(n+1)}{2}}) .$$

En fait, la majoration de la largeur d'arbre par  $n$  est simple et la minoration résulte du théorème précédent.

On peut donner une version géométrique d'un opérateur  $A$  dont le fondamental est de multiplicité  $n$  et  $M$ -stable au moyen des fonctions holomorphes discrètes.

On prend comme forme hermitienne sur  $\mathcal{C}^V$

$$q_A(x) = \sum |(x_k - x_i) - \omega(x_j - x_i)|^2 ,$$

où la somme porte sur les triangles noirs  $(i, j, k)$  orientés et  $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

Le noyau de  $A$  correspond à une notion de fonction holomorphe de  $G$  dans  $\mathcal{C}$ . L'image de chaque triangle noir par un  $x \in \ker A$  prolongé affinement est un triangle équilatéral direct.

## 6 Problèmes

### 6.1 Nombres chromatiques

Le nombre chromatique  $\chi(G)$  du graphe  $G$  est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets d'un graphe de façon que 2 sommets voisins quelconques soient de couleurs différentes.

Le nombre chromatique  $\chi(S)$  d'une surface compacte  $S$  est le sup des nombres chromatiques des graphes plongés dans  $S$ . Lorsque  $S$  n'est pas une sphère, ce nombre est donné par le sup des  $n$  tels que  $K_n$  se plonge dans  $S$  (cf [34]). Pour la sphère, le théorème des 4 couleurs affirme que  $\chi(S^2) = 4$ .

Un des problèmes les plus excitants est de relier nos invariants  $\mu_k^Z(G)$  aux nombres chromatiques. Une conjecture possible est la suivante :

*Conjecture ([17]): pour tout graphe  $G$ , on a :*

$$\chi(G) \leq \mu_2^O(G) + 1 .$$

Cette conjecture qui implique le théorème des 4 couleurs est plus faible que la conjecture classique de Hadwiger qui dit que, si  $\chi(G) = l$ ,  $K_l$  est un mineur de  $G$ .

## 6.2 Majoration optimale en terme du genre

Il résulte des travaux de Cheng, Besson, Nadirashvili et Sévenec que, pour une surface orientable compacte de genre  $g$ , on a pour  $g \geq 2$  :

$$\chi(S) - 1 = E\left[\frac{5}{2} + \sqrt{12g + \frac{1}{4}}\right] \leq \mu_2^O(S) \leq m_2^O(S) \leq 4g ,$$

alors que pour  $g = 0$  et  $g = 1$ , on a  $\mu_2^O(S) = m_2^O(S) = \chi(S) - 1$ .

Peut-on améliorer ces inégalités ?

## 6.3 Stabilisation de A. Schrijver

Soit  $\nu_k^Z(G) = \inf_{G \leq G'} m_k^Z(G')$ . On a bien sûr  $\nu_k^Z(G) \geq \mu_k^Z(G)$ .

A-t-on égalité ?

## 6.4 Perron-Frobenius quantitatif

Peut-on majorer la multiplicité de la première valeur propre  $\lambda_1(A)$  pour  $A \in M_G$  en fonction des arguments des holonomies  $h(A, \gamma)$  pour les cycles de  $G$  ?

On peut trouver un analogue continu, le théorème de Aharonov-Casher, voir [25] p. 125-129.

## References

- [1] V. Arnold. Modes and quasi-modes. *Functional analysis and its applications*, 6:94-101, 1972.
- [2] V. Arnold. The Sturm theorems and symplectic geometry. *Functional analysis and its applications*, 19:251-259, 1995.

- [3] V. Arnold. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Sel. Math., New Ser.*, 1:1-19, 1995.
- [4] V. Arnold. On a characteristic class intervening in quantization conditions. *Functional analysis and its applications*, 1:1-14, 1967.
- [5] R. Bacher et Y. Colin de Verdière. Multiplicités de valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes *Bull. Soc. Math. Fr.*, 123:101-117, 1995.
- [6] M. Berry, M. Wilkinson. Spectra of triangles. *Proc. Royal Soc. London*, A392:15-43, 1984.
- [7] S.Y. Cheng. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv.*, 51:432-55, 1976.
- [8] Ph. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. *North Holland*, 1978.
- [9] B. Colbois et Y. Colin de Verdière. Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante. *Comment. Math. Helv.*, 63:194-208, 1988.
- [10] Y. Colin de Verdière, I. Gitler, D. Vertigan. Réseaux électriques planaires II. *Comment. Math. Helvetici*, 71:144-167, 1996.
- [11] Y. Colin de Verdière et A. Marin. Triangulations presque équilatérales des surfaces. *Journal of Diff. Geometry*, 32:199-207, 1990.
- [12] Y. Colin de Verdière, Y. Pan, B. Ycart. Limites singulières d'opérateurs de Schrödinger et de processus de Markov. *Prépublication de l'Institut Fourier*, 384:1-26, 1997. (<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/>)
- [13] Y. Colin de Verdière, N. Torke. Opérateur de Schrödinger avec champs magnétiques. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble*, 1992-1993.
- [14] Y. Colin de Verdière. Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien. *Comment. Math. Helv.*, 61:254-270, 1986.
- [15] Y. Colin de Verdière. Spectre de variétés Riemanniennes et spectre de graphes. *Proc. Intern. Cong. Math. (Berkeley)*, 522:530, 1986.
- [16] Y. Colin de Verdière. Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold. *Comment. Math. Helv.*, 63:184:193, 1988.
- [17] Y. Colin de Verdière. Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. *Ann. scient. E.N.S.*, 20:599-615, 1987.



- [18] Y. Colin de Verdière. Un nouvel invariant des graphes finis et application à un critère de planarité. *Journal of Combinatorial theory B*, 50:11-21, 1990.
- [19] Y. Colin de Verdière. Réseaux électriques planaires I. *Commentarii Math. Helv.*, 69:351-374, 1994.
- [20] Y. Colin de Verdière. Multiplicités de valeurs propres: laplaciens discrets et continus. *Rendiconti di Matematica*, VII,13:433-460, 1993.
- [21] Y. Colin de Verdière. Spectres de graphes. *Cours de DEA photocopié Institut Fourier*, 1995.
- [22] Y. Colin de Verdière. Théorèmes de Courant et de Cheng combinatoires. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble*, 13:9-13, 1994–1995.
- [23] Y. Colin de Verdière. Multiplicities of eigenvalues and tree-width of graphs. *Prépublication de l'Institut Fourier (soumis à JCTB)*, 366:1-21, 1996. (<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/>)
- [24] F. Chung, S. Sternberg. Mathematics and the Buckyball. *American scientist*, 81:56-71, 1993.
- [25] H. L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon. Schroedinger operators, with application to quantum mechanics and global geometry. *Springer Study, Texts and Monographs in Physics*, 1987.
- [26] A. Dal Maso. An introduction to  $\Gamma$ -convergence. *Birkhäuser*, 1993.
- [27] M. Freidlin, A. Wentzell. Random perturbations of dynamical systems. *Springer (Berlin)*, 1984.
- [28] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271-283, 1930.
- [29] J.L. de Lagrange. Recherches sur la propagation du son. *Oeuvres (Gauthier-Villars)*, 1:39-..., 1867.
- [30] E. Lieb. Fluxes and Dimers in the Hubbard model. *Proc. Internat. Congress of Math. (Zürich)*, 2:1279-1280, 1994.
- [31] L. Lovász, A. Schrijver. A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs. *Preprint*, 1-11, 1996.
- [32] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. *Springer (Berlin)*, 1976.
- [33] N. Nadirashvili. Multiple eigenvalues of Laplace operators. *Math. USSR Sbornik*, 61:225-238, 1988.

- [34] G. Ringel. Map color theorem. *Springer Grundlehren*, 1974.
- [35] J. Rubinstein, M. Schatzman. Asymptotic for thin superconducting rings. *J. Maths. Pures et Appliquées (à paraitre)*.
- [36] J.P. Serre. Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke  $T_p$ . *J. of the AMS*, 10:75-102, 1997.
- [37] B. Sévenec. Multiplicité du spectre des surfaces: une approche topologique. *Prépublication ENS Lyon*, 1-16, 1994. (<http://umpa.ens-lyon.fr/UMPA/>)
- [38] H. van der Holst. A short proof of the planarity characterization of Colin de Verdière. *J. Comb. Th B*, 65:269-272, 1995.
- [39] H. van der Holst. Topological and Spectral Graph Characterizations. *Thèse (Amsterdam)*, 1-135, 1996.
- [40] H. van der Holst. A Characterization of the class of graph  $G$  with  $\nu(G) \leq 3$ . *Preprint (Princeton)*, 1-15, 1997.
- [41] E. Wigner, J. von Neumann. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. *Phys. Zeit.*, 30:467-470, 1929.
- [42] A. Zuk. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323:453-458, 1996.