Sur des désingularisations de singularités quotient

Pan Feng

Abstract. In this work, we present a constructive method to obtain algebraic resolutions of quotient singularities, i.e. singularities of the quotients of an affine space by a finite subgroup of the general linear group. Our method depend essentially on the theory of toric varieties, so are different from H.Hironaka's general method.

Résumé. Dans ce travail, nous présentons une méthode constructive pour obtenir des résolutions algébriques des singularités quotient, i.e. singularités des quotients d'un espace affine par un sous-groupe fini du groupe linéaire général. Celle-ci repose de façon essentielle sur des méthodes toriques, est donc différente de la méthode générale de Hironaka.

Mots Clés: singularité quotient, désingularisation.

Classification AMS: 14A10, 14B05, 14H20, 14L30.

Introduction. Dans ce travail nous présentons une méthode constructive pour obtenir des désingularisations algébriques des singularités quotient $\mathbb{C}^n/G$, avec $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ un sous-groupe fini. Celle-ci repose de façon essentielle sur des méthodes toriques, est donc différente de la méthode générale de Hironaka [16].

Les désingularisations et diverses propriétés des singularités quotient pour $n = 2$ ont été étudiées et sont assez bien connues ([1], [4], [7], [10], [11], [13], [24], parmi d'autres). Le cas $n = 3$ est aussi beaucoup étudié, mais des résolutions explicites des $\mathbb{C}^3/G$ sont construites plutôt pour des sous-groupes finis de $SL(3, \mathbb{C})$ ([2], [17], [18], [25] $\cdots$). Quand $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ est abélien, $\mathbb{C}^n/G$ est une variété torique qui peut être associée à un cône simplicial, on peut donc utiliser des méthodes toriques pour trouver des désingularisations ([19] ou [20]). Quand G est cyclique, il y a aussi une méthode directe de désingulariser $\mathbb{C}^n/G$ ([8]).

Considérons $X := \mathbb{C}^n$ comme une G-variété. Pour obtenir une désingularisation de X/G, nous construisons d'abord une G-variété X' à partir de $X := \mathbb{C}^n$ en faisant des éclatements successifs de centres G-stables et lisses, telle que le groupe d'isotropie de tout point de X' soit abélien. On appelle X' un G-modèle équivariant abélien de X (théorème 1). Toutes les singularités de X'/G sont des singularités toriques simpliciales (singularités quotient d'un groupe abélien fini), on peut donc considérer X'/G comme une résolution partielle de X/G. Pour $n = 3$, telles X' ont été construites dans [21], où X'/G est appelée modèle à singularités toriques simpliciales de X/G. Ensuite on définit une stratification $\mathcal{S}$ de X' et on montre l'existence d'un recouvrement naturel $\mathcal{R}$ de X' qui est compatible avec cette stratification, tel que chaque élément de $\mathcal{R}$ soit un ouvert de X' qui est la réunion disjointe de strates et qui est isomorphe à un ouvert d'une variété torique. Après avoir obtenu des résultats préliminaires concernant des variétés toriques munies d'une action d'un groupe non abélien, nous construisons des modifications toriques $\widetilde{U}$ pour chaque U dans $\mathcal{R}$ et montrons que ces modifications sont compatibles avec l'action du groupe G et peuvent se recoller. Et on vérifie que le recollement des $\widetilde{U}$, noté $\widetilde{X}$, est une G-variété et que son quotient $\widetilde{X}/G$ est une désingularisation de $X/G := \mathbb{C}^n/G$.

1 Rappels et notations.

Dans tout ce qui suit, les variétés considérées sont algébriques définies sur $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes.

Rappelons d'abord quelques notions élémentaires. Soient V une variété réduite et $Sing(V)$ le lieu singulier de V. Une *désingularisation* de V est une variété lisse $\hat{V}$ munie d'un morphisme propre et birationnel φ dans V tel que φ soit un isomorphisme de $\hat{V} \setminus \varphi^{-1}(Sing(V))$ dans $V \setminus Sing(V)$. On appelle un morphisme $\psi : V' \longrightarrow V$ une *modification* s'il induit un isomorphisme d'un ouvert dense de V' sur un ouvert dense de V.

Soient Z une sous-variété de V et $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux qui définit Z. Le couple (Z, φ), où $\varphi : V' \longrightarrow V$ est un morphisme, est appelé *l'éclatement de V de centre Z* si $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{V'}$ est inversible et que pour tout morphisme $\psi : V'' \longrightarrow V$ avec $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{V''}$ inversible, il existe un unique morphisme $h : V'' \longrightarrow V'$ tel que $\psi = \varphi \circ h$. Si φ vérifie ces deux conditions, on dit aussi que V' est l'éclatement de V de centre Z et on le note $Bl_Z V$ (ref. [15]). La sous-variété E_Z de V' définie par le faisceau d'idéaux $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{V'}$ est appelée *le diviseur exceptionnel* du morphisme φ.

Soient V une variété et G un groupe. On dit que V est une *G-variété* si elle est munie d'une action de G. Soit $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ un morphisme entre deux G-variétés, on dit que φ est un *G-morphisme* s'il est équivariant par rapport à G, i.e. pour tout $g \in G$, on a $g \circ \varphi = \varphi \circ g$.

Lemme 1.1 *Soient X une G-variété, V et W deux sous-variétés de X stables par G, telles que $V \subset W$. Alors*

(1) V et W sont des G-variétés,

(2) $Bl_V X$ est une G-variété et le morphisme $\varphi : Bl_V X \longrightarrow X$ est un G-morphisme,

(3) le diviseur exceptionnel E_V et la transformée stricte $\overline{W}$ de W sont stables par G, donc sont des G-variétés.

La démonstration est directe, on la omis.

Maintenant rappelons quelques notions et résultats de la théorie des variétés toriques dont nous aurons besoins dans la suite. Nous renvoyons à [19] et [20] pour plus de détails.

Soient N un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n et $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ son dual. Posons $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Un sous-ensemble $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ est appelé un *cône rationnel polyédral fortement convexe*, dans la suite on dira simplement un *cône*, si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ et il existe $u_1, \cdots, u_s \in N$ tels que $\sigma = \{a_1 u_1 + \cdots + a_s u_s \mid a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. Un cône σ dans $N_{\mathbb{R}}$ est dit *simplicial* s'il est engendré par des vecteurs $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, il est dit *régulier* s'il est engendré par un sous-ensemble d'une $\mathbb{Z}$-base de N. Sa dimension est par définition la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{\sigma - \sigma\}$ dans $N_{\mathbb{R}}$ engendré par σ. On dénote par $\check{\sigma}$ le *dual de σ* dans $M_{\mathbb{R}}$, i.e. $\check{\sigma} := \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid < x, y > \geq 0, \ \forall y \in \sigma\}$. Un sous-ensemble $\sigma' \subseteq \sigma$ est appelé une *face* de σ, notée $\sigma' \leq \sigma$, s'il existe un $m \in (M \cap \check{\sigma})$ tel que $\sigma' = \{y \in \sigma \mid < m, y >= 0\}$. Si de plus $\sigma' \neq \sigma$, on dit que σ' est une *face propre* de σ, notée $\sigma' < \sigma$. Un *éventail* (fini) Σ est une famille (finie) de cônes dans $N_{\mathbb{R}}$ telle que

-) si $\sigma \in \Sigma$ et $\tau < \sigma$, alors $\tau \in \Sigma$,

-) si $\sigma, \tau \in \Sigma$, alors $\sigma \cap \tau$ est une face commune de σ et de τ.

Une *décomposition rationnelle partielle polyédrale*, ou simplement *r.p.p.décomposition*, est un couple (N, Σ) constitué d'un $\mathbb{Z}$-module libre N de rang fini et un éventail Σ dans $N_{\mathbb{R}}$. Un *morphisme de r.p.p.décompositions* $h : (N, \Sigma) \longrightarrow (N', \Sigma')$ est un $\mathbb{Z}$-morphisme $h : N \longrightarrow N'$ avec $\mathrm{Coker}(h)$ fini, tel que pour tout $\sigma \in \Sigma$ il existe un $\sigma' \in \Sigma'$ satisfaisant $h_{\mathbb{R}}(\sigma) \subseteq \sigma'$, où $h_{\mathbb{R}}$ est l'extension scalaire $h_{\mathbb{R}} : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow N'_{\mathbb{R}}$. Soient Σ et Σ' deux éventails dans $N_{\mathbb{R}}$. On dit que Σ' est une *subdivison de* Σ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

-) Pour tout $\sigma' \in \Sigma'$, il existe un $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma' \subseteq \sigma$.

-) Les deux éventails Σ et Σ' ont le même support, i.e. $\bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \bigcup\limits_{\sigma' \in \Sigma'} \sigma'$.

Soit σ un cône dans $N_{\mathbb{R}}$. On définit $V_{\sigma,N} := \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$ où $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$ est l'algèbre associée au semi-groupe $\check{\sigma} \cap M$. On appelle $V_{\sigma,N}$ une *variété torique affine*. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le réseau N, on la note simplement V_σ. Si τ est une face de σ, alors il existe une immersion ouverte canonique de $V_{\tau,N}$ dans $V_{\sigma,N}$, en particulier le tore $T_N := V_{\{0\},N}$ est un ouvert de $V_{\sigma,N}$. On peut identifier M et le groupe des caractères de T_N, i.e. $M \simeq \mathrm{Hom}_{groupes\ alg\acute{e}briques}(T, \mathbb{C}^*)$, et identifier N et le groupe des sous-groupes à un paramètre de T_N, i.e. $N \simeq \mathrm{Hom}_{groupes\ alg\acute{e}briques}(\mathbb{C}^*, T_N)$. Supposons que Σ soit un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$. On définit la variété $V_{\Sigma,N}$ comme le recollement canonique des $V_{\sigma,N}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$; $V_{\Sigma,N}$ est lisse si et seulement si tout $\sigma \in \Sigma$ est un cône régulier. L'action de T_N sur chaque $V_{\sigma,N}$ est donnée par $(tx)(m) := t(m)x(m)$, pour tous $t \in T_N$, $m \in \check{\sigma} \cap M$ et $x \in V_{\sigma,N}$. Il existe une correspondance biunivoque entre Σ et l'ensemble des orbites du tore T_N dans $V_{\Sigma,N}$, qui associe à chaque cône $\sigma \in \Sigma$ l'orbite définie par $O_{\sigma,N} := \mathrm{Hom}_{gr}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*)$. Si il n'y a pas d'ambiguïté pour le réseau N, on la note simplement O_σ. On a $\dim(\sigma) + \dim(O_{\sigma,N}) = \dim(T_N)$ pour tout $\sigma \in \Sigma$, de plus $\tau \leq \sigma$ si et seulement si $O_{\sigma,N}$ est contenue dans l'adhérence de $O_{\tau,N}$. Dans $V_{\Sigma,N}$, tous les ouverts affines stables par T_N sont de forme $V_{\sigma,N}$ qui est égal à $\coprod\limits_{\tau \leq \sigma} O_{\tau,N}$.

Soit Σ' une subdivision de Σ. Alors le morphisme canonique $\pi : V_{\Sigma',N} \longrightarrow V_{\Sigma,N}$ induit par les inclusions $\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M] \subseteq \mathbb{C}[\check{\sigma'} \cap M]$, pour tous $\sigma' \subseteq \sigma$, avec $\sigma \in \Sigma$ et $\sigma' \in \Sigma'$ est propre birationnel équivariant par rapport à T_N. Le lieu exceptionnel E de π est la réunion des orbites $O_{\sigma'} \subset V_{\Sigma'}$, avec $\sigma' \in \Sigma'$ mais $\sigma' \notin \Sigma$. Pour la démonstration voir ([12] page 199).

Soient (N', Σ') et (N'', Σ'') deux r.p.p.décompositions. On a $V_{\Sigma',N'} \times V_{\Sigma'',N''} = V_{\Sigma' \times \Sigma'', N' \times N''}$, où $\Sigma' \times \Sigma''$ est l'éventail dans $(N' \times N'')_{\mathbb{R}} = N'_{\mathbb{R}} \times N''_{\mathbb{R}}$ constitué des cônes $\sigma = \sigma' \times \sigma''$, avec $\sigma' \in \Sigma'$ et $\sigma'' \in \Sigma''$. Plus généralement on a la proposition suivante pour des fibrés toriques équivariants ([20]).

Proposition 1.2 *Soient $h : (N, \Sigma) \longrightarrow (N', \Sigma')$ un morphisme de r.p.p.décompositions et $f : V \longrightarrow V'$ le morphisme dominant équivariant associé à h, avec $V := V_{\Sigma,N}$ et $V' := V_{\Sigma',N'}$. Notons $N'' := ker\,[h : N \longrightarrow N']$. Supposons que (N'', Σ'') soit une r.p.p.décomposition. Alors $f : V \longrightarrow V'$ est un fibré équivariant avec la fibre typique $V'' := V_{\Sigma'',N''}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) Le morphisme $h : N \longrightarrow N'$ est surjectif.

(ii) Il existe une r.p.p.décomposition $(N, \widetilde{\Sigma}')$ avec $\widetilde{\Sigma}' \subseteq \Sigma$, et pour tout $\sigma' \in \Sigma'$ il existe un unique $\widetilde{\sigma}' \in \widetilde{\Sigma}'$ tel que h induise une bijection $h : \widetilde{\sigma}' \longrightarrow \sigma'$.

(iii) Chaque $\sigma \in \Sigma$ peut s'écrire de manière unique comme $\sigma = \widetilde{\sigma}' + \sigma'' = \{\widetilde{y}' + y'' \mid \widetilde{y}' \in \widetilde{\sigma}',\ y'' \in \sigma''\}$, avec $\widetilde{\sigma}' \in \widetilde{\Sigma}'$ et $\sigma'' \in \Sigma''$.

Supposons que H soit un sous-groupe fini d'ordre r du tore T_N, notons $\omega := \exp(\frac{2i\pi}{r})$. Alors pour chaque élément $h \in H$, il existe des entiers $a_1(h), \cdots, a_n(h)$ compris entre 0 et $r-1$, tels que $h = (\omega^{a_1(h)}, \omega^{a_2(h)}, \cdots, \omega^{a_n(h)})$. Posons $a_h := \frac{1}{r}(a_1(h), \cdots, a_n(h))$, vu comme un point dans $N_{\mathbb{R}}$. On définit $N^1 := N + \sum_{h \in H} \mathbb{Z} \cdot a_h$, N^1 est un sur-réseau de N. Notons $M^1 := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^1, \mathbb{Z})$ le dual de N^1. Alors M^1 est un sous-réseau de M. L'action de H sur un monôme $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ est donnée par $H \ni h : x^m \longrightarrow \omega^{h(m)} x^m$, avec $h(m) := < a_h, m >= \sum_{i=1}^n a_i(h) m_i$. Donc

$$x^m \text{ invariant par } H \Longleftrightarrow < a_h, m > \in \mathbb{Z}, \forall h \in H \Longleftrightarrow m \in M^1 \quad .$$

Soit σ un cône dans $N_{\mathbb{R}} = N^1_{\mathbb{R}}$, alors $V_{\sigma,N^1} := \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M^1] = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]^H$, on obtient

Lemme 1.3 *Il existe un isomorphisme canonique de V_{σ,N^1} dans le quotient de $V_{\sigma,N}$ par H, i.e. $V_{\sigma,N^1} \simeq V_{\sigma,N}/H$. De même manière, si Σ est un éventail dans $N_{\mathbb{R}}$, alors on a $V_{\Sigma,N^1} \simeq V_{\Sigma,N}/H$.*

Maintenant soient $X := \mathbb{C}^n$ et $G_0 \subset GL(n, \mathbb{C})$ un sous-groupe abélien fini. Soit $X = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ une décomposition de X en somme directe de sous-espaces vectoriels telle que la restriction de g sur chaque E_i soit une homothétie, pour tous $g \in G_0$ et $0 \leq i \leq k$. Soit $G_1 \subset GL(n, \mathbb{C})$ le sous-groupe constitué des éléments qui stabilisent tous les E_i, G_1 est naturellement isomorphe à $GL(d_0, \mathbb{C}) \times \cdots \times GL(d_k, \mathbb{C})$, avec d_i la dimension de E_i pour $0 \leq i \leq k$.

Soient N un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n, $M := \check{N}$ son dual. Posons $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Soient $\{e_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq d_i\}$ une $\mathbb{Z}$-base de N et $C \subset N_{\mathbb{R}}$ le cône régulier engendré par les $e_{i,j}$, avec $0 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq d_i$. Alors $X \simeq V_{C,N} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[\check{C} \cap M]$. Une fois qu'on a fixé une base de X, on obtient un isomorphisme précis de X dans $V_{C,N}$. Notons C_i le cône engendré par $\{e_{i,j}\}_{1 \leq j \leq d_i}$, on a $C = C_0 \times C_1 \times \cdots \times C_k$. Soient Σ_{0i} la subdivision élémentaire de C_i de centre $e'_i := \sum_{j=1}^{d_i} e_{i,j}$, $\sigma :=< e'_0, \cdots, e'_k >$ le cône engendré par les E'_i et $F_\sigma := \sigma - \sigma$. Posons $\Sigma_0 := \Sigma_{00} \times \cdots \times \Sigma_{0k}$. Soient Π une subdivision de σ et Σ_Π la subdivision de Σ_0 induite par Π. On a

Proposition 1.4

(1) La variété $Y_0 := V_{\Sigma_0,N}$ est isomorphe à $Bl_{\{0\}}E_0 \times \cdots \times Bl_{\{0\}}E_k$, est donc un fibré vectoriel de rang $k+1$ ayant $S := \mathbb{P}(E_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_k)$ comme base.

(2) $V_{\Sigma_\Pi,N}$ est un fibré torique sur S avec les fibres isomorphes à $W := V_{\Pi,N\cap F_\sigma}$. Le groupe G_1 agit sur $V_{\Sigma_\Pi,N}$ en conservant la structure du fibré.

(3) Dans $V_{\Sigma_\Pi,N}$ tous les diviseurs exceptionnes irréductibles de formes $\overline{O_{L_{(e'_i)}}}$ sont contractibles avec $L_{(e'_i)}$ l'arrête portant e'_i, pour $0 \leq i \leq k$. Si on contracte certaines $\overline{O_{L_{(e'_i)}}}$, on obtient encore une variété torique normale munie d'une action de G_1 dont l'éventail associée est une subdivision du cône C.

Démonstration.

(1) Si on note $N_i := N \cap (C_i - C_i)$, alors $V_{\Sigma_{0i},N_i} \simeq Bl_{\{0\}}E_i$ est un fibré en droites sur $\mathbb{P}(E_i)$. Donc $V_{\Sigma_0,N} = V_{\Sigma_{00},N_i} \times \cdots \times V_{\Sigma_{0k},N_k}$ est ismorphe à un fibré vectoriel de rang $k+1$ sur $S := \mathbb{P}(E_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_k)$.

(2) Montrons que V_{Σ_Π} est un fibré torique sur S. Soient $\bar{N}$ un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $\sum_{i=0}^{k}(d_i - 1)$ et $\{u_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k,\ 1 \leq j < d_i\}$ une base de $\bar{N}$. Posons $\bar{N}_\mathbb{R} := \bar{N} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ et $u_{i,d_i} := -\sum_{i=0}^{d_i-1} u_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq k$. Soient D_i le cône engendré par $\{u_{i,j}\}_{1\leq j<d_i}$, et Δ_i l'éventail constitué des cônes engendrés par une sous-famille propre de $\{u_{i,j}\}_{1\leq j\leq d_i}$. Si on dénote $\bar{N}_i$ le sous-réseau de $\bar{N}$ engendré par les $u_{i,j}$ avec $1 \leq j < d_i$, alors c'est facile de voir que $V_{\Delta_i,\bar{N}_i}$ est un espace projectif de dimension $(d_i - 1)$. Posons $\Delta := \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_k$, on a $V_{\Delta,\bar{N}} \simeq S := \mathbb{P}(E_0) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_k)$. Définissons le $\mathbb{Z}$-morphisme $h : N \longrightarrow \bar{N}$ par $h(e_{i,j}) := u_{i,j}$, avec $0 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq d_i$. Alors $h : (N, \Sigma_\Pi) :\longrightarrow (\bar{N}, \Delta)$ est un morphisme de r.p.p.décompositions. D'après la proposition 1.2, le morphisme $\psi : V_{\Sigma_\Pi,N} \longrightarrow V_{\Delta,\bar{N}}$ est un fibré torique équivariant avec la fibre typique $V_{\Pi,N\cap F_\sigma}$.

Il est clair que G_1 agit sur S, montrons que cette action se relève en une action sur $V_{\Sigma_\Pi,N}$ en conservant la structure du fibré.

Pour tout $\pi \in \Pi$, notons $\Sigma_\pi := \{\beta \in \Sigma_\Pi \mid (\beta \cap \sigma) \subseteq \pi\}$, Σ_π est un éventail et on a $\Sigma_\Pi = \bigcup_{\pi\in\Pi} \Sigma_\pi$. Donc la famille des ouverts $\{V_{\Sigma_\pi,N}\}_{\pi\in\Pi}$ recouvre $V_{\Sigma_\Pi,N}$. Mêmes arguments montrent que chaque $V_{\Sigma_\pi,N}$ est un fibré torique S avec les fibres isomorphes à $V_{\pi,N\cap F_\sigma}$. Montrons que $V_{\Sigma_\Pi,N}$ est munie d'une action du groupe G_1 qui conserve la structure du fibré pour tout $\pi \in \Pi$.

Soit $x = ([a_{0,1}, \cdots, a_{0,d_1}], \cdots, [a_{k,1}, \cdots, a_{k,d_k}])$ un point dans S. Pour tout i, $0 \leq i \leq k$, il existe un $j_i \in \{1, ..., d_i\}$ tel que $a_{i,j_i} \neq 0$, i.e. $x \in V_{\delta_{j_0,j_1,\cdots,j_k},\bar{N}}$ avec

$$\delta_{j_0,j_1\cdots,j_k} :=< \{u_{i,j} \mid 0 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq d_i,\ j \neq j_i\} > \quad .$$

Puisque $G_1 \simeq GL(E_0,\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus GL(E_k,\mathbb{C})$, chaque $g \in G_1$ peut s'écrire comme $g^1 \oplus \cdots \oplus g^k$ avec $g^i \in GL(E_i,\mathbb{C})$, $0 \le i \le k$. Notons $g^i = (g^i_{j,l})_{1\le j,l\le d_i}$ la matrice associée à g^i. Alors $g(x) = ([a'_{0,1},\cdots,a'_{0,d_0}],\cdots,[a'_{k,1},\cdots,a'_{k,d_k}])$, où $a'_{i,l_i} := \sum_{m=1}^{d_i} g^i_{l_i,m} a_{i,m}$ pour $0 \le i \le k$ et $1 \le l_i \le d_i$. Comme chaque g^i est inversible, il existe pour tout i un j'_i compris entre 1 et d_i, tel que $a'_{i,j'_i} \neq 0$.
Soit $\{v_1,\cdots,v_q\}$ l'ensemble des vecteurs primitifs extrémaux de π. Puisque $\pi \subseteq \sigma$, il existe une matrice à coefficients entiers $A := (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le q\\ 0\le j\le k}}$, telle que $v_i = \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} e'_j$ pour $1 \le i \le q$. Considérons la trivialisation locale du fibré torique $p : V_{\tau_{j_0,j_1,\cdots,j_k},N} \longrightarrow V_{\delta_{j_0,j_1,\cdots,j_k},\bar{N}}$ avec $\tau_{j_0,j_1,\cdots,j_k} := \pi \oplus < \{e_{i,j} \mid 0 \le i \le k,\ 1 \le j \le d_i,\ j \neq j_i\} >$. Si on note $\{e^{i,j} \mid 0 \le i \le k,\ 1 \le j \le d_i\}$ la base de M qui est le dual de la base $\{e_{i,j}\}$ de N, alors le système minimal générateur de $(\check{\tau}_{j_0,\cdots,j_k} \cap M)$ est de la forme suivante,

$$\{e^{0,1}-e^{0,j_0},\cdots,e^{0,d_0}-e^{0,j_0};\cdots;e^{k,1}-e^{k,j_k},\cdots,e^{k,d_k}-e^{k,j_k};v^1,\cdots,v^p\} \quad ,$$

où les v^s, $1 \le s \le p$, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des e^{i,j_i}. Il existe donc une (p,k)-matrice à cefficients entiers, notée $(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 0\le j\le k}}$, telle que $v^i = \sum_{l=0}^{k} c_{i,l} e^{l,j_l}$, $1 \le i \le p$. On en déduit que $V_{\delta_{j_0,\cdots,j_k},\bar{N}} \simeq \text{Spec } \bar{A}_{j_0,\cdots,j_k}$ avec

$$\bar{A}_{j_0,\cdots,j_k} := \mathbb{C}[\frac{x_{0,1}}{x_{0,j_0}},\cdots,\frac{x_{0,d_0}}{x_{0,j_0}};\cdots;\frac{x_{k,1}}{x_{k,j_k}},\cdots,\frac{x_{k,d_k}}{x_{k,j_k}}] \quad ,$$

et $V_{\tau_{j_0,\cdots,j_k},N} \simeq \text{Spec } A_{j_0,\cdots,j_k}$ avec

$$A_{j_0,\cdots,j_k} := \mathbb{C}[\frac{x_{0,1}}{x_{0,j_0}},\cdots,\frac{x_{0,d_0}}{x_{0,j_0}};\cdots;\frac{x_{k,1}}{x_{k,j_k}},\cdots,\frac{x_{k,d_k}}{x_{k,j_k}};\prod_{r=0}^{k}(x_{r,j_r})^{c_{1,r}},\cdots,\prod_{r=0}^{k}(x_{r,j_r})^{c_{p,r}}] \quad .$$

Le morphime p^* induit par p est alors l'injection de $\bar{A}_{j_0,\cdots,j_k}$ dans $A_{j_0,\cdots,j_k}$. Ainsi on a montré que $p^{-1}(x) = \text{Spec } A_x$, avec $A_x := \mathbb{C}[\prod_{r=0}^{k}(x_{r,j_r})^{c_{1,r}},\cdots,\prod_{r=0}^{k}(x_{r,j_r})^{c_{p,r}}]$. De même manière on peut montrer que $p^{-1}(x') = \text{Spec } A_{x'}$, avec $A_{x'} := \mathbb{C}[\prod_{r=0}^{k}(x_{r,j'_r})^{c_{1,r}},\cdots,\prod_{r=0}^{k}(x_{r,j'_r})^{c_{p,r}}]$. Notons $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X. Alors l'isomorphisme $g^* : K(X) \longrightarrow K(X)$ est définit par $g^*(x_{i,l'_i}) = \sum_{m=1}^{d_i} g^i_{l'_i,m} x_{i,m}$. Posons $y_i := \prod_{r=0}^{k}(x_{r,j_r})^{c_{i,r}}$ et $y'_i := \prod_{r=0}^{k}(x_{r,j'_r})^{c_{1,r}}$, on obtient $A_x = \text{Spec } [y_1,...,y_p]$ et $A_{x'} = \text{Spec } [y'_1,...,y'_p]$. Un calcul direct donne $g^*(y_i') = (\prod_{r=0}^{k}(\frac{a'_{r,j'_r}}{a_{r,j_r}})^{c_{i,r}})y_i$. D'après l'hypothèse, les a_{r,j_r} et a'_{r,j'_r}, $0 \leq r \leq k$, sont tous différents de zéro. On en déduit que $g_x^* : A_{x'} \longrightarrow A_x$ est un isomorphisme. Par conséquent $g_x : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(x')$ est un isomorphisme et donc g est un automorphisme du fibré torique $V_{\Sigma_\pi,N}$. Le fait que g est un élément quelconque de G_1, implique que G_1 agit sur $V_{\Sigma_\pi,N}$.

D'autre part c'est facile de vérifier que si π et π' sont deux cônes dans Π avec $\pi < \pi'$, alors l'action de G_1 sur $V_{\Sigma_\pi,N}$ est la restricition de celle de G_1 sur $V_{\Sigma_{\pi'},N}$. Donc G_1 agit sur $V_{\Sigma_\Pi,N}$. La deuxième assertion est démontrée.

(3) Duitte à changer les indices, supposons qu'on contracte les $L_{(e'_{i'})}$ à partir de Σ_Π, avec $0 \leq i' \leq i$. Pour chaque $L_{(e'_i)}$, on définit $\beta_{L_{(e'_i)}} := \min\{\tau < C \mid L_{(e'_i)} \subset \tau\}$. Alors l'ensemble obtenu, noté $\Sigma_\Pi^{(i)}$, est égal à $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ avec $\mathcal{E}_1 := \{\tau \in \Sigma_\Pi \mid \tau \cap L_{(e'_{i'})} = \{0\},\ 0 \leq i' \leq i\}$, et $\mathcal{E}_2 := \{< \tau, \beta_{L_{(e'_{j_1})}}, \cdots, \beta_{L_{(e'_{j_h})}} >\mid \tau \in \mathcal{E}_1, 0 \leq j_1 < \cdots < j_h \leq i, < \tau, L_{(e'_{j_1})}, \cdots, L_{(e'_{j_h})} > \in \Sigma_\Pi\}$. On vérifie que $\Sigma_\Pi^{(i)} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ est bien un éventail.

L'adhérence de chaque orbite $O_{L_{(e'_j)}}$, $0 \leq j \leq i$, est stable par G_1, car $\overline{O_{L_{(e'_j)}}} = V_{\Sigma_{L_{(e'_j)}},N} \setminus [\bigcup_{L_{(e'_j)} < \pi \in \Pi} V_{\Sigma_\pi,N}]$. Puisque le morphisme canonique de $V_{\Sigma_\Pi,N}$ dans $V_{\Sigma_\Pi^{(i)},N}$ contracte exactement les diviseurs $\overline{O_{L_{(e'_j)}}}$ avec $0 \leq j \leq i$, on en déduit que $V_{\Sigma_\Pi^{(i)},N}$ est une G_1-variété et que cette contraction est équivariant par rapport à G_1. $\square$

Remarque 1.5 *Notations comme précédement, si Π' est une subdivision de Π, alors le morphisme canonique $\varphi : V_{\Sigma',N} \longrightarrow V_{\Sigma,N}$ est un morphisme de fibrés toriques et équivariant par rapport à G_1.*

2 Modèles équivariants abéliens.

2.1 Construction de Modèles équivariants abéliens.

Maintenant soit G un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{C})$, qui opère sur l'espace affine $X := \mathbb{C}^n$. D'après les travaux de Chevalley ([6]) et de Prill ([22]), on sait que X/G est lisse si et seulement si G est engendré par des *pseudo-reflexions*, i.e. des éléments qui ont 1 comme une valeur propre de multiplicité $(n-1)$. De plus toute singularité quotient d'un groupe fini est isomorphe à une singularité quotient d'un groupe fini et *petit*, i.e. ne contenant aucune pseudo-reflexion. Donc dans notre travail on suppose que le groupe G soit petit.

Pour tout sous-groupe H de G, on définit V_H comme le sous-espace linéaire maximal de X, stable par H, tel que l'action de H sur V_H soit abélienne. Soient H' le commutateur de H dans G, i.e. $H' := [H, H]$, et $V^{H'}$ le sous-espace invariant par tout élément de H'. On a $V_H = V^{H'}$. En effet $\forall g_1, g_2 \in H$ et $\forall x \in X$, $g_1g_2(x) = g_2g_1(x)$ si et sueulement si $g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2(x) = x$. Définissons Ξ comme l'ensemble de toutes les intersections de V_H, avec H un sous-groupe de G, i.e.

$$\Xi := \{V^{H'_1} \cap \cdots \cap V^{H'_k} \mid H'_i := [H_i, H_i], H_i \subseteq G, 1 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N}\},$$

Ξ est partiellement ordonné par l'inclusion, fermé par l'intersection et stable par G, i.e. $\forall\, V \in \Xi$, $\forall\, g \in G$, on a $g(V) \in \Xi$. On remarque que $X \in \Xi$, et que $\Xi = \{X\}$ si et seulement si G est abélien. Dans la suite on suppose que G soit non abélien.

Posons $\Xi_i := \{V \in \Xi \mid dim(V) = i\}$, Ξ_i peut être vide pour certains $i \in \{0, ..., n\}$. Soit $\{r_0, r_1, \cdots, r_\nu, r_{\nu+1}\} \subseteq \{0, ..., n\}$, avec $0 \leq r_0 < r_1 < \cdots < r_\nu < r_{\nu+1} = n$, tel que $\Xi_i \neq \phi$ si et seulement si $i \in \{r_0, \cdots, r_{\nu+1}\}$. Puisque G est non abélien et que Ξ est fermé par l'intersection, alors $\Xi_n = \{X\}$ et Ξ_{r_0} n'a qu'un seul élément V_G, qui est le minimum de Ξ.

Notons $X_0 := X$ et posons $X_1 := Bl_{V_G}X_0$. Les transformées strictes des V dans X_1, avec $V \in \Xi_{r_1}$, sont toutes lisses et deux à deux disjointes. On définit successivement $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ comme l'éclatement de X_i de centre W_i, avec W_i la réunion des transformé strictes de tous les $V \in \Xi_{r_i}$.

Proposition 2.1

(1) Pour tous $V \in \Xi \setminus \{X\}$ et $0 \leq i \leq \nu+1$, si $dim(V) \geq r_i$, alors la transformée stricte de V dans X_i, notée $\overline{V}^{(i)}$, est une sous-variété lisse; si $dim(V) < r_i$, il existe un unique diviseur exceptionnel irréductible et lisse dans X_i, noté $E_V^{(i)}$, tel que son image dans X soit égale à V.

(2) Soient $V_1, V_2 \in \Xi$ et $V = V_1 \cap V_2$ avec $dim(V_1) \geq r_i$, $dim(V_2) \geq r_i$. Alors si $dim(V) \geq r_i$, on a $\overline{V}_1^{(i)} \cap \overline{V}_2^{(i)} = \overline{V}^{(i)}$; si $dim(V) < r_i$, on a $\overline{V}_1^{(i)} \cap \overline{V}_2^{(i)} = \phi$.

(3) Toutes les X_i sont des G-variétés lisses et tous les f_i sont des G-morphismes.

Démonstration. Il est clair que ces trois assertions sont vraies pour $i = 0$. Supposons qu'elles soient vraies pour $i \leq k$, avec $k \leq \nu$.

(1) Soient $V \in \Xi_{k'}$ avec $k' > k$. D'après l'hypothèse de récurence, pour tout $V_1 \in \Xi_k$, $\overline{V_1}^{(k)} \cap \overline{V}^{(k)} \neq \phi$ si et seulement si $V_1 \subset V$. Ceci équivaut à $\overline{V_1}^{(k)} \subset \overline{V}^{(k)}$. Donc l'intersection $\overline{V}^{(k)} \cap W_k$ ou bien est vide, ou bien est la réunion disjointe de certaines composantes de W_k. Dans le premier cas $\overline{V}^{(k+1)}$ est isomorphe à $\overline{V}^{(k)}$. Dans le deuxième cas $\overline{V}^{(k+1)}$ est isomorphe à l'éclatement de $\overline{V}^{(k)}$ de centre $\overline{V}^{(k)} \cap W_k$ qui est une sous-variété lisse de $\overline{V}^{(k)}$. On voit que dans les deux cas $\overline{V}^{(k+1)}$ est lisse.

Pour chaque $V \in \Xi_{r_k}$ l'image inverse de $\overline{V}^{(k)}$ dans X_{k+1} est un diviseur exceptionnel irréductible et lisse, notée $E_V^{(k+1)}$. Il est clair que $f_0 \circ \cdots \circ f_{k+1}(E_V^{(k+1)}) = V$. Si $V \in \Xi$ avec $\dim(V) < r_k$, alors la transformée stricte de $E_V^{(k)}$ dans X_{k+1}, notée $E_V^{(k+1)}$, est irréductible et lisse, résulte du fait que $E_V^{(k)}$ est transversale avec $\overline{V'}^{(k)}$ pour tout $V \in \Xi_k$. Il est clair que $f_0 \circ \cdots \circ f_{k+1}(E_V^{(k+1)}) = V$.

(2) Soient $V_1, V_2 \in \Xi$ avec $dim(V_1) \geq r_{k+1}$ et $dim(V_2) \geq r_{k+1}$. Posons $V := V_1 \cap V_2$.
Si $dim(V) < r_k$, alors $\overline{V_1}^{(k)} \cap \overline{V_2}^{(k)} = \phi$, et par suite $\overline{V_1}^{(k+1)} \cap \overline{V_2}^{(k+1)} = \phi$.
Si $dim(V) > r_k$, alors $\overline{V_1}^{(k)} \cap \overline{V_2}^{(k)} = \overline{V}^{(k)}$, et donc $\overline{V_1}^{(k+1)} \cap \overline{V_2}^{(k+1)} = \overline{V}^{(k+1)}$.
Si $dim(V) = r_k$. Posons $W := V_1 + V_2$. Alors V_1 et V_2 sont transversales dans W. Ceci entraîne que $\overline{V_1}^{(k)}$ et $\overline{V_2}^{(k)}$ sont transversales dans $\overline{W}^{(k)}$. Quand on éclate $\overline{V}^{(k)}$, les transformées strictes de V_1 et de V_2 dans X_{k+1} sont séparées, i.e. $\overline{V_1}^{(k+1)} \cap \overline{V_2}^{(k+1)} = \phi$.

(3) Puisque les $\overline{V}^{(k)}$, avec $V \in \Xi_k$, sont lisses et deux à deux disjointes, leur réunion W_k est une sous-variété lisse de X_k. D'autre part il est clair que W_k est stable par G, on en déduit que X_{k+1} est une G-variété lisse et que le morphisme f_k est un G-morphisme (Lemme 1.1). □

Remarque 2.2 *Posons $X' := X_{\nu+1}$ et $E_V := E_V^{(\nu+1)}$ pour tout $V \in \Xi \setminus \{X\}$. La proposition précédente implique que pour tous $V_1, V_2 \in \Xi \setminus \{X\}$, $E_{V_1} \cap E_{V_2} \neq \phi$ si et seulement si $V_1 \subseteq V_2$ ou $V_2 \subseteq V_1$, et par suite plusieur diviseurs E_V ont une intersection non vide si et seulement si les sous-espaces correspondants forment un drapeau. Soit $x \in X'$, on appelle $\mathcal{D}_x := (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$* le drapeau associé à x, où $\{V_0, \cdots, V_k\} \subset \Xi$ et où les E_{V_i} sont les seuls diviseurs exceptionnels irréductibles passant par x pour $0 \leq i \leq k$.

Soit $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ un drapeau de sous-espaces linéaires de X. Posons $Y_1 := Bl_{V_0}X$. Successivement notons $\overline{V_i}$ la transformée stricte de V_i dans Y_i et posons $Y_{i+1} := Bl_{\overline{V_i}}Y$ avec $i = 0, ..., k$. On appelle Y_{k+1} *l'éclatement de X de centre $\mathcal{D}$*, noté $Bl_{\mathcal{D}}X$.

Lemme 2.3 *Dans X', les diviseurs exceptionnels $\{E_V\}_{V \in \Xi \setminus \{X\}}$ sont à croisements normaux. Et pour tout $x \in X'$, il existe un morphisme canonique $\varphi_x : X' \longrightarrow Bl_{\mathcal{D}_x}X$ tel qu'au voisinage de x, φ_x soit un isomorphisme.*

Démonstration. Soient $x \in X'$ et $\mathcal{D}_x = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ le drapeau associé. Soient $r_{d_i} = dim(V_i)$ avec $0 \leq i \leq k$ et posons $x_j := (f_j \circ \cdots \circ f_\nu)(x)$ pour tout $0 \leq j \leq \nu$. Si $j < d_0$ le morphisme $(f_0 \circ \cdots \circ f_j)$ de X_{j+1} dans X induit un isomorphisme au voisinage de x_j. Si $j \geq d_0$, l'image inverse de V_0 dans X_{j+1} est un diviseur, donc X_{j+1} domine $Bl_{V_0}X$. Le morphisme canonique de X_{d_0+1} dans $Bl_{V_0}X$ induit un isomorphisme au voisinage de x_{d_0+1}.

Posons $d_{k+1} := \nu + 1$ et $\mathcal{D}_i := (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_i)$ avec $0 \leq i \leq k$. Successivement on vérifie que X_j domine $Bl_{\mathcal{D}_i}X$ et que le morphisme canonique de X_j dans $Bl_{\mathcal{D}_i}X$ induit un isomorphisme au voisinage de x_j avec $d_i < j \leq d_{i+1}$. Notons φ_x le morphisme canonique de X' dans $Bl_{\mathcal{D}_x}X$. Alors φ_x induit un isomorphisme au voisinage de x.

Montrons que les diviseurs E_v, $V \in \Xi \setminus \{X\}$, sont à croisements normaux. Puisque c'est une propriété locale, il suffit de vérifier qu'elle est vraie au voisinage de chaque point $x \in X'$.

Soit $x \in X'$. Soit $\mathcal{D}_x = (V_0 \subset \cdots \subset V_k)$ le drapeau associé à x. D'après le 1), au voisinage de x la variété X' est isomorphe à $Bl_{\mathcal{D}_x}X$. Mais dans $Bl_{\mathcal{D}_x}X$ tous les diviseurs exceptionnels sont à croisements normaux. Par l'isomorphisme local on trouve que les E_{V_i}, avec $0 \leq i \leq k$ sont à croisement normal en x. □

Théorème 1 *Soient $X := \mathbb{C}^n$, G un sous-groupe fini non abélien de $GL(n, \mathbb{C})$, $\Xi := \{V^{H'_1} \cap \cdots \cap V^{H'_k} \mid H'_i := [H_i, H_i],\ H_i$ sous-groupe de G, $1 \leq i \leq k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Soit X' la variété obtenue à partir de X, par la suite des éclatements successifs des éléments de $\Xi \setminus \{X\}$, suivant l'ordre croissant des dimensions. Alors le groupe d'isotropie de tout point de X' est abélien.*

Démonstration. Prenons un point quelconque x dans X'. Soit $\mathcal{D}_x = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ le drapeau associé à x. Soit $g \in G_x$ où G_x est le groupe d'isotropie du point x. Pour chaque $V_i \in \mathcal{D}_x$, $E_{V_i} \cap g(E_{V_i}) \neq \phi$ car x est un point commun. Comme $g(E_{V_i}) = E_{g(V_i)}$, d'après la remarque 2.2 on obtient $g(V_i) = V_i$. Donc tous les V_i avec $0 \leq i \leq k$ sont stables par G_x. Considérons des morphismes surjectifs suivants:

$$G_x \to (G_x)_{|V_k} \to \cdots \to (G_x)_{|V_{j+1}} \to (G_x)_{|V_j} \to \cdots \to (G_x)_{|V_0}$$

où $(G_x)_{|V_i}$ avec $0 \leq i \leq k$ est l'image de G_x $(\subset GL(n, \mathbb{C}))$ dans $GL(V_i, \mathbb{C})$ par le morphisme de restriction.

D'abord $(G_x)_{|V_0}$ est abélien, i.e. pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $x' \in V_0$ on a $g_1 g_2(x') = g_2 g_1(x')$. En effet si $(G_x)_{|V_0}$ n'est pas abélien, on doit avoir $V_0 \not\subseteq V_{G_x}$. Posons $V' := V_0 \cap V_{G_x}$ et notons W l'élément minimal de Ξ contenant x_0 qui est l'image de x dans X, on a $W \subseteq V' \subset V_0$. La construction de X' montre que le diviseur exceptionnel E_W doit passer par x. Ceci contredit la minimalité de V_0.

Posons $V_{k+1} := X$. Supposons qu'on ait montré que la restriction de G_x sur V_j est abélienne, $0 \leq j \leq k$. Notons $V_{j+1,x}$ le sous espace linéaire minimal de X_0 contenant V_j dont la transformée stricte dans X_{d_j+1} contient $x_{j+1} := (f_{d_j+1} \circ \cdots \circ f_\nu)(x)$, avec $d_j := \dim V_j$. Alors $V_{j+1,x}$ est de dimension $r_{d_j} + 1$ et contient V_j qui est de dimension r_{d_j}. Soit $L_{j+1,x}$ un supplémentaire de V_j dans $V_{j+1,x}$ stable par G_x. On a $\dim(L_{j+1,x}) = 1$ et donc $(G_x)_{|L_{j+1,x}}$ est cyclique.

D'autre part $(G_x)_{|V_{j+1,x}}$ est isomorphe à un sous-groupe de $[(G_x)_{|V_j} \oplus (G_x)_{|L_{j+1,x}}]$. Comme les deux derniers sont abéliens, on en déduit que $(G_x)_{|V_{j+1,x}}$ l'est aussi.

On a un morphisme surjectif canonique de $(G_x)_{|V_{j+1}}$ dans $(G_x)_{|V_{j+1,x}}$ qui applique $g_{|V_{j+1}}$ à $g_{|V_{j+1,x}}$ pour tout $g \in G_x$. Supposons que $(G_x)_{|V_{j+1}}$ ne soit pas abélien. Posons $V' := V_{G_x} \cap V_{j+1}$ $V'' := min\{V \in \Xi \mid V \supseteq V_{j+1,x}\}$. Alors $x \in E_{V''}$ et $V_j \subset V'' \subset V_{j+1}$. Ceci contredit la maximalité de la suite $\{V_i\}_{i=0}^k$. On en conclut que $(G_x)_{|V_{j+1}}$ est abélien. Quand $j = k$ on trouve que G_x est abélien. □

On va appeller X' un G-modèle équivariant abélien de X. Le quotient X'/G n'a que des singularités toriques simpliciales (singularités quotient d'un groupe abélien fini), et peut être considéré comme une résolution partielle de X/G. Ainsi on a réduit toutes les singularités quotient en singularités quotient d'un groupe abélien fini. Ceci nous permet, au moins pour des résolutions locales, d'utiliser des méthodes toriques bien connues. Dans le cas de dimension 3, telles X' ont été construites dans [21].

Dans la construction de modèle équivariant abélien, on n'a utilisé que des éclatements de centres lisses qui sont tous globalement définis. On peut donc l'appliquer dans des cas plus généraux. Par exemple, si $Y := X^n$ est le n-produit cartésien d'une variété lisse X munie de l'action du groupe symétrique S_n qui permute les n facteurs, et si on pose $\Xi := \{Y^\sigma \mid \sigma \in S_n\}$, on obtient une construction directe de compactification de l'espace de configurations $F(X,n) := \{y \in Y \mid G_x = \{e\}\}$. On peut montrer qu'il existe un morphisme dominant de la compactification $\bar{X}[n]$ ainsi obtenue dans la compactification $X[n]$ de Fulton-MacPherson. [1]

2.2 Stratification de modèles équivariants abéliens.

Suite au premier chapitre, on va définir une stratification $\mathcal{S}$ du G-modèle équivariant abélien de $X := \mathbb{C}^n$. Fixons d'abord quelques notations.

Pour tout $g \in G$, on définit $W^g := \{x \in X' \mid g(x) = x\}$. Pour tout sous-groupe H dans G,on définit $W^H := \bigcap_{g \in H} W^g$. Soit $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ un drapeau de sous-espaces linéaires de X avec $V_i \in \Xi$ pour $0 \leq i \leq k$. On dit que $\mathcal{D}$ est stable par g, noté $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, si chaque V_i est stable par g. On dit que $\mathcal{D}$ est stable par H, si $\mathcal{D}$ est stable par tout élément de H. Posons $E_\mathcal{D} := \bigcap_{i=0}^k E_{V_i}$ et $G(\mathcal{D}) := \{g \in G \mid g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}\}$. On a $G(\phi) = G$ et $E_\phi := X'$.

Lemme 2.4 *Soient H un sous-groupe abélien de G, $\mathcal{D} \subset \Xi$ un drapeau. Alors*

- *si $\mathcal{D}$ est stable par H, $E_\mathcal{D} \cap W^H \neq \phi$ est une sous-variété lisse et fermée dans X',*
- *sinon, $E_\mathcal{D} \cap W^H = \phi$.*

Démonstration.

[1]pour la construction de $X[n]$, voir [9].

1) Supposons que $\mathcal{D}$ soit stable par H. On a montré que dans X' les diviseurs exceptionnels E_V avec $V \in \Xi \setminus \{X\}$ sont à croisements normaux (Lemme 2.3), et donc $E_{\mathcal{D}} = \bigcap_{V \in \mathcal{D}} E_V$ est une sous-variété lisse. Comme $\mathcal{D}$ est stable par H, tous les V et E_V avec $V \in \mathcal{D}$ sont stables par H, et par suite $E_{\mathcal{D}}$ est stable par H. Notons $Z_i := f_i \circ f_{i+1} \circ \cdots \circ f_\nu(E_{\mathcal{D}})$. Alors Z_0 contient l'origine qui est un point fixe de H. Supposons qu'il existe un point $x_i \in Z_i$ fixe par H. L'intersection de Z_{i+1} avec l'image inverse de x_i dans X_{i+1} est isomorphe à un espace projectif. Comme H est abélien et stabilise cette intersection, il existe un point $x_{i+1} \in f_i^{-1}(x_i) \cap Z_{i+1}$ tel que x_{i+1} soit fixe par H. Successivement on trouve un point $x_{\nu+1} \in Z_{\nu+1} := E_{\mathcal{D}}$ fixe par H. Ainsi on a montré que $E_{\mathcal{D}} \cap W^H \neq \phi$. Puisque $E_{\mathcal{D}}$ est lisse et que $E_{\mathcal{D}} \cap W^H$ est la sous-variété invariante par H dans $E_{\mathcal{D}}$, on en déduit que $E_{\mathcal{D}} \cap W^H$ est lisse. C'est clair qu'elle est aussi fermée dans X'.

2) Si $\mathcal{D}$ n'est pas stable par H. Il existe un $V \in \mathcal{D}$ et un $g \in H$ tels que $g(V) \neq V$. Ceci implique $g(E_V) \cap E_V = \phi$. Donc $E_V \cap W^g = \phi$, et par suite $E_{\mathcal{D}} \cap W^H = \phi$. □

Définissons $\mathcal{A}$ comme l'ensemble des composantes irréductibles de $E_{\mathcal{D}} \cap W^H$ pour tout couple $(H, \mathcal{D})$, avec H un sous-groupe abélien de G et $\mathcal{D} \subset \Xi$ un drapeau stable par H. D'après le lemme précédent, chaque élément $\overline{Z}$ de $\mathcal{A}$ est une sous-variété lisse et fermée de X'. Posons $\mathcal{A}_k := \{\overline{Z} \in \mathcal{A} \mid dim(\overline{Z}) = k\}$ avec $0 \leq k \leq n$. Définissons

$$\mathcal{S}_k := \{Z \subset X' \mid \exists\ \overline{Z_1} \in \mathcal{A}_k \ tel\ que\ Z = \overline{Z_1} \setminus (\bigcup_{\overline{Z'} \in \mathcal{A}, dim(\overline{Z'}) < k} \overline{Z'})\} \quad .$$

On remarque que le seul élément de dimension n dans $\mathcal{A}$ est $E_\phi \cap W^{\{e\}} = X'$. Donc le seul élément dans $\mathcal{S}_n$ est $Z_n = X' \setminus [(\bigcup_{g \in G \setminus \{e\}} W^g) \cup (\bigcup_{V \in \Xi \setminus \{X\}} E_V)]$. On définit la stratification $\mathcal{S}$ de X' comme la réunion disjointe des $\mathcal{S}_k$ avec $0 \leq k \leq n$. C'est facile de vérifier que $\mathcal{S}$ est une stratification de X' au sens de H.Whitney ([28]). Pour toute $Z \in \mathcal{S}$, on a les deux propriétés suivantes, qui résultent directement de la définition de $\mathcal{S}$:

1) $Z \subseteq E_{\mathcal{D}_Z}$ et $Z \cap E_V = \phi$ pour tout $V \in \Xi \setminus \mathcal{D}_Z$.

2) les points de Z ont le même drapeau associé, noté $\mathcal{D}_Z$. On va appeller $\mathcal{D}_Z$ *le drapeau associé à Z.*

Lemme 2.5 *Soit Z une strate dans $\mathcal{S}$. Définissons $G_0(Z) := \{g \in G \mid g(x) = x,\ \forall x \in Z\}$ et $G(Z) := \{g \in G \mid g(Z) = Z\}$. Alors on a*

1) $G_0(Z) = G_x$ pour tout $x \in Z$.

2) $G(Z) = \{g' \in G(\mathcal{D}_Z) \mid g \circ g' = g' \circ g,\ \forall g \in G_0(Z)\}$, où $G(\mathcal{D}_Z) = \{g \in G \mid g(\mathcal{D}_Z) = \mathcal{D}_Z\}$.

Démonstration.

1) Soient x_1, x_2 deux points dans Z. Soit G_{x_1} (resp. G_{x_2}) le groupe d'isotropie de x_1 (resp. de x_2). Comme Z est la strate contenant x_1, l'adhérence de Z dans X' est une composante irréductible de $E_{\mathcal{D}_{x_1}} \cap W^{G_{x_1}}$. Donc $x_2 \in W^{G_{x_1}}$. Ceci implique $G_{x_1} \subseteq G_{x_2}$. De même raison on a $G_{x_2} \subseteq G_{x_1}$. Par conséquent tous les points de Z ont le même groupe d'isotropie, noté $G_0(Z)$.

2) D'abord montrons que $G(Z)$ est contenu dans le centralisateur de $G_0(Z)$ dans $G(\mathcal{D}_Z)$. Soient $g \in G(Z)$ et $V \in \mathcal{D}_Z$. On a $Z \subset E_V$. Comme $g(Z) = Z$, on obtient $g(E_V) \cap E_V \neq \phi$. Ceci implique $g(V) = V$ (Remarque 2.2). On en déduit $G(Z) \subseteq G(\mathcal{D}_Z)$.
Notons $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans X', $\overline{Z}$ est une composante irréductible de $E_{\mathcal{D}_Z} \cap W^{G_0(Z)}$. Posons $Z_i := f_i \circ \cdots \circ f_\nu(\overline{Z})$ avec $0 \leq i \leq \nu$, et $Z_{\nu+1} := \overline{Z}$. Notons G_1 le sous-groupe engendré par $G_0(Z)$ et g. Chaque Z_i est fixe par $G_0(Z)$ et stable par g, donc stable par G_1. Dans Z_0 il y a un point fixe de G_1, par exemple l'origine de X. Supposons que G_1 ait un point fixe x_i dans Z_i avec $i \geq 0$. L'intersection de Z_{i+1} avec $f_i^{-1}(x_i)$ est isomorphe à un espace projectif. Comme elle est stable par g, elle contient un point fixe de g, noté x_{i+1}. On a déjà remarqué que Z_{i+1} est fixe par $G_0(Z)$. Donc x_{i+1} est fixe par G_1. Successivement on trouve dans $Z_{\nu+1} := \overline{Z}$ un point $x_{\nu+1}$ fixe par G_1. D'après le théorème 1, $G_{x_{\nu+1}}$ est abélien. Comme G_1 est contenu dans $G_{x_{\nu+1}}$, G_1 est aussi abélien. Par conséquent g commute avec tout élément de $G_0(Z)$.

Inversement supposons que g soit un élément du centralisateur de $G_0(Z)$ dans $G(\mathcal{D}_Z)$. Le groupe G_1 engendré par g et $G_0(Z)$ est abélien. D'autre part il est facile de voir que le morphisme canonique $\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ est équivariant par rapport à $G(\mathcal{D}_Z)$. En effet pour chaque $g \in G(\mathcal{D}_Z)$, g agit sur X' et sur Y_Z. De plus $g \circ \varphi$ est égal à $\varphi \circ g$ sur l'ouvert dense de X' où φ est localement un isomorphisme, donc ils sont égaux sur X' tout entier. Soit $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ et posons $V_{k+1} := X$. Prenons un supplémentaire V_{ii+1} de V_i dans V_{i+1} stable par $G(\mathcal{D}_Z)$ pour $0 \leq i \leq k$. Choisissons une base $\{e_{(0)}\}$ (resp. $\{e_{(i+1)}\}$) de V_0 (resp. V_{ii+1}) telle que sous cette base la restriction de tout élément de G_1 sur V_0 (resp. V_{ii+1}) soit diagonale. La réunion des $\{e_{(i)}\}$, $0 \leq i \leq k+1$, est une base de X. Sous cette base tout élément de G_1 est diagonal. Notons T le tore associé à cette base, $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ contient G_1 comme un sous-groupe fini. On peut considérer Y_Z comme une variété torique munie de l'action du tore T. Dans Y_Z, $\overline{\varphi_Z(Z)}$ est une composante de l'intersection des diviseurs exceptionnels avec l'ensemble des points fixes de $G_0(Z)$, est donc égale à l'adhérence d'une orbite du tore, et par suite stable par T. A fortiori elle est stable par g. Puisque $\varphi_Z(Z)$ est un ouvert dense de $\overline{\varphi_Z(Z)}$, l'égalité $g(\overline{\varphi_Z(Z)}) = \overline{\varphi_Z(Z)}$ implique que $g(\varphi_Z(Z)) \cap (\varphi_Z(Z)) \neq \phi$. Ceci équivaut à $g(Z) \cap Z \neq \phi$, car φ_Z est équivariant par rapport à G_1. Par conséquent $g(Z) = Z$ et donc $g \in G(Z)$. □

Proposition 2.6 *Soit $Z \in \mathcal{S}$. Le morphisme canonique $\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ est équivariant par rapport à $G(Z)$ et induit un isomorphisme au voisinage de Z' pour tout $Z' \in \mathcal{S}$ avec $Z \subseteq \overline{Z'}$.*

Démonstration. On a déjà vu dans le lemme précédent que $\varphi_{_Z}$ est équivariant par rapport à $G(\mathcal{D}_{_Z})$ et que $G(Z) \subseteq G(\mathcal{D}_{_Z})$, donc $\varphi_{_Z}$ est équivariant par rapport à $G(Z)$.

Soient $Z, Z' \in \mathcal{S}$ tels que $Z \subset \overline{Z'}$. Soit $\mathcal{D}_{_Z}$ (resp. $\mathcal{D}_{_{Z'}}$) le drapeau associé à Z (resp. Z'). On a $\mathcal{D}_{_{Z'}} \subseteq \mathcal{D}_{_Z}$. D'aprés le lemme 2.3, le morphisme canonique $\varphi_{_Z}$ (resp $\varphi_{_{Z'}}$) de X' dans Y_Z (resp. $Y_{Z'}$) est un isomorphisme au voisinage de Z (resp. Z'). Puisque $\varphi_{_{Z'}}$ se factorise par $\varphi_{_Z}$, on en conclut que $\varphi_{_Z}$ est un isomorphisme au voisinage de Z'. $\square$

Théorème 2 *Soient $X := \mathbb{C}^n$ l'espace affine muni d'une action d'un groupe fini $G \subset GL(n, \mathbb{C})$, X' le modèle équivariant abélien construit dans le théorème 1 et $\mathcal{S}$ la stratification de X' définie précédement. Soient Z_1 et Z_2 deux strates différentes dans $\mathcal{S}$, $G_0(Z_1)$ (resp. $G_0(Z_2)$) le sous-groupe de G qui laisse Z_1 (resp. Z_2) invariant et $G(Z_1)$ (resp. $G(Z_2)$) le groupe de stabilisateurs de Z_1 (resp. Z_2). Supposons que $Z_1 \subseteq \overline{Z_2}$. Alors on a*

$$G_0(Z_2) \subseteq G_0(Z_1) \subseteq G(Z_1) \subseteq G(Z_2) \quad .$$

Démonstration. La deuxième inclusion est évidente. D'autre part tout élément $g \in G_0(Z_2)$ fixe Z_2, donc fixe $\overline{Z_2}$ aussi, et par suite fixe Z_1. Ceci montre la première inclusion.

Notons $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) le drapeau associé à Z_1 (resp. Z_2). D'après le lemme précédent $G(Z_1)$ est constitué des éléments de G qui à la fois commutent avec tout élément de $G_0(Z_1)$ et stabilisent le drapeau $\mathcal{D}_1$. Chaque $g \in G(Z_1)$ commute avec tout élément de $G_0(Z_2) \subseteq G_0(Z_1)$, et qtabilise $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1$. Par conséquent $G(Z_1) \subseteq G(Z_2)$. $\square$

2.3 Recouvrement ouvert de modèles équivariants abéliens.

Pour toute strate $Z \in \mathcal{S}$, definissons U_Z comme la réunion des strates qui contiennent Z dans leur adhérances, i.e. $U_Z := \bigcup_{Z' \in \mathcal{S}, Z \subseteq \overline{Z'}} Z'$.

Théorème 3

1) Pour toute strate $Z \in \mathcal{S}$, l'ensemble U_Z défini ci-dessus est un ouvert de X' stable par $G(Z)$. La famille $\mathcal{R} := \{U_Z \mid Z \in \mathcal{S}\}$ est fermée pour l'intersection et recouvre X'.

2) Le morphisme canonique $\varphi_{_Z} : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ est $G(Z)$-équivariant et induit un isomorphisme sur U_Z. Pour tout tore maximal contenant $G_0(Z)$ tel que Y_Z soit munie d'une structure torique, l'image de chaque $Z' \subseteq U_Z$ est un ouvert dense de l'adhérence d'une orbite du tore.

Avant de montrer ce théorème, commençons par quelques résultats préliminaires. Fixons une métrique sur X invariante par G. Pour voir l'existence d'une telle métrique on peut définir par exemple $(x, y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} < g(x), g(y) >$, avec $< \cdot >$ le produit hermitien habituel dans X. La forme quadratique $q(x) := (x, x)$ est définie positive et invariante par G, donc induit une métrique sur X invariante par G. Dans tout ce qui suit, quand on parle de l'orthogonalité, c'est toujours par rapport à cette métrique invariante.

Soit $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ un drapeau non vide de sous-espaces linéaires de X. On appelle $X = V_0 \oplus V_{0,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,i+1} \oplus \cdots \oplus V_{k,k+1}$ *la décomposition de* X *associée à* $\mathcal{D}$, où $V_{i,i+1}$ est l'orthogonal de V_i dans V_{i+1}, avec $0 \le i \le k$ et $V_{k+1} := X$. Si $\mathcal{D} = \phi$, la décomposition associée est par définition $X = X$.

Soient $X = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$ et $X = V'_0 \oplus \cdots \oplus \cdots V'_{k'}$ deux décompositions en somme directe des sous-espaces linéaires. On dit que la première est plus fine que la deuxième si pour chaque V_i, il existe un V'_j tel que $V_i \subseteq V'_j$. Si de plus $k' < k$, on dit que la première décomposition est strictement plus fine que la deuxième.

Soient $Z \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ le drapeau associé. Soit $X = V_0 \oplus V_{0,1} \oplus \cdots \oplus V_{k,k+1}$ la décomposition de X associée à $\mathcal{D}_Z$. On appelle $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$ *la décomposition de* X *associée à* Z, où $\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j}$ est la décomposition canonique en modules isotypiques de la sous-représentation de $G_0(Z)$ dans $V_{i-1,i}$, avec $0 \le i \le k+1$ et $V_{-1,0} := V_0$. [2] On remarque que la restriction de tout élément de $G_0(Z)$ sur chaque $E_{i,j}$ est une homothétie. Si la métrique invariante est fixée, les $E_{i,j}$ sont uniquement déterminés à ordre près, car les $V_{i-1,i}$ sont uniquement déterminés.

On peut vérifier que si Z et Z' deux strates dans $\mathcal{S}$ avec $Z \subset \overline{Z'}$, alors la décomposition de X associée à $\mathcal{D}_Z$ (resp. Z) est plus fine que celle associée à $\mathcal{D}_{Z'}$ (resp. Z').

Lemme 2.7 *Soient $Z \in \mathcal{S}$, $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset \cdots \subset V_k)$ et $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$ la décomposition de X associée à Z. Alors il existe $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k+1}$ avec $1 \le \lambda_i \le l_i$, telle que l'adhérence de Z dans X' est égale à l'intersection de $E_{\mathcal{D}_Z} := \bigcap_{0 \le i \le k} E_{V_i}$ avec la transformée stricte de l'espace $F_Z := E_0 \oplus E_{1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{k+1,\lambda_{k+1}}$, où E_0 est le sous-espace de V_0 invariant par $G_0(Z)$.*

Démonstration. Soient E'_i le diviseur exceptionnel irréductible dans $Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ qui est contracté sur V_i et $E'_{\mathcal{D}_Z} := \bigcap_{i=0}^k E'_i$. Montrons que $E'_{\mathcal{D}_Z} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{k,k+1})$. Si $\mathcal{D} = \phi$, on pose $k = -1$. C'est facile de vérifier que ceci est vrai pour $k = -1$ ou 0. Supposons qu'il soit vrai pour $k < j$ avec $j > 0$. Posons $\mathcal{D}_i := (V_0 \subset \cdots \subset V_i)$ et définissons $f_i : Bl_{\mathcal{D}_i} X \longrightarrow Bl_{\mathcal{D}_{i-1}} X$ comme l'éclatement de $Bl_{\mathcal{D}_{i-1}} X$ de centre la transformée stricte de V_i, avec $0 \le i \le j$ et $\mathcal{D}_{i-1} := \phi$. Notons E'_i le diviseur exceptionnel irréductible dans $Bl_{\mathcal{D}_{j-1}} X$ qui est contracte sur V_i avec $0 \le i \le j-1$, et $E'_{\mathcal{D}_{j-1}} := \bigcap_{i=0}^{j-1} E'_i$. La transformée stricte de V_j dans $Bl_{\mathcal{D}_j} X$, notée $\overline{V_j}^{(j-1)}$, est isomorphe à $Bl_{\mathcal{D}_{j-1}} V_j$. D'après l'hypothèse de récurence, on a les deux isomorphismes suivants

$$E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1}) \quad ,$$

$$E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V_j}^{(j-1)} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{j-1,j}) \quad .$$

[2] Pour la décomposition canonique d'une représentation linéaire, voir ([27] page 33).

Puisque $\overline{V_j}^{(j-1)}$ et les E'_i, $0 \leq i < j$, sont transversales dans $Bl_{\mathcal{D}_{j-1}}X$, on a $E'_{\mathcal{D}} = f_j^{-1}(E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V_j}^{(j-1)})$ et $f_j^{-1}(E'_{\mathcal{D}_{j-1}})) = (Bl_{(E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V_j}^{(j-1)})} E'_{\mathcal{D}_{j-1}})$. Or $E'_{\mathcal{D}}$ est égal au diviseur exceptionnel de l'éclatement de $E'_{\mathcal{D}_{j-1}}$ de centre $E'_{\mathcal{D}_{j-1}} \cap \overline{V_j}^{(j)}$, on en déduit que

$$E'_{\mathcal{D}} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{j-2,j-1}) \times \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})}\mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})) \quad ,$$

où $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})}\mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})$ est le fibré normal de $\mathbb{P}(V_{j-1,j})$ dans $\mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})$. Puisque

$$(\mathcal{N}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})}\mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})}(1) \simeq \mathbb{P}(V_{j-1,j}) \times V_{j,j+1} \quad ,$$

on obtient $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{P}(V_{j-1,j})}\mathbb{P}(V_{j-1,j} \oplus V_{j,j+1})) \simeq \mathbb{P}(V_{j-1,j}) \times \mathbb{P}(V_{j,j+1})$, et par suite $E'_{\mathcal{D}_Z} \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{k,k+1})$.

Posons $Y_Z^{G_0(Z)} := \{y \in Y_Z \mid g(y) = y, \forall g \in G_0(Z)\}$. D'après la définition de la décomposition associée, les $V_{i,i+1}$ et V_0 sont tous stables par $G_0(Z)$ et chaque $\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j}$ est la décomposition la moins fine de $V_{i-1,i}$ telle que la restriction de tout élément de $G_0(Z)$ sur chaque $E_{i,j}$ soit une homothétie. On en déduit que chaque composante irréductible de $E'_{\mathcal{D}_Z} \cap Y_Z^{G_0(Z)}$ est sous la forme $E_0 \times \mathbb{P}(E_{1,\lambda_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{k+1,\lambda_{k+1}})$ avec $1 \leq \lambda_i \leq l_i$, est donc égal à l'intersection de $E'_{\mathcal{D}_Z}$ avec la transformée stricte de l'espace $F_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}} := E_0 \oplus E_{1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{k+1,\lambda_{k+1}}$.

D'après la proposition 2.6, le morphisme $\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z}X$ est équivariant par rapport à $G(Z)$ et induit un isomorphisme au voisinage de Z. Donc $\overline{\varphi_Z(Z)}$ est contenue dans une composante irréductible de $Y_Z^{G_0(Z)} \cap (\bigcap_{i=0}^k \varphi_Z(E_{V_i}))$, qui est de la forme $E'_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{F_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}}}$, avec $1 \leq i \leq k+1$ et $1 \leq \lambda_i \leq l_i$. Posons $F_Z := F_{\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}}$. En utilisant des structures localement toriques (Proposition 2.6) on vérifie facilement que dans X', $E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{F_Z}$ est irréductible et fixe par $G_0(Z)$. Donc elle est contenue dans une composante irréductible de $E_{\mathcal{D}_Z} \cap W^{G_0(Z)}$, avec $W^{G_0(Z)}$ l'ensemble des points fixes de $G_0(Z)$ dans X'. D'autre part on a $\varphi_Z(Z) \subseteq \varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{F_Z}) = E'_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{F_Z}$. On obtient $Z \subseteq (E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{F_Z})$, résulte du fait que φ_Z est un isomorphisme au voisinage de Z. D'après la définition de la stratification $\mathcal{S}$, $\overline{Z}$ est une composante irréductible de $E_{\mathcal{D}_Z} \cap W^{G_0(Z)}$, on en déduit que $\overline{Z} = E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{F_Z}$. □

Convention 2.8 *Quitte à changer les indices, on suppose $\lambda_i = 1$ pour $i = 1,..,k+1$. Acceptons que $E_{0,1}$ peut être réduit à $\{0\}$, on suppose $E_{0,1} = E_0$. Donc dans la suite, quand on écrit la décomposition de X associée à une strate Z, on aura $\overline{Z} = E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{F_Z}$ avec $F_Z := E_{0,1} \oplus E_{1,1} \oplus \cdots \oplus E_{k+1,1}$.*

Corollaire 2.9 *Soient $Z, Z' \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{D}_Z$ (resp. $\mathcal{D}_{Z'}$) le drapeau associé à Z (resp. Z'). Alors, $Z \subseteq \overline{Z'}$ si et seulement si $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_Z$ et $F_Z \subseteq F_{Z'}$. Si de plus Z et Z' sont différentes, alors au moins une des deux inclusions précédentes est stricte.*

Démonstration. D'abord il est clair que $Z = Z'$ si et seulement si $\mathcal{D}_Z = \mathcal{D}_{Z'}$ et $F_Z = F_{Z'}$. Supposons que $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_Z$ et que $F_Z \subseteq F_{Z'}$. Alors $E_{\mathcal{D}_Z} \subseteq E_{\mathcal{D}_{Z'}}$ et $\overline{F_Z} \subseteq \overline{F_{Z'}}$, et par suite $Z \subseteq \overline{Z} \subseteq \overline{Z'}$.

Inversement supposons que $Z \subseteq \overline{Z'}$. Il est clair que $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_Z$. Soient $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset \cdots \subset V_k)$ et $\mathcal{D}_{Z'} = (V_0' \subset \cdots \subset V_{k'}')$. Alors pour chaque $i \in \{0, ..., k'\}$, il existe $\alpha_i \in \{0, ..., k\}$ tel que $V_i' = V_{\alpha_i}$. La décomposition de X associée à Z, notée $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$, est plus fine que celle associée à Z', notée $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i'} E_{i,j}')$. Considérons le morphisme $\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ et posons $F_{j,1} := E_{i,1}' \cap V_{j-1,j}$, avec $0 \leq i \leq k'+1$ et $\alpha_{i-1} < j \leq \alpha_i$. Alors dans Y_Z, $\overline{\varphi_Z(Z')} \cap (\varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}))$ est isomorphe à $F_{0,1} \times \mathbb{P}(F_{1,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{k+1,1})$, qui est une sous-variété fermée de $\varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}) \simeq V_0 \times \mathbb{P}(V_{0,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{k,k+1})$. D'autre part, $\overline{\varphi_Z(Z)} \simeq E_{0,1} \times \mathbb{P}(E_{1,1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{k+1,1})$ est contenue dans $(\varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}))$. L'inclusion $\overline{\varphi_Z(Z)} \subset (\overline{\varphi_Z(Z')} \cap \varphi_Z(E_{\mathcal{D}_Z}))$ implique que $E_{i,1} \subset F_{i,1}$ pour $0 \leq i \leq k+1$, et par suite $(\bigoplus_{\alpha_{i-1} < j \leq \alpha_i} E_{j,1}) \subseteq E_{i,1}'$, avec $0 \leq i \leq k'+1$. Puisque $F_Z = \bigoplus_{0 \leq i \leq k+1} E_{i,1}$ et que $F_{Z'} = \bigoplus_{0 \leq i \leq k'+1} E_{i,1}'$, on en déduit que $F_Z \subseteq F_{Z'}$. □

Proposition 2.10 *Soient Z_1 et Z_2 deux éléments distincts dans $\mathcal{S}$. Alors il existe un unique $Z \in \mathcal{S}$ tel que Z soit l'élément minimal de $\mathcal{S}$ dont l'adhérence contient Z_1 et Z_2, i.e.*

1) $(Z_1 \cup Z_2) \subset \overline{Z}$,

2) $Z \subseteq \overline{Z'}$, *pour tout* $Z' \in \mathcal{S}$ *avec* $\overline{Z'} \supseteq (Z_1 \cup Z_2)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}_1 = (V_0^1 \subset V_1^1 \subset \cdots \subset V_{k_1}^1)$ (resp. $\mathcal{D}_2 = (V_0^2 \subset V_1^2 \subset \cdots \subset V_{k_2}^2)$) le drapeau associé à Z_1 (resp. Z_2). Soit $X = \bigoplus_{i=0}^{k_1+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i^1} E_{i,j}^1)$ (resp. $X = \bigoplus_{i=0}^{k_2+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i^2} E_{i,j}^2)$) la décomposition de X associée à Z_1 (resp. Z_2). Posons $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Soit $\mathcal{D} = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$. Alors il existe deux suites d'entiers $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_i\}$ telles que $V_i = V_{\alpha_i}^1 = V_{\beta_i}^2$, avec $0 \leq i \leq k$. Définissons $F := F_{Z_1} + F_{Z_2}$ et $F_{i,0} := F \cap V_{i-1,i}$, avec $0 \leq i \leq k+1$. On peut vérifier que $F_{i,0} = (\bigoplus_{c_1=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{c_1,1}^1) + (\bigoplus_{c_2=\beta_{i-1}+1}^{\beta_i} E_{c_2,1}^2)$, où $\alpha_{k+1} := k_1 + 1$ et $\beta_{k+1} := k_2 + 1$. Posons

$$G_0 := \{g \in G_0(Z_1) \cap G_0(Z_2) \mid g_{|F_{i,0}} \text{ est une homothétie}\} \quad ,$$

et notons $F_{i,1}$ le sous-espace maximal de $V_{i-1,i}$ contenant $F_{i,0}$ tel que la restriction de tout élément de G_0 sur $F_{i,1}$ soit une homothétie. Soit Z la strate passant par le point générique de $E_{\mathcal{D}} \cap \overline{F_Z}$ avec $F_Z := \bigoplus_{i=0}^{k+1} F_{i,1}$. On voit que Z est une composante irréductible de $E_{\mathcal{D}} \cap W^{G_0}$ et que l'adhérence de Z contient Z_1 et Z_2.

D'autre part pour tout $Z' \in \mathcal{S}$, avec $\overline{Z'} \supseteq (Z_1 \cup Z_2)$, soit $\mathcal{D}_{Z'} = (V_0' \subset \cdots \subset V_{k'}')$. D'après le corllaire précédent on a $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}_i$ et $F_{Z_i} \subseteq F_Z$ avec $i = 1$ ou 2. Donc $\mathcal{D}_{Z'} \subseteq \mathcal{D}$ et $F \subseteq F_Z$. Soit $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i'} E_{i,j}')$ la décomposition de X associée à Z'. Il existe un sous-ensemble de $\{0, ..., k\}$, noté $\{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{k'}\}$, tel que $V_i' = V_{\mu_i}$ pour $i = 0, ..., k'$. D'après le corollaire précédent, on obtient $(\bigoplus_{j=\alpha_{\mu_{i-1}}+1}^{\alpha_{\mu_i}} E^1_{j,1}) \subseteq E'_{i,1}$ et $(\bigoplus_{j=\beta_{\mu_{i-1}}+1}^{\beta_{\mu_i}} E^2_{j,1}) \subseteq E'_{i,1}$, et par suite $F_{j,0} \subseteq E'_{i,1}$, avec $\mu_{i-1} < j \leq \mu_i$. Comme $G_0(Z') \subseteq G_0$, la restriction de chaque élément de $G_0(Z')$ sur $E_{j,0}$ est une homothétie, pour $0 \leq j \leq k+1$. La définition de $F_{j,1}$ entraîne que $F_{j,1} \subseteq E'_{i,1}$, avec $\mu_{i-1} < j \leq \mu_i$. Donc on a $F_Z \subseteq F_{Z'}$. Par conséquent $Z \subseteq \overline{Z'}$. Ceci montre que Z est l'élément minimal de $\mathcal{S}$ dont l'adhérence contient Z_1 et Z_2. □

Démonstration du Théorème 3.

1) Soit $Z' \in \mathcal{S}$ tel que $Z \not\subseteq \overline{Z'}$. Alors pour tout $Z'' \in \mathcal{S}$, avec $Z'' \subseteq \overline{Z'}$, on a $Z \not\subseteq \overline{Z''}$. Puisque $\mathcal{S}$ est une stratification de X', ceci implique que $(\bigcup_{Z' \in \mathcal{S}, Z \not\subseteq \overline{Z'}} Z')$ est un fermé de X'. Par conséquent U_Z, qui est le complémentaire de ce fermé, est un ouvert de X'. Il est clair que la famille $\mathcal{R}$ recouvre X', car chaque Z dans $\mathcal{S}$ est contenu dans U_Z. D'après le corollaire 2.9, pour tous $Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$ on a $(U_{Z_1} \cap U_{Z_2}) = U_Z$ où Z est l'élément minimal de $\mathcal{S}$ dont l'adhérence passe par Z_1 et Z_2. Ceci montre que $\mathcal{R}$ est fermée par l'intersection.

2) Soit $Z \in \mathcal{S}$. D'après le théorème 2 chaque $Z' \in U_Z$ est stable par $G(Z)$, donc U_Z est stable par $G(Z)$. D'après la proposition 2.6, le morphisme canonique $\varphi_z : X' \longrightarrow Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$ est équivariant par $G(Z)$ et induit un isomorphisme sur U_Z. Comme U_Z est stable par $G(Z)$, on trouve que la restriction de φ_z sur U_Z est aussi équivariante par $G(Z)$. Toutes les variétés apparues ici sont algébriques, donc $\varphi_z(U_Z)$ est un ouvert de Zariski de Y_Z.

   Pour chaque strate $Z' \subseteq U_Z$, l'adhérence de $\varphi_z(Z')$ est une composante irréductible de l'intersection de la sous-variété invariante de $G_0(Z')$ avec des diviseurs exceptionnels passant par $\varphi_z(Z')$. Or cette intersection est stable par le tore, donc est l'adhérence d'une orbite du tore. □

3 Constructions de désingularisations.

Rappelons d'abord certaines notations dans le chapitre précédent: $X := \mathbb{C}^n$ est l'espace affine muni d'une action d'un sous-groupe fini G de $GL(n, \mathbb{C})$, X' le G-modèle équivariant abélien de X (Théorème 1); $\mathcal{S}$ la stratification de X' définie dans le paragraphe 2.2; pour chaque strate $Z \in \mathcal{S}$, $G(Z)$ est le sous-groupe de G constitué des éléments qui stabilisent Z et $G_0(Z)$ est le sous-groupe de G constitué des éléments qui fixent Z point par point; $\mathcal{R} := \{U_Z\}_{Z\in\mathcal{S}}$ le recouvrement de X' compatible avec la stratification $\mathcal{S}$ (Théorème 3).

Dans ce chapitre, on va construire une famille de variétés, $\{\widetilde{U}_Z\}_{Z\in\mathcal{S}}$, telle qu'elle vérifie les trois conditions suivantes.

(i) Pour chaque $Z \in \mathcal{S}$, $\widetilde{U}_Z$ est une modification de U_Z telle que le morphisme $\widetilde{\varphi}_Z : \widetilde{U}_Z \longrightarrow U_Z$ soit propre birationnel équivariant par rapport à $G(Z)$, et telle que $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$ soit une désingularisation de $U_Z/G_0(Z)$.

(ii) Soient Z_1, Z_2 deux strates dans $\mathcal{S}$ avec $Z_2 \subset \overline{Z_1}$. Alors on a le diagramme commutatif suivant qui est équivariant par rapport à $G(Z_2)$,

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U}_{Z_1} \arrow[r, "\widetilde{i}_{Z_1,Z_2}"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}_{Z_1}"] & \widetilde{U}_{Z_2} \arrow[d, "\widetilde{\varphi}_{Z_2}"] \\ U_{Z_1} \arrow[r, "i_{Z_1,Z_2}"] & U_{Z_2} \end{tikzcd}$$

avec i_{Z_1,Z_2} et $\widetilde{i}_{Z_1,Z_2}$ deux immersions ouvertes.

(iii) Soient $Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$. Supposons qu'il existe un $g \in G$ tel que $g(Z_1) = Z_2$. Alors il existe un isomorphisme $\widetilde{g}_{Z_1,Z_2} : \widetilde{U}_{Z_1} \longrightarrow \widetilde{U}_{Z_2}$ tel que $\widetilde{\varphi}_{Z_2} \circ \widetilde{g}_{Z_1,Z_2} = g \circ \widetilde{\varphi}_{Z_1}$. De plus on a $\widetilde{g}_{Z_1,Z_2} = (\widetilde{g}_{Z_2,Z_1})^{-1}$. S'il existe $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{S}$ et $g, g' \in G$ tels que $Z_2 = g(Z_1)$ et tel que $Z_3 = g'(Z_2)$, alors on a $\widetilde{g'}_{Z_2,Z_3} \circ \widetilde{g}_{Z_1,Z_2} = \widetilde{g'g}_{Z_1,Z_3}$.

Après avoir construit cette famille $\{\widetilde{U}_Z\}_{Z\in\mathcal{S}}$ ayant ces trois propriétés, on démontre le résultat principal suivant.

Théorème 4 *Soient $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ un sous-groupe fini et petit, $X := \mathbb{C}^n$. Avec les notations précédentes, on a:*

(1) *les $\widetilde{U}_Z$, avec $Z \in \mathcal{S}$, peuvent se recoller telles que le recollement $\widetilde{X}$ soit une G-variété; et telles que le morphisme $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \longrightarrow X'$ induis par les morphismes $\widetilde{\varphi}_Z : \widetilde{U}_Z \longrightarrow U_Z$, $Z \in \mathcal{S}$, soit propre birationnel et équivariant par rapport à G;*

(2) *$\widetilde{X}/G$ est une désingularisation de X'/G, et donc une désingularisation de X/G.*

3.1 Construction des $\widetilde{U}_Z$.

D'abord fixons quelques notations. Soient $Z \in \mathcal{S}$, $\mathcal{D}_Z = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k)$ le drapeau associé à Z. Soient $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$ la décomposition de X associée à Z et $d_{i,j} := \dim(E_{i,j})$. On dit qu'une base $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de X est *compatible avec la décomposition de X associée à Z*, ou simplement *compatible pour Z*, si on a

$$\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{x_{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1,\ 1 \leq q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$$

avec $\{x_{p,q,s} \mid 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$ une base de $E_{p,q}$, pour tous $0 \leq p \leq k+1$ et $1 \leq q \leq l_p$.

Remarque 3.1 *Soient $Z, Z' \in \mathcal{S}$ avec $Z \subset \overline{Z'}$, alors la décomposition de X associée à Z est plus fine que celle associée à Z'. Donc toute base de X qui est compatible pour Z est aussi compatible pour Z'.*

Soit $\{x_{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1,\ 1 \leq q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$ une base de X compatible pour Z. Soient T le tore maximal dans X correspondant à cette base, N et M les deux $\mathbb{Z}$-modules libres de rang n déterminés par T. Prenons une $\mathbb{Z}$-base de N, notée $\{e_{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1,\ 1 \leq q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$. Notons C le cône régulier de dimension n dans $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, engendré par la base $\{e_{p,q,s}\}$. On a un isomorphisme $X \simeq V_{C,N}$. Posons $\mathcal{D}_i := (V_O \subset \cdots \subset V_i)$ avec $0 \leq i \leq k$ et $e'_i := \sum_{p=i+1}^{k+1} \sum_{q=1}^{l_p} \sum_{s=1}^{d_{p,q}} e_{p,q,s}$, avec $0 \leq i \leq k$. On peut décrire l'éventail Σ_Z, qui représente $Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$, de la façon suivante:

- L'éventail correspondant à $Bl_{V_0} X$, noté $\Sigma_{\mathcal{D}_0}$, est la subdivision élémentaire du cône C, de centre e'_0, i.e. $\Sigma_{\mathcal{D}_0} := \{\tau, <\tau, e'_0> \mid \tau < C,\ e'_0 \notin \tau\}$.
- Successivement notons $\overline{V_i}$ la transformée stricte de V_i dans $Bl_{\mathcal{D}_{i-1}} X$ et notons $\Sigma_{\mathcal{D}_{i-1}}$ l'éventail associé à $Bl_{\mathcal{D}_{i-1}} X := Bl_{\overline{V_{i-1}}}(Bl_{\overline{V_{i-2}}}(\cdots (Bl_{V_0} X)\cdots))$, avec $1 \leq i \leq k$, alors $\overline{V_i}$ est l'adhérence de l'orbite O_{σ_i} avec σ_i le cône dans $\Sigma_{\mathcal{D}_{i-1}}$ défini par $\sigma_i :=< \{e_{p,q,s} \mid i+1 \leq p \leq k+1,\ 1 \leq q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q}\} >$. Donc l'éventail associé à $Bl_{\mathcal{D}_i} X := Bl_{\overline{V_i}}(Bl_{\mathcal{D}_{i-1}} X)$, noté $\Sigma_{\mathcal{D}_i}$, est la subdivision de $\Sigma_{\mathcal{D}_{i-1}}$ induite par la subdivision élémentaire de σ_i de centre e'_i.

Quand $i = k$, on obtient $\Sigma_{\mathcal{D}_k} = \Sigma_Z$ qui est l'éventail correspondant à $Y_Z := Bl_{\mathcal{D}_Z} X$.

Comme $\overline{\varphi_Z(Z)}$ est égale à l'adhérence d'une orbite du tore dans Y_Z (Théorème 3), il existe un unique cône $\tau_Z \in \Sigma_Z$ tel que $\overline{\varphi_Z(Z)} = \overline{O_{\tau_Z}}$. Puisque $\overline{Z} = E_{\mathcal{D}_Z} \cap \overline{(E_{0,1} \oplus E_{1,1} \oplus \cdots \oplus E_{k+1,1})}$, (Convention 2.8), on a

$$\tau_Z =< e'_0, e'_1, \cdots, e'_k; e_{p,q,s},\ 0 \leq p \leq k+1,\ 1 < q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q} > \quad .$$

Posons $e'_{p,q} := \sum_{s=1}^{d_{p,q}} e_{p,q,s}$ et définissons un autre cône $\tau_{1,Z}$ associé à Z de la manière suivante,

$$\tau_{1,Z} :=< e'_0, e'_1, \cdots, e'_k; e'_{p,q},\ 0 \leq p \leq k+1,\ 1 < q \leq l_p > \quad .$$

Supposons que $Z' \in \mathcal{S}$ tel que $Z \subset \overline{Z'}$. Puisque toute base compatible pour Z est aussi compatible pour Z' (Remarque 3.1), dans le même $N_{\mathbb{R}}$ les cônes $\tau_{Z'}$ et $\tau_{1,Z'}$ sont bien définis.

Lemme 3.2 *Soient Z, Z' deux strates différentes dans $\mathcal{S}$ telles que $Z \subset \overline{Z'}$. Les $\tau_Z, \tau_{1,Z}, \tau_{Z'}, \tau_{1,Z'}$ sont définis comme précédement. Alors*

(1) $\tau_{Z'}$ est une face propre de τ_Z,

(2) $\tau_{1,Z'}$ est contenu dans une face propre de $\tau_{1,Z}$.

Démonstration.

(1) D'une part on a $\overline{\varphi_Z(Z')} = \overline{O_{\tau_{Z'}}}$ et $\overline{\varphi_Z(Z)} = \overline{O_{\tau_Z}}$, d'autre part $Z \subset \overline{Z'}$. Donc $\varphi_Z(Z) \subset \overline{\varphi_Z(Z')}$, et par suite $\overline{O_{\tau_Z}} \subset \overline{O_{\tau_{Z'}}}$ et $\tau_{Z'} < \tau_Z$.

(2) Soient $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$ (resp. $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1}(\bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j})$) la décomposition de X associée à Z (resp. à Z'), et $d_{i,j}$ (resp. $d'_{i,j}$) la dimension de $E_{i,j}$ (resp. de $E'_{i,j}$). Puisque la décomposition de X associée à Z est plus fine que celle associée à Z', chaque $E'_{i',j'}$ est la somme directe de certains $E_{i,j}$. On en déduit que $\tau_{Z'} =< e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{k'}}; e_{p,q,s}$, avec $e_{p,q,s} \notin \bigcup_{i=0}^{k'+1} E'_{i,1} >$. D'autre part la condition $Z \subset \overline{Z'}$ implique que $\mathcal{D}_Z \subseteq \mathcal{D}_{Z'}$ et que $\bigoplus_{i=0}^{k+1} E_{i,1} \subseteq \bigoplus_{i=0}^{k'+1} E'_{i,1}$ (Corollaire 2.9). On en déduit qu'il existe une suite croissante d'entiers $\{\alpha_i\}_{0\leq i\leq k'} \subseteq \{0, ..., k\}$ tels que $(\bigoplus_{j=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{j,1}) \subseteq E'_{i,1}$, avec $0 \leq i \leq k'+1$ et $\alpha_{k'+1} := k+1$. On en déduit que $\tau_{1,Z'} =< e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{k'}}; \sum_{e'_{p,q} \in E'_{i,j}} e'_{p,q}, \; 0 \leq i \leq k'+1, \; 1 < j \leq l'_i >$. Donc on a $\tau_{1,Z'} \subseteq (\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z})$. Or $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$ est une face propre de $\tau_{1,Z}$, d'où le résultat. □

Définissons la subdivision Π^1_Z du cône τ_Z de la manière suivante. Soient $\tau_Z^{(p,q)} :=< e_{p,q,1}, \cdots, e_{p,q,d_{p,q}} >$ et $\Pi_Z^{(p,q)}$ la subdivision élémentaire de $\tau_Z^{(p,q)}$ de centre $e'_{p,q}$, avec $0 \leq p \leq k+1$ et $1 \leq q \leq l_p$. On a $\tau_Z =< e'_0, \cdots, e'_k > \oplus(\tau_Z^{(0,2)} \oplus \cdots \oplus \tau_Z^{(0,l_0)}) \oplus \cdots \oplus (\tau_Z^{(k+1,2)} \oplus \cdots \oplus \tau_Z^{(k+1,l_{k+1})})$. Définissons $\Pi^1_Z :=< e'_0, \cdots, e'_k > \oplus(\Pi_Z^{(0,2)} \oplus \cdots \oplus \Pi_Z^{(0,l_0)}) \oplus \cdots \oplus (\Pi_Z^{(k+1,2)} \oplus \cdots \oplus \Pi_Z^{(k+1,l_{k+1})})$. On peut vérifier que $\tau_{1,Z}$ est une face commune de tout cône de dimension maximale dans Π^1_Z. Puisque Σ_Z est simplicial, Π^1_Z induit canoniquement en une subdivision de Σ_Z, notée Σ^1_Z.

Considérons le groupe $G_0(Z)$ comme un sous-groupe fini du tore T. Soient r l'ordre de G et $\omega := \exp(\frac{2i\pi}{r})$. Alors chaque élément $g \in G_0(Z)$ peut s'écrire de façon unique comme

$$g = (\omega^{a_{0,1,1}(g)}, \cdots, \omega^{a_{0,1,d_{0,1}}(g)}; \cdots; \omega^{a_{k+1,l_{k+1},1}(g)}, \cdots, \omega^{a_{k+1,l_{k+1},d_{k+1,l_{k+1}}}(g)}) \quad ,$$

avec $a_{p,q,s}(g)$ des entiers compris entre 0 et $r-1$. Posons

$$a_g := \frac{1}{r}(a_{0,1,1}(g), \cdots, a_{0,1,d_{0,1}}(g); \cdots; a_{k+1,l_{k+1},1}(g), \cdots, a_{k+1,l_{k+1},d_{k+1,l_{k+1}}}(g)) \quad ,$$

vu comme un point dans $N_{\mathbb{R}}$. Définissons $N^Z := N + \sum_{g\in G_0(Z)} \mathbb{Z}\cdot a_g$, N^Z est un sur-réseau de N. D'après la définition de la décomposition de X associée à Z, la restriction de tout $g \in G_0(Z)$ sur chaque $E_{p,q}$ est une homothétie, on en déduit que $a_{p,q,s}(g) = a_{p,q,s'}(g)$, $1 \le s < s' \le d_{p,q}$. De plus $a_{0,1,s}(g) = 0$, car la restriction de g sur $E_{0,1}$ est l'identité. Donc tous les a_g, avec $g \in G_0(Z)$, sont contenus dans $F_{1,Z} := \tau_{_{1,Z}} + (-\tau_{_{1,Z}})$.

Soit Θ une subdivision de $\tau_{_{1,Z}}$ réguière par rapport au réseau N^Z. Notons Π_Z^2 la subdivision de Π_Z^1 et Σ_Z^2 la subdivision de Σ_Z^1 induites par Θ. Définissons $\Lambda_Z := \{L_{(e'_{p,q})} \mid (L_{(e'_{p,q})} \cap N) = (L_{(e'_{p,q})} \cap N^Z),\ 0 \le p \le k+1,\ 1 < q \le l_p\}$.

Proposition 3.3

1) *On peut contracter tous les $L \in \Lambda_Z$ à partir de Σ_Z^2 et obtenir encore un éventail, noté $\widetilde{\Sigma}_Z$. Le morphisme canonique $\widetilde{\varphi}_{_Z} : V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N} \longrightarrow V_{\Sigma_Z,N}$ est équivariant par rapport à $G(Z)$.*

2) *Posons $\widetilde{U}_Z := \widetilde{\varphi}_{_Z}^{-1}(\varphi_{_Z}(U_Z))$, alors $\widetilde{U}_Z$ est un ouvert $G(Z)$-stable de $\widetilde{Y}_Z := V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N}$ avec $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$ une désingularisation de $U_Z/G_0(Z)$, où $\varphi_{_Z}$ est le morphisme canonique de X' dans $Y_Z \simeq V_{\Sigma_Z,N}$.*

Démonstration.

(1) Puisque Σ_Z^1 est simplicial et que Θ est une subdivision de $\tau_{_{1,Z}}$, la subdivision Σ_Z^2 de Σ_Z^1 induite par Θ est de la forme suivante:

$$\Sigma_Z^2 = \{\sigma \in \Sigma_Z^1 \mid \sigma\cap\tau_{_{1,Z}} = \{0\}\}\cup\{< \sigma+\theta > \mid \sigma \in \Sigma_Z^1,\ \theta \in \Theta,\ \sigma\cap\tau_{_{1,Z}} = \{0\},\ < \sigma+\theta >\in \Sigma\} \quad .$$

Pour chaque $L \in \Lambda_Z$, on définit $\beta_L := \min\{\beta < C \mid L \subset \beta\}$ avec C le cône régulier engendré par la base $\{e_{p,q,s}\}$. Si on contracte les arrêtes $L \in \Lambda_Z$ à partir de Σ_Z^2, l'ensemble obtenu, noté $\widetilde{\Sigma}_Z$, est égal à $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, où $\mathcal{E}_1 := \{\sigma \in \Sigma_Z^2 \mid \sigma \cap L = \{0\}, \forall L \in \Lambda_Z\}$ et $\mathcal{E}_2 := \{< \sigma, \beta_{L_1}, \cdots, \beta_{L_i} > \mid L_1, \cdots, L_i \in \Lambda_Z,\ \sigma \in \mathcal{E}_1, < \sigma, L_1, \cdots, L_i >\in \Sigma_Z^2\}$. C'est facile alors de vérifier que $\widetilde{\Sigma}_Z$ est un éventail, qui est la subdivision de Σ_Z induite par la subdivision $\widetilde{\Pi}_Z$ de $\tau_{_Z}$ avec $\widetilde{\Pi}_Z := \{\tau \mid \tau \in \widetilde{\Sigma}_Z,\ \tau \subseteq \tau_{_Z}\}$. Montrons que le morphisme canonique $\widetilde{\varphi}_{_Z} : V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N} \longrightarrow V_{\Sigma_Z,N}$ est équivariant par rapport à $G(Z)$.

Puisque $C = (\tau_{_Z}^{(0,1)} \oplus \cdots \oplus \tau_{_Z}^{(0,l_0)}) \oplus \cdots \oplus (\tau_{_Z}^{(k+1,1)} \oplus \cdots \oplus \tau_{_Z}^{(k+1,l_{k+1})})$, on peut définir $\Sigma_Z^0 := (\Pi_Z^{(0,1)} \oplus \cdots \oplus \Pi_Z^{(0,l_0)}) \oplus \cdots \oplus (\Pi_Z^{(k+1,1)} \oplus \cdots \oplus \Pi_Z^{(k+1,l_{k+1})})$. Notons $\sigma_{_Z}$ le cône engendré par les $e'_{p,q}$, $0 \le p \le k+1$ et $1 \le q \le l_p$, $\sigma_{_Z}$ est la face commune maximale de tout cône de dimension n dans Σ_Z^0. Posons pour $i = 1$ ou 2

$$\Sigma_Z^{i+} := \{\tau_i \cap \tau_0 \mid \tau_i \in \Sigma_Z^i,\ \tau_0 \in \Sigma_Z^0\} \ \text{ et } \ \Phi_Z^{i+} := \{\pi \in \Sigma_Z^{i+} \mid \pi \subseteq \sigma_{_Z}\} \quad .$$

On peut vérifier que Φ_Z^{1+} (resp. Φ_Z^{2+}) est une subdivision de $\sigma_{_Z}$ et que Σ_Z^{1+} (resp. Σ_Z^{2+}) est la subdivision de Σ_Z^0 induite par Φ_Z^{1+} (resp.Φ_Z^{2+}). Ensuite Σ_Z^1 (resp. Σ_Z^2) peut être obtenu à partir de Σ_Z^{1+} (resp. Σ_Z^{2+}), en contractant les L avec $L \in \{L_{(e'_{i,1})} \mid 0 \leq i \leq k+1\}$. De même manière $\widetilde{\Sigma}_Z$ peut être obtenue à partir de Σ_Z^{2+}, en contractant les $L \in (\Lambda_Z \cup \{L_{(e'_{i,1})} \mid 0 \leq i \leq k+1\})$. D'après la proposition 1.4, $V_{\Sigma_Z^{1+},N}$, $V_{\Sigma_Z^{2+},N}$, $V_{\Sigma_Z^1,N}$, $V_{\Sigma_Z^2,N}$ et $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N}$ sont toutes des $G(Z)$-variétés et les contractions sont équivariantes par rapport à $G(Z)$. Comme la restriction du morphisme $\widetilde{\varphi}_Z : V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N} \longrightarrow V_{\Sigma_Z,N}$ sur l'ouvert dense $\widetilde{\varphi}_Z^{-1}(\varphi_Z(Z_n))$ est un isomorphisme équivariant par rapport à $G(Z)$, avec Z_n l'unique strate de dimension n dans X', on en déduit que $\widetilde{\varphi}_Z$ lui même est équivariant par rapport à $G(Z)$.

(2) Le morphisme $\varphi_Z : X' \longrightarrow Y_Z := V_{\Sigma_Z,N}$ est $G(Z)$-équivariant et induit un isomorphisme sur $U(Z)$, donc $\varphi_Z(U(Z))$ est stable par $G(Z)$ et par suite son l'image inverse $\widetilde{U}_Z$ est un ouvert $G(Z)$-stable dans $\widetilde{Y}_Z := V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N}$.

Montrons que $\widetilde{\Pi}_Z$ est régulière par rapport à N^Z, i.e. tout cône $\tau \in \widetilde{\Pi}_Z$ est régulier par rapport à N^Z. Chaque $\tau \in \widetilde{\Pi}_Z$ peut se décomposer de manière unique comme $\tau = \alpha \oplus \beta_{L_{(e'_{p_1,q_1})}} \oplus \cdots \oplus \beta_{L_{(e'_{p_i,q_i})}}$, avec $\alpha \in \Pi_Z^2$ et $\{L_{(e'_{p_1,q_1})}, \cdots, L_{(e'_{p_i,q_i})}\} \subseteq \Lambda_Z$ vérifiant les deux conditions suivantes:

-) $\alpha \cap L = \{0\}, \ \forall L \in \Lambda_Z$;

-) $\alpha \oplus L_{(e'_{p_1,q_1})} \oplus \cdots \oplus L_{(e'_{p_i,q_i})} \in \Pi_Z^2$.

D'après l'hypothèse Θ est régulier par rapport à N^Z. Ceci implique que Π_Z^2 est aussi régulier par rapport à N^Z, résulte de la définition de la décomposition de X associée à Z. Donc α est régulier par rapport à N^Z. D'autre part $\tau_\beta := \beta_{L_{e'_{p_1,q_1}}} \oplus \cdots \oplus \beta_{l_{e'_{p_i,q_i}}}$ est la réunion des cônes $\pi \in \Pi_Z^2$, avec $\pi \subset \tau_\beta$ et $\dim \pi = \dim \tau_\beta$. Tous ces π sont réguliers par rapport à N^Z et ils engendrent le même sous $\mathbb{Z}$-module libre de N^Z. Le fait que $L_{e'_{p_j,q_j}} \in \Lambda_Z$, $1 \leq j \leq i$, implique que e'_{p_j,q_j} est primitif dans N^Z. Par conséquent τ_β et les π engendrent le même sous-$\mathbb{Z}$-module libre de N^Z. En tenant compte que pour chaque π le cône $\alpha \oplus \pi$ est régulier par rapport à N^Z, on en conclut que $\tau = \alpha \oplus \tau_\beta$ et par suite $\widetilde{\Pi}_Z$ sont réguliers par rapport à N^Z.

Pour chaque $Z' \in \mathcal{S}$ avec $Z \subseteq \overline{Z'}$, l'image dans $V_{\Sigma_Z,N}$ du point générique de Z' est le point générique d'une certaine orbite du tore. Notons $\tau_{Z'}$ le cône associé à cette orbite, on a $\tau_{Z'} \leq \tau_Z$ (lemme 3.2). La régularité de $\widetilde{\Pi}_Z$ par rapport à N^Z implique que $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N^Z}$ désingularise les singularités de V_{Σ_Z,N^Z} qui se trouvent sur les orbites du tore associées à des faces de τ_Z, en particulier la singularité de V_{Σ_Z,N^Z} sur l'image du point générique de Z' est résolue.

Soit x un point dans $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N}$ tel que son image dans $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N^Z}$ soit un point singulier et tel que $\widetilde{\varphi}_Z(x) \in \overline{O_{\tau_{Z'}}}$ pour certain $Z' \in \mathcal{S}$ avec $Z \subseteq \overline{Z'}$. Il existe un unique cône $\tau_x \in \widetilde{\Sigma}_Z$ tel que $x \in O_{\tau_x}$. Soit τ le cône dans Σ_Z tel que $\widetilde{\varphi}_Z(O_{\tau_x}) \subseteq O_\tau$. Alors la condition $\widetilde{\varphi}_Z(x) \in \overline{O_{\tau_{Z'}}}$

implique que $O_\tau \subseteq \overline{O_{\tau_{Z'}}}$, et par suite $\tau_{Z'} \leq \tau$. La restriction de $\widetilde{\Sigma}_Z$ sur τ (resp. sur $\tau_{Z'}$) est un éventail, noté Δ_τ (resp. $\Delta_{\tau_{Z'}}$). Donc par rapport au réseau N^Z, Δ_τ est singulier car l'image de x qui est contenue dans l'orbite associée à τ_x est un point singulier de $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N^Z}$; et $\Delta_{\tau_{Z'}}$ est régulier, car c'est la restriction de $\widetilde{\Pi}_Z$ sur $\tau_{Z'}$. Ceci entraîne que $(\tau \cap N^Z) \neq (\tau_{Z'} \cap N^Z)$. Par conséquent $G_{\widetilde{\varphi}_Z(x)} \neq G_{x'}$, où $G_{x'}$ (resp. $G_{\widetilde{\varphi}_Z(x)}$) est le groupe d'isotropie du point x' (resp. $\widetilde{\varphi}_Z(x)$), avec x' le point générique de $O_{\tau_{Z'}}$. D'autre part tous les points de $\varphi_Z(Z')$ ont le même groupe d'isotropie $G_0(Z')$, car φ_Z est $G(Z)$ équivariant. D'où $\widetilde{\varphi}_Z(x) \notin \varphi_Z(Z')$. On en conclut que l'image de $(\widetilde{\varphi}_Z)^{-1}(\varphi_Z(Z'))$ dans $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N^Z}$ ne contient aucun point singulier. Par conséquent $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$, qui est l'image de $\widetilde{U}_Z$ dans $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N^Z}$ est lisse.

Ensuite la définition de Λ_Z implique que tous les diviseurs exceptionnels dans $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N^Z}$ sont contractés dans le lieu singulier de V_{Σ_Z,N^Z}, et par suite tous les diviseurs exceptionnels dans $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$ sont contractés dans le lieu singulier de $U_Z/G_0(Z)$. Donc $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$ est une désingularisation de $U_Z/G_0(Z)$. $\square$

Maintenant construisons les $\widetilde{U}_Z$ suivant l'ordre décroissant de dimensions des Z, avec Z parcourant $\mathcal{S}$. D'abord $\mathcal{S}_n$ ne contient qu'un seul élément Z_n qui est un ouvert de X', donc $U_{Z_n} = Z_n$. On a $G_0(Z_n) = \{e\}$ et $G(Z_n) = G$. Posons $\widetilde{U}_{Z_n} := Z_n$, la condition (i) dans l'introduction est vérifiée. Supposons qu'on ait construit les $\widetilde{U}_Z$ pour tout $Z \in \mathcal{S}$ avec $\dim(Z) \geq i+1$, et que $\mathcal{S}_i \neq \phi$.

(1) Soit $Z \in \mathcal{S}_i$. Supposons qu'il existe un $Z_1 \in \mathcal{S}$ et un $g \in G$ tels que $Z_1 = g(Z)$ et tels que $\widetilde{U}_{Z_1}$ soit déjà construite. Alors on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} U_Z \arrow[r, "\varphi_Z"] \arrow[d, "g"] & Y_Z \arrow[d, "g"] \\ U_{Z_1} \arrow[r, "\varphi_{Z_1}"] & Y_{Z_1} \end{tikzcd}$$

où les deux morphismes horizontaux sont des immersions ouvertes et que les deux morphismes verticaux sont des isomorphismes. Définissons $\widetilde{Y}_Z := Y_Z \times_{Y_{Z_1}} \widetilde{Y}_{Z_1}$ et $\widetilde{U}_Z := U_Z \times_{U_{Z_1}} \widetilde{U}_{Z_1}$. La condition (iii) dans l'introduction est vérifiée.

(2) Supposons que $Z \in \mathcal{S}_i$ et que $\widetilde{U}_{Z'}$ ne soit construit pour aucun $Z' \in \{g(Z) \mid g \in G\}$. Prenons une base de X compatible avec la décomposition de X associée à Z. Soient T le tore associé à cette base, N et M les deux $\mathbb{Z}$-modules libres de rang n déterminés par T. Supposons que les Σ_Z, τ_Z et $\tau_{1,Z}$ soient définis comme précédement. On va construire $\widetilde{U}_Z$ dans la proposition 3.5. Montrons d'abord la proposition suivante.

Proposition 3.4 *Soient Z et Z' deux strates différentes dans $\mathcal{S}$ telles que $Z \subset \overline{Z'}$. Soient $\Theta_{Z'}$ une subdivision simpliciale de $\tau_{1,Z'}$, $\Sigma^{+}_{Z'}$ la subdivision de $\Sigma^{1}_{Z'}$ induite par $\Theta_{Z'}$, et $\widetilde{\Sigma}_{Z'}$ la subdivision de $\Sigma_{Z'}$ obtenue à partir de $\Sigma^{+}_{Z'}$ en contractant les L, avec $L \in \Lambda_{Z'}$. Posons*

$$\Psi_{Z',Z} := \{\tau' \cap \tau_{1,Z} \mid \tau' \in \widetilde{\Pi}_{Z'}\} \quad et \quad \Pi^{+Z}_{Z'} := \{\tau' \cap \tau_1 \mid \tau' \in \widetilde{\Pi}_{Z'},\ \tau_1 \in \Pi^1_Z\} \quad ,$$

où $\widetilde{\Pi}_{Z'} := (\widetilde{\Sigma}_{Z'})_{|\tau_{Z'}} = \{\tau' \in \widetilde{\Sigma}_{Z'}, \mid \tau' \subseteq \tau_{Z'}\}$. Alors

(a) $\Psi_{Z',Z}$ est une subdivision de $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$ et $\Pi^{+Z}_{Z'}$ est la subdivision de $(\Pi^1_Z)_{|\tau_{Z'}}$ induite par $\Psi_{Z',Z}$, où $(\Pi^1_Z)_{|\tau_{Z'}}$ est la restriction de Π^1_Z à $\tau_{Z'}$;

(b) les arrêtes L dans $\Pi^{+Z}_{Z'}$, avec $L \in \Lambda_Z \cap \tau_{Z'}$, sont contractibles. Si on les contracte, on obtient exactement $\widetilde{\Pi}_{Z'}$.

Démonstration. Soient $X = \bigoplus_{i=0}^{k+1}(\bigoplus_{j=1}^{l_i} E_{i,j})$ la décomposition de X associée à Z et $X = \bigoplus_{i=0}^{k'+1}(\bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j})$ la décomposition de X associée à Z'. Notons $d_{i,j} := \dim(E_{i,j})$, $0 \leq i \leq k+1$ et $1 \leq j \leq l_i$. Comme dans la démonstration du corollaire 2.9, il existe une suite croissante d'entiers $\{\alpha_i\}_{i=0}^{k'}$, avec $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{k'} \leq k$, telle que pour tout $i \in \{0, ..., k'\}$ les trois conditions suivantes soient vérifiées:

(i) $\displaystyle\bigoplus_{p=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i}(\bigoplus_{q=1}^{l_p} E_{p,q}) = \bigoplus_{j=1}^{l'_i} E'_{i,j}$;

(ii) pour tout p, avec $\alpha_{i-1}+1 \leq p \leq \alpha_i$, et pour tout q, avec $1 \leq q \leq l_p$, il existe un unique j, avec $1 \leq j \leq l_i$, tel que $E_{p,q} \subseteq E'_{i,j}$,

(iii) $(\displaystyle\bigoplus_{p=\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_i} E_{p,1}) \subseteq E'_{i,1}$.

Posons $e'_{p,q} := \displaystyle\sum_{s=1}^{d_{p,q}} e_{p,q,s}$, $e'_i := \displaystyle\sum_{p=i+1}^{k+1}\sum_{q=1}^{l_p} e'_{p,q}$ et $e''_{i,j} := \displaystyle\sum_{e_{p,q,s}\in E'_{i,j}} e_{p,q,s}$. On rappelle que $\Lambda_{Z'} := \{L_{e''_{i,j}} \mid (L_{e''_{i,j}} \cap N) = L_{e''_{i,j}} \mid (L_{e''_{i,j}} \cap N^Z), 0 \leq i \leq k'+1, 1 \leq j \leq l'_i\}$ et que les quatres cônes, τ_Z, $\tau_{1,Z}$, $\tau_{Z'}$ et $\tau_{1,Z'}$ sont de formes suivantes,

$$\tau_Z =< e'_0, e'_1, \cdots, e'_k; e_{p,q,s},\ 0 \leq p \leq k+1,\ 2 \leq q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q} > \quad ,$$

$$\tau_{1,Z} =< e'_0, e'_1, \cdots, e'_k; e'_{p,q},\ 0 \leq p \leq k+1,\ 2 \leq q \leq l_p > \quad ,$$

$$\tau_{Z'} =< e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{k'}}; e_{p,q,s} \text{ avec } e_{p,q,s} \notin \bigcup_{0\leq i\leq k'+1} E'_{i,1} > \quad ,$$

$$\tau_{1,Z'} =< e'_{\alpha_0}, e'_{\alpha_1}, \cdots, e'_{\alpha_{k'}}; \sum_{e'_{p,q}\in E'_{i,j}} e'_{p,q},\ 0 \leq i \leq k'+1,\ 2 \leq j \leq l'_i > \quad .$$

Supposons que $\Theta_{Z'}$ soit une subdivision simpliciale de $\tau_{1,Z'}$ et que $\Pi^+_{Z'}$ soit la subdivision de $\Pi^1_{Z'}$ induite par $\Theta_{Z'}$. Alors tout cône $\gamma \in \Pi^+_{Z'}$ de dimension maximale est sous la forme

$$\gamma = (\gamma_{0,2} \oplus \cdots \oplus \gamma_{0,l'_0}) \oplus \cdots \oplus (\gamma_{k'+1,2} \oplus \cdots \oplus \gamma_{k'+1,l_{k'+1}}) \oplus < v_1, \cdots, v_{m'} > \quad ,$$

où $\gamma_{i,j}$ est une face propre maximale du cône $C'_{i,j} :=< \{e_{p,q,s} \mid \alpha_{i-1}+1 \leq p \leq \alpha_i,\ 1 \leq q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q}\} >$ et où $< v_1, \cdots, v_{m'} >$ est un cône de dimension maximale dans $\Theta_{Z'}$. Et il existe un unique $\tau_\gamma \in \widetilde{\Pi}_{Z'}$ de dimension maximale tel que $\gamma \subseteq \tau_\gamma$. Quitte à changer les indices, on suppose que $v_c \in \Lambda_{Z'} := \{L_{(e''_{i,j})} \mid (L_{(e''_{i,j})} \cap N) = (L_{(e''_{ij})} \cap N^Z),\ 0 \leq i \leq k'+1,\ 1 < j \leq l'_i\}$ si et seulement si $1 \leq c \leq \mu$, et qu'il existe (i_c, j_c) tels que $v_c = e''_{i_c,j_c}$, $1 \leq c \leq \mu$. Alors τ_γ peut être décrit de la façon suivante,

$$\tau_\gamma = (C'_{i_1,j_1} \oplus \cdots \oplus C'_{i_\mu,j_\mu}) \oplus (\bigoplus_{\substack{j \neq 1 \\ (i,j) \neq (i_c,j_c) \\ c=1,\ldots,\mu}} \gamma_{i,j}) \oplus < v_{\mu+1}, \cdots, v_{m'} > \quad .$$

Soit $\tau_1 \in \Pi^1_Z$ un cône de dimension maximale, τ_1 est de la forme suivante,

$$\tau_1 = \bigoplus_{i=0}^{k+1} (\bigoplus_{j=2}^{l_i} \beta_{i,j}) \oplus < e'_0, \cdots, e'_k; e'_{p,q},\ 0 \leq p \leq k+1,\ 2 \leq q \leq l_p > \quad ,$$

où $\beta_{p,q}$ est une face propre maximale du cône $C_{p,q} :=< e_{p,q,s},\ 1 \leq s \leq d_{p,q} >$, $0 \leq p \leq k+1$ et $1 \leq q \leq l_p$. Quitte à changer les indices, on suppsose que $\beta_{p,q} =< e_{p,q,s},\ 2 \leq s \leq d_{p,q} >$. Soit $\{e^{p,q,s} \mid 0 \leq p \leq k+1,\ 1 \leq q \leq l_p,\ 1 \leq s \leq d_{p,q}\}$ la base de M, qui est le dual de la base $\{e_{p,q,s}\}$ de N. L'orthogonal de τ_1, noté $\tau_1^\perp$, est de la forme suivante,

$$\tau_1^\perp =< \{e^{0,1,s}, -e^{0,1,s}\}_{1 \leq s \leq d_{0,1}} > \oplus (\bigoplus_{p=1}^{k+1} < \{(e^{p,1,1} - e^{p,1,s}), (e^{p,1,s} - e^{p,1,1})\}_{1 \leq s \leq d_{p,1}} >) \quad ,$$

le cône dual de τ_1, noté $\check{\tau}_1$, est de la forme suivante,

$$\check{\tau}_1 = \tau_1^\perp \oplus < \{e^{p,q,1}, e^{p,q,s} - e^{p,q,1} \mid 0 \leq p \leq k+1,\ 2 \leq q \leq l_p,\ 2 \leq s \leq d_{p,q}\} > \quad .$$

Puisque $\check{\check{\tau}}_1 = \tau_1$, on obtient $\tau_\gamma \cap \tau_1 = \{v \in \tau_\gamma \mid < h, v > \geq 0,\ \forall h \in \check{\tau}_1\}$. Si $h \in \tau_1^\perp$ ou $h = e^{p,q,1}$, $< h, v > \geq 0$ pour tout $v \in \tau_\gamma$. On en déduit que

$$\tau_\gamma \cap \tau_1 = \{v \in \tau_\gamma \mid < e^{p,q,s} - e^{p,q,1}, v > \geq 0,\ 0 \leq p \leq k+1,\ 2 \leq q \leq l_p,\ 2 \leq s \leq d_{p,q}\} \quad .$$

Or $< e^{p,q,s} - e^{p,q,1}, v_c >= 0$ pour $\mu < c \leq m'$, car $\{v_c\}_{\mu < c \leq m'} \subseteq \tau_{1,Z'} \subset \tau_{1,Z}$. D'autre part pour tout p, avec $0 \leq p \leq k+1$, et pour tout q, avec $1 \leq q \leq l_p$, il existe un unique $E'_{i,j}$ tel que $E_{p,q} \subseteq E'_{i,j}$. On en déduit que

$$\tau_\gamma \cap \tau_1 = (H_{i_1,j_1} \oplus \cdots \oplus H_{i_\mu,j_\mu}) \oplus (\bigoplus_{\substack{j \neq 1 \\ (i,j) \neq (i_c,j_c) \\ c=1,\ldots,\mu}} (\gamma_{i,j} \cap H_{i,j})) \oplus < v_{\mu+1}, \cdots, v_{m'} > \quad ,$$

où

$$H_{i,j} := \bigoplus_{E_{p,q} \subseteq E'_{i,j}} < e'_{p,q}, e_{p,q,2}, e_{p,q,3}, \cdots, e_{p,q,d_{p,q}} > \quad .$$

Puisque $\gamma_{i,j}$ est une face propre et maximale de $C'_{i,j}$, on déduit que $\gamma_{i,j} \cap H_{i,j}$ est un cône simplicial.

Ainsi on a montré que $\tau_\gamma \cap \tau_1$ est la somme directe des cônes simpliciaux, et par suite lui même est un cône simplicial. En général, soit δ (resp. δ_1) un cône dans $\widetilde{\Pi}_{Z'}$ (resp. Π^1_Z). Il existe un τ_γ (resp. τ_1), qui est un cône maximal dans $\widetilde{\Pi}_{Z'}$ (resp. Π^1_Z) contenant δ (resp. δ_1). L'intersection $\delta \cap \delta_1$ est une face de $\tau_\gamma \cap \tau_1$. Ce dernier est un cône simplicial, par conséquent $\delta \cap \delta_1$ est un cône simplicial. Donc $\widetilde{\Pi}_{Z'} \cap \Pi^1_Z$ est un éventail.

Une conséquence immédiate, est que $\Psi_{Z',Z}$ est la restriction de $\Pi^{+Z}_{Z'}$ à $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$, donc est une subdivision de $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$. D'autre part, d'après les calculs précédents, pour tout $\tau_\gamma \in \widetilde{\Pi}_{Z'}$ et tout $\tau_1 \in \Pi^1_Z$, qui sont de dimensions maximales, $\tau_\gamma \cap \tau_1$ est la somme directe d'une face de $\tau_{Z'}$ avec un cône de dimension maximale contenu dans $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$. Ce dernier est donc un élément de $\Psi_{Z',Z}$. Ceci implique que $\Pi^{+Z}_{Z'}$ est la subdivision de $(\Pi^1_Z)_{|\tau_{Z'}}$ induite par $\Psi_{Z',Z}$.

De nouveau d'après la proposition 3.3, on peut contracter les L à partir de $\Pi^{+Z}_{Z'}$, avec $L \in \tau_{Z'} \cap \Lambda_Z$, et obtenir encore un éventail simplicial qui est une subdivision de $\widetilde{\Pi}_{Z'}$. Or ces deux éventails sont tous simpliciaux et ont les mêmes arrêtes, on en conclut qu'ils sont égaux. La proposition est démontrée. □

Proposition 3.5 *Il existe une subdivision $\widetilde{\Pi}_Z$ de τ_Z telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées.*

(1) *Pour tout $Z' \in \mathcal{S}$, avec $Z \subset \overline{Z'}$, on a $(\widetilde{\Pi}_Z)_{|\tau_{Z'}} = \widetilde{\Pi}_{Z'}$.*

(2) *Soit $\widetilde{\Sigma}_Z$ la subdivision de Σ_Z induite par $\widetilde{\Pi}_Z$. Alors le morphisme $\widetilde{\varphi}_Z : V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N} \longrightarrow V_{\Sigma_Z,N}$ est équivariant par rapport à $G(Z)$.*

(3) *L'image inverse de $\varphi_Z(U_Z)$ dans $V_{\widetilde{\Sigma}_Z,N}$, notée $\widetilde{U}_Z$, est stable par $G(Z)$. De plus $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$ est une désingularisation de $U_Z/G_0(Z)$.*

Démonstration. Pour chaque $Z' \in \mathcal{S}$ tel que $Z \subset \overline{Z'}$, on pose $\Pi^{+Z}_{Z'} := \widetilde{\Pi}_{Z'} \cap \Pi^1_Z$ et $\Psi_{Z',Z} := \widetilde{\Pi}_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$. D'après la proposition précédente, $\Pi^{+Z}_{Z'}$ est la subdivision de $(\Pi^1_Z)_{\tau_{Z'}}$ induite par $\Psi_{Z',Z}$, qui est une subdivision de $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$. D'après le lemme 3.2, $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$ est une face de $\tau_{1,Z}$. Si Z'' est une autre strate dans $\mathcal{S}$ telle que $Z' \subset \overline{Z''}$, alors l'hypothèse de récurence implique que $(\widetilde{\Pi}_{Z'})_{|\tau_{Z''}} = \widetilde{\Pi}_{Z''}$. Par conséquent on a $(\Pi^{+Z}_{Z'})_{|\tau_{Z''} \cap \tau_{1,Z}} = (\Pi^{+Z}_{Z''})_{|\tau_{Z''} \cap \tau_{1,Z}}$, et donc $(\Psi_{Z',Z})_{|\tau_{Z''} \cap \tau_{1,Z}} = \Psi_{Z'',Z}$. On obtient ainsi une famille compatible de subdivisions des faces de $\tau_{1,Z}$. C'est facile de voir qu'il existe une subdivision Θ_Z de $\tau_{1,Z}$, telle que

(a) la restriction de Θ_Z sur toute face $\tau_{Z'} \cap \tau_{1,Z}$ soit égale à la subdivision $\Psi_{Z',Z}$,

(b) V_{Θ_Z,N^Z} soit une désingularisation de $V_{\tau_{1,Z},N^Z}$.

En effet une telle Θ_Z peut être construite de la façon suivante. Posons $\Theta_0 := \tau_{1,Z}$, et notons Θ_1 la subdivision centrale de $\tau_{1,Z}$. On remarque que Θ_1 est simpliciale et que chaque cône $\sigma_1 \in \Theta_1$ possède une unique face maximale σ_0, avec $\sigma_0 < \tau_{1,Z}$. Donc la famille compatible de subdivisions des faces de $\tau_{1,Z}$ ci-dessus induit canoniquement une subdivision de Θ_1, notée Θ_2. Ensuite on prend une subdivision Θ_3 de Θ_2 telle que V_{Θ_3,N^Z} soit une désingularisation de V_{Θ_2,N^Z}. Alors $\Theta_Z := \Theta_3$ vérifie les conditions (a) et (b) indiquées ci-dessus.

Une telle subdivision Θ_Z étant construite, on dénote Π_Z^+ la subdivision de Π_Z^1 induite par Θ_Z. D'après la proposition 3.4 on peut contracter les arrêtes L, avec $L \in \Lambda_Z$, et obtenir une subdivision $\widetilde{\Pi}_Z$ de τ_Z telle que $(\widetilde{\Pi}_Z)_{|\tau_{Z'}} = \widetilde{\Pi}_{Z'}$ pour tout $Z' \in \mathcal{S}$ avec $Z \subset \overline{Z'}$. Les (2) et (3) résultent alors de la proposition 3.3. □

Ainsi on arrive à construire la famille $\{\widetilde{U}_Z\}_{Z\in\mathcal{S}}$ telle qu'elle vérifie les trois conditions citées au début de cette section.

3.2 Démonstration du théorème 4.

1. *Montrons d'abord que les $\widetilde{U}_Z$, avec $Z \in \mathcal{S}$, peuvent se recoller.*

Pour tous $Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$, il existe un unique $Z \in \mathcal{S}$ tel que $(Z_1 \cup Z_2) \subseteq \overline{Z}$ et tel que $(U_{Z_1} \cap U_{Z_2}) = U_Z$ (Théorème 3). On définit $\widetilde{U}_{Z_1,Z_2} := \widetilde{\varphi}_{Z_1}^{-1}(\varphi_{Z_1}(U_Z))$ et $\widetilde{U}_{Z_2,Z_1} := \widetilde{\varphi}_{Z_2}^{-1}(\varphi_{Z_2}(U_Z))$. Alors la condition (ii) implique que $\widetilde{i}_{Z,Z_1} : \widetilde{U}_Z \longrightarrow \widetilde{U}_{Z_1,Z_2}$ et $\widetilde{i}_{Z,Z_2} : \widetilde{U}_Z \longrightarrow \widetilde{U}_{Z_2,Z_1}$ sont des isomorphismes. Définissons le morphime $\vartheta_{Z_1,Z_2} : \widetilde{U}_{Z_1,Z_2} \longrightarrow \widetilde{U}_{Z_2,Z_1}$ par $\vartheta_{Z_1,Z_2} := \widetilde{i}_{Z,Z_2} \circ (\widetilde{i}_{Z,Z_1})^{-1}$, alors on a $\vartheta_{Z_1,Z_2} = (\vartheta_{Z_2,Z_1})^{-1}$.

Pour tous $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{S}$, il existe Z_{12}, Z_{23}, Z_{31}, Z_{123} uniques dans $\mathcal{S}$ tels que $Z_i \cap Z_j = Z_{ij}$, avec $1 \le i < j \le 3$, et tels que $Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 = Z_{123}$. On peut vérifier directement les deux égalités suivantes:

- $\vartheta_{Z_1,Z_2}(\widetilde{U}_{Z_1,Z_2} \cap \widetilde{U}_{Z_1,Z_3}) = \widetilde{U}_{Z_2,Z_1} \cap \widetilde{U}_{Z_2,Z_3}$,
- $(\vartheta_{Z_1,Z_3})_{|\widetilde{U}_{Z_1,Z_2} \cap \widetilde{U}_{Z_1,Z_3}} = (\vartheta_{Z_2,Z_3} \circ \vartheta_{Z_1,Z_2})_{|\widetilde{U}_{Z_1,Z_2} \cap \widetilde{U}_{Z_1,Z_3}}$.

On peut donc recoller les $\widetilde{U}_Z$ le long des isomorphismes ϑ_{Z_1,Z_2}, pour tous $Z, Z_1, Z_2 \in \mathcal{S}$ (lemme de recollement, [14] page 80). Notons $\widetilde{X}$ la variété ainsi obtenue et notons ψ_Z l'immersion ouverte de $\widetilde{U}_Z$ dans $\widetilde{X}$.

2. *Montrons que $\widetilde{X}$ est munie d'une action de G.*

Soient $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ et $g \in G$. Alors il existe un $Z \in \mathcal{S}$ et un $x \in \widetilde{U}_Z$ tels que $\tilde{x} = \psi_Z(x)$. On pose $g(\tilde{x}) := \psi_{g(Z)}(g(x))$, où $g(x)$ est l'image de x dans $\widetilde{U}_{g(Z)}$ par l'isomorphisme de $\widetilde{U}_Z$ dans $\widetilde{U}_{g(Z)}$ induit par $g : U_Z \longrightarrow U_{g(Z)}$. Supposons qu'il y ait un autre représentant $x' \in \widetilde{U}_{Z'}$ tel que

$\tilde{x} = \psi_{Z'}(x')$. Alors on a $x' = \vartheta_{Z,Z'}(x)$ et par suite $g(x') = \vartheta_{g(Z),g(Z')}(g(x))$. Donc on obtient $\psi_{g(Z')}(g(x')) = \psi_{g(Z)}(g(x))$. Ceci montre que le morphisme $g : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ est bien défini. Par conséquent $\widetilde{X}$ est munie d'une action de G. Le même argument montre aussi que le morphisme canonique de $\widetilde{X}$ dans X', induit par les morphismes $\widetilde{\varphi}_Z : \widetilde{U}_Z \longrightarrow U_Z$, est équivariant par rapport à G.

3. *Montrons que $\widetilde{X}/G$ est une désingularisation de X/G.*

Fixons d'abord quelques notations. Soit V une variété algébrique. On peut considérer V comme une variété analytique complexe et on note $\mathcal{H}_{V,x}$ l'anneau des fonctions holomorphes en x, pour tout point $x \in V$. Il est bien connu que $\mathcal{O}_{V,x}$ est régulier si et seulement si $\mathcal{H}_{V,x}$ est régulier.

Puisque le morphisme $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \longrightarrow X'$ est propre et birationnel, équivariant par rapport à G, on déduit que le morphisme $\bar{\varphi} : \widetilde{X}/G \longrightarrow X'/G$ est aussi propre et birationnel.

Soit $\bar{x}$ un point quelconque dans $\widetilde{X}/G$. Prenons un point $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ tel que $\bar{x}$ soit l'image de $\tilde{x}$. On a $\mathcal{H}_{\widetilde{X}/G,\bar{x}} \simeq (\mathcal{H}_{\widetilde{X},\tilde{x}})/G_{\tilde{x}}$, où $G_{\tilde{x}}$ est le groupe d'isotropie de $\tilde{x}$ ([5]). Soit $x' = \widetilde{\varphi}(\tilde{x})$. Il existe une unique strate $Z \in \mathcal{S}$ telle que $x' \in Z$. On en déduit que $\widetilde{U}_Z$ (resp. U_Z) est un voisinage ouvert de $\tilde{x}$ (resp. de x'). Comme le morphisme $\widetilde{\varphi}_Z : \widetilde{U}_Z \longrightarrow U_Z$ est équivariant par rapport à $G_0(Z)$ et que $G_0(Z) = G_{x'}$ (Lemme 2.5), on obtient $(\mathcal{H}_{\widetilde{U}_Z,\tilde{x}})/G_{\tilde{x}} \simeq \mathcal{H}_{(\widetilde{U}_Z/G_0(Z)),\bar{x}_Z}$, où $\bar{x}_Z$ est l'image de $\tilde{x}$ dans $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$. Or $\widetilde{U}_Z/G_0(Z)$ est une désingularisation de $U_Z/G_0(Z)$ (Proposition 3.5), donc $\mathcal{H}_{(\widetilde{U}_Z/G_0(Z)),\bar{x}_Z}$ est régulier, et par suite $\mathcal{H}_{\widetilde{X}/G,\bar{x}} \simeq (\mathcal{H}_{\widetilde{U}_Z,\tilde{x}})/G_{\tilde{x}}$ est régulier. Ceci implique que $\mathcal{O}_{\widetilde{X}/G,\bar{x}}$ est régulier. Par conséquent $\widetilde{X}/G$ est lisse.

Les constructions locales des $\widetilde{U}_Z$, avec $Z \in \mathcal{S}$, montrent que $\widetilde{X}/G$ est une désingularisation X'/G. De plus le morphisme canonique de X'/G dans X/G induit un isomorphisme sur l'image inverse de $(X/G) \setminus Sing(X/G)$. Donc $\bar{\psi} : \widetilde{X}/G \longrightarrow X/G$ induit un isomorphisme sur l'image inverse de $(X/G) \setminus Sing(X/G)$. On en conclut que $\widetilde{X}/G$ est une désingularisation de X/G. $\square$

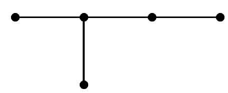
Exemple 1: Singularité D_5.

$n = 2$, G est le groupe binaire diédrale d'ordre 12, engendré par

$$a = \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{6}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi}{6}} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Soit $\varphi : X' \longrightarrow X := \mathbb{C}^2$ l'éclatement de l'origine. L'image inverse de l'origine, noté E, est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et le groupe d'isotropie de tout point de X' est abélien. Le quotient X'/G a trois singularités isolées, deux de types A_1 et une de type A_2. Leur images inverse dans X' sont les huit points dont le groupe d'isotropie contient strictement le centre de G. Ils forment des orbites spéciales dont trois représendants sont: $x_1 := [1,0]$ fixe par $< a >$, $x_2 := [1,i]$ et $x_3 := [1,-i]$ fixes par $< b >$.

On peut représenter X par un cône régulier C de dimension 2 et représenter X' par la subdivisin centrale Σ de C. Si on choisit des tores différents, les orbites associées au même cône sont différentes. Soit Σ_a (resp. $Sigma_b$, $\sigma_{b'}$, $\Sigma_{b''}$) la subdivision de Σ telle que $\widetilde{Y}_a := V_{\Sigma_a, N_a}/ < a >$ (resp. $\widetilde{Y}_b := V_{\Sigma_b, N_b}/ < b >$, $\widetilde{Y}_{b'} := V_{\Sigma_{b'}, N_{b'}}/ < b' >$, $\widetilde{Y}_{b''} := V_{\Sigma_{b''}, N_{b''}}/ < b'' >$) soit la désingularisation minimale de $X/ < a >$ (resp. $X/ < b >$, $X/ < b' >$, $X/ < b'' >$), où N_a (resp. N_n, $N_{b'}$, $N_{b''}$) est le $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2 déterminé par le tore contenant a (resp. b, b', b''). Notons $U_a := X' \setminus \{x_2, x_2', x_2'', x_3, x_3', x_3''\}$, $U_b := X' \setminus \{x_1, x_1', x_2', x_2'', x_3', x_3''\}$, $U_{b'} := X' \setminus \{x_1, x_1', x_2, x_2'', x_3, x_3''\}$, $U_{b''} := X' \setminus \{x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3'\}$, où $x_1' := b(x_1)$, $x_i' := a(x_i)$, $x_i'' := a^2(x_i)$ pour $i = 2$ ou 3. Notons $\widetilde{U}_a$ (resp. $\widetilde{U}_b$, $\widetilde{U}_{b'}$, $\widetilde{U}_{b''}$) l'image inverse de U_a (resp. U_b, $U_{b'}$, $U_{b''}$) dans $\widetilde{Y}_a$ (resp. $\widetilde{Y}_b$, $\widetilde{Y}_{b'}$, $\widetilde{Y}_{b''}$. Alors les $\widetilde{U}_\lambda$, $\lambda \in \{a, b, b', b''\}$, peuvent se recoller le long de l'ouvert commun $U_2 := X' \setminus \{x_1, x_1', x_2, x_2', x_2'', x_3, x_3', x_3''\}$ et le recollement $\widetilde{X}$ est une G variété. Le quotient $\widetilde{X}/G$ est la désingularosation minimale de X/G dont le graphe dual est le suivant.

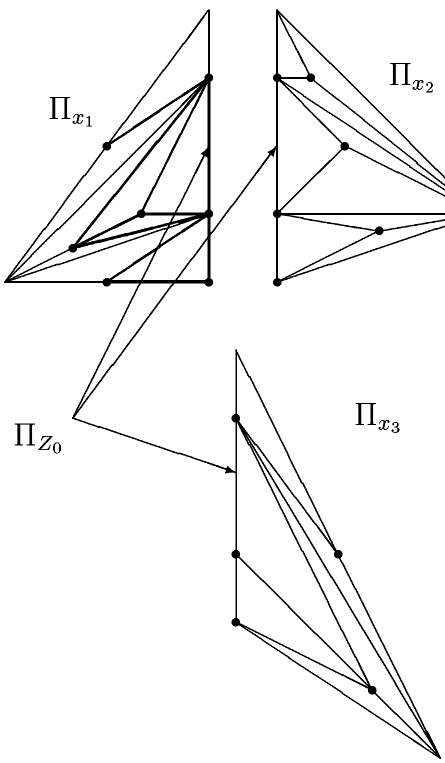


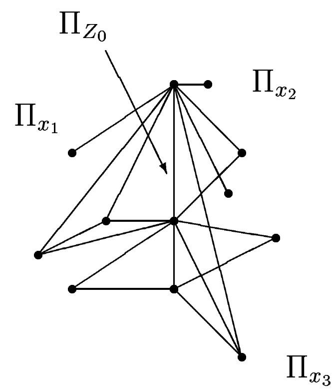
On remarque que dans ce cas la méthode de Brieskorn consiste à passer d'abord au quotient X'/G, ensuite utiliser la méthode de Jung-Hirzebruch pour résoudre les trois singularités isolées. Et on obtient la même désingularisation.

Exemple 2: $n = 3$, $G \subset GL(3, \mathbb{C})$ d'ordre 18, réductible non abélien engendré par

$$a_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe dans $X := \mathbb{C}^3$ un unique plan D et une unique droite L stables par G, et on a $X = L \times D$. Soient $\varphi : X' \longrightarrow X$ l'éclatement de X de centre L et D' la transformée stricte de D, D' est isomorphe à l'éclatement de D de centre l'origine et $X' \simeq L \times D'$. Le groupe d'isotropie de tout point de X' est abélien. Notons E le diviseur exceptionnel de φ et posons $P^1 := \varphi^{-1}(\{0\})$. Alors D' (resp. X') est un fibré en droites (resp. fibré vectoriel de rang 2) sur P^1 qui est isomorphe à une droite projective, et on a $E \simeq L \times P^1$. Le groupe d'isotropie du point générique de P^1 est $C(G)$. Les points dont le groupe d'isotropie contient strictement $C(G)$ forment trois orbites spéciales dans P^1 dont trois représentants sont: un point fixe de $H :=< a_1, a_2 >$, noté x_1; les deux points fixes de $< C(G), b >$, notés respectivement x_2 et x_3. Notons Z_0 l'unique strate dans $\mathcal{S}$ dont l'adhérence est P^1. Alors une des $\widetilde{X}$ peut être construite de la façon suivante:





le graphe dual de $\bar{\psi}$

Dans le graphe dual du morphisme $\bar{\psi} : \widetilde{X}/G \longrightarrow X/G$, chaque sommet représente un diviseur exceptionnel irréductible. Chaque arrête qui relie deux sommets distincts représente une courbe irréductible qui est l'intersection des deux diviseurs exceptionnels correspondant aux deux sommets. Et chaque triangle formé par trois sommets et trois arrêtes représente l'unique point d'intersection des trois diviseurs exceptionnels correspondant.

References

[1] M. Artin. Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces. *Amer. J. Math.*, 84:129–136, 1962.

[2] J. Bertin and D. Markushevich. Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau. *Math. Ann.*, 299:105–116, 1994.

[3] C. Bouvier et G. Gonzalez-Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques. *Tôhoku Math. J.*, 47:125–149, 1995.

[4] E. Brieskorn. Rationale Singularitäten komplexer Fläschen. *Invent. Math.* 4:336–358, 1968.

[5] H. Cartan. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. *Algebraic geometry and topology Princeton*, 90–102, 1957.

[6] C. Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. *Am. J. Math.*, 77:778–782, 1955.

[7] P. DuVal. On isolated singularities which do not affect the condition of adjunction. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 30:453–459, 1934.

[8] A. Fujiki. On resolution of cyclic quotient singularities. *Pur-Res-Inven-Math-Sci*, 10(1):293–328, 1974–1975.

[9] W. Fulton and R. MacPherson. A compactification of configuration spaces. *Annals of Mathematics*, 139, 1994.

[10] G. Gonzalez-Sprinberg. Résolution de Nash des points doubles rationnels. *Ann. Inst. Fourier*, 32(2):111–178, 1982.

[11] G. Gonzalez-Sprinberg. Calcul de l'invariant local d'Euler pour les singularités quotient de surfaces. *C.R.A.S. Paris*, t.(288):989–992, 1979.

[12] G. Gonzalez-Sprinberg and M. Lejeune-Jalabert. Modèles canoniques plongés 1. *Kodai Math. Journal*, 14(2):194–209, 1991.

[13] G. Gonzalez-Sprinberg and J.L. Verdier. Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^{e} série, t.16:409–449, 1983.

[14] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlarg, 1977.

[15] H. Hironaka and M. Rossi. On the equivalence of embeddings of exceptional complex spaces. *Math. Annalen*, 156:313–333, 1964.

[16] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. *Annals of Math.*, 79:109–203(I),205–326(II), 1964.

[17] Y. Ito. Crepant resolution of trihedral singularities. *Proc. Japan Acad.*, 70:131–136, 1992.

[18] Y. Ito and M. Reid. The McKay correspondence for finite subgroupes of $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$. *Preprint*, 1995.

[19] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat. *Toroidal Embeddings I.* Lectures Notes in Mathematics, 339, *Springer*, 1973.

[20] T. Oda. *Lectures on Torus Embeddings and Applications.* Tata Inst. of Fund. Reserch, 58, Springer, 1978.

[21] N. Pouyanne. Une résolution en singularités toriques simpliciales des singularités-quotient de dimension trois. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, Vol I, 3:363–398, 1992.

[22] D. Prill. Local classification of quotients of complex manifolds by discontinus groups. *Duke Math. J.*, 34:375–386, 1967.

[23] M. Reid. *Young person's guide to canonical singularities.* Algebraic Geometry, Bowdoin, Proc. Sym, 1985.

[24] O. Riemenschneider. Die invarianten der endlichen untergruppen von $GL(2, \mathbb{C})$. *Math. Z.*, 153:37–50, 1977.

[25] S.S. Roan. On the generalization of Kummer surfaces. *J. Differential Geometry*, 30:523–537, 1989

[26] J.P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier*, 6:1–42, 1956.

[27] J.P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann Paris, 1967.

[28] H. Whitney. Local properties of analytic varieties. *Differential and Combinatorial Topology, Princeton University Press*, 1965.

PAN Feng
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex – FRANCE
e-mail: pan@puccini.ujf-grenoble.fr

Contents