Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment

Vũ Ngọc San

1 Introduction

L'étude des propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger $-\frac{h^2}{2}\Delta + V$ en régime semi-classique ($h \to 0$) en fonction de la forme du potentiel V pose naturellement le problème de savoir dans quelle mesure, étant donné un h-opérateur pseudo-différentiel $P(h)$, son symbole principal influe sur la nature des solutions microlocales de l'équation :

$$Pu = O(h^\infty). \tag{1}$$

Dans le cas où P est auto-adjoint à variétés caractéristiques compactes (par exemple, l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}$ avec un potentiel tendant vers l'infini en $\pm\infty$) , on a ainsi accès au comportement microlocal du spectre semi-classique. Ce problème est discuté par exemple dans [13, 14] et les références qui y sont citées. La forme du spectre va dépendre essentiellement de la forme du *linéarisé* du symbole principal p. On sait par exemple que, si p est non critique, P se conjugue à un opérateur de dérivation $\frac{h}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}$. Cette forme normale permet de trouver les conditions sous lesquelles l'équation (1) admet des solutions L^2. Par analogie avec l'équation de Schrödinger, on appelle ces conditions "Conditions de Bohr-Sommerfeld" (voir par exemple [8]). Un résultat analogue est valable au voisinage des points critiques de p, pourvu qu'ils soient non-dégénérés, et ceci même dans le cas d'un équilibre instable, comme l'équation de Schrödinger en dimension 1 au voisinage d'un maximum local du potentiel. C'est ce que démontrent et utilisent Yves Colin de Verdière et Bernard Parisse dans les articles [4, 5]. Ils montrent comment exprimer une "condition de Bohr-Sommerfeld" qui, comme dans le cas de niveaux d'énergie réguliers, sélectionne les solutions L^2 de (1).

La possibilité d'écrire une telle "forme normale" pour cet opérateur est directement liée à son caractère *complètement intégrable*, et à l'existence de coordonnées actions-angles (éventuellement singulières). On sait généraliser ces résultats à des systèmes complètement intégrables en dimension supérieure, au voisinage de niveaux d'énergie réguliers (voir [3, 2]); il restait à voir comment exprimer ces formes normales lorsque les coordonnées actions-angles sont *singulières*, ce qui est l'objet de cet article. On verra dans un travail ultérieur l'application de ces résultats à l'écriture des conditions de Bohr-Sommerfeld. Mentionnons aussi que Bleher, Kosygin et Sinai [1] arrivent à une description spectrale des systèmes de Liouville (qui représentent une classe générale de systèmes intégrables en dimension 2), par une approche différente.

Décrivons un peu plus précisément le contenu de cet article :

Sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$, un système complètement intégrable est la donnée de n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ en involution pour le crochet de Poisson défini par la structure symplectique, et dont les différentielles sont presque partout indépendantes. Si H est un hamiltonien appartenant à l'algèbre des fonctions C^∞ fonctionnellement engendrées par $f_1, \ldots, f_n$, il est dit complètement intégrable et les f_i sont des intégrales premières du mouvement. Un tel système définit une action hamiltonienne locale de $\mathbb{R}^n$ dans M, d'application moment :

$$F \;:\; M \ni m \mapsto (f_1(m), \ldots, f_n(m)) \in \mathbb{R}^n,$$

et dont les orbites sont génériquement les fibres lagrangiennes $F^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^n$. Plus précisément, on sait (théorème d'Arnold-Liouville [9]) que si c est une valeur régulière de F, et si $F^{-1}(c)$ est compacte, alors au voisinage de c, les ensembles de niveau de F sont des tores lagrangiens qui s'écrivent $\xi = cst$ dans des bonnes coordonnées symplectiques (x, ξ). En outre, dans ces coordonnées – dites "actions (ξ) - angles (x)" – le mouvement dans chaque tore est linéaire.

Supposons maintenant qu'on se donne n opérateurs pseudo-différentiels P_1, $\ldots$, P_n sur une variété X de dimension n, qui commutent deux-à-deux, et dont les symboles principaux forment un système complètement intégrable sur T^*X. En dehors des points critiques de l'application moment, l'usage des coordonnées actions-angles classiques permet alors de se ramener au cas où les opérateurs sont simplement les $\frac{h}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Une telle forme normale permet d'écrire les conditions, dites bien-sûr de *Bohr-Sommerfeld*, sous lesquelles on peut résoudre simultanément les équations $P_i u = O(h^\infty)$ et qui sous certaines hypothèses, donnent la forme du *spectre conjoint* des P_i. Comme le cas unidimensionnel mentionné plus haut, ceci est connu depuis longtemps, au moins des physiciens quantiques. Les preuves mathématiques rigoureuses de ce phénomène, comprenant les asymptotiques complètes des valeurs propres, sont données par les travaux d'Anne-Marie Charbonnel [2] et Yves Colin de Verdière [3].

La question est donc de savoir ce que devient le système au voisinage d'un point critique de F. Au niveau classique, on est amené à se placer dans l'hypothèse d'un point critique "de Morse", ou "non-dégénéré", en un sens précisé en section 2. On sait alors bien décrire la structure locale des singularités du feuilletage lagrangien grâce au théorème d'Eliasson [11]. Le résultat le plus fort qu'on puisse obtenir affirme que le système est conjugué à une algèbre d'observables quadratiques "standard". Il nécessite cependant la connexité locale des fibres lagrangiennes.

Après une mise au point sur ces problèmes "classiques" (dans les deux sens du mot...) en section 2, on montrera (section 3) comment ces techniques permettent de fournir une forme normale *semi-classique* pour des OPDs au voisinage d'un point critique de F. On obtient le résultat suivant (théorèmes 3.1,3.6):

"l'algèbre engendrée par les opérateurs P_i est, à $O(h^\infty)$ près, conjuguée par un opérateur intégral de Fourier à une algèbre "standard" (ne dépendant que de la linéarisation des symboles principaux p_i)."

C'est une généralisation de [4], où le résultat est donné en dimension 1. On verra cependant que, comme le théorème d'Eliasson le laissait prévoir, le cas multi-dimensionnel introduit une légère subtilité, due au fait que l'algèbre standard en question peut avoir une formulation légèrement différente selon que les fibres lagrangiennes sont localement connexes ou non. On en donnera malgré tout une description complète dans le cas général (proposition 3.4).

2 Formes normales classiques

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$, et $m \in M$. On note $\mathcal{H}$ l'homomorphisme de l'algèbre de Lie (pour le crochet de Poisson) des fonctions C^∞ sur M critiques en m sur l'espace $\mathcal{Q}(2n)$ des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^{2n} = \{(x, \xi)\}$, qui à f associe sa hessienne. La structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{Q}(2n)$ est donnée par le crochet de Poisson. On a alors un isomorphisme canonique des algèbres de Lie $\mathcal{Q}(2n)$ et $\mathfrak{sp}(2n)$.

On se donne sur (M, m) un système complètement intégrable critique non dégénéré, c'est-à-dire n fonctions $f_i \in C^\infty(M)$, $i = 1 \dots n$, de différentielles presque partout indépendantes, qui commutent pour le crochet de Poisson symplectique, qui vérifient

$$f_i(m) = df_i(m) = 0, \;\; i = 1 \dots n$$

et telles que $A = \mathcal{H}(f_1, \dots, f_n)$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{Q}(2n)$. Rappelons qu'on appelle sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ commutative maximale, et qui vérifie en outre la propriété suivante :

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \quad \mathrm{ad}_H \text{ est un endomorphisme semi-simple de } \mathfrak{a}. \tag{2}$$

En ce qui concerne $\mathcal{Q}(2n)$, cela revient à dire que les $\mathcal{H}(f_i)$ sont indépendantes et que A admet une base $q_1, \dots, q_n$, que l'on appellera *base standard*, et où chaque q_i a l'une des trois formes suivantes :

- soit $q_i = x_i \xi_i$ (singularité *hyperbolique*)
- soit $q_i = x_i^2 + \xi_i^2$ (singularité *elliptique*)
- soit $q_i = x_i \xi_{i+1} - x_{i+1} \xi_i$, auquel cas on demande que $q_{i+1} = x_i \xi_i + x_{i+1} \xi_{i+1}$ (singularité *focus-focus*).

(voir [20])
On dira par exemple que le système est complètement hyperbolique si seul le premier cas apparaît.
$\mathcal{R}$*emarque* : la condition (2) est nécessaire; par exemple, pour $\mathfrak{a} = \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, la sous-algèbre engendrée par $q = \xi^2$ est commutative maximale mais ne relève pas de la classification ci-dessus. En effet, $\mathrm{ad}_q = 2\xi\frac{\partial}{\partial x}$ est nilpotente donc pas semi-simple.

On note $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de Lie de $C^\infty(M)$ fonctionnellement engendrée par les $f_1,\ldots,f_n$. Si $g_1,\ldots,g_n$ est un système générateur de $\mathcal{A}$, de telle sorte qu'il existe des fonctions $F_1,\ldots,F_n$ telles que

$$f_i = F_i(g_1,\ldots,g_n),\ i=1,\ldots,n$$

alors les $\mathcal{H}(g_i)$ forment une base de A qui s'obtient à partir de $\mathcal{H}(f_i)$ par le changement de base linéaire $dF^{-1}(0)$. Ceci montre en particulier que la sous-algèbre de Cartan associée ne dépend pas de la base de $\mathcal{A}$ choisie.

On a alors le théorème fondamental :

Théorème 2.1 (Eliasson [10, 4.1]) *Pour un tel système complètement intégrable, soit $(q_1,\ldots,q_n)$ une base standard de l'algèbre de Cartan associée. Alors le feuilletage lagrangien singulier donné par les surfaces de niveau des f_i est localement symplectiquement égal à celui donné par les q_i.*

Autrement dit, il existe un difféomorphisme symplectique φ au voisinage de m tel que :

$$\forall i,j\quad \{f_i\circ\varphi, q_j\} = 0.$$

L'algèbre de fonctions C^∞ qui va nous intéresser tout au long de ce travail est donc le *commutant* des q_j, qu'on note C_q :

$$C_q = \{f\in C^\infty, \forall j,\ \{f,q_j\}=0\}.$$

En dehors des axes de coordonnées, les q_j sont indépendants et forment donc des coordonnées action d'un système régulier de variables “action-angle”. Supposons par exemple que q_j soit un terme elliptique ou hyperbolique. La condition $\{f\circ\varphi, q_j\} = 0$ signifie que f ne dépend pas de la variable conjuguée à q_j. Sur chacune des composantes connexes de l'espace privé des hyperplans de coordonnées, un tel f, vu comme fonction des variables (x_j,ξ_j) (les autres étant fixées), ne dépend donc que de q_j. Si en outre les surface de niveau de q_j sont localement connexes au voisinage de 0 (q_j elliptique), on en déduit que f peut s'écrire dans un voisinage de zéro comme une fonction de $(z_1,\ldots,z_{j-1},q_j,z_{j+1},\ldots,z_n)$ (on note $z_i=(x_i,\xi_i)$). Il en va de même pour une paire *focus-focus* puisque la surface de niveau commune s'écrit $u_iu_{i+1} = cst$ avec

$$u_i = x_i + \sqrt{-1}x_{i+1}\ ,\ u_{i+1} = \xi_i - \sqrt{-1}\xi_{i+1}.$$

Par contre, les surfaces de niveau d'un q_j hyperbolique sont des branches d'hyperboles qui ne coupent pas les hyperplans de coordonnées. Une fonction f qui commute avec ce q_j sera donc décrite par deux fonctions f_+ et f_- telles que, sur les demi-espaces $\pm x_j > 0$, $f = f_\pm(q_j)$. La seule condition de recollement est que $f_+ - f_-$ soit plate en 0.

En résumé :

Proposition 2.2 *Un élément f de C_q est caractérisé de la façon suivante :*

- *sur chaque composante connexe du complémentaire des hyperplans de coordonnées, f est une fonction C^∞ de $(q_1, \ldots, q_n)$ uniquement.*
- *Si les feuilles lagrangiennes sont connexes au voisinage de m, f s'écrit sur ce voisinage comme fonction C^∞ de $(q_1, \ldots, q_n)$. Sinon, il faut pour décrire f $2^{\text{nombre d'éléments hyperboliques}}$ fonctions différentes, qui se recollent à l'ordre infini en 0.*

On obtient donc immédiatement l'existence de formes normales "fortes" en l'absence d'élément hyperbolique :

Théorème 2.3 *Soit $\mathcal{A}$ un système complètement intégrable critique non dégénéré; soit $(q_1, \ldots, q_n)$ une base standard de l'algèbre de Cartan associée. On suppose qu'il n'y a pas parmi les q_i d'élément hyperbolique. Alors il existe des coordonnées symplectiques dans lesquelles $\mathcal{A}$ est engendrée par les q_i.*

En d'autres termes, il existe un difféomorphisme symplectique φ au voisinage de m et des fonctions $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de différentielles indépendantes en 0, telles que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad f_i \circ \varphi = F_i(q_i, \ldots, q_n).$$

L'étude de telles formes normales n'est pas nouvelle, en particulier dans le cadre formel ou analytique (voir [18, 19]). Dans la catégorie C^∞, le résultat principal mentionné ci-dessus est dû à Eliasson [10]. Lorsque la singularité est entièrement *elliptique* ($q_i = x_i^2 + \xi_i^2$), le théorème 2.3 est montré d'une façon différente par [7].

Remarque 1 : il n'est pas certain que l'hypothèse de connexité des feuilles lagrangiennes soit nécessaire, puisque le résultat a été prouvé pour toute singularité non dégénérée en dimension deux : c'est le "Lemme de Morse isochore" (voir [6]). En outre, on sait ("théorème de Sternberg") qu'en dimension quelconque n, un hamiltonien H hyperbolique non résonnant (c'est-à-dire dont la hessienne est régulière dans une sous-algèbre de Cartan totalement hyperbolique: elle s'écrit $\sum \lambda_i x_i \xi_i$ avec des λ_i indépendants sur $\mathbb{Z}$) est complètement intégrable : il existe un symplectomorphisme local φ tel que $H \circ \varphi$ soit une fonction des $x_i\xi_i$. Or si l'on se donne un système C.I. $\mathcal{A}$ complètement hyperbolique, il existe une base de $\mathcal{A}$ formée par des fonctions toutes non-résonnantes. Il ne paraît donc pas absurde de penser qu'il puisse exister une forme normale dans ce cas. Dans [12] est exposée une belle démonstration du théorème de Sternberg mais elle semble résister au cas complètement intégrable...

Cependant, bien que le résultat serait intéressant en lui-même, une forme normale générale ne nous serait pas utile puisque le lemme crucial 2.5, nécessaire pour traiter le problème au niveau semi-classique est, quant à lui, faux en présence d'un mélange d'éléments hyperboliques avec des éléments d'autres types.

Remarque 2 : les résultats donnés ici seront locaux. Il est à noter néanmoins que l'étude topologique globale de tels systèmes complètement intégrables à singularités est une branche active initiée par Fomenko; à ce sujet, lire les dernières mises au point de Nguyen Tiên Zung [16].

2.1 Un exemple : le problème de C.Neumann classique

Le problème de C.Neumann est celui du mouvement d'une particule sur une sphère de dimension n soumise à une force dérivant d'un potentiel quadratique. On se donne donc une matrice symétrique réelle A définie positive de taille $n+1$. Le potentiel V est la restriction à S^n de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ associée :

$$V(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle.$$

Le mouvement est décrit sur T^*S^n par l'Hamiltonien

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x).$$

La métrique sur la sphère est celle induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et la structure symplectique sur T^*S^n n'est autre que la restriction de la structure standard de $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Remarquons ici que le problème est invariant par antipodie, ce qui nous autorise à le considérer sur $\mathbb{P}^n$ plutôt que sur S^n.

Il est pratique de voir ce système comme la restriction d'un système hamiltonien sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ de la façon suivante :

Contraindre le mouvement à s'effectuer sur S^n revient à tenir compte d'une force de réaction normale à la sphère. L'équation du mouvement prend la forme :

$$\ddot{x} = -V'(x) + \lambda x.$$

De $|x|^2 = 1$, on tire $\langle x, \dot{x}\rangle = \langle x, \ddot{x}\rangle + |\dot{x}|^2 = 0$, ce qui permet de déterminer λ :

$$\lambda = \langle V'(x), x\rangle - |\dot{x}|^2 = 2V(x) - |\dot{x}|^2.$$

On peut alors vérifier que cette équation est obtenue en restreignant à

$$T^*S^n = \{(x,\xi), \quad |x|^2 = 1, \quad \langle x, \xi\rangle = 0\} \tag{3}$$

le champ de vecteurs sur $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ d'Hamiltonien :

$$H_0(x,\xi) = V(x) + \frac{1}{2}(|x|^2|\xi|^2 - \langle x, \xi\rangle).$$

On peut alors montrer que H_0 est complètement intégrable, et on dispose même d'un système explicite d'intégrales en involution, trouvé en 1975 par Uhlenbeck. Ce problème a des liens très étroits avec le flot géodésique sur un n-ellipsoïde; à ce sujet, voir [15].

Nous nous intéressons ici aux points fixes du flot.

Proposition 2.4 *Le problème de C.Neumann sur $T^*\mathbb{P}^n$ a exactement $n+1$ points fixes $p_0, \ldots, p_n$. En ordonnant convenablement les p_i, pour un potentiel non-résonnant, le système complètement intégrable associé est, au voisinage de p_i, du type $(i, n-i)$ (on dit qu'un système complètement intégrable est du type (p,q) au voisinage d'un point fixe si le linéarisé est une sous-algèbre de Cartan qui admet une base formée de p éléments hyperboliques et de q éléments elliptiques).*

Démonstration: on détermine les points critiques de H par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qui se trouvent être les valeurs propres λ_i de A. Les p_i sont donc une base de vecteurs propres aux voisinages desquels on peut écrire la forme de Morse de H. On voit alors que si V est assez générique, H'' est un élément régulier de la sous-algèbre de Cartan, ce qui permet de déterminer son type. $\diamond$

$\mathcal{R}$emarque 1 : la condition de non-résonance requise est celle de l'indépendance sur $\mathbb{Z}$, pour tous i, des $\sqrt{|\lambda_i - \lambda_j|}$, $j \neq i$. Elle est bien-entendu générique.

$\mathcal{R}$emarque 2 : on n'obtient pas dans cet exemple de singularité *focus-focus*. Mais ce dernier type de singularité, même s'il a longtemps été négligé, est loin d'être rare; il apparaît par exemple au point d'équilibre instable du pendule sphérique (voir [9]).

2.2 Un "Lemme de Poincaré" critique

Avant d'énoncer l'analogue du théorème 2.3 dans le cas "quantique", on a besoin du résultat suivant :

Théorème 2.5 *Soit $q_1, \ldots, q_n$ une base standard d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sp}(2n)$, telle que : ou bien aucun q_i n'est hyperbolique, ou bien tous les q_i sont hyperboliques. Soient g_i des fonctions C^∞ à valeurs réelles ou complexes telles que, au voisinage de 0,*

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \quad \{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}. \tag{4}$$

Alors il existe une fonction f définie au voisinage de 0, et des fonctions $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, formellement uniques, telles que

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \{f, q_i\} = g_i - F_i(q_1, \ldots, q_n). \tag{5}$$

Remarque 1 : pour $c \in \mathbb{R}^n$, notons Ω_c la lagrangienne $\cap q_i^{-1}(c_i)$. Elle est singulière pour $c = 0$. Aux points réguliers, les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{q_i}$ forment une base de l'espace tangent à Ω_c, ce qui permet de définir une 1-forme g_c sur Ω_c par :

$$g_c(\mathcal{X}_{q_i}) = g_i.$$

L'hypothèse du théorème 2.5 traduit alors que cette 1-forme est fermée. L'intégrer serait trouver une fonction f vérifiant $\{f, q_i\} = g_i$. Le théorème montre qu'on peut trouver une primitive f dépendant régulièrement du paramètre c même en $c = 0$, pourvu qu'on retranche à g une certaine fonction de c uniquement. Cette fonction contient donc les singularités "gênantes" de g en 0.

Remarque 2 : la remarque précédente prouve que l'hypothèse du théorème est nécessaire, ce qui se vérifie aussi immédiatement en utilisant l'identité de Jacobi.

Remarque 3 : les hypothèses sur la sous-algèbre de Cartan sont nécessaires. Par exemple, si q_1 est hyperbolique et q_2 elliptique, le système obtenu avec $g_1 = 0$ et g_2 une fonction ne dépendant que de z_1, plate en 0 et commutant avec q_1 sans être une fonction de q_1 n'admet pas de solution. Dans le cas général, le résultat maximal, dû à Eliasson [10], est qu'on peut résoudre le système (5) modulo des F_i qui commutent à tous les q_j sans pouvoir nécessairement s'écrire comme des fonctions des q_j. Ce résultat est d'ailleurs loin d'être dénué d'intérêt pour nous, puisqu'il permet de montrer facilement qu'on dispose d'une "intégration au premier ordre" :

Théorème 2.6 *Soit $q_1, \ldots, q_n$ une base standard d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sp}(2n)$ de type quelconque, Soient g_i des fonctions C^∞ à valeurs réelles ou complexes vérifiant (4) dans un voisinage de 0. Alors il existe une fonction f définie au voisinage de 0, et des fonctions $F_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ commutant avec les q_k et telles que*

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \{f, q_i\} = g_i - g_i(0) + q_1 F_{i1} + \cdots + q_n F_{in} \tag{6}$$

Démonstration: remarquons d'abord que le résultat découle directement du théorème 2.5 lorsque celui-ci est applicable, par une formule de Taylor. Quoi qu'il en soit, on résout le système modulo des fonctions F_i qui commutent à tous les q_j ; on utilise ensuite le lemme suivant :

Lemme 2.7 *Soit F une fonction commutant avec tous les q_j. Alors il existe des fonctions F_i commutant avec les q_j telles que :*

$$F = F(0) + \sum_{i=1}^{n} q_i F_i.$$

Démonstration: le résultat découle d'une formule de Taylor avec reste intégré sur un chemin formé de segments toujours parallèles aux axes de coordonnées ;

plus précisément, si G est une fonction de deux variables réelles $(x,\xi) = z$ vérifiant $\{G, x\xi\} = 0$, alors G est constante sur les axes. La formule

$$G(x,\xi) = -G(0,0) + G(x,0) + G(0,\xi) + x\xi \iint_{[0,1]^2} \frac{\partial^{\,2} G}{\partial x \partial \xi}(tx, s\xi) dt ds$$

donne alors $G = G(0,0) + x\xi\tilde{G}$. On a nécessairement encore $\{\tilde{G}, x\xi\} = 0$. Si maintenant F est une fonction des variables $(z_1, \ldots, z_n)$ vérifiant

$$\forall i, \quad \{F, q_i\} = 0,$$

on peut déjà l'écrire comme fonction de ceux des q_i qui ne sont pas hyperboliques; quitte à les réordonner, on a donc

$$F(z) = F(z_1, \ldots, z_n) = F_{q_1,\ldots,q_r}(z_{r+1}, \ldots, z_n).$$

Il est clair que $F_{q_1,\ldots,q_r}$ commute encore avec les q_i, $i > r$. Par l'argument précédent appliqué aux variables (x_{r+1}, ξ_{r+1}), on peut donc écrire :

$$F_{q_1,\ldots,q_r} = F_{q_1,\ldots,q_r}(0, z_{r+2}, \ldots, z_n) + q_{r+1}\tilde{F}_{q_1,\ldots,q_r}(z_{r+2}, \ldots, z_n).$$

$F_{q_1,\ldots,q_r}(0, z_{r+2}, \ldots, z_n)$ commute avec tous les q_i, ce qui permet en outre de voir que $\tilde{F}_{q_1,\ldots,q_r}$ doit commuter avec les q_i, $i > r$. Continuant par récurrence et développant enfin les fonctions des $(q_1, \ldots, q_r)$ par la formule de Taylor standard, on obtient le résultat. $\diamond$

Démonstration: (du théorème 2.5). La seule chose à démontrer ici est donc le cas totalement hyperbolique. On donnera aussi une résolution explicite du cas elliptique, qui peut être intéressante.

Tout au long des sections (2.2.1) et (2.2.2), on pose $q_i = x_i\xi_i$. On commence par examiner le cas formel, qui résout le problème modulo des fonctions plates, puis la solution du système (5) est donnée par une formule explicite.

2.2.1 Le cas hyperbolique formel

On note $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{2n})$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré k en les variables $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$. L'algèbre de Lie (pour le crochet de Poisson) des fonctions formelles est constituée par l'espace

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k.$$

Si $P \in \mathcal{P}_m$, la représentation adjointe

$$\mathrm{ad}_P \;:\; Q \mapsto \{P, Q\}$$

est un endomorphisme de $\mathcal{P}$ envoyant $\mathcal{P}_k$ sur $\mathcal{P}_{m+k-2}$. En particulier, si P est quadratique, ad_P est un endomorphisme de chaque $\mathcal{P}_k$, et ad est une représentation de $\mathcal{Q}(2n) = \mathcal{P}_2$.

Soit $\hat{\mathcal{A}}$ la sous-algèbre des fonctions formelles des q_i (une base de $\hat{\mathcal{A}}$ est ainsi constituée par les monômes $x^\alpha \xi^\beta$ avec $\alpha = \beta$). Par abus de notation, on identifiera parfois $\hat{\mathcal{A}}$ avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ par $F = F(q_1, \ldots, q_n)$.

On veut donc prouver le résultat suivant :

Proposition 2.8 *Soient $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{P}$ telles que*

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \;\; \{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}.$$

Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{P}$, et des fonctions $F_i \in \hat{\mathcal{A}}$ telles que

$$\forall i = 1, \ldots, n \;\; \{f, q_i\} = g_i - F_i(q_1, \ldots, q_n).$$

Démonstration: pour tous i, $\hat{\mathcal{A}} \in \ker(\mathrm{ad}_{q_i})$ donc ad_{q_i} se quotiente en un endomorphisme de $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$ (on désigne ainsi le quotient gradué $\oplus \mathcal{P}_k/\hat{\mathcal{A}}_k$). Plaçons-nous pour toute cette démonstration dans $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$; la proposition s'énonce alors ainsi :

$$\exists f, \;\; \forall i, \;\; \mathrm{ad}_{q_i} f = g_i. \tag{7}$$

Une algèbre de Cartan peut être caractérisée par un élément régulier, aussi n'est-il pas étonnant que le système (7) puisse, comme on va le voir, se réduire à une seule équation, à savoir

$$\mathrm{ad}_q f = g, \;\text{ où } q = \sum \lambda_i q_i \text{ et } g = \sum \lambda_i g_i,$$

où les λ_i sont fixés indépendants sur $\mathbb{Z}$.

ad_q étant diagonalisable, de valeurs propres $\sum \lambda_i(\beta_i - \alpha_i)$ (associées aux vecteurs propres $x^\alpha \xi^\beta$), elle est inversible dans $\mathrm{End}(\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}})$ ($= \oplus \mathrm{End}(\mathcal{P}_k/\hat{\mathcal{A}}_k)$) et f est donc uniquement déterminée (dans $\mathcal{P}/\hat{\mathcal{A}}$).

Montrons que $f = (\mathrm{ad}_q)^{-1} g$ convient :

$$\mathrm{ad}_{q_i} f = \mathrm{ad}_{q_i} (\mathrm{ad}_q)^{-1} g = (\mathrm{ad}_q)^{-1} \mathrm{ad}_{q_i} g$$

car ad_{q_i} et ad_q commutent (car $\{q_i, q\} = 0$). Or l'hypothèse $\{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}$ entraîne

$$\mathrm{ad}_{q_i} g = \mathrm{ad}_q g_i$$

donc $\mathrm{ad}_{q_i} f = g_i$ et la proposition est démontrée. $\diamond$

2.2.2 Preuve du théorème (cas hyperbolique)

En appliquant la proposition précédente aux jets d'ordre infini $\hat{g}_i$ de g_i (qui vérifient toujours $\{\hat{g}_i, q_j\} = \{\hat{g}_j, q_i\}$), et en prenant des représentants C^∞ des fonctions $\hat{f}$ et F_i obtenues, on obtient

$$\{\hat{f}, q_i\} \overset{\infty}{\sim} \hat{g}_i - F_i(q_1, \ldots, q_n).$$

Posons $f = \hat{f} + h$; on est ainsi ramené à chercher une fonction h telle que $\{h, q_i\} = \tilde{g}_i$, où $\tilde{g}_i = g_i - F_i - \{\hat{f}, q_i\}$ est plate en 0.

Il suffit donc de montrer :

Proposition 2.9 *Soient g_i des fonctions C^∞ plates en 0, telles que, au voisinage de 0,*

$$\{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}.$$

Alors il existe une fonction f (définie sur un voisinage de 0, plate en 0) telle que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \{f, q_i\} = g_i.$$

Démonstration: il serait tentant d'utiliser les méthodes de [12]. Malheureusement, cela nécessiterait de pouvoir supposer que les g_i soient à support compact, ce qui ne paraît pas compatible avec (4). Toujours est-il qu'en dimension 1, l'hypothèse (4) est vide, et la méthode marche très bien (voir [12] (theo 4)).

Nous allons donc nous rabattre sur les techniques d'intégration standard, expliquées en dimension 1 dans [6] et [10]. On montrera ici comment elles permettent de traiter le cas complètement intégrable.

On désigne toujours par $U_i(t)$ les flots des q_i. Notons $T_i(z)$ le temps que met z sous l'action de U_i à placer la coordonnée z_i sur l'unique hyperplan diagonal ou antidiagonal $x_i = \pm\xi_i$ qui rencontre le flot partant de z. C'est une fonction bien définie et C^∞ en dehors des hyperplans de coordonnées. On montre dans les références sus-citées que, pour toute fonction g plate en 0, l'intégrale :

$$\int_0^{T_i(z)} g(U_i(s)z)ds$$

définit une fonction C^∞ sur un voisinage de 0. Notons $\Delta_i(z)$ la projection de z sur le $i$ème hyperplan (anti)diagonal le long du flot de q_i, c'est-à-dire $\Delta_i(z) = U_i(T_i(z))z$ (voir figure 1). Il est essentiel de remarquer ici que tout voisinage de 0 contient un sous-voisinage stable par Δ_i; c'est ce qui va permettre de travailler localement (l'hypothèse (4) est locale), malgré la non-compacité des trajectoires des flots des q_i.

Lemme 2.10 *Soit g une fonction plate en 0 et $f_i(z) = \int_0^{T_i(z)} g(U_i(s)z)ds$. Alors :*

$$\{f_i, q_i\} = g,$$

et, pour $j \neq i$, si h est une fonction vérifiant $\{g, q_j\} = \{h, q_i\}$, alors :

$$\{f_i, q_j\} = h - \Delta_i^* h.$$

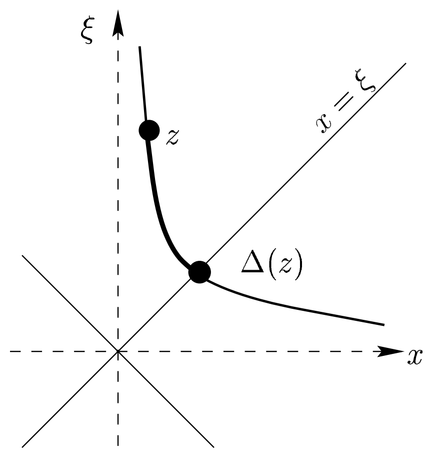

FIG. 1: $\Delta(z) = U(T(z))z$.

Démonstration: c'est un simple calcul, reposant sur :

$$\{f_i, q_j\} = -\frac{d}{dt}_{t=0} f_i(U_j(t)).$$

Pour $i = j$, on utilise que $T_i(U_i(t)z) = T_i(z) - t$, tandis que pour $j \neq i$, c'est l'invariance de T_i par U_j, jointe à l'hypothèse de commutation, qui donne le résultat. Cette hypothèse est utilisée sous la forme:

$$\frac{d}{dt} g(U_j(t)U_i(s)z) = \{q_j, g\}U_j(t)U_i(s)z =$$

$$= \{q_i, h\}U_i(s)U_j(t)z = \frac{d}{ds} h(U_i(s)U_j(t)z).$$

$\diamond$

Revenons à la preuve de la proposition. En appliquant le lemme avec $i = j = 1$, on résout la première équation: $\{f_i, q_i\} = g_1$. On cherche alors une solution du système de la forme $f_1 + f_2$, ce qui mène aux équations :

$$\{f_2, q_1\} = 0, \text{ et } \forall j > 1, \quad \{f_2, q_j\} = \tilde{g_j}$$

où $\tilde{g_j} = g_j - \{f_1, q_j\}$. Le membre de droite vaut $\Delta_1^* g_j$, d'après le lemme. Les fonctions $\Delta_1^* g_j$ et T_j sont invariantes par le flot de q_1, donc une nouvelle application du lemme avec $g = \Delta_1^* g_2$ résout la deuxième équation tout en laissant la première intacte. On peut ainsi recommencer... jusqu'à épuisement du système. Le lemme assurera que les dérivées croisées sont les bonnes.

On peut même s'offrir une formule explicite, dont on vérifie la validité grâce au lemme :

$$f = \int_0^{T_1(z)} g_1(U_1(s)z)ds + \int_0^{T_2(z)} \Delta_1^* g_2(U_2(s)z)ds +$$

$$+\int_0^{T_3(z)} \Delta_2^*\Delta_1^* g_3(U_3(s)z)ds + \cdots$$

$\diamond$

2.2.3 Cas elliptique

On montre ici le théorème 2.5 lorsque les q_i valent $x_i^2+\xi_i^2$. Le résultat est donné aussi dans [11]. La preuve est ici immédiate, car les q_i génèrent l'action d'un tore et donc l'intégrale le long du flot ne pose pas de problème de convergence. Notons $U_i(\theta)$ les flots des q_i, reparamétrés de façon à être périodiques de période 1.

• Il est clair que les $F_i(q_1,\ldots,q_n)$ seront la partie invariante de g_i, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_{\mathbb{T}^n} g_i(U(t)z)dt,$$

qu'on note aussi $< g_i >_{\mathbb{T}^n}$.

• Le point important est qu'en réalité, on a $< g_i >_{\mathbb{T}^n} = < g_i >_i$, où on note par $< g_i >_j$ la moyenne de g_i le long du flot de q_j, c'est-à-dire $\int_0^1 g_i((U_j(\theta)z)d\theta$. Pour voir cela, on vérifie facilement en utilisant (4) que $< g_i >_i$ commute avec les q_j. $\diamond$

• Il y a néanmoins encore un peu de travail à faire puisque, pour $i \neq j$, les $< g_i >_j$ n'ont aucune raison d'être invariants. Contre ce mal, on utilise le lemme salvateur suivant, analogue du lemme 2.10 :

Lemme 2.11 *Soient i et j fixés, et h et g des fonctions vérifiant :*

$$\{g,q_j\} = \{h,q_i\}.$$

Alors la fonction définie par :

$$f(z) = -\int_0^1 \theta g(U_i(\theta)z)d\theta$$

vérifie :

$$\{f,q_j\} = h - < h >_i .$$

Démonstration: c'est encore un simple calcul. $\diamond$

La démarche est maintenant la même qu'en section précédente, à savoir : on peut résoudre le système pas-à-pas, ou bien vérifier que la fonction f définie par :

$$-f = \int_0^1 \theta g_1(U_1(\theta)z)d\theta + \int_0^1 \theta < g_2 >_1 (U_2(\theta)z)d\theta +$$

$$+\int_0^1 \theta < g_3 >_{1,2} (U_3(\theta)z)d\theta + \cdots$$

est solution du problème. $\diamond$

Corollaire 2.12 *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définissant un système complètement intégrable critique non dégénéré, à singularité sans élément hyperbolique, et $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions vérifiant :*

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \quad \{g_i, f_j\} = \{g_j, f_i\}.$$

Alors il existe une fonction a définie au voisinage de 0, et des fonctions $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \{a, f_i\} = g_i - F_i(f_1, \ldots, f_n). \tag{8}$$

Démonstration: d'après le théorème 2.3, les f_j sont, modulo un symplectomorphisme local, des fonctions des q_k. Opérant la même transformation sur les g_j, on vérifie rapidement que l'hypothèse du théorème 2.5 est vérifiée. Revenant aux variables de départ, on obtient le résultat. $\diamond$

La version légèrement affaiblie, mais valable sans restriction sur le type de la singularité, devient :

Corollaire 2.13 *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définissant un système complètement intégrable critique non dégénéré et $g_1, \ldots, g_n$ des fonctions vérifiant :*

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \quad \{g_i, q_j\} = \{g_j, q_i\}.$$

Alors il existe une fonction a définie au voisinage de 0, et des fonctions $F_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ commutant avec les q_j et telles que

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \{a, f_i\} = g_i - g_i(0) + q_1 F_{i1} + \cdots + q_n F_{in}. \tag{9}$$

On invoque le lemme suivant :

Lemme 2.14 *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définissant un système complètement intégrable critique non dégénéré, et $q_1, \ldots, q_n$ une base standard de l'algèbre de Cartan associée; alors il existe un symplectomorphisme φ tel qu'on ait :*

$$(f_1, \ldots, f_n) = M.(q_1, \ldots, q_n),$$

où M est une matrice $n \times n$ de fonctions C^∞ commutant avec les q_j, inversible en $z = 0$.

Démonstration: il suffit d'appliquer le théorème 2.1 suivi du lemme 2.7. Le fait que M soit inversible en 0 est exactement l'hypothèse de non-dégénérescence du système : $M(0)$ est la matrice telle que :

$$(\mathcal{H}(f_1), \ldots, \mathcal{H}(f_n)) = M(0).\,(\mathcal{H}(q_1), \ldots, \mathcal{H}(q_n))$$

$\diamond$

Démonstration: (du corollaire 2.13) après application du lemme précédent, on développe les crochets de Poisson et on fait basculer les termes facteur des q_j dans le second membre, ce qui ramène le problème à la résolution du système

$$M.(\{a, q_1\}, \ldots, \{a, q_n\}) = g - g(0) + F.(q_1, \ldots, q_n).$$

On inverse alors M (localement) et on conclut avec le théorème 2.6. $\diamond$

3 Systèmes intégrables quantiques

3.1 Introduction

D'une certaine façon, on peut dire que l'intégrabilité d'un point de vue purement quantique ne présente guère d'intérêt. Pour voir cela, prenons $(E, h\omega)$ un espace vectoriel symplectique (de dimension finie, au moins dans un premier temps). La matrice symplectique standard J, vérifiant $J^2 = -I$, munit E d'une structure complexe. D'autre part E est muni d'un produit scalaire euclidien par $(x, y) = \omega(Jx, y)$, qui n'est autre que le produit euclidien usuel. On obtient ainsi une structure hermitienne sur E grâce au produit hermitien $\langle x, y\rangle = (x, y) + ih\omega(x, y)$. Réciproquement, tout espace de Hilbert $\mathbb{C}^n$ est muni de la forme symplectique égale à la partie imaginaire de la forme hermitienne.

On vérifie alors facilement qu'un endomorphisme de E est *hermitien* si et seulement s'il commute avec J et est symétrique (pour le produit scalaire euclidien). Ou plutôt, voyant $\mathrm{Herm}(E, J)$ comme $J\mathfrak{u}(n)$, on a :

$$\mathrm{Herm}(E, J) = J(\mathfrak{sp}(E) \cap \mathfrak{o}(E)).$$

On veut maintenant résoudre l'équation de Schrödinger associée à B, à savoir :

$$\frac{h}{i}\frac{d}{dt}\psi = B\psi,$$

où on a noté i pour J. Si $H(\psi) = (B\psi, \psi)$ est la forme quadratique associée à B, on vérifie immédiatement que l'hamiltonien de H est $\mathcal{X}_H(\psi) = \frac{i}{h}B(\psi)$. L'équation de Schrödinger n'est donc autre que l'équation du flot de $\mathcal{X}_H$:

$$\frac{d}{dt}\psi = \mathcal{X}_H(\psi).$$

Or un hamiltonien hermitien est évidemment complètement intégrable, puisqu'en le diagonalisant en base hermitienne, on obtient une base symplectique (et orthonormée) dans laquelle

$$B = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

B s'écrit donc $\sum \lambda_i(x_i^2 + \xi_i^2)$ et les $x_i^2 + \xi_i^2$ sont des intégrales en involution.

On peut remarquer ici que le crochet de Poisson de deux hamiltoniens hermitiens s'écrit

$$\{B_1, B_2\} = \frac{i}{h}[B_1, B_2],$$

où $[,]$ est le crochet usuel des endomorphismes.

Maintenant, sans rentrer dans des justifications mathématiques, si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert quelconque sur lequel on se donne un opérateur B autoadjoint diagonalisable, avec des fonctions propres ψ_n associées aux valeurs propres λ_n, alors l'équation de Schrödinger peut être vue comme un système hamiltonien de dimension infinie, d'Hamiltonien $H(\psi) = \sum \lambda_n |z_n|^2$, ($z_n = x_n + i\xi_n$ est la coordonnées de ψ sur ψ_n) pour la structure symplectique $h \sum d\xi_n \wedge dx_n$. Il est donc "complètement intégrable", au sens où il admet les $x_n^2 + \xi_n^2$ comme famille complète d'intégrales premières.

Ceci dit, on n'est guère plus avancé... C'est pourquoi on introduit une autre notion de complète intégrabilité quantique, qu'on pourra aussi appeler la complète intégrabilité semi-classique, puisqu'elle va coïncider avec la notion classique dans la limite semi-classique.

L'espace $\mathcal{E}$ des h-opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 et de symbole principal réel sur un ouvert W d'une variété X de dimension n est, comme en dimension finie, muni d'une structure d'algèbre de Lie :

$$\{P, Q\} = \frac{i}{h}[P, Q].$$

L'opération σ (symbole principal) est un morphisme surjectif de $(\mathcal{E}, \{\})$ sur $(C^\infty(T^*W), \{\})$. Rappelons qu'un opérateur pseudo-différentiel $P(h)$ est dit *classique* si son symbole de Weyl $p(h)$ admet un développement asymptotique de la forme :

$$p(h)(x, \xi) \sim \sum h^k p_k(x, \xi)$$

(le développement est alors unique). On se placera toujours dans cette hypothèses.

On appelle alors système quantique complètement intégrable une sous-algèbre $\hat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{E}$ engendrée par n opérateurs pseudo-différentiels $(P_1, \ldots, P_n)$ qui commutent deux-à-deux et dont les symboles principaux $p_i = \sigma(P_i)$ définissent un système classique complètement intégrable. Cette notion est ainsi bien adaptée à ce qu'il semble naturel d'appeler une "quantification" d'un système classique C.I. On s'intéressera ici à une notion un peu plus faible, celle de la complète intégrabilité *semi-classique*, où les conditions de commutation ne sont imposées qu'à $O(h^\infty)$ près.

Ces définitions soulèvent la question suivante :

Lorsqu'un système CI classique associé à un système CI quantique est réductible à une forme normale (ce qui est le cas du théorème 2.3; c'est aussi vrai dès que l'application moment $J = (p_1, \ldots, p_n)$ est une submersion locale), existe-t'il aussi une forme normale pour le système quantique ?

Nous verrons dans la section suivante qu'au moins microlocalement la réponse est positive : lorsque la singularité du système CI ne comprend pas d'élément hyperbolique, on obtient une forme normale "forte" (théorème 3.1), analogue quantique du théorème 2.3. Dans le cas général, la forme normale obtenue est légèrement affaiblie (théorème 3.6).

3.2 Formes normales microlocales

On considère des opérateurs $P_1(h), \ldots, P_n(h)$ pseudo-différentiels d'ordre 0 définis sur un ouvert W d'une variété X de dimension n. On suppose qu'ils forment un système semi-classique complètement intégrable. Rappelons que les P_i ne sont pas nécessairement formellement auto-adjoints, mais que le symbole principal est supposé réel; ils vérifient : pour tous i, j, $[P_i, P_j] = O(h^\infty)$ au voisinage de 0 (on dit que deux opérateurs sont égaux microlocalement sur un ouvert Ω si leurs symboles de Weyl coïncident sur cet ouvert).

Ainsi les p_j engendrent une sous-algèbre de Lie commutative, $\mathcal{A}$, de $C^\infty(T^*W)$. Dans le cas non critique (et auto-adjoint), de tels systèmes on été étudiés par Colin de Verdière [3] puis dans le cas semi-classique par A.-M. Charbonnel [2].

Ici, on s'intéresse au cas où $\mathcal{A}$ est un système complètement intégrable critique non-dégénéré (dans le sens défini en section 2) en un point m de T^*W. *Dans un premier temps (section 3.2.1), on suppose qu'il vérifie les conclusions des théorèmes 2.3 et 2.5.* C'est donc le cas si l'algèbre de Cartan associée A ne contient pas d'élément hyperbolique. On verra ensuite en section 3.2.2 comment traiter le cas général.

Soit $(q_1, \ldots, q_n)$ une base standard de A. On note Q_j les h-quantifiés symétriques (ou de Weyl) des q_j, c'est-à-dire :

- si $q_j = x_j^2 + \xi_j^2$, $\quad Q_j = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2$;
- si $q_j = x_j \xi_j$, $\quad Q_j = \frac{h}{i}(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2})$;
- et pour le cas focus-focus, on a respectivement $Q_j = \frac{h}{i}(x_j \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_j})$ et $Q_{j+1} = \frac{h}{i}(1 + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}})$ (ce qui donne en coordonnées polaires $\begin{cases} x_j = \rho\cos(\theta) \\ x_{j+1} = \rho\sin(\theta) \end{cases}$, les opérateurs respectifs $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $\frac{h}{i}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + 1)$).

Puisque ces opérateurs sont formellement auto-adjoints, on peut utiliser un calcul fonctionnel à plusieurs variables comme celui développé dans [2].

Remarquons que microlocalement sur un domaine Ω voisinage de m, seule la symétrie des opérateurs est importante. En effet, quitte à tronquer les symboles en dehors de Ω, on peut supposer que les opérateurs h-quantifiés sont semi-bornés inférieurement. On dispose alors par exemple de l'extension de Friedrichs qui est auto-adjointe. Enfin, deux extensions d'un même opérateur, dont les domaines contiennent $C_0^\infty(\Omega)$, auront le même symbole de Weyl sur Ω, et seront donc égaux modulo régularisant. En particulier, le choix d'une extension auto-adjointe est sans incidence sur le calcul fonctionnel, au niveau microlocal.

3.2.1 Cas non hyperbolique

Théorème 3.1 *Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ un tel système semi-classiquement complètement intégrable non hyperbolique, et $Q_1, \ldots, Q_n$ les opérateurs correspondants,* *définis ci-dessus. Alors il existe des symboles $f_1(h),\dots,f_n(h)$ ayant un développement asymptotique de la forme :*

$$f_i(h) = f_i^{(0)} + hf_i^{(1)} + h^2 f_i^{(2)} + \cdots$$

et un opérateur intégral de Fourier elliptique $U(h)$ tel que, microlocalement au voisinage de m,

$$\forall i = 1,\dots,n, \quad U^{-1}(h)P_i(h)U(h) = f_i(Q_1,\dots,Q_n) + O(h^\infty).$$

Autrement dit, l'algèbre $\hat{\mathcal{A}}$ engendrée par les opérateurs $P_1,\dots,P_n$ est, à $O(h^\infty)$ près, symplectiquement conjuguée à l'algèbre type $\hat{\mathcal{A}}_0$ engendrée par les Q_1, ..., Q_n. En outre, si les $P_1,\dots,P_n$ sont formellement auto-adjoints, il existe un tel $U(h)$ unitaire.

Appliquant la formule de Taylor aux f_i, on obtient immédiatement le

Corollaire 3.2 *Avec les hypothèses du théorème 3.1, il existe un OIF $U(h)$ (le même), une matrice $\mathcal{M}_h$ microlocalement inversible d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent avec les Q_j, et des constantes $\alpha_i^{(k)} \in \mathbb{C}$ ($k \geq 1$, $i = 1,\dots,n$) tels que, microlocalement au voisinage de m,*

$$U^{-1}(h)(P_1,\dots,P_n)U(h) = \mathcal{M}_h.(Q_1 - \alpha_1(h),\dots,Q_n - \alpha_n(h)) + O(h^\infty).$$

On a noté $\alpha_i(h) = \sum_{k=1}^n h^k \alpha_i^{(k)}$.

Ces deux formulations seront généralisées pour une singularité quelconque en section 3.2.2 (théorèmes 3.5 et 3.6).

Démonstration: (du théorème) n appliquant le théorème 2.3 à l'algèbre classique $\mathcal{A}$, on obtient un symplectomorphisme φ et des fonctions $f_j^{(0)}$ telles que sur un voisinage de 0, et pour tous $j = 1,\dots,n$,

$$p_j \circ \varphi = f_j^{(0)}(q_1,\dots,q_n).$$

On choisit alors un opérateur intégral de Fourier $U_0(h)$ associé à la transformation canonique φ; en conjuguant par $U_0(h)$, on se ramène ainsi au cas où les P_j ont pour symbole principal $f_j^{(0)}(q_1,\dots,q_n)$.

Posons $F_j^{(0)} = f_j^{(0)}(Q_1,\dots,Q_n)$. Il existe un opérateur pseudo-différentiel $R_j^{(1)}$ d'ordre 0 défini par :

$$P_j = F_j^{(0)} + hR_j^{(1)}.$$

La condition de commutation des P_j entraîne :

$$[F_j^{(0)}, F_k^{(0)}] + h[F_j^{(0)}, R_k^{(1)}] - h[F_k^{(0)}, R_j^{(1)}] + h^2[R_j^{(1)}, R_k^{(1)}] = 0.$$

Comme $[F_j^{(0)}, F_k^{(0)}] = 0$, car les Q_j commutent, on obtient en prenant les symboles principaux :

$$\forall j, k \quad \{f_j^{(0)}, r_k^{(1)}\} = \{f_k^{(0)}, r_j^{(1)}\}. \tag{10}$$

Première étape: on cherche un opérateur pseudo-différentiel V elliptique et des $F_j^{(1)} \in \hat{\mathcal{A}}_0$ tels que :

$$\forall j, \quad V^{-1} P_j V = F_j^{(0)} + h F_j^{(1)} + O(h^2),$$

c'est-à-dire :

$$\forall j, \quad (F_j^{(0)} + h R_j^{(1)}) V = V F_j^{(0)} + h V F_j^{(1)} + O(h^2),$$

ce qui s'écrit encore :

$$\forall j, \quad [F_j^{(0)}, V] = h V F_j^{(1)} - h R_j^{(1)} V + O(h^2).$$

les deux membres sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 donc en passant aux symboles principaux, chercher V revient à intégrer les équations de transport suivantes :

$$\forall j, \quad \{f_j^{(0)}, v\} = iv(f_j^{(1)} - r_j^{(1)}).$$

Posons $v = e^{id}$; on a $\{f, v\} = iv\{f, d\}$; il suffit donc de résoudre :

$$\forall j, \quad \{f_j^{(0)}, d\} = f_j^{(1)} - r_j^{(1)},$$

où bien-sûr, on cherche toujours $f_j^{(1)}$ fonction des $q_1, \ldots, q_n$. Or on sait résoudre un tel système par le corollaire 2.12, grâce à la propriété (10).

On pose maintenant $F_j^{(1)} = f_j^{(1)}(Q_1, \ldots, Q_n)$, et on choisit pour V un opérateur pseudo-différentiel quelconque de symbole principal v, ce qui résout la première étape. On note $R_j^{(2)}$ le nouveau reste, défini par :

$$V^{-1} P_j V = F_j^{(0)} + h F_j^{(1)} + h^2 R_j^{(2)}.$$

Utilisons comme auparavant l'hypothèse de commutation des P_j, mais cette fois à l'ordre $O(h^3)$, pour obtenir :

$$\forall j, k \quad \{f_j^{(0)}, r_k^{(2)}\} = \{f_k^{(0)}, r_j^{(2)}\}.$$

Deuxième étape: on cherche un opérateur pseudo-différentiel C et des $F_j^{(2)} \in \hat{\mathcal{A}}_0$ tels que :

$$\forall j, \quad (I + hC)^{-1} V^{-1} P_j V (I + hC) = F_j^{(0)} + h F_j^{(1)} + h^2 F_j^{(2)} + O(h^3),$$

ou encore :

$$\forall j, \quad (h^2 R_j^{(2)} + h[F_j^{(0)}, C]) - h^2 F_j^{(2)} = h^3 C F_j^{(2)} - h^3 R_j^{(2)} C - h^2 [F_j^{(1)}, C] + O(h^3).$$

Le second membre étant $O(h^3)$ dans son ensemble, il suffit de résoudre :

$$\{f_j^{(0)}, c\} = f_j^{(2)} - r_j^{(2)},$$

avec toujours $f_j^{(2)}$ fonction des q_k. Là encore, le théorème 2.5 fournit une solution. On choisit alors un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal ic et on pose $F_j^{(2)} = f_j^{(2)}(Q_1, \dots, Q_n)$, ce qui termine l'étape 2.

Enfin, cette étape se répète par récurrence, et pour tous $N \in \mathbb{N}$ on obtient des fonctions $f_j^{(0)}, \dots, f_j^{(N)}$ dans $\mathcal{A}_0$ et des OPDs $C_1, \dots, C_N$ tels que, en posant

$$U_N = V(I + hC_1) \cdots (I + h^N C_N),$$

on ait, microlocalement :

$$\forall j, \quad U_N^{-1} P_j U_N = (f_j^{(0)} + h f_j^{(1)} + \cdots + h^N f_j^{(N)})(Q_1, \dots, Q_n) + O(h^{N+1}).$$

Il suffit alors de passer à la limite pour finir la démonstration.

Si maintenant on suppose que les P_j sont formellement auto-adjoints, alors les symboles totaux sont réels. Lors du choix de U_0 et de V on peut facilement obtenir des opérateurs unitaires (modulo h^∞). Pour la deuxième étape, on procède comme suit : on choisit un opérateur pseudo-différentiel formellement autoadjoint $\tilde{C}$ de symbole principal c (c est réel). Puis, au lieu de conjuguer par l'opérateur elliptique $I + hi\tilde{C}$ comme à l'étape 2, on utilise la transformée de Cayley $W = \frac{I + ih\tilde{C}/2}{I - ih\tilde{C}/2}$. W est unitaire, et comme $W = I + ih\tilde{C} + O(h^2) = I + hC + O(h^2)$, il convient aussi bien pour la résolution de l'étape 2. En conclusion, on a loisir , dans ce cas, de choisir un opérateur intégral de Fourier $U(h)$ unitaire (modulo h^∞), ce qui termine la démonstration. $\diamond$

Remarque 1 : la première étape consiste à s'occuper du symbole sous-principal; la deuxième traite tous les autres termes du développement asymptotique. Ce schéma de démonstration est général, dès qu'on dispose d'analogues des théorèmes 2.3 et 2.5. Or, lorsque le système est purement hyperbolique, on sait faire marcher le lemme de Poincaré 2.5. Par conséquent, dès qu'on dispose d'une forme normale (par exemple en dimension 1, en vertu du lemme de Morse isochore ([6])), *le théorème 3.1 est encore valable.* Cette remarque permet de retrouver le théorème 12 de [4].

Remarque 2 : on peut aussi utiliser ce schéma de démonstration pour avoir la forme normale des $(P_1, \dots, P_n)$ dans un voisinage invariant d'une feuille *régulière* du feuilletage lagrangien déterminé par l'application moment $(p_1, \dots, p_n)$. En effet le théorème d'Arnold-Liouville fournit un tel voisinage invariant Ω dans lequel on dispose de coordonnées action-angle, c'est-à-dire que Ω est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n$ de la forme $\mathbb{T}^n \times \mathcal{D} \ni (x, \xi)$. Utilisant un opérateur intégral de Fourier associé à ce symplectomorphisme, on est ramené au cas où les P_j agissent sur $\mathbb{T}^n$ et ont des symboles principaux qui ne dépendent que de ξ.

Examinons maintenant les équations de transport : elles vont consister à résoudre des systèmes du type

$$\{\xi_j, a\} = r_j, \text{ c'est-à-dire } \frac{\partial a}{\partial x_j} = r_j.$$

Or les $r_j = r_j(x, \xi)$ vérifient la bonne condition de fermeture :

$$\{\xi_j, r_k\} = \{\xi_k, r_j\},$$

qui n'est autre que $d_x r = 0$, ou r est vue comme la 1-forme $r_1 dx_1 + \cdots + r_n dx_n$. Cette condition assure qu'on peut toujours intégrer ces équations localement. Par contre, pour un résultat global sur les tores horizontaux, il faut $[r] = 0$ dans $H^1(\mathbb{T}^n \times \{\xi\})$. Autrement dit, on sait résoudre $d_x a = r - [r]$, ou encore :

$$\{\xi_j, a\} = r_j - [r]_j,$$

où $[r_j]$ est la moyenne de r_j par rapport à x_j, et ne dépend que de ξ.

On retrouve ainsi le résultat mentionné en introduction sur les coordonnées actions-angles semi-classiques régulières :

Théorème 3.3 ([3, 2]) *Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ un système semi-classiquement complètement intégrable, et Ω un ouvert invariant de coordonnées actions-angles régulières. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier $U(h)$ (unitaire si les P_j sont formellement auto-adjoints) et des symboles*

$$f_j(h) = f_j^{(0)} + h f_j^{(1)} + h^2 f_j^{(2)} + \cdots$$

tels que, sur Ω,

$$\forall j = 1, \ldots, n, \quad U^{-1} P_j U = f_j(h)(D_1, \ldots, D_n) + O(h^\infty).$$

Les D_j sont les opérateurs $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ sur le tore $\mathbb{T}^n$.

3.2.2 Cas général

On veut maintenant s'affranchir des restrictions imposées sur le type de la sous-algèbre de Cartan de la singularité. Il faut pour cela très légèrement affaiblir la forme normale souhaitée, comme on l'a fait pour le théorème 2.6. L'objet semi-classique qui va intervenir de façon naturelle est le commutant microlocal des Q_j :

$$\mathcal{C}_Q = \{P(h) \in \mathcal{E}, \forall j, \ [P, Q_j] = O(h^\infty)\}.$$

Comme en section 2, on note C_q le commutant classique, dont les propriétés ont été décrite par la proposition 2.2 :

$$C_q = \{f \in C^\infty, \forall j, \ \{f, q_j\} = 0\}.$$

Il va nous permettre de décrire $\mathcal{C}_Q$ complètement, en terme de symboles de Weyl :

Proposition 3.4 *$\mathcal{C}_Q$ est une algèbre de Lie commutative, composée exactement des OPDs de la forme $Op^W(p(h))$, tels que le développement asymptotique $p(h)(x,\xi) \sim \sum h^k p_k(x,\xi)$ vérifie :*

$$\forall k, \quad p_k \in C_q.$$

On a vu en section 2 qu'en présence d'éléments hyperboliques C_q était strictement plus grand que l'algèbre fonctionnellement engendrée par les $q_1, \ldots, q_n$ (proposition 2.2. Il en est donc de même au niveau quantique. Le théorème de formes normales 3.1 se généralise alors en remplaçant par $\mathcal{C}_Q$ l'algèbre d'OPDs fonctionnellement engendrée par les Q_j :

Théorème 3.5 *Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ un système semi-classique complètement intégrable, avec une singularité non dégénérée de type quelconque, et $Q_1, \ldots, Q_n$ les opérateurs différentiels correspondants. Alors il existe un opérateur intégral de Fourier elliptique (et unitaire si les P_j sont formellement auto-adjoints) $U(h)$, et des opérateurs pseudo-différentiels F_j dans $\mathcal{C}_Q$, tels que, microlocalement au voisinage de m,*

$$\forall j, \quad U^{-1} P_j U = F_j + O(h^\infty).$$

Quant au corollaire 3.2, il se généralise de la même façon :

Théorème 3.6 *Avec les même hypothèses que le théorème précédent, il existe un opérateur intégral de Fourier elliptique (et unitaire si les P_j sont formellement auto-adjoints) $U(h)$, une matrice microlocalement inversible $\mathcal{M}_h$ d'opérateurs pseudo-différentiels appartenant à $\mathcal{C}_Q$, et des constantes $\alpha_j^{(k)} \in \mathbb{C}$ ($j = 0, \ldots, n$ et $k \in \mathbb{N}$) telles que, microlocalement au voisinage de m,*

$$U^{-1}(P_1, \ldots, P_n)U = \mathcal{M}_h.(Q_1 - \alpha_1(h), \ldots, Q_n - \alpha_n(h)) + O(h^\infty).$$

On a noté $\alpha_j(h) = \sum_{k \geq 0} \alpha_j^{(k)} h^k$.

$\alpha^{(0)}$ est égal à la valeur de l'application moment au point critique m. On pourra supposer, comme on l'a fait jusqu'à maintenant, que $\alpha^{(0)} = 0$. Les $\alpha_j^{(1)}$ se décrivent à l'aide des valeurs en m des symboles sous-principaux r_j des P_j par :

$$\alpha^{(1)} = -M^{-1}(0).r(0),$$

où M est la matrice de fonctions donnée par le lemme 2.14).

Remarque 1 : $\alpha^{(0)}$ et $\alpha^{(1)}$ sont définis de façon intrinsèque par les opérateurs P_j, c'est-à-dire indépendemment de l'OIF U choisi. Il semblerait raisonnable de penser qu'il en est de même de tous les termes de la série. Un argument en faveur de cette affirmation est que α_h peut être vue comme la monodromie des solutions du système pseudo-différentiel $P_j u = 0$ (voir [17]). Nous espérons pouvoir détailler cela dans un travail ultérieur.

Remarque 2 : c'est ici le théorème 3.5 qui est un corollaire immédiat du théorème 3.6. Aussi, on ne démontrera que ce dernier.

Démonstration: commençons par expliquer la proposition 3.4. Elle se découpe en plusieurs lemmes, dont on se resservira pour la preuve du théorème.

Lemme 3.7 *Si $f \in C_q$, alors $Op^W(f) \in \mathcal{C}_Q$.*

Ce lemme n'est pas évident *a priori*, car on ne connaît pas de bonne règle de quantification qui transforme le crochet de Poisson en crochet de commutation des opérateurs. Pour la règle de Weyl, on contrôle malgré tout bien la situation grâce à la formule de Moyal : si A et B sont les quantifiés de Weyl des symboles a et b, on a, formellement :

$$\sigma_{Weyl}([A,B]) = \frac{2}{i} a \sin(\frac{h\mathcal{D}}{2}) b,$$

avec

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi} \right).$$

On obtient en général :

$$\sigma_{Weyl}([A,B]) = \frac{h}{i} \left(\{a,b\} + O(h^2) \right).$$

Dans notre situation, le fait que q_j soit quadratique implique que pour tous $k \geq 3$ et pour toutes fonctions f,

$$f\mathcal{D}^k q_j = 0.$$

On dispose donc d'une règle de quantification "exacte", au sens où :

$$\sigma_{Weyl}([Op^W(f), Q_j]) = \frac{h}{i} \left(\{f, q_j\} + O(h^\infty) \right),$$

ce qui prouve le lemme. $\diamond$

Montrons maintenant la commutativité :

Lemme 3.8 *Si F et F' sont dans $\mathcal{C}_Q$, alors*

$$[F, F'] = O(h^\infty).$$

Démonstration: on a le résultat microlocalement en dehors des axes de coordonnées, puisqu'on dispose dans ces régions de coordonnées actions-angles régulières, ce qui permet de se ramener au cas $Q_j = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Un OPD qui commute avec ces opérateurs est un opérateur "à coefficients constants" (sur un tore), et deux tels opérateurs commutent.

$[F, F']$ est donc un OPD microlocalement $O(h^\infty)$ en dehors des axes. En d'autres termes, son symbole de Weyl est $O(h^\infty)$ dans ces régions; ce symbole étant régulier au voisinage de 0, cela implique bien-sûr qu'il est $O(h^\infty)$ partout, ce qui donne le résultat. $\diamond$

La proposition 3.4 se démontre alors facilement : si $p \sim \sum p_k h^k$ avec $p_k \in C_q$, il est clair d'après le lemme 3.7 que $Op^W(p) \in \mathcal{C}_Q$. Cela résulte de la formule

$$Op^W(p) = \sum h^k Op^W(p_k) + O(h^\infty).$$

Réciproquement, soit $p(h) \in \mathcal{C}_Q$ et $p \sim \sum p_k h^k$ son symbole de Weyl. D'après la preuve du lemme 3.7, $[P(h), Q_j]$ a pour symbole de Weyl le crochet de Poisson (car q_j est quadratique !) :

$$\{p, q_j\} \sim \sum h^k \{p_k, q_j\}.$$

Par unicité du développement asymptotique, pour tous k, j, $\{p_k, q_j\} = 0$, d'où le résultat. $\diamond$

Remarque : on a utilisé ici l'unicité du développement asymptotique du symbole de Weyl, mais l'écriture d'un opérateur pseudo-différentiel P sous la forme $\sum h^k P_k$ n'a rien d'unique !

Venons-en enfin à la preuve du théorème 3.6. Elle suit toujours le schéma de celle du théorème 3.1 : par le lemme 2.14, on peut choisir un OIF U qui nous permet de supposer que les P_j ont des symboles principaux f_j vérifiant au voisinage de 0,

$$(f_1, \ldots, f_n) = M.(q_1, \ldots, q_n).$$

M étant une matrice de fonctions commutant avec les q_k, une application du lemme 3.7 nous fournit une matrice $\mathcal{M}_0$ d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent modulo $O(h^\infty)$ aux Q_k, et telle que :

$$(P_1, \ldots, P_n) = \mathcal{M}^{(0)}.(Q_1, \ldots, Q_n) + h(R_1, \ldots, R_n).$$

$\mathcal{M}^{(0)}.(Q_1, \ldots, Q_n)$ est un vecteur de n OPDs commutant avec les Q_k, et qui commutent donc entre eux deux-à-deux (modulo $O(h^\infty)$) d'après le lemme 3.8. L'hypothèse de commutation des P_j assure donc :

$$\{f_i, r_j\} = \{f_j, r_i\}.$$

La première étape consiste à chercher $\mathcal{M}^{(1)}$ et $\alpha_j^{(1)}$ et un OPD V tels que :

$$V^{-1}(P_1, \ldots, P_n)V = (\mathcal{M}^{(0)} + h\mathcal{M}^{(1)}).(Q_1 - h\alpha_1^{(1)}, \ldots, Q_n - h\alpha_n^{(1)}) + O(h^2).$$

Ce système se réécrit en :

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} Q_k, V\right] = h\left(V\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(1)} Q_k - V\sum_{k=1}^{n} \mathcal{M}_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - R_j V\right) + O(h^2),$$

ce qui mène aux équations de transport :

$$\{f_j, v\} = iv \left(\sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(1)} q_k - \sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(0)} \alpha_k^{(1)} - r_j \right).$$

On sait résoudre ce système grâce au corollaire 2.13, avec nécessairement

$$\forall j, \quad \sum_{k=1}^{n} m_{jk}^{(0)}(0) \alpha_k^{(1)} = -r_j(0),$$

autrement dit $\alpha^{(1)} = -M^{-1}(0).r(0)$. En quantifiant les $m_{jk}^{(1)}$ par le lemme 3.7 on obtient une matrice d'OPDs $\mathcal{M}^{(1)}$ commutant avec les Q_k et qui résout le problème modulo $O(h^2)$.

Les étapes suivantes se résolvent de la même façon. $\diamond$

Références

[1] P.M. Bleher, D.V. Kosygin, and Y.G. Sinai. Distribution of energy levels of quantum free particle on the liouville surface and trace formulae. *Communications in Mathematical Physics*, 170(2):375–403, 1995.

[2] A.-M. Charbonnel. Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. *Asymptotic Analysis*, 1:227–261, 1988.

[3] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II. *Mathematische Zeitschrift*, 171:51–73, 1980.

[4] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale. *Communications in partial differential equations*, 19(9–10):1535–1563, 1994.

[5] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, 61(3):347–367, 1994.

[6] Y. Colin de Verdière and J. Vey. Le lemme de morse isochore. *Topology*, 18:283–293, 1979.

[7] J.P. Dufour and P. Molino. Compactification d'actions de $\mathbb{R}^n$ et variables actions-angles avec singularités. In Dazord and Weinstein, editors, *Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley*, volume 20 of *MSRI Publications*, pages 151–167. 1989.

[8] J.J. Duistermaat. Oscillatory integrals, lagrange immersions and unfoldings of singularities. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 27:207–281, 1974.

[9] J.J Duistermaat. On global action-angle variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33:687–706, 1980.

[10] L.H. Eliasson. *Hamiltonian Systems with Poisson commuting Integrals.* PhD thesis, University of Stockholm, 1984.

[11] L.H. Eliasson. Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case. *Comment. Math. Helvetici*, 65:4–35, 1990.

[12] V. Guillemin and D. Schaeffer. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. *Duke Mathematical Journal*, 44(1):157–199, 1977.

[13] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Annales de l'Institut Fourier*, 3:169–223, 1981.

[14] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit. I. *Communications in Partial Differential Equations*, 9:337–408, 1984.

[15] J. Moser. *Integrable Hamiltonian Systems and Spectral Theory.* Lezioni Fermiane. Scu.Norm.Sup., 1981.

[16] Zung Nguyễn Tiến. A topological classification of integrable hamiltonian systems. In R. Brouzet, editor, *Séminaire Gaston Darboux de géometrie et topologie différentielle*, pages 43–54. Université Montpellier II, 1994-1995.

[17] F. Pham. Resurgence, quantized canonical transformations, and multi-instantons expansions. In M. Kashiwara and T. Kawai, editors, *Algebraic Analysis*, volume II, pages 699–726. 1989.

[18] H. Rüssmann. Über das Verhalten analytischer hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtlösung. *Math. Ann.*, 154:285–300, 1964.

[19] J. Vey. Sur certains systèmes dynamiques séparables. *American journal of mathematics*, 100:591–614, 1978.

[20] J. Williamson. On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems. *American journal of mathematics*, 58(1):141–163, 1936.

Institut Fourier, umr 5582 (ujf-cnrs), b.p. 74, F-38402 St Martin d'Hères Cedex.
e-mail : San.Vu-Ngoc@ujf-grenoble.fr