Densité de l'intégrale d'aire, Intégrales singulières et Changements de signe d'une fonction harmonique

Lucien Chevalier et Alain Dufresnoy

Summary: In his 1983 paper [2], R. F. Gundy introduced a new functional related to the Littlewood-Paley theory, called the *density of the area integral.* In the first part of the paper, we prove that this functional can be expressed as the principal value of an explicit singular integral. This result provides us with a new and precise connection between the density of the area integral and the theory of Calderón-Zygmund operators. The study of the kernel associated with the above-mentioned singular integral led us to another problem, which could be interesting in its own right. This problem, stated in the introduction and solved in the second part of the paper, deals with the boundary behaviour of the *sign* of an harmonic function in the half-plane.

Mots-clés: Densité de l'intégrale d'aire, Intégrales singulières, Changements de signe d'une fonction harmonique.

Classification: 42B20, 31A05, 31A20.

1. — Introduction et énoncé des résultats principaux

Dans un récent travail (Cf. [1]), l'un de nous a obtenu l'analogue, dans le contexte de l'analyse harmonique dans un demi-espace, de la formule de Tanaka de la théorie des martingales. Plus précisément, le résultat établi dans [1] est une égalité de la forme

$$|f| = \tilde{f} + D_*^0(f), \tag{1}$$

où $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ est une application admettant une intégrale de Poisson $P(f)$, $D_*^0(f)$ est une version adéquate de la "densité de l'intégrale d'aire" associée à la fonction harmonique $P(f)$, et $\tilde{f}$ est une nouvelle application de R^n dans R qui a conservé, d'un certain point de vue, les propriétés de f. En particulier on peut dire, pour parler brièvement, que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ préserve les espaces fonctionnels usuels de l'analyse harmonique dans R^n (voir le théorème 1 de [1] pour une formulation plus précise).

Cette application n'est pas linéaire, ni même sous-linéaire. C'est pourquoi, pour pouvoir utiliser la théorie des intégrales singulières, nous avons du introduire dans [1] une famille (T_b) d'opérateurs de Calderón-Zygmund dans R^n, indexée par l'ensemble des applications boréliennes bornées $b : \mathrm{R}_+^{n+1} \to \mathrm{R}$ (la définition précise de ces opérateurs est rappelée plus loin). Cette famille (T_b) dépend linéairement de b, et on obtient la fonction $\tilde{f}$ en faisant agir sur la fonction f l'opérateur de la famille précédente obtenu en prenant pour b *le signe de l'extension harmonique de* f. On a donc l'égalité

$$\tilde{f} = T_{\mathrm{sgn}(P(f))}(f). \tag{2}$$

La théorie générale des intégrales singulières suggère de poursuivre cette étude; en effet, il est bien connu qu'un opérateur de Calderón-Zygmund se décompose toujours en somme de deux opérateurs : L'un est défini par la valeur principale (en un sens approprié) de l'intégrale singulière associée à son noyau, et l'autre est un opérateur de multiplication par une fonction bornée. Il est donc naturel de chercher à obtenir la décomposition, au sens précédent, de l'opérateur $T_{\mathrm{sgn}(P(f))}$ (et plus généralement des opérateurs T_b). Cette décomposition permettra d'une part de satisfaire une curiosité légitime, et d'autre part conduira nécessairement à une expression nouvelle de la densité de l'intégrale d'aire. Pour plusieurs raisons qui apparaitront en cours de route (notamment au paragraphe 3), le cadre de cet article se limite au cas où $n = 1$.

Notre premier objectif a donc été la décomposition explicite donnée par le théorème 1. La méthode suivie a été, dans la mesure du possible, la théorie de Calderón-Zygmund-Cotlar (telle qu'elle est exposée, par exemple, dans [3], pp. 240-249). Comme nous le verrons au paragraphe 2, l'application de cette théorie conduit très naturellement, dans notre cas, à un nouveau problème; ce problème est, *grosso modo*, celui de savoir si le signe d'une fonction harmonique dans le demi-plan admet, en un sens approprié, une limite au bord. Pour l'énoncer précisément, nous introduisons la définition suivante :

Etant donné un point $\xi \in \mathrm{R}$ et une application $u : \mathrm{R}_+^2 \to \mathrm{R}$, nous dirons que u vérifie la propriété $L'(\xi)$ si elle admet une limite "quasi omnidirectionnelle" au point ξ, au sens suivant : pour presque tout $z \in \mathrm{R}_+^2$, $\lim_{\varepsilon \to 0} u((\xi, 0) + \varepsilon z)$ existe.

L'énoncé de notre second problème est alors le suivant : Quelles sont les applications $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ telles que la fonction $\mathrm{sgn}(P(f))$ vérifie la propriété $L'(\xi)$ pour presque tout ξ ?

Le théorème de Fatou permet de préciser le problème. En effet, pour toute fonction f admettant une intégrale de Poisson $P(f)$, cette fonction harmonique admet une limite non-tangentielle presque partout, et par suite la fonction

$\mathrm{sgn}(P(f))$ vérifie la propriété $L'(\xi)$ en presque tout point ξ tel que $f(\xi) \neq 0$. La question restante est donc la suivante : Quelle propriété doit vérifier la fonction f pour que, en presque tout point ξ tel que $f(\xi) = 0$, la restriction de $P(f)$ à presque toute demi-droite issue du point ξ n'ait qu'un nombre fini de zéros?

Notre deuxième objectif a été d'obtenir une réponse précise à cette question (théorème 2), pour deux raisons principales. D'une part, le résultat obtenu prouve que la décomposition donnée par le théorème 1 ne peut pas être obtenue comme simple conséquence de la théorie de Calderón-Zygmund-Cotlar (ce qui explique la voie suivie dans le paragraphe 2). D'autre part, il nous semble que cette question possède un intérêt intrinsèque.

Avant d'énoncer de façon précise nos résultats , il est nécessaire d'introduire quelques notations (qui sont celles de [1]).

On désigne par $\mathbb{R}^2_+$ le demi-espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Le point courant de $\mathbb{R}^2_+$ est systématiquement noté $z = (x, y)$. Pour tout point $\xi \in \mathbb{R}$, on note p_ξ le noyau de Poisson relatif au point ξ, défini dans $\mathbb{R}^2_+$ par

$$p_\xi(z) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbb{R}} p_\xi(0,1)|f(\xi)|\, d\xi < +\infty.$$

A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on peut associer son intégrale de Poisson $P(f)$, définie dans $\mathbb{R}^2_+$ par

$$P(f)(z) = \int_{\mathbb{R}} p_\xi(z) f(\xi)\, d\xi.$$

En outre, la fonction $|P(f)|$ est sous-harmonique, donc son laplacien au sens des distributions est une mesure positive. On peut donc définir, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$D^0_*(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2_+} y p_\xi(z) \Delta |P(f)|(dz).$$

Des fonctionnelles de ce type ont été introduites, dans un autre but et sous une forme un peu différente, par R. F. Gundy au début des années 80 (Cf. [2]).

Les espaces L^p considérés sont relatifs à la mesure de Lebesgue m dans $\mathbb{R}$, et la norme usuelle dans L^p est notée $\|\cdot\|_p$.

Nous rappelons maintenant la définition des opérateurs T_b auxquels nous avons fait allusion plus haut.

Soit b une application borélienne bornée de $\mathbb{R}^2_+$ dans $\mathbb{R}$. Si on pose, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$T_b(f)(\xi) = 2 \int_{\mathbb{R}^2_+} y\, b(z) \nabla p_\xi(z) \nabla P(f)(z)\, dz, \tag{3}$$

on définit un opérateur de Calderón-Zygmund T_b, associé au noyau K_b défini par

$$K_b(\xi,\xi') = 2\int_{\mathrm{R}_+^2} y\, b(z)\nabla p_\xi(z)\nabla p'_\xi(z)\, dz \tag{4}$$

pour $\xi \neq \xi'$ (Cf. [1], proposition 3).

Notre premier résultat est le

THÉORÈME 1. — *Pour toute fonction $f \in L^2$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi,\xi')f(\xi')\, d\xi'$$

existe pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}$ et on a les égalités

$$\tilde{f}(\xi) = |f(\xi)| + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi,\xi')f(\xi')\, d\xi'$$

et

$$D^0_*(f)(\xi) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi,\xi')f(\xi')\, d\xi'.$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans le paragraphe 2. Cet énoncé suggère deux remarques :

La première est que ces égalités montrent qu'on peut obtenir $\tilde{f}$ et $D^0_*(f)$ directement à partir de f (c'est à dire sans utiliser explicitement son intégrale de Poisson et sans calculer la mesure $\Delta|P(f)|$), *à condition de connaître* $\mathrm{sgn}(P(f))$, ce qui revient essentiellement à connaître l'ensemble $(P(f))^{-1}(\{0\})$.

La seconde est que, si nous considérons l'égalité (1) et les deux égalités qui figurent dans l'énoncé précédent, deux quelconques de ces trois relations impliquent la troisième. On peut donc se contenter, pour prouver le théorème précédent, d'établir l'égalité donnant $\tilde{f}$. De la même manière, si on sait prouver indépendamment du théorème précédent l'égalité donnant $D^0_*(f)$ comme valeur principale, ce théorème fournit une nouvelle preuve de l'égalité (1).

Pour énoncer commodément notre second résultat, nous introduisons la notation suivante : Pour toute application $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, et tout $r > 0$, nous poserons

$$\sigma_f(r) = \sup_{x\in\mathrm{R};|h|\leq r} |f(x+h) - f(x)|.$$

Le résultat suivant indique avec précision, en termes de module de continuité, quelle propriété de régularité doit posséder une fonction pour que le signe de son extension harmonique admette, presque partout, une limite "quasi omnidirectionnelle".

THÉORÈME 2. — *Il y a, entre la régularité d'une fonction et le comportement à la frontière du signe de son intégrale de Poisson, les relations suivantes :*

(i) *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{M}$ *telle que la fonction* $r \mapsto \sigma_f(r)/r$ *soit bornée* (*ce qui revient à dire que* $f \in \mathrm{Lip}_1$), *la fonction* $\mathrm{sgn}(P(f))$ *vérifie la propriété* $L'(\xi)$ *pour presque tout* $\xi \in \mathrm{R}$.

(ii) *Pour toute application croissante* $\sigma : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, *vérifiant* $\sigma(0) = 0$ *et telle que* $\sigma(r)/r \to +\infty$ *quand* $r \to 0$, *il existe une fonction bornée* g *définie dans* R, *vérifiant* $\sigma_g \leq \sigma$, *et un compact* L *de mesure* > 0, *possèdant les propriétés suivantes :*

— *Pour tout* $\xi \in L$, *la restriction à toute droite issue de* ξ *de la fonction* $\mathrm{sgn}(P(g))$ *n'admet pas de limite au point* ξ.

— *Pour tout* $\xi \in L$, *et toute mesure borélienne* $\mu \neq 0$ *sur* R^2_+, *à valeurs réelles et à variation totale finie, l'intégrale*

$$\int_{\mathrm{R}^2_+} \mathrm{sgn}(P(g)(\xi + \varepsilon z))\mu(dz)$$

n'a pas de limite quand ε *tend vers* 0.

L'assertion (ii) du théorème précédent montre en particulier que, même pour une fonction f dont l'irrégularité est modeste (par exemple, $f \in \bigcap_{\alpha<1} \mathrm{Lip}_\alpha$), l'ensemble des zéros de $P(f)$ peut être un ensemble un peu compliqué. La mesure $\Delta|P(f)|$ et la fonction $D^0_*(f)$ sont donc souvent des objets non triviaux. Nous espérons que le théorème 1, qui établit un lien précis entre la fonctionnelle D^0_* et la théorie des intégrales singulières, permettra de mieux connaître *the nature of the functional and its possible status in the catalogue of artifacts under the label "Littlewood-Paley, singular integral theory".*[1]

2. — Démonstration du théorème 1

Nous continuerons, comme dans [1], à utiliser prioritairement la théorie des opérateurs de Calderón-Zygmund. Etant donné le noyau K d'un tel opérateur et $f \in L^2$, pour prouver que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - \xi'| > \varepsilon} K(\xi, \xi') f(\xi')\, d\xi'$$

existe pour presque tout ξ, la stratégie usuelle consiste à établir l'existence de cette limite lorsque la fonction f appartient à un sous-espace dense convenable de L^2, puis à étendre ensuite ce résultat à toute fonction de L^2 au moyen de l'inégalité maximale de Cotlar. La première étape de notre démonstration

1. Cette expression est empruntée à R.F. Gundy et M.L. Silverstein

(paragraphe 2.1) consiste donc à déterminer quelle condition doit vérifier la fonction b pour que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - \xi'| > \varepsilon} K_b(\xi, \xi') f(\xi') \, d\xi'$$

existe presque partout lorque $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R})$. Le résultat obtenu est une condition nécessaire et suffisante simple et explicite (proposition 1).

Ce résultat et l'assertion (ii) du théorème 2 montrent que, dans le cas où la fonction b est le signe de l'extension harmonique d'une fonction de L^2, la condition donnée par la proposition 1 peut ne pas être remplie presque partout, et par suite la stratégie générale évoquée plus haut est inopérante. Nous contournerons cette difficulté en deux étapes, de la manière suivante : Dans le paragraphe 2.2, nous obtiendrons une décomposition (non canonique) des opérateurs T_b généraux (proposition 2), au moyen d'une valeur principale en un sens restreint. Ce résultat nous fournira des renseignements, incomplets mais suffisants, sur la fonction multiplicatrice (également non canonique) qui apparait dans cette décomposition. Ensuite, nous montrerons dans le paragraphe 2.3 que, si les fonctions $f \in L^2$ et b sont liées par la relation $b = \mathrm{sgn}(P(f))$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - \xi'| > \varepsilon} K_b(\xi, \xi') f(\xi') \, d\xi'$$

existe pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}$ (proposition 3).

On déduit ensuite facilement le théorème 1 des trois propositions précédentes.

2.1. — Condition nécessaire et suffisante d'existence de la valeur principale associée au noyau K_b

Il est bien connu que, étant donné le noyau K d'un opérateur de Calderón-Zygmund, un point $\xi \in \mathrm{R}$ et une suite (ε_k) de nombres > 0 qui converge vers 0, la limite

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{|\xi - \xi'| > \varepsilon_k} K(\xi, \xi') f(\xi') \, d\xi'$$

existe pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R})$ si et seulement si

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\varepsilon_k < |\xi - \xi'| < 1} K(\xi, \xi') \, d\xi'$$

existe. Dans le cas des noyaux K_b, cette propriété s'avère liée au comportement à la frontière du demi-plan de la fonction b, en un sens que le résultat suivant va préciser . Etant donné $\xi \in \mathrm{R}$ et $z \in \mathrm{R}_+^2$, on posera $b(\xi + z) = b((\xi, 0) + z)$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $\xi \in \mathrm{R}$ *et toute suite* (ε_k) *de nombres* > 0 *qui converge vers* 0, *la limite*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\varepsilon_k<|\xi-\xi'|<1} K_b(\xi,\xi')\,d\xi'$$

existe si et seulement si

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathrm{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon_k z)\rho(z)\,dz$$

existe, où

$$\rho(z) = \frac{4}{\pi^2}\frac{y(y^4+x^4+2y^2x^2-y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)}$$

pour tout $z=(x,y)\in \mathrm{R}^2_+$.

Démonstration :

Pour tout $\xi \in \mathrm{R}$, et tous nombres ε et R vérifiant $0<\varepsilon<R$, nous poserons

$$A_b(\xi,\varepsilon,R) = \int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|<R} K_b(\xi,\xi')\,d\xi'.$$

La proposition est une conséquence immédiate du résultat suivant.

LEMME 1. — *Pour tout* $\xi \in \mathrm{R}$, *et tous nombres* ε *et* R *vérifiant* $0<\varepsilon<R$, *on a l'égalité*

$$A_b(\xi,\varepsilon,R) = -\int_{\mathrm{R}^2_+} b(\xi+\varepsilon z)\rho(z)\,dz + \int_{\mathrm{R}^2_+} b(\xi+z)\frac{1}{R^2}\rho\left(\frac{z}{R}\right)\,dz.$$

Démonstration :

En utilisant la définition du noyau K_b, le théorème de Fubini (dont l'application se justifie aisément au moyen des estimations usuelles concernant le gradient du noyau de Poisson) et un changement de variable, on obtient l'égalité

$$A_b(\xi,\varepsilon,R) = 2\int_{\mathrm{R}^2_+} yb(\xi+z)\nabla p_0(z)\left(\int_{\varepsilon<|\zeta|<R}\nabla p_\zeta(z)\,d\zeta\right)\,dz.$$

D'autre part, un calcul simple montre que, pour tout $a>0$, on a l'égalité

$$\int_{|\zeta|<a}\nabla p_\zeta(z)\,d\zeta = \frac{2a}{\pi}\frac{(-2xy\ ,\ x^2-y^2-a^2)}{((x+a)^2+y^2)((x-a)^2+y^2)} \tag{5}$$

On voit ainsi que $A_b(\xi, \varepsilon, R)$ est la somme de deux intégrales sur le demi-espace, l'une dépendant de ε, l'autre de R. On vérifie que cette dernière est égale à $\int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi + z)\frac{1}{R^2}\rho\left(\frac{z}{R}\right)\, dz$, et un simple changement de variable montre que la première n'est autre que $-\int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi + \varepsilon z)\rho(z)\, dz$, d'où le résultat.

On peut vérifier (cet exercice est laissé aux étudiants du lecteur) que la fonction ρ précédemment introduite est d'intégrale 1. Bien qu'elle ne soit pas de signe constant, elle joue ici le rôle d'une "densité" et la propriété mise en évidence par la proposition 1 exprime l'existence d'une "limite omnidirectionnelle en moyenne" au sens de cette densité, pour la fonction b au point $(\xi, 0)$ de la frontière, relativement à l'approche définie par la suite (ε_k).

Cette propriété sera utilisée souvent dans la suite de cet article, ce qui justifie la définition suivante :

Etant donné une fonction borélienne bornée b définie dans le demi-espace et un point $\xi \in \mathrm{R}$, nous dirons que cette fonction vérifie la propriété $L''(\xi)$ si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi + \varepsilon z)\rho(z)\, dz \quad \text{existe.}$$

Une autre propriété nous sera également utile :

Nous dirons que la fonction b vérifie la propriété $L(\xi)$ s'il existe un nombre (que nous noterons $b(\xi)$) tel que, pour presque tout $z \in \mathrm{R}_+^2$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} b(\xi + \varepsilon z) = b(\xi)$$

Entre ces propriétés et la propriété $L'(\xi)$ définie dans l'introduction existent les implications évidentes $L(\xi) \Rightarrow L'(\xi)$ et $L'(\xi) \Rightarrow L''(\xi)$. Observons que, dans les cas qui nous intéressent, les deux plus fortes de ces propriétés sont les seuls moyens réalistes de prouver la troisième.

2.2. — Décomposition de l'opérateur T_b

Le principal intérêt pour nous du résultat suivant est d'identifier la "partie canonique" des fonctions multiplicatrices intervenant dans les différentes décompositions possibles de l'opérateur T_b.

PROPOSITION 2. — *Pour toute application borélienne bornée* $b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, *il existe une suite ponctuellement convergente* (ε_j) *de fonctions boréliennes définies dans* R *et à valeurs* > 0, *possédant les propriétés suivantes :*

(i) $\lim_{j \to +\infty} \varepsilon_j(\xi) = 0$ *pour presque tout* $\xi \in \mathrm{R}$.

(ii) *Pour presque tout* $\xi \in \mathrm{R}$,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi + \varepsilon_j(\xi)z)\rho(z)\,dz \quad \textit{existe.}$$

(iii) *Pour toute fonction* $f \in L^2$, *et presque tout* $\xi \in \mathrm{R}$,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon_j(\xi)} K(\xi,\xi')f(\xi')\,d\xi' \quad \textit{existe.}$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^2$, *on a presque partout l'égalité*

$$T_b(f)(\xi) = m_b(\xi)f(\xi) + U_b(f)(\xi), \tag{6}$$

où

$$m_b(\xi) = \lim_{j\to+\infty} \int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi + \varepsilon_j(\xi)z)\rho(z)\,dz. \tag{7}$$

et

$$U_b(f)(\xi) = \lim_{j\to+\infty} \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon_j(\xi)} K_b(\xi,\xi')f(\xi')\,d\xi'. \tag{8}$$

Enfin, en presque tout point $\xi \in \mathrm{R}$ *tel que la propriété* $L(\xi)$ *soit satisfaite par la fonction* b, *on a* $m_b(\xi) = b(\xi)$.

Démonstration :

L'existence d'une suite de fonctions (ε_j) et d'une fonction bornée m_b vérifiant les propriétés (i) et (iii) et l'égalité (6) résulte d'un théorème général ([3], p. 248). Le fait qu'une telle suite vérifie (ii) résulte de (iii) et de la proposition 1. Il reste donc uniquement à prouver l'égalité (7).

Pour cela, nous allons démontrer que, pour tout $p \in \mathrm{N}$, l'égalité (7) a lieu presque partout dans l'intervalle $[-p,p]$. Nous désignerons par C une constante universelle, dont la valeur peut changer de place en place. Pour tout entier $k \geq 2p$, nous considérons une fonction $f_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R})$, à valeurs dans $[0,1]$, valant 1 sur $[-k,k]$ et nulle hors de $[-(k+1),k+1]$. En utilisant la définition de l'opérateur T_b et un changement de variable, on voit que, pour presque tout $\xi \in [-p,p]$,

$$\begin{aligned} T_b(f_k)(\xi) &= 2\int_{\mathrm{R}_+^2} yb(\xi+z)\nabla p_0(z)\left(\int_{\{|\zeta|\leq k-p\}} \nabla p_\zeta(z)\,d\zeta\right)dz \\ &+2\int_{\mathrm{R}_+^2} yb(\xi+z)\nabla p_0(z)\left(\int_{\{k-p\leq|\zeta|\leq k+1+p\}} \nabla p_\zeta(z)f_k(\zeta+\xi)\,d\zeta\right)dz. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (5), on voit que la première intégrale du second membre est égale à
$$\int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi+z)\frac{1}{(k-p)^2}\rho\left(\frac{z}{k-p}\right)\,dz.$$
D'autre part, les estimations usuelles relatives au gradient du noyau de Poisson permettent de montrer facilement que la valeur absolue de la deuxième intégrale du second membre est majorée par Cp/k. Par conséquent on a, pour presque tout $\xi\in[-p,p]$,
$$\left|T_b(f_k)(\xi)-\int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi+z)\frac{1}{(k-p)^2}\rho\left(\frac{z}{k-p}\right)\,dz\right|\leq Cp/k. \tag{9}$$

De la même manière, en utilisant l'égalité (8) et le lemme 1 on voit que, pour presque tout $\xi\in[-p,p]$,
$$\begin{aligned}\Bigg|U_b(f_k)(\xi)&+\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi+\varepsilon_j(\xi)z)\rho(z)\,dz\\&-\int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi+z)\frac{1}{(k-p)^2}\rho\left(\frac{z}{k-p}\right)\,dz\Bigg|\leq Cp/k.\end{aligned} \tag{10}$$
Pour tout $k\geq 2p$, on utilise l'égalité (6) avec $f=f_k$, et les inégalités (9) et (10). En faisant tendre k vers l'infini, on obtient le fait que, pour presque tout $\xi\in[-p,p]$, on a l'égalité (7).

La fonction multiplicatrice m_b ainsi obtenue dépend de la suite de fonctions (ε_k), donc n'est pas canonique. Néanmoins, si on se place en un point $\xi\in\mathrm{R}$ tel que la fonction b vérifie la propriété $L''(\xi)$, on a évidemment
$$m_b(\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathrm{R}_+^2} b(\xi+\varepsilon z)\rho(z)\,dz.$$

Enfin, si on suppose de plus que la propriété $L(\xi)$ est vérifiée, l'égalité $m_b(\xi)=b(\xi)$ résulte de l'égalité précédente, du théorème de convergence dominée de Lebesgue et du fait que la fonction ρ soit d'intégrale 1.

2.3. — Fin de la démonstration du théorème 1

La première assertion du théorème 1 est évidemment un cas particulier de la

PROPOSITION 3. — *Pour toute fonction $f\in L^2$, et toute fonction $g\in L^2$ telle que $f^{-1}(\{0\})\subset g^{-1}(\{0\})$, l'intégrale*
$$\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi,\xi')g(\xi')\,d\xi'$$

a, en presque tout point $\xi \in \mathrm{R}$, une limite quand ε tend vers 0.

Démonstration :

Nous fixons une fonction $f \in L^2$ et nous posons $b = \mathrm{sgn}(P(f))$. Pour toute fonction $h \in L^2$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $\xi \in \mathrm{R}$, nous posons

$$T_{b,\varepsilon}(h)(\xi) = \int_{|\xi-\xi'|>\varepsilon} K_b(\xi,\xi')h(\xi')\, d\xi'.$$

D'autre part, pour toute application $F : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ et tout $\lambda \in \mathrm{R}$, nous désignerons par $\{F > \lambda\}$ l'ensemble des points $\xi \in \mathrm{R}$ tels que $F(\xi) > \lambda$. Avec ces notations, nous avons donc à montrer que si une fonction $g \in L^2$ est telle que $f^{-1}(\{0\}) \subset g^{-1}(\{0\})$, alors $m(E_k) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$, où

$$E_k = \left\{ \limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)} |T_{b,\varepsilon}(g) - T_{b,\varepsilon'}(g)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Pour cela, nous considérons une suite (g_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge vers g dans L^2. Pour tout couple $(\varepsilon,\varepsilon')$ de nombres > 0, tout entier n et tout $\xi \in \mathrm{R}$, nous écrivons l'égalité (en reprenant la notation $A_b(\xi,\varepsilon,R)$ introduite dans la démonstration de la proposition 1 et en supposant $\varepsilon < \varepsilon'$)

$$T_{b,\varepsilon}(g)(\xi) - T_{b,\varepsilon'}(g)(\xi) = T_{b,\varepsilon}(g-g_n)(\xi) - T_{b,\varepsilon'}(g-g_n)(\xi)$$

$$+(g_n-g)(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')+g(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')+\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|\leq\varepsilon'} K_b(\xi,\xi')(g_n(\xi')-g_n(\xi))d\xi'.$$

Nous observons successivement que :

— Pour tout $\xi \in \mathrm{R}$ et tout $n \in \mathrm{N}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)} |T_{b,\varepsilon}(g-g_n)(\xi) - T_{b,\varepsilon'}(g-g_n)(\xi)| \leq 2T_b^*(g-g_n)(\xi),$$

où $T_b^*(h)(\xi) = \sup_{\varepsilon>0} |T_{b,\varepsilon}(h)(\xi)|$.

— Pour tout $\xi \in \mathrm{R}$ et tout $n \in \mathrm{N}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)} |(g_n-g)(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')| \leq C|(g_n-g)(\xi)|,$$

où C est une constante universelle (conséquence du lemme 1 et de l'intégrabilité de la fonction ρ).

— Pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)} |g(\xi)A_b(\xi,\varepsilon,\varepsilon')| = 0.$$

En effet, cette propriété est évidente si $g(\xi)=0$ et, si $g(\xi)\neq 0$, alors $f(\xi)\neq 0$. Mais, presque partout sur l'ensemble $(f^{-1}(\{0\}))^c$, la fonction harmonique $P(f)$ a une limite non-tangentielle non nulle en raison du théorème de Fatou, donc b vérifie la propriété $L(\xi)$ en presque tout point ξ tel que $g(\xi)\neq 0$. Par conséquent, la proposition 1 donne le résultat pour de tels points.

— Enfin, pour tout $\xi \in \mathrm{R}$ et tout $n \in \mathrm{N}$,

$$\limsup_{(\varepsilon,\varepsilon')\to(0,0)} \left| \int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|\leq\varepsilon'} K_b(\xi,\xi')(g_n(\xi')-g_n(\xi))\,d\xi' \right| = 0,$$

parce que K_b est un noyau de Calderón-Zygmund et que g_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

Par conséquent, à un ensemble de mesure nulle près, on a, pour tout entier n, l'inclusion

$$E_k \subset \left\{2T_b^*(g-g_n) > \frac{1}{2k}\right\} \bigcup \left\{C|g-g_n| > \frac{1}{2k}\right\}.$$

En appliquant deux fois l'inégalité de Tchebichev, puis l'inégalité maximale de Cotlar ([3], p. 241), on obtient (pour une autre constante universelle C)

$$m(E_k) \leq Ck^2 \|g-g_n\|_2^2,$$

et il suffit de faire tendre n vers l'infini pour terminer la preuve de la proposition.

Il est maintenant facile de terminer la démonstration du théorème 1. Les propositions 2 et 3 donnent l'existence d'une fonction bornée $m_{\mathrm{sgn}(P(f))}$ telle qu'on ait, pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}$,

$$\tilde{f}(\xi) = T_{\mathrm{sgn}(P(f))}(f)(\xi) = m_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi)f(\xi) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|\xi-\xi'|} K_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi,\xi')f(\xi')d\xi'.$$

Par conséquent, il reste à vérifier que

$$m_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi)f(\xi) = |f(\xi)| = \mathrm{sgn}(f(\xi))f(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}$. Cette égalité est triviale si $f(\xi)=0$. D'autre part, presque partout sur l'ensemble des points $\xi \in \mathrm{R}$ tels que $f(\xi)\neq 0$, la fonction $b=\mathrm{sgn}(P(f))$ vérifie la propriété $L(\xi)$ comme on l'a déjà vu. On applique alors la dernière assertion de la proposition 2, ce qui fournit l'égalité

$$m_{\mathrm{sgn}(P(f))}(\xi) = \lim_{z\to\xi} \mathrm{sgn}(P(f))(z) = \mathrm{sgn}(f(\xi)),$$

où la limite est entendue au sens de la convergence non tangentielle, en presque tout point $\xi \in \mathrm{R}$ tels que $f(\xi)\neq 0$. Ceci achève la preuve du théorème 1.

3. — Démonstration du théorème 2

3.1. — Démonstration de l'assertion (i) :

Nous commençons par exclure le cas trivial dans lequel la fonction f est constante. Dans le cas contraire, la première étape consiste à prouver que $\nabla P(f)$ a, en presque tout point de R, une limite non-tangentielle non nulle. Si H désigne la transformation de Hilbert sur la droite, la fonction

$$(x+iy) \mapsto F(x+iy) = P(f')(x,y) + iP(Hf')(x,y)$$

est holomorphe dans le demi-plan. Elle vérifie l'égalité $|\nabla P(f)(x,y)| = |F'(x+iy)|$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{R}_+^2$ et admet une limite non-tangentielle presque partout dans R. De plus, cette limite non-tangentielle ne peut s'annuler sur un ensemble de mesure > 0, car sinon la fonction holomorphe bornée $G = e^F - 1$ aurait une limite non-tangentielle nulle sur cet ensemble, donc serait identiquement nulle. Par suite F serait nulle et f serait constante, ce que nous avons exclu. On en conclut donc que $\nabla P(f)$ a, en presque tout point de R, une limite non-tangentielle non nulle.

Pour achever la démonstration, il suffit donc de vérifier que, si un point $\xi \in \mathrm{R}$ est tel que la limite non tangentielle $G(\xi)$ de $\nabla P(f)$ en ce point soit non nulle , alors la fonction $\mathrm{sgn}(P(f))$ vérifie la propriété $L'(\xi)$. Or, pour que la restriction de $\mathrm{sgn}(P(f))$ à une demi-droite issue de ξ n'ait pas de limite en ξ, il est nécessaire que $P(f)$ s'annule une infinité de fois sur cette demi-droite, et dans ce cas le théorème de Rolle permet de voir que $G(\xi)$ est orthogonal à cette demi-droite. Comme $G(\xi) \neq 0$, cela ne peut arriver que pour une demi-droite issue de ξ au plus, donc la propriété voulue est établie.

3.2. — Démonstration de l'assertion (ii) :

Pour des raisons techniques, nous commencerons par construire une fonction f définie dans le cercle unité du plan complexe et un compact K inclus dans ce cercle unité, qui possèdent des propriétés similaires à celles que devront vérifier la fonction g définie sur R et le compact L. Nous obtiendrons ensuite g et L à partir de f et K au moyen d'un argument de représentation conforme.

Préliminaires. Nous partons de l'ensemble Ω' des points $z \in \mathrm{C}$ tels que $0 < \Re z < 1$ et $|\Im z| < 1$; nous "arrondissons les angles" de façon à ce que sa frontière devienne de classe $\mathcal{C}^1$, et nous notons Ω le nouvel ouvert ainsi régularisé. Pour tout $z \in \mathrm{C}$ et tout $r > 0$, nous notons $D(z,r)$ le disque ouvert de centre z et de rayon r, et $D = D(0,1)$ le disque unité. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, nous désignons par φ_α la représentation conforme de D sur Ω telle que $\varphi_\alpha(0) = \alpha$ et telle que $\varphi'_\alpha(0)$ soit un réel > 0. L'application φ_α se prolonge à $\overline{D}$ en une application de classe $\mathcal{C}^1$, que nous noterons encore φ_α.

L'ensemble N_α des points $\xi \in \partial D$ tels que $\Re\varphi_\alpha(\xi) = 0$ est un intervalle du cercle ∂D, et sa mesure de Lebesgue[2] $|N_\alpha|$ tend vers 2π quand α tend vers 0. Au voisinage de tout point $\xi \in \overset{\circ}{N}_\alpha$, la fonction φ_α se prolonge en une fonction holomorphe φ (il s'agit essentiellement d'une application du principe de symétrie de Schwarz); de plus $\varphi'(\xi) \neq 0$ et $\varphi'(\xi)/\xi \in \mathrm{R}$ (parce que la transformation φ_α est conforme).

Pour tout $\xi \in \partial D$ et tout $b \in]0,1[$, on désigne par $\Gamma_b(\xi)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $D(0,b) \bigcup \{\xi\}$. Ce qui précède permet de montrer facilement que, pour tout compact $K \subset \overset{\circ}{N}_\alpha$ et tout $b \in]0,1[$, il existe $C(\alpha,K,b) > 0$ et $\rho(\alpha,K,b) > 0$ tels que, pour tout $\xi \in K$ et tout $z \in \Gamma_b(\xi)$ vérifiant $|z-\xi| \leq \rho(\alpha,K,b)$, on ait

$$\Re\varphi_\alpha(z) \geq C(\alpha,K,b)|z-\xi|. \tag{11}$$

D'autre part, pour tout entier $k \geq 1$ et tout $b \in]0,1[$, il existe un nombre $\eta(k,b) > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \partial D$,

$$p_k\left(\Gamma_b(\xi) \bigcap D(\xi,\eta(k,b))\right) \subset \Gamma_{(1+b)/2}(p_k(\xi)),$$

où p_k désigne l'application $z \to z^k$. De ces deux propriétés, on déduit que, pour tout compact $K \subset \overset{\circ}{N}_\alpha$, tout entier $k \geq 1$ et tout $b \in]0,1[$, il existe un nombre $\rho(\alpha,K,k,b) > 0$ tel que, pour tout $\xi \in p_k^{-1}(K)$ et tout $z \in \Gamma_b(\xi)$ vérifiant $|z-\xi| \leq \rho(\alpha,K,k,b)$, on ait

$$\Re\varphi_\alpha(z^k) \geq \frac{k}{2}C(\alpha,K,(b+1)/2)|z-\xi|. \tag{12}$$

Remarquons (ce qui nous sera utile dans la suite) que les constantes $C(\alpha,K,b)$ et $\rho(\alpha,K,k,b)$ conviennent à fortiori si on remplace le compact K par un sous-ensemble K' de K.

Construction de la fonction f. On se propose de construire la fonction pathologique f sous la forme

$$\xi \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n \Re\varphi_{\alpha_n}(\xi^{k_n}),$$

où les suites (a_n), (α_n) et (k_n) sont convenablement choisies. On choisit tout d'abord pour (α_n) une suite décroissante de points de $]0,1[$ telle que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-2\left(1-\frac{|N_{\alpha_n}|}{2\pi}\right)\right)$$

2. Il s'agit bien entendu de la mesure longueur sur le cercle

soit convergent. D'autre part, on se donne une suite arbitraire (b_n) de points de $]0,1[$ qui converge vers 1.

Il reste donc à construire les suites (a_n) et (k_n), ainsi que le compact K. Pour effectuer cette construction, nous utiliserons le

LEMME 2. — *Il existe une suite (K_n) de parties compactes de ∂D, une suite (k_n) d'entiers, et trois suites (a_n), (c_n) et (ρ_n) de nombres réels telles qu'on ait, pour tout entier $n \geq 1$, les propriétés suivantes :*

(1.n) *K_n est une union finie d'intervalles fermés de mesure > 0 et $K_n \subset p_{k_n}^{-1}(\overset{\circ}{N}_{\alpha_n})$. De plus, $K_p \subset K_{p-1}$ et*

$$|K_p| \geq \left(1 - 2\left(1 - \frac{|N_{\alpha_p}|}{2\pi}\right)\right)|K_{p-1}|$$

pour $2 \leq p \leq n$.

(2.n) $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ *et* $c_n \geq n$ pour $n \geq 2$.

(3.n) $\rho_p \leq 2^{-(p-1)}\rho_{p-1}$ *pour* $2 \leq p \leq n$ *et* $c_n\rho_n \leq c_{n-1}\rho_{n-1} \leq \cdots \leq c_1\rho_1$.

(4.n) $a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1$ *et* $a_p \leq \min(2^{-p-1}c_{p-1}\rho_{p-1}, 2^{-p+1}a_{p-1})$ *pour* $2 \leq p \leq n$.

(5.n) *Pour tout $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tout $\xi \in K_m$ et tout $z \in \Gamma_{b_m}(\xi)$ tel que $2^{-m}\rho_m \leq |z - \xi| \leq \rho_m$,*

$$\left|\sum_{p=1}^{m}(-1)^p a_p \Re\varphi_{\alpha_p}(z^{k_p})\right| \geq \frac{c_m\rho_m}{2^m}$$

et $\sum_{p=1}^{m}(-1)^p a_p \Re\varphi_{\alpha_p}(z^{k_p})$ est du signe de $(-1)^m$.

(6.n) *Pour tout $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$,*

$$\sum_{p=1}^{m} a_p k_p ||\varphi'_{\alpha_p}||_\infty + 2 \leq \tau(2a_m),$$

où $||\varphi'_{\alpha_p}||_\infty = \sup_{z\in D}|\varphi'_{\alpha_p}(z)|$ et la fonction τ est définie par $\tau(t) = \inf_{h\leq t}\sigma(h/2)/h$.

Démonstration :

Les suites seront construites de proche en proche. Nous utiliserons nos remarques préliminaires, en conservant les notations introduites à cette occasion. Pour la première étape, on choisit arbitrairement $k_1 = 1$, et on prend pour K_1

un intervalle fermé inclus dans $\overset{\circ}{N}_{\alpha_1}$, tel que $|K_1| > 0$; la condition (1.1) est ainsi satisfaite. On choisit ensuite pour a_1 un nombre > 0 assez petit pour que la condition (6.1) soit satisfaite, ce qui est rendu possible par le fait que $\tau(u)$ tend vers $+\infty$ quand u tend vers 0. Enfin, d'après nos remarques préliminaires (inégalité (11)), il suffit de prendre $c_1 = a_1 C(\alpha_1, K_1, b_1)$ et $\rho_1 = \rho(\alpha_1, K_1, b_1)$ pour que la propriété (5.1) soit satisfaite. Ceci termine la première étape de la démonstration, les conditions (2.1), (3.1) et (4.1) étant vides.

Supposons maintenant construites des séquences

$$(K_1, \dots, K_n), (k_1, \dots, k_n), \dots, (\rho_1, \dots, \rho_n)$$

vérifiant les conditions $(1.n)$ à $(6.n)$, et montrons qu'il est possible de construire K_{n+1}, $k_{n+1}, \dots, \rho_{n+1}$ de façon à ce que les séquences

$$(K_1, \dots, K_{n+1}), (k_1, \dots, k_{n+1}), \dots, (\rho_1, \dots, \rho_{n+1})$$

vérifient les conditions $(1.n+1)$ à $(6.n+1)$.

Pour cela, nous commençons par remarquer la propriété élémentaire suivante : Pour tout couple (I, J) d'intervalles de ∂D, $|I \bigcap p_k^{-1}(J)|$ tend vers $|I||J|/2\pi$ quand k tend vers l'infini. En appliquant cette propriété à toute composante connexe I de K_n et en utilisant la régularité de la mesure de Lebesgue, on en déduit l'existence d'un entier p tel que, pour tout entier $k \geq p$, il existe une union finie L_k d'intervalles fermés de ∂D possédant les propriétés suivantes :

$$L_k \subset K_n \bigcap p_k^{-1}(\overset{\circ}{N}_{\alpha_{n+1}})$$

et

$$|L_k| = |K_n \bigcap L_k| \geq \left(1 - 2\left(1 - \frac{|N_{\alpha_{n+1}}|}{2\pi}\right)\right)|K_n|.$$

Nous choisirons ultérieurement pour k_{n+1} un entier $\geq p$, puis nous complèterons la séquence $(K_1, \dots, K_n)$ en posant $K_{n+1} = L_{k_{n+1}}$. La condition $(1.n+1)$ sera ainsi vérifiée.

Par ailleurs, si nous complétons la séquence $(c_1, \dots, c_n)$ en posant

$$c_{n+1} = \max(c_n, n+1) + \sum_{p=1}^{n} a_p k_p \|\varphi'_{\alpha_p}\|_\infty,$$

la condition $(2.n+1)$ est remplie.

D'autre part, si a_{n+1} et k_{n+1} sont choisis de façon à ce que leur produit vérifie

$$\frac{a_{n+1}k_{n+1}}{2} C(\alpha_{n+1}, K_n, b_{n+1}) - \sum_{p=1}^{n} a_p k_p \|\varphi'_{\alpha_p}\|_\infty \geq \max(c_n, n+1),$$

on a, pour tout compact $L \subset K_n$, tout $\xi \in L$ et tout $z \in \Gamma_{b_{n+1}}(\xi)$ tel que $|z-\xi| \leq \rho(\alpha_{n+1}, K_n, k_{n+1}, b_{n+1})$, les inégalités

$$\left|\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p a_p \Re\varphi_{\alpha_p}(z^{k_p})\right| \geq a_{n+1}\Re\varphi_{\alpha_{n+1}}(z^{k_{n+1}}) - \left(\sum_{p=1}^{n} a_p k_p \|\varphi'_{\alpha_p}\|_\infty\right)|z-\xi|$$
$$\geq c_{n+1}|z-\xi|, \tag{13}$$

en vertu de l'inégalité (12) et du choix de c_{n+1}.

Nous choisissons maintenant un entier P_{n+1} vérifiant l'inégalité

$$P_{n+1} \geq \frac{2\left(\max(c_n, n) + \sum_{p=1}^{n} a_p k_p \|\varphi'_{\alpha_p}\|_\infty\right)}{C(\alpha_{n+1}, K_n, b_{n+1})};$$

cet entier sera le futur produit $a_{n+1}k_{n+1}$.

Ce nombre étant fixé, les propriétés de la fonction τ nous permettent de choisir un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout $a \leq \delta$, on ait

$$P_{n+1}\|\varphi'_{\alpha_{n+1}}\|_\infty + \sum_{p=1}^{n} a_p k_p \|\varphi'_{\alpha_p}\|_\infty + 2 \leq \tau(2a). \tag{14}$$

Nous prenons alors pour a_{n+1} un nombre > 0 tel que $1/a_{n+1}$ soit entier, et vérifiant l'inégalité

$$a_{n+1} \leq \min\left(\frac{c_n \rho_n}{2^{n+1}}, \frac{a_n}{2^n}, \delta, \frac{P_{n+1}}{p}\right),$$

puis nous posons $k_{n+1} = P_{n+1}/a_{n+1}$. La séquence $a_1, \ldots, a_{n+1}$ vérifie trivialement $(4.n+1)$, et il résulte de l'inégalité (14) que la condition $(6.n+1)$ est également satisfaite.

Enfin, compte tenu de l'inclusion $K_{n+1} \subset K_n$ et du choix de ρ_{n+1}, les inégalités (13) nous font voir que, pour tout $\xi \in K_{n+1}$ et tout $z \in \Gamma_{b_{n+1}}(\xi)$ tel que $2^{-(n+1)}\rho_{n+1} \leq |z-\xi| \leq \rho_{n+1}$,

$$\left|\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p a_p \Re\varphi_{\alpha_p}(z^{k_p})\right| \geq \frac{c_{n+1}\rho_{n+1}}{2^{n+1}}$$

et $\sum_{p=1}^{n+1}(-1)^p a_p \Re\varphi_{\alpha_p}(z^{k_p})$ est du signe de $(-1)^{n+1}$. La condition $(5.n+1)$ étant ainsi vérifiée, la démonstration du lemme est achevée et nous pouvons revenir à la preuve du théorème 2.

Nous conservons les notations précédentes. Les suites $(K_n), \ldots, (\rho_n)$ étant construites nous posons, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \overline{D}$

$$u_n(z) = \lambda \sum_{p=1}^{n}(-1)^p a_p \Re\varphi_{\alpha_p}(z^{k_p}),$$

où λ est une constante positive qui sera ajustée à la fin de la démonstration. Les inégalités $(4.n)$ ont comme conséquence le fait que la suite (u_n) converge uniformément dans $\overline{D}$ vers une fonction u continue dans $\overline{D}$ et harmonique dans D. Il est donc clair que la restriction de u à D n'est autre que $P(f)$, où f est la fonction définie dans ∂D par l'égalité

$$f(\xi) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \Re \varphi_{\alpha_n}(\xi^{k_n}). \tag{15}$$

Preuve des propriétés de la fonction f. Nous commencerons par construire un compact K (qui aura des propriétés similaires à celles qui sont demandées à L dans l'énoncé) en posant

$$K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n.$$

Comme la suite (K_n) est décroissante, on a $|K| = \lim_{n\to+\infty} |K_n|$, donc il résulte des conditions $(1.n)$ et du choix de la suite (α_n) que $|K| > 0$. Etant donné un point $\xi \in K$ et un entier $n \geq 1$, nous désignerons dans la suite par $\Omega_n(\xi)$ l'ensemble des points $z \in \Gamma_{b_n}(\xi)$ tels que $2^{-n}\rho_n \leq |z - \xi| \leq \rho_n$.

Nous allons maintenant montrer que, pour tout point $\xi \in K$ et tout entier $n \geq 1$, $P(f)(z)(= u(z))$ est du signe de $(-1)^n$ dans l'ensemble $\Omega_n(\xi)$. Pour cela il suffit, en vertu de $(5.n)$, de montrer que $u(z)$ et $u_n(z)$ sont de même signe dans cet ensemble, donc il suffit d'établir l'inégalité $|u_n(z)| > |u(z) - u_n(z)|$. Pour cela, on observe que

$$|u(z) - u_n(z)| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p \leq 2^{-n-1} c_n \rho_n$$

quel que soit z en raison de $(4.n)$, et que $|u_n(z)| \geq 2^{-n} c_n \rho_n$ pour tout $z \in \Omega_n(\xi)$, en vertu de $(5.n)$. Il résulte de cette propriété que, pour tout $\xi \in K$, la restriction à toute demi-droite issue de ξ de la fonction $\mathrm{sgn}(u)$ n'a pas de limite au point ξ. En effet, toute demi-droite issue de ξ rencontre, dans tout voisinage de ξ, tous les ensembles $\Omega_n(\xi)$ d'indice assez grand, parce que la suite (b_n) converge vers 1 et que la suite (ρ_n) converge vers 0.

Nous allons maintenant prouver que le module de continuité σ_f de la fonction f vérifie, si la constante λ est bien choisie, l'inégalité $\sigma_f(t) \leq \sigma(t/2)$ pour tout $t > 0$. Pour cela, nous utiliserons le

LEMME 3. — *Soit (h_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies dans ∂D et à valeurs réelles. On suppose qu'il existe deux suites (d_n) et (e_n) de nombres ≥ 0 et une application décroissante $\tau : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :*

(*e*) *La suite* (e_n) *est décroissante et on a, pour tout entier* $n \geq 1$, $\sup_{\xi \in \partial D} |h_n(\xi)| \leq e_n$ *et* $\sum_{p=n}^{+\infty} e_p \leq 2e_n$.

(*d*) *Pour tout entier* $n \geq 1$, $\sup_{\xi \in \partial D} |h_n'(\xi)| \leq d_n$ *et* $d_1 + \cdots + d_n + 2 \leq \tau(2e_n)$.

Alors la fonction $h = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$ *possède la propriété de régularité suivante : pour tout* x' tel que $|x'| \leq 2e_1$, *on a* $|h(x + x') - h(x)| \leq |x'|\tau(|x'|)$.

Démonstration :

Il suffit de prouver que, pour tout $x \in \partial D$, tout $n \geq 1$ et tout x' tel que $2e_{n+1} \leq |x'| \leq 2e_n$, on a

$$|g(x + x') - g(x)| \leq |x'|\tau(|x'|).$$

Pour cela, on écrit

$$|g(x + x') - g(x)| \leq |x'|(d_1 + \cdots + d_n) + 2 \sum_{p=n+1}^{+\infty} e_n$$

$$\leq |x'|(d_1 + \cdots + d_n + 2) \leq |x'|\tau(2e_n) \leq |x'|\tau(|x'|),$$

d'où le résultat.

Nous revenons à la démonstration du théorème 2. En vue d'appliquer le résultat précédent nous posons, pour tout entier $n \geq 1$, tout $\xi \in \partial D$ et tout $t \geq 0$, $h_n(\xi) = a_n \Re\varphi_{\alpha_n}(\xi^{k_n})$, $e_n = a_n$, $d_n = a_n k_n \|\varphi_{\alpha_n}'\|_\infty$ et $\tau(t) = \inf_{h \leq t} \sigma(h/2)/h$. La condition (*e*) est satisfaite en raison des inégalités (4.*n*), et la condition (*d*) l'est en raison des inégalités (6.*n*); d'autre part, la fonction τ est évidemment décroissante. On prouve ainsi que

$$|f(x + x') - f(x)| \leq |x'|\tau(|x'|) \leq \sigma(|x'|/2)$$

pour tout x et tout x' tel que $|x'| \leq 2a_1$. Par conséquent, il suffit de poser

$$\lambda = \min\left(1, \frac{\sigma(a_1)}{2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}\right)$$

pour que la fonction f définie par l'égalité (15) vérifie l'inégalité $\sigma_f(t) \leq \sigma(t/2)$ pour tout $t > 0$.

Retour au demi-plan. — Nous identifions R^2 et C, et nous conservons les notations précédentes. Nous pouvons supposer que (par exemple) $1 \notin K$. Dans ce cas nous posons, pour tout $z \in \mathrm{C} \setminus \{-i\}$,

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i}\ ,$$

puis $v(z) = u \circ T(z)$. La fonction v ainsi définie est l'intégrale de Poisson dans le demi-espace de la fonction bornée g définie dans R par $g = f \circ T$. Nous allons montrer que cette fonction g et le compact $L \subset \mathrm{R}$ défini par $L = T^{-1}(K)$ possèdent les propriétés voulues.

On voit facilement que, pour tout $(\xi, \xi') \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$,

$$|g(\xi) - g(\xi')| \leq \sigma_f(2|\xi - \xi'|) \leq \sigma(|\xi - \xi'|),$$

donc la fonction g possède la propriété de régularité requise. D'autre part, le compact L vérifie $m(L) > 0$ parce que $|K| > 0$ et que la transformation T conserve la mesure harmonique . Il nous reste donc à montrer que, en tout point $\xi \in L$, la fonction $\mathrm{sgn}(P(g))$ n'a pas de limite, dans les deux sens précisés par l'énoncé du théorème 2. Pour tout $\xi \in \mathrm{R}$, tout $a > 0$ et tout $C > 0$, nous désignons par $\Gamma_{a,C}(\xi)$ l'ensemble des points $z = x + iy \in \mathrm{R}^2_+$ tels que $|x - \xi| < ay$ et $|z - \xi| \leq C$. Comme la suite (ρ_n) converge vers 0, et que la suite (b_n) converge vers 1, un argument de représentation conforme permet de voir que, pour tout $a > 0$,

$$T(\Gamma_{a,\rho_n}(\xi)) \subset \Gamma_{b_n}(T(\xi)) \tag{16}$$

si n est assez grand. Par suite, la restriction de la fonction $\mathrm{sgn}(P(g)) = \mathrm{sgn}(v)$ à toute droite issue du point ξ n'a pas de limite, parce que la fonction $\mathrm{sgn}(P(f)) = \mathrm{sgn}(u)$ a, comme on l'a vu, la propriété analogue relativement à toute droite issue du point $T(\xi)$.

Montrons enfin que, en moyenne par rapport à toute mesure finie $\mu \neq 0$, la fonction $\mathrm{sgn}(P(g))$ n'a pas de limite en tout point $\xi \in L$. On peut évidemment supposer que $\mu(\mathrm{R}^2_+) = 1$, et dans ce cas nous pouvons trouver $a > 0$ et $C > 0$ vérifiant les deux conditions

$$\mu(\Gamma_{a,C}(0)) \geq \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad |\mu|((\Gamma_{a,C}(0))^c) \leq \frac{1}{4}. \tag{17}$$

Ayant fixé un point $\xi \in L$, on peut trouver une constante $C' > 0$ telle que $C'|z - \xi| \leq |T(z) - T(\xi)| \leq 2|z - \xi|$ pour tout $z \in \mathrm{R}^2_+$ tel que $|z| \leq C$. Nous posons $b = \mathrm{sgn}(P(g))$; pour montrer que l'intégrale

$$I(\varepsilon) = \int_{\mathrm{R}^2_+} b(\xi + \varepsilon z)\mu(dz)$$

n'a pas de limite quand ε tend vers 0, nous montrerons que la suite $(I(\rho_n/2C))$ est divergente. Pour cela nous écrivons, dès que $2^{-n} \leq CC'$,

$$I(\rho_n/2C) = \int_{\Gamma_{a,C}(0) \bigcap (D(0,2^{-n}/C'))^c} b(\xi + \rho_n z/2C)\mu(dz)$$

$$+ \int_{\Gamma_{a,C}(0) \bigcap D(0,2^{-n}/C'))} b(\xi + \rho_n z/2C)\mu(dz)$$

$$+\int_{(\Gamma_{a,C}(0))^c} b(\xi+\rho_n z/2C)\mu(dz). \tag{18}$$

En raison du choix des constantes C et C' on a, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \Gamma_{a,C}(0) \bigcap (D(0, 2^{-n}/C'))^c$, $2^{-n}\rho_n \leq |T(\xi+\rho_n z/2C) - T(\xi)| \leq \rho_n$. En utilisant cette propriété et l'inclusion (16) on voit que, pour tout n assez grand, $T(\xi+\rho_n z/2C) \in \Omega_n(T(\xi))$ (et donc $b(\xi+\rho_n z/2C) = (-1)^n$) pour tout $z \in \Gamma_{a,C}(0) \bigcap (D(0, 2^{-n}/C'))^c$. On en déduit facilement, en utilisant l'égalité (18) et les conditions (17), que $I(\rho_n/2C) \geq 1/4$ pour tout entier pair assez grand, alors que $I(\rho_n/2C) \leq -1/4$ pour tout entier impair assez grand. Ceci termine la démonstration.

Références

[1] L. Chevalier. — *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications.* A paraître.

[2] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983) 138-149.

[3] Y. Meyer. — *Opérateurs de Calderón-Zygmund.* Hermann, Paris, 1990.

Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
e-mail :
lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr
dufresn@fourier.ujf-grenoble.fr