Pentes algébriques et pentes analytiques d'un $\mathcal{D}$-module

Yves Laurent et Zoghman Mebkhout

1997

keywords : D-module, Irrégularité, Indice, Holonome, Cycle micro-caractéristique
subjclass : 35A27

Résumé

Le but de cet article est d'établir une bijection entre les pentes d'un module holonome qui sont des nombres rationnels se calculant à partir des variétés microcaractéristiques du module et les exposants qui caractérisent la croissance des solutions et de définir le polygone de Newton.

Université de Grenoble
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS/UJF
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex

Université de Paris 7
UFR de Mathématiques/CNRS
2 Place Jusssieu
F-75251 Paris Cedex

Table des matières

Introduction

Soit $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien local régulier de dimension un muni d'une dérivation $\frac{d}{dx}$ et $P := a_m \frac{d^m}{dx^m} + \ldots + a_0$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans $\mathcal{O}$, le nombre de Fuchs de P est l'entier positif ou nul

$$\mathrm{irr}_{\mathfrak{m}}(P) := \max_{0 \leq k \leq m} \Big(k - v_{\mathfrak{m}}(a_k) \Big) - (m - v_{\mathfrak{m}}(a_m)).$$

Sa nullité caractérise une singularité régulière.

Si $\mathcal{O}$ est l'anneau $\mathbb{C}\{x\}$ des séries convergentes à coefficients complexes, Malgrange [14] a montré que $\mathrm{irr}_0(P)$ est égal à la différence $\chi(P, \mathbb{C}[[x]]) - \chi(P, \mathbb{C}\{x\})$ de l'indice formel et de l'indice convergent, plus précisément $\mathrm{irr}_0(P)$ est égal à la dimension de l'espace d'irrégularité

$$\mathrm{Irr}_0(P) := \mathrm{Ker}(P, \mathbb{C}[[x]]/\mathbb{C}\{x\}).$$

La définition de Malgrange admet plusieurs généralisations.

Ramis [17] a étendu ce résultat en montrant que l'on peut associer à P un polygone de Newton qui est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ à sommets entiers. Il se définit à partir des valuations $\mathfrak{m}$-adiques des coefficients et on peut y lire la croissance des solutions lorsque l'anneau est $\mathbb{C}\{x\}$. Plus précisément, on considère pour s réel ≥ 1, l'espace $\mathcal{O}_s$, des fonctions de classe de Gevrey d'ordre s, i.e. des séries formelles $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ telles que la série $\sum a_n x^n/(n!)^{s-1}$ est convergente. Alors Ramis montre que les espaces

$$\mathrm{Irr}_0(s)(P) := \mathrm{Ker}(P, \mathcal{O}_s/\mathcal{O})$$

constituent une filtration de l'espace $\mathrm{Irr}_0(P)$ dont les sauts correspondent aux pentes du polygone de Newton par une transformation élémentaire. De plus la multiplicité d'une pente est égale à la multiplicité du polygone de Newton qui lui correspond.

Notre but dans cet article est de généraliser ces résultats en dimensions supérieures. Soit X une variété analytique complexe, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre localement fini à coefficients dans $\mathcal{O}_X$. Si Y est une hypersurface de X notons $\mathcal{O}_{X|Y}(\infty) := \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ le complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long de Y. Pour $s \in [1, +\infty[$ nous définissons le sous-faisceau $\mathcal{O}_{X|Y(s)}$ de $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ des sections qui s'écrivent localement au voisinage de tout point non singulier de Y comme une série formelle $\sum a_n t^n$ où a_n est une suite de fonctions holomorphes sur Y au voisinage de ce point, t une équation locale de Y et telle que la série $\sum a_n t^n/(n!)^{s-1}$ est convergente. Nous considérons aussi le faisceau de cohomologie locale $\mathcal{B}^{\infty}_{Y|X} = \mathcal{B}_{Y|X}(1) := \mathcal{H}^1_Y(\mathcal{O}_X)$ muni de sa filtration par les sous-faisceaux $\mathcal{B}_{Y|X}(s)$ définis de manière analogue. On définit $\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{B}_{Y|X}(\infty) := \mathcal{H}^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ comme le faisceau de cohomologie locale algébrique de Y à valeurs dans le faisceau $\mathcal{O}_X$. Les faisceaux $\mathcal{O}_{X|Y}(s)$ et $\mathcal{B}_{Y|X}(s)$, $s \in [1, \infty]$ sont des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ sont des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche on note

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) := \mathbf{R}\,\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{F}),$$

le complexe des solutions de $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$. On a alors le résultat suivant [4] : si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome défini au voisinage de Y le complexe

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y}(1))$$

est constructible et sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donnée comme l'obstruction d'Euler du cycle caractéristique de $\mathcal{M}$. Plus généralement [12], si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome défini au voisinage de Y les complexes

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y(s)}),\ \mathrm{Sol}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}(s))$$

sont constructibles pour tout $s \in [1, \infty]$ et leur caractéristique d'Euler-Poincaré est donnée comme l'obstruction d'Euler des cycles micro-caractéristiques de $\mathcal{M}$.

Pour un nombre réel $s \in [1, \infty]$ définissons le faisceau $\mathcal{Q}_Y(s)$ à l'aide de la suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche

$$0 \to \mathcal{O}_{X|Y} \to \mathcal{O}_{X|Y}(s) \to \mathcal{Q}_Y(s) \to 0$$

Rappelons que l'on dit qu'un module holonome $\mathcal{M}$ est régulier le long de Y si le complexe $\mathrm{Sol}(\mathcal{M}, \mathcal{Q}_Y(\infty))$ est nul. On est amené à poser

$$\mathrm{Irr}_Y(s)(\mathcal{M}) := \mathrm{Sol}(\mathcal{M}, \mathcal{Q}_Y(s)).$$

On a alors les résultats suivants [15] : le complexe $\mathrm{Irr}_Y(s)(\mathcal{M})$ est un faisceau pervers sur Y, on a un foncteur exact $\mathrm{Irr}_Y(s)$ entre la catégorie abélienne des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes et la catégorie abélienne des faisceaux pervers sur Y; les faisceaux $\mathrm{Irr}_Y(s)(\mathcal{M})$ pour $s \in [1, \infty[$ constituent une filtration dans la catégorie des faisceaux pervers du faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}) := \mathrm{Irr}_Y(\infty)(\mathcal{M})$. Les faisceaux gradués $Gr(s)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}))$ pour cette filtration forment une famille localement finie définissant les pentes transcendantes de $\mathcal{M}$, leur cycles caractéristiques sont positifs. Cette filtration permet comme nous le verrons ici, de définir un polygone de Newton le long de chaque composante irréductible de la variété caractéristique du faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M})$.

La théorie des variété micro-caractéristiques [10] décrit géométriquement les cycles caractéristiques des faisceaux $Gr(s)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}))$ et montre les propriétés d'intégralité du polygone de Newton. La question est locale et nous pouvons supposer, ce qui est loisible par la méthode du graphe, que Y est non singulière. A tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ on lui associe ses cycles micro-caractéristiques $\widetilde{\Sigma}_\Lambda(s)(\mathcal{M})$ du fibré cotangent $T^*\Lambda$ au fibré conormal $\Lambda := T^*_Y X$. Les projections $I_Y(s)(\mathcal{M})$ sur Y de leurs composantes non bihomogènes pour les deux actions naturelles de $\mathbb{C}^*$ sont localement finies et sont indexées par des nombres rationnels. On définit ainsi en tout point de Y les pentes algébriques de $\mathcal{M}$. Le théorème de l'indice [12] montre que pour un module holonome $\mathcal{M}$ le support du faisceau $Gr(s)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}))$ est contenu dans $I_Y(s)(\mathcal{M})$.

Les résultats principaux de cet article sont d'une part le théorème de comparaison des pentes, l'inclusion précédente est une égalité, et d'autre part le théorème d'intégralité, la fonction constructible $s.\chi(Gr(s)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}))$ est à valeurs entières. Les polygones de Newton de $\mathcal{M}$ sont à coordonnées entières. Le dernier résultat est l'analogue complexe à plusieurs variables du théorème de Hasse-Art en arithmétique conformément au "Principe" de Deligne.

La démonstration est purement géométrique et repose sur les propriétés de l'espace $T^*\Lambda$. On peut oublier la définition de Λ comme fibré conormal pour ne retenir que sa stucture de fibré de rang 1 sur Y. Alors $T^*\Lambda$ est muni de la structure symplectique homogène d'espace cotangent et d'une deuxième action de $\mathbb{C}^*$ induite par la structure de fibré de Λ. Si $r = p/q$, $(p, q) = 1$, est un nombre rationnel, on lui associe une action H_r de $\mathbb{C}^*$ combinaison pondérée par p et q des deux précédentes.

A tout cycle $\widetilde{\Sigma}$ de $T^*\Lambda$ lagrangien et homogène pour H_r, nous associons un cycle $\mathrm{Irr}_Y(\widetilde{\Sigma})$ homogène de T^*Y qui mesure le défaut de bihomogénéité de $\widetilde{\Sigma}$. Nous montrons alors que si le cycle $\widetilde{\Sigma}$ est positif, le cycle $\mathrm{Irr}_Y(\widetilde{\Sigma})$ est positif et ses multiplicités sont des multiples du dénominateur q. Il est nul si et seulement si $\widetilde{\Sigma}$ est bihomogène (i.e. homogène simultanément pour les deux actions de $\mathbb{C}^*$ sur $T^*\Lambda$).

Si $\mathcal{M}$ est un module holonome le cycle $\mathrm{Irr}_Y(\widetilde{\Sigma}_\Lambda(r)(\mathcal{M}))$ est le cycle caractéristique du faisceau $Gr(r)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}))$ ce qui redémontre de manière purement géométrique sa positivité.

Dans notre première approche de cette question nous avons montré un théorème de cauchy pour un module holonome $\mathcal{M}$ à valeurs dans les fonctions $\mathcal{O}_{X|Y}(s)$ pour tout $s \in [1, \infty]$ *simultanément* : en dehors d'une partie de dimension nulle de Y il passe en tout point une hypersurface non singulière telle que les solutions à valeurs dans les fonctions de classe de Gevrey d'ordre s de la restriction de $\mathcal{M}$ sont les restriction de solutions à valeurs dans les fonction de classe de Gevrey d'ordre s pour *tout* s [13]. Ceci entraîne que la filtration $\mathrm{Irr}_Y(s)(\mathcal{M})$ commute à la restriction assez générale. Ce résultat est utile dans l'étude analytique de l'irrégularité.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que Y est une hypersurface, les résultats se généralisent à toute sous-variété de X par un éclatement et peuvent également être microlocalisés.

Pour compléter ces résultats, il resterait à montrer que si $\mathcal{M}$ est régulier le long de Y, il est "1-spécialisable", c'est-à-dire que pour toute section u de $\mathcal{M}$ il existe un polynôme non nul b et un opérateur différentiel P *d'ordre inférieur ou égal au degré de* b tels que

$$(b(tD_t) + tP(x,t,D_x,tD_t))\, u = 0,$$

(x,t) est un système de coordonnées locales de X tel que t est une équation de Y.

Dans [6], Kashiwara et Kawaï ont montré que si $\mathcal{M}$ est régulier, ce qui équivaut à régulier le long de toute hypersurface de X, alors $\mathcal{M}$ est "1-spécialisable" le long de toute hypersurface mais leur démonstration est difficile ne s'applique pas au cas d'une seule hypersurface.

Conjecture : *Pour un module spécialisable le long d'une hypersurface, il y a* équivalence *entre être* 1*-spécialisable et ne pas avoir de pentes le long cette hypersurface.*

C'est là une question purement algébrique. Remarquons que pour un opérateur différentiel spécialisable son polygone de Newton est trivial si et seulement si il est 1-spécialisable et qu'un module spécialisable élémentaire est 1-spécialisable si et seulement si il n'a pas de pentes.

Lorsque le module n'est pas 1-spécialisable, les propriétés de croissance des solutions sont données par les polygones de Newton le long des composantes de la variété caractéristique du faisceau $\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M})$. Cette famille de polygones de Newton peut aussi être vue comme une fonction constructible sur Y à valeurs dans les polygones de Newton. Alors se pose naturellement le problème de la semi-continuité de cette fonction.

L'étude géométrique de l'irrégularité garde un sens sur un corps de base algébriquement clos quelconque. Les démonstrations se transposent sur un corps de caractéristique nulle. Par contre la géométrie symplectique au-dessus d'un corps de caractéristique positive présente des pathologies et des phénomènes nouveaux apparaissent.

A plus long terme les résultats de cet article doivent avoir des analogues arithmétiques à plusieurs variables aussi bien du point vue ℓ-adique que du point de vue p-adique. Seul le cas de la dimension un, déjà hautement non trivial est bien compris aujourd'hui. Le passage de la dimension un à la dimension supérieure semble nécessiter de nouvelles idées.

Les résultats de cet article ont été exposé dans [16] où le lecteur pourra trouver d'autres questions que nous avons rencontrées.

1 Étude géométrique de l'irrégularité

1.1 Fibré cotangent à un fibré vectoriel

Dans tout ce chapitre, on considère une variété lisse Y et un fibré vectoriel Λ de rang 1 sur Y. On se place soit dans le cadre de la géométrie algébrique sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle soit dans celui de la géométrie analytique complexe, alors k désigne le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On suppose Y de dimension $n-1$.

Rappelons que le fibré cotangent $T^*\Lambda$ à une variété Λ est muni canoniquement d'une structure symplectique homogène, c'est-à-dire d'une 2-forme symplectique Ω_Λ et d'une action H_0 de k^*. Cette dernière n'est autre que l'action de k^* sur les fibres $T^*\Lambda \to \Lambda$.

Lorsque la variété Λ est elle-même munie d'une action h de k^*, en particulier lorsque Λ est un fibré vectoriel, il apparaît une deuxième action H_∞ de k^* sur $T^*\Lambda$, à savoir l'inverse de la transposée de la différentielle de h.

Si $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est un système de coordonnées locales de Y, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ une trivialisation de Λ et (x, t, ξ, τ) les coordonnées correspondantes de $T^*\Lambda$, on a :

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda \quad &= \sum d\xi_i \wedge dx_i + d\tau \wedge dt \\ H_0(\lambda) \ &: (x,t,\xi,\tau) \longrightarrow (x,t,\lambda\xi,\lambda\tau) \\ H_\infty(\lambda) &: (x,t,\xi,\tau) \longrightarrow (x,\lambda t,\xi,\lambda^{-1}\tau) \end{aligned}$$

Un nombre rationnel non nul r s'écrit de manière unique $r = p/q$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux. On pose encore $\infty = 1/0$ et $0 = 0/1$ et on définit pour tout rationnel r une nouvelle action de k^* sur $T^*\Lambda$ par $H_r = H_\infty^p H_0^q$.

En coordonnées, on a donc :

$$H_r(\lambda) : (x,t,\xi,\tau) \longrightarrow (x, \lambda^p t, \lambda^q \xi, \lambda^{q-p}\tau)$$

Du fait de cette action supplémentaire, le fibré conormal $T^*\Lambda$ est muni d'une hypersurface canonique S_Λ que l'on peut définir de deux manières différentes. On peut tout d'abord considérer le champ d'Euler θ_Λ du fibré vectoriel Λ, c'est le champ de vecteur défini à une constante multiplicative près par $\theta_\Lambda f = kf$ pour les fonctions f homogènes de degré k dans les fibres de $\Lambda \to Y$. Un champ de vecteur est une section du fibré tangent donc une fonction sur le fibré cotangent à valeurs dans k et par définition $S_\Lambda = \theta_\Lambda^{-1}(0)$.

On peut aussi appliquer la 2-forme canonique Ω_Λ aux deux champs de vecteurs u_0 et u_∞ associés aux deux actions H_0 et H_∞. On obtient la même fonction que précédemment mais cette interprétation montre le résultat important suivant :

Proposition 1.1.1. *[7],[9],[8] Si Σ est un sous-variété de $T^*\Lambda$, lagrangienne et bihomogène (i.e. invariante par les deux actions de k^*), elle est contenue dans S_Λ.*

En effet, si Σ est lagrangienne, Ω_Λ est nulle sur l'espace tangent a la partie lisse de Σ et si elle est bihomogène, les champs de vecteurs u_0 et u_1 sont a valeurs dans ce tangent donc $\Omega_\Lambda(u_0, u_1) = 0$ sur Λ.

Si Λ est un fibré de rang 1 sur Y, on a un résultat plus précis. En effet, dans ce cas la projection $p : \Lambda \longrightarrow Y$ et le plongement $j : Y \hookrightarrow \Lambda$ définissent les applications suivantes :

$$\begin{aligned} T^*Y \xleftarrow{p_1} (T^*Y) \times_Y \Lambda \xrightarrow{j_1} T^*\Lambda \\ T^*Y \xleftarrow{p_2} (T^*\Lambda) \times_\Lambda Y \xrightarrow{j_2} T^*\Lambda \end{aligned}$$

En coordonnées locales ces applications sont :

$$\begin{aligned} p_1(x,\xi,t) &= (x,\xi) \qquad & j_1(x,\xi,t) &= (x,t,\xi,0) \\ p_2(x,\xi,\tau) &= (x,\xi) \qquad & j_2(x,\xi,\tau) &= (x,0,\xi,\tau) \end{aligned}$$

et on constate que S_Λ est la réunion de $j_1 p_1^{-1}(T^*Y)$ et de $j_2 p_2^{-1}(T^*Y)$. On a alors :

Lemme 1.1.2. *[11, Lemme 4.5.1.] Si Σ est une sous-variété lagrangienne de $T^*\Lambda$ contenue dans S_Λ, il existe deux variétés lagrangiennes $S_1(\Sigma)$ et $S_2(\Sigma)$ de T^*Y telles que :*

$$\Sigma = j_1 p_1^{-1} S_1(\Sigma) \cup j_2 p_2^{-1} S_2(\Sigma)$$

En particulier, cette propriété est vérifiée si Σ est lagrangienne bihomogène et alors $S_1(\Sigma)$ et $S_2(\Sigma)$ sont homogènes (au sens usuel).

Il suffit de se placer en coordonnées locales pour remarquer que Σ étant contenue dans $\{ t\tau = 0 \}$, une se ses composantes irréductible est contenue soit dans $\{ t = 0 \}$ soit dans $\{ \tau = 0 \}$. Puisqu'elle est lagrangienne, si elle est contenue dans $\{ t = 0 \}$, elle est invariante par le Hamiltonien de t, c'est-à-dire qu'elle est invariante par les translations en τ. De même, si elle est contenue dans $\{ \tau = 0 \}$, elle est invariante par les translations en t.

Considérons un cycle analytique ou algébrique $\widetilde{\Sigma}$ dont le support est une sous-variété lagrangienne bihomogène Σ de $T^*\Lambda$. Il s'écrit comme une somme $\widetilde{\Sigma} = \sum m_i [\Sigma_i]$ où les m_i sont des entiers et les Σ_i les composantes irréductibles de Σ. D'après le lemme, chaque composante est du type $j_1 p_1^{-1} S_1$ ou $j_2 p_2^{-1} S_2$ et la décomposition du lemme s'étend donc au cycles :

Corollaire 1.1.3. *Si $\widetilde{\Sigma}$ est un cycle analytique dont le support est une sous-variété lagrangienne bihomogène de $T^*\Lambda$, il existe deux cycles lagrangiens homogènes $S_1(\widetilde{\Sigma})$ et $S_2(\widetilde{\Sigma})$ de T^*Y tels que :*

$$\widetilde{\Sigma} = j_{1*} p_1^* S_1(\widetilde{\Sigma}) + j_{2*} p_2^* S_2(\widetilde{\Sigma})$$

1.2 Cônes tangents et filtrations

Nous allons utiliser des filtrations qui, dans le cas analytique ne sont pas définies sur tout le faisceau des fonctions holomorphes mais seulement sur des sommes de fonctions homogènes. Cette distinction est sans objet dans le cadre algébrique.

Soit donc dans le cas analytique, $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$. Pour $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on note $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ des fonctions qui sont homogènes de degré i pour H_0 et de degré j pour H_1 (donc de degré $pj + (q-p)i$ pour H_r) et

$$\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)} = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$$

On utilisera aussi le sous-faisceau $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ de $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ des fonctions qui sont polynomiales dans les fibres de $T^*\Lambda \to Y$. Si $\pi : T^*\Lambda \to Y$ et $j : Y \hookrightarrow T^*\Lambda$ sont les applications canoniques on a :

$$\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]} = \pi^{-1} j^{-1} \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$$

Naturellement, dans le cas algébrique, on a seulement le faisceau structural qui sera noté indifféremment $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$, $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ ou $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$.

Le faisceau $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ est gradué par H_∞ donc muni de deux filtrations :

$$F_k^+ \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)} = \bigoplus_{i-j\geq k} \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$$

$$F_k^- \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)} = \bigoplus_{i-j\leq k} \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$$

On vérifie facilement que ces deux filtrations sont "noethériennes" au sens de [20] avec la même démonstration que dans [10, proposition 3.2.3.]. En particulier, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$-module cohérent muni d'une bonne F^+ ou F^- filtration, c'est-à-dire d'une filtration localement de type fini, le gradué associé est un $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$-module cohérent.

Ces filtrations permettent de définir des cônes associés à une variété ou à un cycle :

Considérons tout d'abord le cas d'un sous-ensemble analytique ou algébrique irréductible Σ de $T^*\Lambda$ définit par des équations dans $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$. L'idéal de définition de Σ est :

$$\mathcal{I}_\Sigma = \{ f \in \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)} \mid f|_\Sigma = 0 \}$$

Il est muni des filtrations F^+ et F^- induites par celles de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ et on note $\mathcal{I}_\Sigma^\pm$ les gradués correspondants.

Plus explicitement, si f est une fonction de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$, elle s'écrit comme une somme finie $\sum f_{ij}$ avec f_{ij} fonction de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$. Si k_+ et k_- désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur de $i-j$ pour lesquelles $f_{ij} \not\equiv 0$ on pose :

$$\sigma^\pm(f) = \sum_{i-j=k_\pm} f_{ij}$$

et on a :

$$\mathcal{I}_\Sigma^\pm = \{ \sigma^\pm(f) \mid f \in \mathcal{I}_\Sigma \}$$

Rappelons qu'on associe à un $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$-module cohérent $\mathcal{M}$ un cycle analytique positif de la manière suivante : $Z = \cup Z_i$ étant la décomposition du support Z de $\mathcal{M}$ en composantes irréductibles, m_i la multiplicité de $\mathcal{M}$ sur Z_i, on associe à $\mathcal{M}$ le cycle

$$\tilde{Z} = \sum m_i [Z_i]$$

De cette manière, on associe aux modules quotients de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)} / \mathcal{I}_\Sigma^\pm$ deux cycles analytiques positifs que nous noterons $C^\pm([\Sigma])$. Leurs supports sont des sous-ensembles analytiques $C^\pm(\Sigma)$ de $T^*\Lambda$.

Si $\widetilde{\Sigma}$ est un cycle analytique de $T^*\Lambda$ dont le support est défini par des équations dans $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ on définit $C^\pm(\widetilde{\Sigma})$ par linéarité, c'est-à-dire que l'on écrit $\widetilde{\Sigma}$ sous la forme $\sum n_i[\Sigma_i]$ avec Σ_i irréductible et on pose :

$$C^\pm(\widetilde{\Sigma}) = \sum_i n_i C^\pm([\Sigma_i])$$

De même, si Σ est un sous-ensemble analytique de $T^*\Lambda$ défini par des équations dans $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ on définit $C^\pm(\Sigma)$ comme la réunion des ensembles correspondants pour toutes les composantes irréductibles de Σ.

Si Σ est le support de $\widetilde{\Sigma}$, le support de $C^\pm(\widetilde{\Sigma})$ est égal à $C^\pm(\Sigma)$, il est invariant par H_∞.

On peut aussi considérer un $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$-module cohérent $\mathcal{M}$ quelconque et le cycle associé $\widetilde{\Sigma}$. On munit$\mathcal{M}$ d'une bonne $F^\pm$-filtration et le gradué associé est un $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$-module cohérent qui définit le cycle $C^\pm(\widetilde{\Sigma})$.

Ces constructions sont très voisines de celle du cône tangent de Whitney. Celui-ci peut se définir de manière géométrique [22] ou par filtration comme ci-dessus en remplaçant F^+ par :

$$F^0_k\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)} = \bigoplus_{i\geq k} \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$$

(En fait dans ce cas la filtration est la filtration par l'ordre d'annulation sur Λ et se définit sur $\mathcal{O}_{T^*\Lambda}$ tout entier).

En général, le cône tangent à une sous-variété de X le long d'une variété Y est un sous-ensemble du fibré normal à Y dans X, mais ici $T^*\Lambda$ étant un fibré sur Λ, le fibré normal à Λ s'identifie à $T^*\Lambda$ lui-même et le cône tangent est définit dans $T^*\Lambda$.

On peut aussi considérer le "cône tangent à l'infini" en remplaçant F^0 par

$$F^\infty_k\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)} = \bigoplus_{i\leq k} \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$$

Lorsque l'on applique ces définitions aux variétés invariantes par l'action H_r on constate que, pour $r > 0$, $C^+(\Sigma)$ est le cône le long de Λ tandis que $C^-(\Sigma)$ est le cône tangent à l'infini. Lorsque $r < 0$, les rôles de C^+ et C^- sont inversés et pour $r = 0$, il n'y a pas de relation.

1.3 Cône tangent à une sous-variété lagrangienne.

Lemme 1.3.1. *Si Σ est un sous-ensemble lagrangien (algébrique ou analytique) de $T^*\Lambda$, son cône tangent le long de $\Lambda \subset T^*\Lambda$ est lagrangien.*

Démonstration. Rappelons que Whitney montre que si Σ est de dimension pure n, il en est de même de son cône tangent [22, 12.14.]. D'autre part, on peut considérer la déformation au cône normal de Λ dans $T^*\Lambda$ et appliquer les résultats de [21, Prop. 1.2.6.]. Cela montre que le cône tangent à Σ est isotrope donc lagrangien. □

Cette démonstration s'adapte facilement aux ensembles $C^\pm$ qui nous intéressent plus particulièrement ici :

Proposition 1.3.2. *Soit Σ un sous-ensemble de $T^*\Lambda$ défini par des équations dans $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$. Si Σ est lagrangien, alors $C^+(\widetilde{\Sigma})$ et $C^-(\widetilde{\Sigma})$ sont lagrangiens.*

Démonstration. On peut supposer que Σ est irréductible et se placer en coordonnées locales comme dans le paragraphe précédent. Montrons tout d'abord que $C^-(\Sigma)$ n'a pas de composante irréductible contenue dans $\{\, t = 0, \tau = 0\,\}$.

Supposons, en effet l'existence d'une telle composante et considérons un point x de sa partie lisse. Au voisinage de x, la fonction τ s'annule sur $C^-(\Sigma)$ donc il existe dans $\mathcal{I}_\Sigma$ une fonction de la forme :

$$f(x,t,\xi,\tau) = \tau^m + \sum_{(i,j)} f_{ij}(x,t,\xi,\tau)$$

avec $f_{ij} \in \mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$ et $j-i > m$. Une telle fonction définie au voisinage de $\{\, t = 0, \tau = 0\,\}$ se développe en série entière de t et τ :

$$f_{ij}(x,t,\xi,\tau) = \sum f_{\alpha,\beta}(x,\xi)t^\alpha\tau^\beta$$

Dans cette somme, on a $\beta-\alpha=j-i>m$ donc on peut factoriser τ^{m+1}. La fonction f s'écrit donc $\tau^m(1+\tau g(x,t,\xi,\tau))$ et, au voisinage de x, Σ est contenu dans $\{\,\tau=0\,\}$. Comme Σ est lagrangien il est alors invariant par les translations en t, donc avec les notations du lemme 1.1.2 de la forme $j_1p_1^{-1}S_1$. Il est alors égal à $C^-(\Sigma)$ ce qui contredit l'hypothèse.

On montrerait la même propriété pour $C^+(\Sigma)$ en utilisant la variable t à la place de τ. Nous pourrons donc supposer dans la suite que $t\neq 0$ ou $\tau\neq 0$.

Supposons que $t\neq 0$, alors une fonction de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}(i,j)$ s'écrit sous la forme $f(x,t,\xi,\tau)=t^{i-j}g(x,\xi,t\tau)$ tandis qu'une fonction de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ s'écrit comme un polynôme en t et t^{-1} à coefficients holomorphes en $(x,\xi,t\tau)$, les filtrations $F^\pm$ étant données par l'ordre en t. En effet,si

$$f(x,t,\xi,\tau)=\sum_{k_0\leq k\leq k_1} t^k g_k(x,\xi,t\tau)$$

on a

$$\sigma^-(f)=t^{k_0}g_{k_0}(x,\xi,t\tau)$$

Notons $\varphi: T^*\Lambda\longrightarrow T^*\Lambda$ l'application définie en coordonnées locales par $\varphi(x,t,\xi,\tau)=(x,t,\xi,t\tau)$ et $A=\varphi(\Sigma\cap\{t\neq 0\})$. On obtient $C^-(\Sigma)$ en prenant le cône tangent le long de $\{t=0\}$ de l'adhérence de $\bar{A}$ de A dans $T^*\Lambda$.

Si Σ est définie par un idéal $\mathcal{I}$, cela revient à considérer l'idéal $\mathcal{J}$ des fonctions de la forme $f(x,t,\xi,t^{-1}\sigma)$ pour $f\in\mathcal{I}$ qui sont holomorphes en (x,t,ξ,σ) au voisinage de $t=0$ puis à considérer la filtration suivant les puissances de t.

Comme $\bar{A}$ n'a pas de composante irréductible contenue dans $\{t=0\}$, ses composantes ont toutes la même dimension n que Σ. D'après [22, 12.14.], le cône tangent à $\bar{A}$ le long de $Z=\{t=0\}$ a la même dimension.

L'image par φ de la 2-forme canonique $d\xi\wedge dx+d\tau\wedge dt$ est bien définie pour t non nul et vaut $d\xi\wedge dx+t^{-1}d\sigma\wedge dt$ donc A est isotrope pour la forme $\Omega=td\xi\wedge dx+d\sigma\wedge dt$.

Notons L la déformation au cône normal de Z dans $T^*\Lambda$, $p: L\longrightarrow X$ et $p: L\longrightarrow k$ les projections canoniques. On peut munir L des coordonnées locales (x,ξ,t,σ,u) et dans ce cas les projections sont données par $p(x,\xi,t,\sigma,u)=(x,\xi,tu,\sigma)$ et $q(x,\xi,t,\sigma,u)=u$. La forme Ω définit une 2-forme relative sur L/k qui s'écrit en coordonnées $\Omega'=td\xi\wedge dx+d\sigma\wedge dt$.

Soit $\tilde{A}$ l'adhérence dans L de l'image inverse par p de $\bar{A}$. On a $p^{-1}(u)\cap\tilde{A}=\bar{A}$ si $u\neq 0$ et $p^{-1}(0)\cap\tilde{A}$ est le cône tangent à $\bar{A}$ le long de Z. Toutes ces fibres ont la même dimension et si $u\neq 0$ elles sont isotropes pour Ω', on peut donc appliquer [21, Prop. 1.2.6.] qui montre que $p^{-1}(0)\cap\tilde{A}$ est isotrope pour Ω'.

Si on prend l'image inverse du cône tangent par φ, cette image est isotrope pour la 2-forme canonique de $T^*\Lambda$ et de dimension n en dehors de $\{\,t=0\,\}$. Nous avons ainsi montré que $C^-(\Sigma)$ est lagrangien en dehors de $\{\,t=0\,\}$. On montrerait le même résultat pour $C^+(\Sigma)$ en remplaçant t par t^{-1} puis pour $C^\pm(\Sigma)$ aux points où $\tau\neq 0$ en remplaçant t par τ.

□

1.4 Positivité de l'irrégularité : le cas analytique

Une sous-variété Σ de $T^*\Lambda$ sera dite r-homogène ($r\in\mathbb{Q}$) si elle est invariante par H_r et définie par un idéal de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$, bihomogène si, de plus, elle est invariante par H_0 et H_∞ (donc par tout H_r). Un cycle sera dit r-homogène ou bihomogène si son support l'est.

Considérons un cycle r-homogène $\widetilde{\Sigma}$ de $T^*\Lambda$ et les cônes associés $C^{\pm}(\widetilde{\Sigma})$. Ces cônes sont homogènes pour H_∞ et aussi r-homogènes donc bihomogènes. Si on suppose de plus que $\widetilde{\Sigma}$ est lagrangien, ils sont lagrangiens d'après la proposition 1.3.2 et on peut définir les cycles $S_i(C^{\pm}(\widetilde{\Sigma}))$ pour $i = 1, 2$. Notant pour simplifier $C_i^{\pm}(\widetilde{\Sigma}) = S_i(C^{\pm}(\widetilde{\Sigma}))$ on a donc :

$$C^{\pm}(\widetilde{\Sigma}) = j_1 p_1^{-1} C_1^{\pm}(\widetilde{\Sigma}) + j_2 p_2^{-1} C_2^{\pm}(\widetilde{\Sigma})$$

Si $\widetilde{\Sigma}$ est un cycle positif il en est de même de chacun de ces quatre cycles.

Définition 1.4.1. Si $\widetilde{\Sigma}$ est un cycle lagrangien r-homogène de $T^*\Lambda$, on pose :

$$\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}) = C_2^-(\widetilde{\Sigma}) - C_2^+(\widetilde{\Sigma}) - C_1^-(\widetilde{\Sigma}) + C_1^+(\widetilde{\Sigma})$$

L'application d'irrégularité Irr_Λ définit donc un morphisme du groupe $Z_{(r)}(T^*\Lambda, lagr)$ des cycles lagrangiens r-homogènes de $T^*\Lambda$ dans le groupe $Z(T^*Y, lagr)$ des cycles lagrangiens homogènes de T^*Y :

$$Irr_\Lambda : Z_{(r)}(T^*\Lambda, lagr) \longrightarrow Z(T^*Y, lagr)$$

Le résultat principal du chapitre 1 est le théorème suivant qui montre que ce morphisme envoie les cycles positifs sur les cycles positifs et mesure la “non-bihomogénéité” des cycles r-homogènes :

Théorème 1.4.2. *Soit r un nombre rationnel qui s'écrit sous forme irréductible $r = p/q$ avec $q \geq 1$.*

Soit $\widetilde{\Sigma}$ un cycle lagrangien r-homogène positif de $T^*\Lambda$. Alors $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ est un cycle lagrangien positif de T^*Y à valeurs dans $q\mathbb{Z}$ et qui est nul si et seulement si $\widetilde{\Sigma}$ est bihomogène.

Ce théorème est vrai aussi bien dans le cadre algébrique que le cadre analytique. Nous ferons tout d'abord la démonstration dans le cas analytique et nous montrerons dans le paragraphe suivant comment l'adapter au cas algébrique.

Même dans le cas analytique, nous utiliserons ce théorème lorsque $\widetilde{\Sigma}$ est algébrique dans les fibres de $T^*\Lambda \longrightarrow Y$ donc a des équations dans $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ mais nous avons besoin de coefficients dans $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ pour pouvoir appliquer une transformation canonique au cours de la démonstration. Celle-ci est reportée à la fin du paragraphe car nous allons étudier auparavant le cas particulier où le cycle d'irrégularité à pour support le conormal à un point.

Nous aurons besoin de généraliser légèrement les définitions des paragraphes précédents en considérant une sous-variété lisse Z de Y et les fonctions définies sur $L = T^*\Lambda \times_Y Z$ au lieu de $T^*\Lambda$. En fait nous nous placerons en coordonnées locales et ces coordonnées seront choisies de sorte que Z soit définie par les équations $x_{p+1} = 0$,...,$x_{n-1} = 0$ dans Y.

Cela revient à considérer des fonctions holomorphes de $(x_1, \ldots, x_p, t, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \tau)$ pour un entier $p \leq n-1$, alors qu'auparavant on avait $p = n-1$.

Les définitions de 1.1 se généralisent sans modification au cas $p < n-1$ puisque les variables x_i sont toujours de poids 0. On considère en particulier le faisceau $\mathcal{O}_{(L)}(i,j)$ des fonctions holomorphes sur L qui sont homogènes de degré i pour H_0 et de degré j pour H_1 puis

$$\mathcal{O}_{(L)} = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{O}_{(L)}(i,j)$$

(Par contre, nous n'avons plus de structure symplectique et la propriété de décomposition du lemme 1.1.2 devra être mise dans les hypothèses.)

Soit φ l'application de L dans $M = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ définie en coordonnées par $\varphi(x,t,\xi,\tau) = (x,\xi,\sigma = t\tau,\tau)$. C'est un isomorphisme local en dehors de $\tau = 0$.

Soit Σ un germe de sous-variété de L en un point a de $L \cap \{\, t = \tau = 0 \,\}$ et Ξ son image par φ. La restriction de Ξ à $\tau \neq 0$ est une sous-variété définie sur un ouvert de $M^* = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ que l'on peut supposer de la forme $U \times V$ avec U ouvert de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ et V ouvert de $\mathbb{C}^*$.

Lemme 1.4.3. *Le germe Σ est défini par des équations qui sont des fonctions de $\mathcal{O}_{(L)}$ si et seulement si son image par φ est la restriction à $U \times V$ d'une sous-variété de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui est conique dans les variables (ξ,σ).*

Démonstration. Une fonction holomorphe définie au voisinage de a se développe en série de Taylor :

$$f(x,t,\xi,\tau) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2} f_{\alpha,\beta}(x,\xi) t^\alpha \tau^\beta$$

Si f est dans $\mathcal{O}_{(L)}(i,j)$, $f_{\alpha,\beta}$ est homogène de degré $\gamma = i - \alpha = j - \beta$ et la fonction f s'écrit :

$$f(x,t,\xi,\tau) = \tau^{j-i} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} f_\alpha(x,\xi)(t\tau)^\alpha$$

et la fonction $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} f_\alpha(x,\xi)\sigma^\alpha$ est homogène de degré i en (ξ,σ).

Notons $N = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathcal{O}_{(N)}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur N, sommes finies de fonctions homogènes en (ξ,σ).

Une fonction holomorphe définie au voisinage de a est donc une fonction de $\mathcal{O}_{(L)}$ si et seulement si elle s'écrit comme un polynôme en (τ,τ^{-1}) à coefficients dans $\mathcal{O}_{(N)}$.

Si un germe de sous-variété de L en a est défini par des équations de $\mathcal{O}_{(L)}$, son image par φ est donc bien la restriction d'une fonction sur $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Réciproquement le lemme de Chow montre qu'une sous-variété de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est algébrique en τ donc ses équations sont des polynômes en (τ,τ^{-1}) et la variété initiale a ses équations dans $\mathcal{O}_{(L)}$. □

Dans la proposition suivante, on fixe $p \in \mathbb{N}$, on définit la sous-variété Z de Y par les équations $\{\, x_{p+1} = 0,\ldots,x_{n-1} = 0 \,\}$ et la sous-variété Z' de Z par $\{\, x_p = 0 \,\}$. On note $L = T^*\Lambda \times_Y Z$ et $L' = T^*\Lambda \times_Y Z'$ les fibrés correspondants, $\pi : L \to L'$ la projection.

Pour $\varepsilon > 0$ on pose :

$$V_\varepsilon = \{\, (x,t,\xi,\tau) \in L \mid |x| < \varepsilon, |\xi| < \varepsilon|\xi_1|, |t\tau| < \varepsilon|\xi_1| \,\}$$

et V'_ε l'intersection de V_ε avec L'.

On se donne également un rationnel r qui s'écrit sous forme irréductible $r = p/q$ avec $q \geq 1$. Un sous-ensemble de L sera dit r-conique s'il est invariant par H_r.

Proposition 1.4.4. *Soit Σ un sous-ensemble analytique r-conique de L défini sur l'ouvert V_{ε_0} pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit. On suppose que Σ est défini par des équations dans $\mathcal{O}_{(L)}$.*

Si les cônes $C^+(\Sigma)$ et $C^-(\Sigma)$ sont contenus dans $\{\, x_p = 0 \,\}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de la projection π à $\Sigma \cap V_\varepsilon$ soit finie et propre.

Alors $\pi(\Sigma \cap V_\varepsilon)$ est un sous-ensemble analytique r-conique de L' défini sur l'ouvert V'_ε par des équations dans $\mathcal{O}_{(L')}$.

Démonstration. Par hypothèse, $C^+(\Sigma)$ est contenu dans $\{ x_p = 0 \}$ donc si on reprend les notations du paragraphe 1.1, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_p^N \in \mathcal{I}_\Sigma^+$ et donc il existe une fonction $f_+ \in \mathcal{I}_\Sigma$ telle que $\sigma^+(f_+) = x_p^N$. La fonction f_+ peut être choisie homogène pour H_r, elle s'écrit alors :

$$f_+(x,t,\xi,\tau) = x_p^N + \sum_{\substack{\gamma>\beta\geq 0 \\ q(\alpha+\gamma)+p(\beta-\gamma)=0}} a_{\alpha\beta\gamma}(x,\xi) t^\beta \tau^\gamma$$

avec $a_{\alpha\beta\gamma}$ homogène de degré α en ξ ou encore :

$$f_+(x,t,\xi,\tau) = x_p^N + \sum_{\gamma>\beta\geq 0} a_{\beta\gamma}(x,\xi/\xi_1) \left(\frac{t\tau}{\xi_1}\right)^\beta \left(\xi_1^{r-1}\tau\right)^{\gamma-\beta}$$

Remarquons que la relation $q(\alpha+\gamma) + p(\beta-\gamma) = 0$ entraîne que $\gamma - \beta$ est multiple de q (car p et q sont premiers entre eux) donc $(r-1)(\gamma-\beta)$ est un entier et l'expression ci-dessus de f_+ ne contient que des puissances entières (positives ou négatives) de ξ_1.

La fonction f_+ est une fonction holomorphe de x, ξ/ξ_1, $t\tau/\xi_1$ et $\xi_1^{p-q}\tau^q$ qui se met donc sous forme d'un polynôme de Weierstrass en x_p sur un domaine

$$W_{\varepsilon,\varepsilon'} = \{ (x,t,\xi,\tau) \in T^*\Lambda \mid |x| < \varepsilon, |\xi| < \varepsilon|\xi_1|, |t\tau| < \varepsilon|\xi_1|, |\tau| < \varepsilon'(|\xi_1|)^{1-r} \}$$

La projection π est donc finie et propre sur $\Sigma \cap W_{\varepsilon,\varepsilon'}$.

Remplaçant C^+ par C^-, on voit qu'il existe une fonction f_- de $\mathcal{I}_\Sigma$ telle que $\sigma^-(f_-) = x_p^{N'}$ et la fonction f_- s'écrit :

$$f_-(x,t,\xi,\tau) = x_p^{N'} + \sum_{\beta>\gamma\geq 0} a_{\beta\gamma}(x,\xi/\xi_1) \left(\frac{t\tau}{\xi_1}\right)^\gamma \left(\frac{t}{\xi_1^r}\right)^{\beta-\gamma}$$

et la projection π est finie et propre sur $\Sigma \cap W'_{\varepsilon,\varepsilon''}$ pour

$$W'_{\varepsilon,\varepsilon''} = \{ (x,t,\xi,\tau) \in T^*\Lambda \mid |x| < \varepsilon, |\xi| < \varepsilon|\xi_1|, |t\tau| < \varepsilon|\xi_1|, |t| < \varepsilon''(|\xi_1|)^r \}$$

En réduisant au besoin ε, on peut supposer $\varepsilon < \varepsilon'\varepsilon''$ et on a alors $V_\varepsilon = W_{\varepsilon,\varepsilon'} \cup W'_{\varepsilon,\varepsilon''}$ donc la restriction de la projection π à $\Sigma \cap V_\varepsilon$ est finie et propre. Alors $\pi(\Sigma \cap V_\varepsilon)$ est un sous-ensemble analytique r-conique de L' défini sur l'ouvert V'_ε.

Il reste à montrer qu'il est défini par des équations de $\mathcal{O}_{(L')}$ et pour cela nous allons utiliser le lemme 1.4.3. Si on reprend les notations de ce lemme on voit qu'il existe une variété Σ_1 de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dont l'intersection avec $U \times V$ est l'image par φ de Σ. Notons U' l'intersection de U avec $\{ x_p = 0 \}$ et π_1 la projection de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur $U' \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, notons encore φ' la restriction à L' de φ.

Comme $\pi_1 \circ \varphi$ est égal à $\varphi' \circ \pi$, il suffit de montrer que π_1 est finie et propre sur Σ_1. Dans ce cas, $\pi_1(\Sigma_1)$ est une sous-variété de $U' \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dont la restriction à $U' \times \mathbb{C}^*$ est égale à $\varphi'(\pi(\Sigma))$ et le lemme montre que $\pi(\Sigma)$ est définie par des équations de $\mathcal{O}_{(L')}$.

Plaçons-nous tout d'abord en dehors de $\tau = 0$, alors la fonction f_- s'écrit dans les coordonnées (x,ξ,σ,τ) :

$$f_-(x,t,\xi,\tau) = x_p^{N'} + \sum_{\beta>\gamma\geq 0} a_{\beta\gamma}(x,\xi/\xi_1) \left(\frac{\sigma}{\xi_1}\right)^\beta \left(\xi_1^{r-1}\tau\right)^{\gamma-\beta}$$

Cette fonction peut se mettre sous forme de Weierstrass au voisinage de $\sigma = 0$ et $\tau = \infty$. Par conséquent π_1 est finie et propre sur Σ_1 en dehors de $\tau = 0$. Au voisinage de $\tau = 0$ il suffit de remplacer f_- par f_+ pour conclure. □

Lemme 1.4.5. *Soit $\widetilde{\Sigma}$ un cycle analytique de L dont le support vérifie les hypothèses de la proposition 1.4.4. Alors*

$$C^{\pm}(\pi_* \widetilde{\Sigma}) = \pi_* C^{\pm}(\widetilde{\Sigma})$$

Démonstration. Nous ferons la démonstration pour C^+, le cas de C^- étant identique. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_{(L)}$-module cohérent qui définit le cycle $\widetilde{\Sigma}$. Puisque π est fini et propre sur Σ, le module $\pi_*\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{(L')}$-module cohérent.

Si $u_1, \ldots, u_N$ est un système local de générateurs de $\mathcal{M}$, le $\mathcal{O}_{(L')}$-module $\pi_*\mathcal{M}$ est engendré par une famille finie de générateurs de la forme $x_p^l u_k$.

Les filtrations définies par ces deux familles de générateurs sont les mêmes parce que x_p est d'ordre 0 pour la filtration. On obtient ainsi une bonne F^+-filtration de $\mathcal{M}$ considéré comme $\mathcal{O}_{(L)}$-module qui induit sur $\pi_*\mathcal{M}$ une bonne filtration de $\mathcal{O}_{(L')}$-module. Alors on a $\pi_* gr(\mathcal{M}) = gr(\pi_*\mathcal{M})$, d'où le résultat pour les cycles. □

Pour énoncer la proposition suivante, on conserve les notations de la proposition 1.4.4 et on suppose que le support Σ de $\widetilde{\Sigma}$ est de dimension pure n.

Pour $i = 1, 2$, on note $S_i = p_i^{-1}(T^*_{\{0\}}Y)$ les images inverses par les applications p_i du paragraphe 1.1 du conormal à 0 dans Y. En coordonnées on a donc :

$$S_1 = \{\, (x, t, \xi, \tau) \mid x = 0, \tau = 0 \,\} \text{ et } S_2 = \{\, (x, t, \xi, \tau) \mid x = 0, t = 0 \,\}$$

On suppose que chacun des cycles $C^{\pm}(\widetilde{\Sigma})$ se décompose en un cycle à support S_1 et un cycle à support S_2, c'est-à-dire sous la forme :

$$C^{\pm}(\widetilde{\Sigma}) = p_1^{\pm}[S_1] + p_2^{\pm}[S_2] \tag{1.4.1}$$

où les $p_i^{\pm}$ sont des entiers positifs ou nuls.

On peut définir l'irrégularité de $\widetilde{\Sigma}$ comme le nombre entier :

$$\mathrm{Irr}(\widetilde{\Sigma}) = p_2^- - p_2^+ - p_1^- + p_1^+$$

Proposition 1.4.6. $\mathrm{Irr}(\widetilde{\Sigma})$ *est un nombre entier positif multiple de q, s'il est nul Σ est contenu dans l'hypersurface canonique $\{\, (x, t, \xi, \tau) \mid t\tau = 0 \,\}$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'on peut se ramener au cas où le nombre p de variables x_i est égal à 0. En effet, le lemme 1.4.5 montre que si $\widetilde{\Sigma}$ vérifie l'hypothèse (1.4.1), alors il en est de même de $\pi_*\widetilde{\Sigma}$ et on a $\mathrm{Irr}(\widetilde{\Sigma}) = \mathrm{Irr}(\pi_*\widetilde{\Sigma})$. De plus, Σ est contenu dans l'hypersurface $\{\, t\tau = 0 \,\}$ si et seulement si $\pi_*\widetilde{\Sigma}$ l'est.

Il suffit donc de montrer le résultat pour $\pi_*\widetilde{\Sigma}$, c'est-à-dire pour $p - 1$. En itérant le procédé on se ramène à $p = 0$.

Lorsque $p = 0$, L est de dimension $n + 1$, donc le support Σ de $\widetilde{\Sigma}$ est une hypersurface de L. Une équation de Σ est une fonction de $\mathcal{O}_{(L)}$ qui s'écrit donc :

$$f(\xi, t, \tau) = \sum_{a \leq \gamma - \beta \leq b} f_{\alpha,\beta,\gamma}(\xi) t^{\beta} \tau^{\gamma}$$

avec $f_{\alpha,\beta,\gamma}(\xi)$ homogène de degré α en ξ. On peut supposer que f est r-homogène donc que $q(\alpha+\gamma)+p(\beta-\gamma)$ est une constante A.

Une telle équation est définie sur un ouvert

$$V_\varepsilon = \{\, (t,\xi,\tau) \in L \mid |\xi| < \varepsilon|\xi_1|, |t\tau| < \varepsilon|\xi_1| \,\}$$

et donc l'idéal $\mathcal{I}_\Sigma$ est engendré par une fonction unique de ce type sur V_ε.

On a supposé que $C^\pm(S) \subset \{\, t\tau = 0 \,\}$ donc $\sigma^\pm(f)$ est de la forme $u(\xi)t^\lambda\tau^\mu$ avec $u(\xi)$ inversible et f s'écrit :

$$f(\xi,t,\tau) = u(\xi)(t\tau)^{\beta_0}\tau^a + \sum_{a<\gamma-\beta<b} f_{\alpha,\beta,\gamma}(\xi)t^\beta\tau^\gamma + v(\xi)(t\tau)^{\beta_1}\tau^b$$

et on a $\mathrm{Irr}(S) = b-a$. C'est donc un entier positif qui est nul si et seulement si

$$f(\xi,t,\tau) = u(\xi)(t\tau)^{\beta_0}\tau^a$$

c'est-à-dire si et seulement si Σ est contenu dans $\{\, t\tau = 0 \,\}$.

De plus, si α_0 est l'homogénéité de u_0 et α_1 celle de u_1, les nombres $\alpha_0 = (r-1)a-\beta_0-A$ et $\alpha_1 = (r-1)b-\beta_1-A$ sont des entiers donc si $r \neq 1$ on a :

$$\mathrm{Irr}(S) = \frac{1}{r-1}(\alpha_1-\alpha_0+\beta_1-\beta_0) = q\frac{\alpha_1-\alpha_0+\beta_1-\beta_0}{p-q}$$

Comme ce nombre est un entier et que q et $p-q$ sont premiers entre eux, il est multiple de q. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.4.2.

Le cycle $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ est lagrangien homogène d'après la proposition 1.3.2 et le lemme 1.1.2. D'autre part, si $\widetilde{\Sigma}$ est bihomogène, $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ est nul car alors $C^+(\widetilde{\Sigma})$ et $C^-(\widetilde{\Sigma})$ sont égaux.

Nous allons montrer que pour chaque composante irréductible de $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$, la multiplicité est positive et multiple de q et que si cette multiplicité est nulle pour toutes les composantes, alors le cycle $\widetilde{\Sigma}$ est bihomogène.

Soit S_0 une composante irréductible de la réunion des supports des quatre cycles $C^\pm_{1,2}(\widetilde{\Sigma})$. Pour calculer la multiplicité, on peut se placer en un point générique de S_0 et donc supposer que S_0 est lisse et que le support de chacun des quatre cycles $C^\pm_{1,2}(\widetilde{\Sigma})$ est égal à S_0 où est vide au voisinage de ce point.

D'autre part, on remarque que le théorème est invariant par transformation symplectique homogène de T^*Y. Plus précisément, si on choisit une trivialisation de $\Lambda \simeq Y \times \mathbb{C}$, on a $T^*\Lambda \simeq T^*Y \times T^*\mathbb{C}$ et les transformations symplectiques homogènes de T^*Y conservent le faisceau $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$, la structure symplectique de $T^*\Lambda$ et les actions H_s de $\mathbb{C}^*$ sur $T^*\Lambda$.

Si S_0 n'est pas la section nulle de T^*Y, il existe (au voisinage du point générique) une transformation symplectique homogène de T^*Y qui transforme S_0 en le conormal à un point de Y.

Nous devons donc calculer la multiplicité dans le cas ou S_0 est la section nulle et celui où S_0 est le conormal à un point. Remarquons que cette multiplicité peut être nulle, ce qui signifie dans ce cas que S_0 n'est pas une composante du support de $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$.

Lorsque S_0 est le conormal à un point, on peut appliquer la proposition 1.4.6. On obtient que la multiplicité est positive et multiple de q et que si cette multiplicité est nulle alors la composante correspondante est contenue dans $S_\Lambda = \{ t\tau = 0 \}$. D'après le lemme 1.1.2, cette composante se décompose sous la forme

$$\Sigma = j_1 p_1^{-1} S_1(\Sigma) \cup j_2 p_2^{-1} S_2(\Sigma)$$

et comme Σ est r-homogène, cela implique que $S_1(\Sigma)$ et $S_2(\Sigma)$ sont homogènes et donc que Σ est bihomogène. Remarquons que l'on ne pouvait appliquer ce raisonnement dans la proposition 1.4.6 car, à cause de la récurrence sur p, on avait abandonné la structure symplectique.

Dans le cas où S_0 est la section nulle de T^*Y, la démonstration serait la même en remplaçant la projection π par $\pi' : (x,t,\xi,\tau) \longrightarrow (x,t,\tau)$. En fait elle est plus simple car si $C^-(\Sigma)$ est à support dans $\xi = 0$ il est immédiat que π' est propre globalement en (t,τ) donc $\pi'(\Sigma)$ est algébrique en (t,τ).

1.5 Positivité de l'irrégularité: le cas algébrique

Le théorème de positivité 1.4.2 est vrai dans un cadre purement algébrique. Dans ce paragraphe nous considérons une variété algébrique Y sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle k et Λ un fibré vectoriel de rang un sur Y. Nous allons démontrer le théorème 1.4.2 dans ce cas.

La question est locale. Soit Y' une sous-variété de Y et Λ' l'image inverse du fibré Λ. Considérons les diagrammes :

$$T^*\Lambda \xleftarrow{\omega} T^*\Lambda \times_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\rho} T^*\Lambda'$$
$$T^*Y \xleftarrow{\omega} T^*Y \times_Y Y' \xrightarrow{\rho} T^*Y'$$

Le premier diagramme est un diagramme de H_r-espacespour tout nombre rationnel r. Si le cycle $\widetilde{\Sigma}$ est H_∞-homogène, alors il est bihomogène et le cycle $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ est nul. Si le cycle $\widetilde{\Sigma}$ n'est pas H_∞-homogène il passe alors en dehors d'une partie de Y de dimension nulle une hypersurface Y' telle que le conormal $T^*_{\Lambda'}\Lambda$ et et le cycle $\widetilde{\Sigma}$ ne se coupent que le long de la section nulle de $T^*\Lambda$. Ceci implique que $T^*_{Y'}Y$ et les cycles $C^\pm_{1,2}\widetilde{\Sigma}$ ne se coupent que le long de la section nulle de T^*Y. Dans ces conditions on a alors l'égalité entre cycles de T^*Y':

$$\rho\omega^{-1}\,\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}) = \mathrm{Irr}_{\Lambda'}(\rho\omega^{-1}\widetilde{\Sigma}).$$

Pour montrer le théorème dans sa version algébrique, on se ramène par récurrence sur $\dim Y$, à calculer la multiplicité du cycle $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ le long de du conormal $T^*_{x_0}Y$ d'un point de Y. Cet argument remplace les transformations canoniques. Remarquons cependant que dans cette situation les transformations canoniques sont des transformations de Legendre partielles et gardent un sens sur tout corps de caractéristique nulle. Le lecteur choisira le point de vue qui lui convient.

Proposition 1.5.1. *Soit $\widetilde{\Sigma}$ un cycle lagrangien r-homogène positif de $T^*\Lambda$. Alors la multiplicité dans le cycle $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ de toute composante qui est le conormal à un point de Y est un entier positif qui est multiple du dénominateur q.*

La démonstration est parallèle à celle du cas analytique, le théorème de connexion et le Main Theorem de Zariski [2, §4.3.1 et §4.4.1] remplacent le théorème de préparation de Weierstrass. Nous rappelons ces résultats sous la forme que nous allons utiliser.

Théorème 1.5.2. *Soit $f : X \to Z$ un morphisme propre de variétés algébriques sur un corps k alors :*

1) *le morphisme f admet une factorisation de Stein*

$$f' \circ g : X \to Z' \to Z$$

où le morphisme f' est fini, g est un morphisme propre dont les fibres sont connexes,

2) *l'ensemble X' des points de X qui sont isolés dans leur fibre est un ouvert et la restriction de g à X' induit un isomorphisme sur un ouvert de Z'.*

Démonstration de la proposition 1.5.1. La question est locale sur Y. Nous pouvons supposer que $Y = \operatorname{Spec} A$ est un ouvert affine connexe assez petit au dessus duquel $T^*_{x_0}Y$ est la seule composante de $\operatorname{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ qui soit le conormal à un point. Nous pouvons supposer que $\Lambda = \operatorname{Spec} A[t]$, $T^*Y = \operatorname{Spec} A[\xi], \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ et $T^*\Lambda = \operatorname{Spec} A[t, \tau, \xi]$.

Soit $\bar{Y}$ l'adhérence de Y dans un espace projectif. Notons $Z = \operatorname{Spec} k[t, \tau, \xi]$, $X = \bar{Y} \times_k Z$ et π la projection $X \longrightarrow Z$ qui est un morphisme H_s-équivariant pour tout s. Nous pouvons supposer que Σ est irréductible. Soit $\bar{\Sigma}$ l'adhérence de Σ dans X. Nous notons encore par π le morphisme $\bar{\Sigma} \to Z$ induit par la projection π, qui est dons un morphisme H_r équivariant.

Considérons la factorisation de Stein du Théorème 1.5.2

$$\pi' \circ g : \bar{\Sigma} \longrightarrow Z' \longrightarrow Z$$

L'ensemble des points Σ' de Σ qui sont isolés dans leur fibre est ouvert en vertu du Théorème 1.5.2 et *est non vide* puisqu'il contient le point $(x_0, 0, 0, \xi)$ qui est isolé dans sa fibre en vertu des équations de Σ au dessus d'un voisinage de x_0. D'autre part Σ' est H_r homogène. Par irréductibilité l'adhérence de Σ' dans Z' est égale à Z'. D'où un morphisme fini

$$\bar{\Sigma}' \to Z$$

H_r-équivariant. En particulier l'image de $\bar{\Sigma}$ par la projection π est irréductible de dimension $\dim \bar{\Sigma} = n$. C'est donc une *hypersurface* H_r-homogène de l'espace affine Z.

Considérons le groupe de Grothendieck $K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_X))$ des $Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_X)$-modules cohérents filtré par le sous-groupe $F_l K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_X))$ engendré par les classes des faisceaux à support de dimension au plus l. Notons $Gr_l K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_X))$ le groupe gradué associé en degré l.

Soit $Z_l(X, bih)$ le groupe des cycles bihomogènes de X purement de dimension l. Le morphisme qui à une sous-variété irréductible C bihomogène associé la classe de $\mathcal{O}_C$ se prolonge en un morphisme de groupes [3]:

$$Z_l(X, bih) \to Gr_l K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_X))$$

qui est surjectif et fonctoriel pour les morphismes propres bihomogènes. En particulier le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z_l(X,bih) & \longrightarrow & Gr_l K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_X)) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ Z_l(Z,bih) & \longrightarrow & Gr_l K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_Z)) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont les images directes par un morphisme propre.

Considérons le faisceau cohérent $\pi_*\mathcal{O}_{\bar{\Sigma}}$ sur l'espace affine. Ses section globales forment un module de type fini sur l'anneau $k[t,\tau,\xi]$. On en déduit un morphisme :

$$Gr^{F\pm}(\pi_*\mathcal{O}_{\bar{\Sigma}}) \to \pi_* Gr^{F\pm}(\mathcal{O}_{\bar{\Sigma}}).$$

Les faisceaux précédents sont à support de dimension au plus n, ils définissent donc des éléments de $Gr_n K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_Z))$. D'autre part le noyau et le conoyau de ce morphisme sont portés par l'ensemble des points où le morphisme $\pi : \bar{\Sigma} \to Z$ n'est pas fini. Cet ensemble est de dimension au plus $n-1$. On a alors démontré le lemme:

Lemme 1.5.3. *On a une égalité dans le groupe $Gr_n K_0(Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_Z))$*

$$[Gr^{F^\pm}(\pi_*\mathcal{O}_{\bar{\Sigma}})]_n = [Gr^{F^\pm}(\pi_*\mathcal{O}_{\bar{\Sigma}})]_n$$

Notons S_1 l'ensemble des points $(x_0,t,0,\xi)$ et S_2 l'ensemble des points $(x_0,0,\tau,\xi)$ de X. Si on désigne par $C^\pm(\bar{\Sigma})$ le cycle associé à $Gr^{F^\pm}(\mathcal{O}_{\bar{\Sigma}})$ et par $p_1^\pm S_1 + p_2^\pm S_2$ son sous cycle porté par S_1, S_2 on a le lemme :

Lemme 1.5.4. *On a l'égalité $\pi_* C^\pm(\bar{\Sigma}) = \pi_*(p_1^\pm S_1 + p_2^\pm S_2)$ dans le groupe $Z_n(Z,bih)$.*

Démonstration. En effet toutes les composantes du cycle lagrangien $C^\pm(\bar{\Sigma})$ sont de dimension n. L'image par π d'une composante qui ne se projette pas sur un point de Y est de dimension au plus $n-1$ et donc son image dans le groupe $Z_l(Z,bih)$ est nulle. Si on note encore S_1 l'ensemble des points $(t,0,\xi)$ et S_2 l'ensemble des points $(0,\tau,\xi)$ des Z on a l'égalité :

$$\pi_* C^\pm(\bar{\Sigma}) = p_1^\pm S_1 + p_2^\pm S_2.$$

En vertu du lemme 1.5.3, le cycle $p_1^\pm S_1 + p_2^\pm S_2$ est composante du cycle associé à $Gr^{F^\pm}(\pi_*\mathcal{O}_{\bar{\Sigma}})$. Pour voir que $p_2^- - p_2^+ - p_1^- + p_1^+$ est un entier positif multiple du dénominateur q on est ramené au cas d'une hypersurface H_r homogène dont on sait à l'avance que ses cônes tangents sont contenus dans $t\tau = 0$, parce que c'est une question au point générique. On est ramené au même calcul que dans la situation analytique du paragraphe précédent et on obtient la proposition 1.5.1 et le théorème 1.4.2 algébrique. □

1.6 Transformation monoïdale.

Nous allons, dans ce paragraphe, généraliser les résultats précédents au cas d'un fibré vectoriel de rang quelconque ou d'une variété homogène en nous ramenant au cas précédent par un éclatement.

Soient Λ un fibré vectoriel complexe de rang q sur une variété lisse Y et P le fibré projectif associé à Λ, c'est-à-dire $P = (\Lambda - Y)/k^*$.

La transformée monoïdale de Λ est un fibré Λ' de rang 1 sur P muni d'un isomorphisme $(\Lambda' - P) \simeq (\Lambda - Y)$. On peut le définir par :

$$\Lambda' = \{ (\xi, \lambda) \in P \times \Lambda \mid \lambda \in \xi \}$$

Plus généralement, si Λ est une variété algébrique lisse sur un corps k ou analytique sur $k = \mathbb{C}$, sur laquelle k^* agit librement de manière algébrique ou analytique, on pose encore $P = \Lambda/k^*$ et on définit Λ' comme la réunion disjointe de Λ et de P. Alors Λ' a une structure naturelle de fibré de rang 1 sur P.

Les applications $H_r(\lambda)$ sont bien définies sur $T^*\Lambda$ et sont compatibles avec le plongement $T^*\Lambda \hookrightarrow T^*\Lambda'$. Si Σ est une sous-variété lagrangienne r-homogène de $T^*\Lambda$ son adhérence Σ' dans $T^*\Lambda'$ est encore lagrangienne r-homogène et on peut donc considérer $\mathrm{Irr}_\Lambda(\Sigma')$ qui est un cycle de T^*P.

Définition 1.6.1. Si $\widetilde{\Sigma}$ est un cycle analytique lagrangien r-homogène de $T^*\Lambda$, on définit son irrégularité $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ comme le cycle analytique lagrangien homogène de T^*P égal à $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}')$ où $\widetilde{\Sigma}'$ est le cycle de $T^*\Lambda'$ obtenu en prenant l'adhérence de chaque composante de $\widetilde{\Sigma}$.

Il est clair d'après la définition que le théorème 1.4.2 est encore vrai sans modification, c'est-à-dire que $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma})$ est un cycle lagrangien *positif* de T^*P à valeurs dans $q\mathbb{Z}$ et qui est nul si et seulement si $\widetilde{\Sigma}$ est bihomogène.

2 Pentes d'un $\mathcal{D}$-module.

2.1 Variétés et cycles micro-caractéristiques.

L'irrégularité d'un module holonome se calcule à l'aide de variétés micro-caractéristiques auxquelles nous allons appliquer les résultats précédents. Auparavant, rappelons quelques définitions.

Comme dans le paragraphe précédent, on considère une variété X analytique sur $k = \mathbb{C}$ ou algébrique sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle et une hypersurface lisse Y de X de fibré conormal $\Lambda = T^*_Y X$.

Suivant le cas, $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur X ou le faisceau structural de X. On note $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X à coefficients dans $\mathcal{O}_X$.

Le faisceau $\mathcal{D}_X|_Y$ des opérateurs définis au voisinage de Y est muni de deux filtrations canoniques. La première est la filtration usuelle par l'ordre des opérateurs que nous noterons $(\mathcal{D}_{X,m})_{m\geq 0}$ et la seconde est définie [5] par :

$$V_k\mathcal{D}_X = \{P \in \mathcal{D}_X|_Y / \forall j \in \mathbb{Z},\ \ P\mathcal{I}_Y^j \subset \mathcal{I}_Y^{j-k}\}$$

où $\mathcal{I}_Y$ est l'idéal de définition de Y et $\mathcal{I}_Y^j = \mathcal{O}_X$ si $j \leq 0$.

Si r est un nombre rationnel supérieur à 1, d'écriture irréductible $r = p/q$ avec $p > q \geq 1$, on définit les filtrations F_r :

$$F_r^k\mathcal{D}_X = \sum_{(p-q)m+qn=k} \mathcal{D}_{X,n} \cap V_m\mathcal{D}_X$$

Le gradué associé $gr_{F_r}\mathcal{D}_X$ est isomorphe au faisceau d'anneaux $\pi_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ [10].

Dans un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ de X tel que $Y = \{\, (x,t) \in X \mid t = 0 \,\}$, un opérateur $P \in \mathcal{D}_X|_Y$ s'écrit :

$$P(x, t, \partial_x, \partial_t) = \sum p_{\alpha kl}(x) t^l \partial_t^k \partial_x^\alpha$$

et il est dans $F_r^N \mathcal{D}_X$ si $p(k-l) + q(|\alpha| + l) \leq N$ quand $p_{\alpha kl} \not\equiv 0$.

Si $\Lambda = \{\, (x, t, \xi, \tau) \in T^*X \mid \xi = 0, \tau = 0 \,\}$ et si $T^*\Lambda$ est muni des coordonnées (x, τ, x^*, τ^*), si $P = \sum p_{\alpha kl}(x) t^l \partial_t^k \partial_x^\alpha$ est un opérateur de $F_r^N \mathcal{D}_X$, alors la fonction

$$\sigma_r(P) = \sum_{p(k-l)+q(|\alpha|+l)=N} p_{\alpha kl}(x) (\tau^*)^l (-\tau)^k (x^*)^\alpha$$

est bien définie sur $T^*\Lambda$ (i.e. est indépendante des coordonnées locales) et l'isomorphisme entre $gr_{F_r}\mathcal{D}_X$ et $\pi_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ est donné par les fonctions $\sigma_r(P)$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent défini au voisinage de Y. Une bonne F_r-filtration de $\mathcal{M}$ est, par définition, une filtration sur $\mathcal{M}$ compatible avec la filtration $F_r\mathcal{D}_X$ et localement de type fini. On montre dans [10] que le gradué associé à une bonne F_r-filtration est un $gr_{F_r}\mathcal{D}_X = \pi_*\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ module cohérent qui définit un cycle analytique $\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ sur $T^*\Lambda$.

Ce cycle est indépendant du choix de la bonne filtration, c'est le cycle micro-caractéristique de type (r) de $\mathcal{M}$, son support $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ est la variété micro-caractéristique, qui est, par définition, r-homogène.

Si on est dans le cadre algébrique ou si, dans le cadre analytique on suppose que X est un fibré vectoriel sur Y et que les opérateurs sont polynômiaux dans les fibres de $X \to Y$, on peut étendre ces définitions à tous les rationnels r. Nous renvoyons à [10] pour les détails.

On est donc dans la situation du paragraphe 1.1, et on peut considérer les cônes $C^\pm$ associés à $\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$, suivant [10] on les note :

$$C^+(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})) = \widetilde{Ch}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}), \qquad C^-(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})) = \widetilde{Ch}_{\Lambda\{r\}}(\mathcal{M}) \tag{2.1.1}$$

Les objets que nous venons de définir sont en nombre fini pour un module donné :

Théorème 2.1.1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent défini au voisinage de Y. Localement sur Y, il y a seulement un nombre fini de variétés $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ distinctes.*

Ce théorème a été montré dans le cadre analytique complexe dans [10, théorème 3.4.1.]. Une autre démonstration a été donnée dans [18, théorème A.2.1.] qui est encore valable dans le cadre algébrique.

Il existe donc une suite finie de rationnels, $-\infty < r_1 < \cdots < r_N < +\infty$, telle que $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ est indépendant de r sur chacun des intervalles ouverts définis par cette suite (dans le cadre analytique sans hypothèse supplémentaire, la suite commence à $r_1 > 1$). Si la variété ne dépend pas de $r \in]r_i, r_{i+1}[$, elle est r-homogène pour r dans cet intervalle donc pour tout r rationnel, autrement dit elle est bihomogène. Il apparaît donc deux familles finies de variétés micro-caractéristiques $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$, celles qui correspondent aux indices

$r_1, \dots r_N$ et celles qui correspondent aux intervalles ouverts définis par ces indices et sont bihomogènes.

Si r n'est pas l'un des indices r_i, on a $\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}) = \widetilde{Ch}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}) = \widetilde{Ch}_{\Lambda\{r\}}(\mathcal{M})$ (car $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ est bihomogène), tandis que si r est un de ces indices on a encore $\widetilde{Ch}_{\Lambda\{r\}}(\mathcal{M}) = \widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r+\varepsilon)}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{Ch}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}) = \widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r-\varepsilon)}(\mathcal{M})$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Définition 2.1.2. Pour nombre rationnel $r > 1$, $I_{Y(r)}(\mathcal{M})$ est l'adhérence dans Y de la projection par $T^*\Lambda \longrightarrow Y$ de la réunion des composantes irréductibles non bihomogènes de $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$.

On dit que r est une *pente algébrique* de $\mathcal{M}$ en $y \in Y$ si $y \in I_{Y(r)}(\mathcal{M})$.

D'après le théorème 2.1.1, l'ensemble des pentes algébriques est localement fini sur Y. D'autre part, $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ étant algébrique dans les fibres de $T^*\Lambda \longrightarrow Y$, $I_{Y(r)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique fermé de Y.

Précisons encore que la notion de pente algébrique définie ici est légèrement différente de la notion de pente ou d'indice critique considérée dans [10] ou [12]. En effet dans ces articles, la notion de pente était relative à un ouvert de $T^*\Lambda$.

Si $\mathcal{M}$ est un module holonome, alors les variétés $\Sigma_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ donc aussi les variétés $Ch_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ et $Ch_{\Lambda\{r\}}(\mathcal{M})$ sont lagrangiennes [10, Corollaire 4.1.2.] et le théorème 1.4.2 s'applique :

Corollaire 2.1.3. *Soit $\mathcal{M}$ est un module holonome et soit r un nombre rationnel qui s'écrit sous forme irréductible $r = p/q$ avec $q \geq 1$.*

L'ensemble $I_{Y(r)}(\mathcal{M})$ est égal à la projection sur Y du support de $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$. Celui-ci est un cycle lagrangien positif de T^*Y à valeurs dans $q\mathbb{Z}$.

2.2 Irrégularité et Polygone de Newton.

Le polygone de Newton est défini habituellement pour un opérateur [17] [10]. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ à sommets entiers. Dans le cas d'une variété analytique complexe de dimension 1, il détermine la croissance et l'indice des solutions [17].

Ce polygone se présente sous la forme de la figure 1 dans le cas algébrique. Lorsque au moins un des coefficients de l'opérateur n'est pas un polynôme, toutes ses pentes sont positives et il se termine à droite par une demi-droite verticale.

La famille des cycles d'irrégularité $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ nous permet de généraliser cette définition pour un module holonome en dimension quelconque et le corollaire 2.1.3 va nous assurer qu'il a des propriétés analogues à celui d'un opérateur.

Le polygone de Newton est déterminé à une translation près par la suite de ses pentes et pour chacune d'elle par la hauteur du segment correspondant.

Donnons nous en effet le point le plus bas de ce polygone, que nous noterons (i_∞, k_∞), une suite de rationnels $-\infty < r_1 < \cdots < r_N < +\infty$ (cas algébrique) ou $1 < r_1 < \cdots < r_N < +\infty$ (cas analytique) et pour chacun d'eux un nombre $\varphi(r_k)$. On définit pour $l = 1 \dots N$ la suite de points :

$$i_l = i_\infty + \sum_{l \leq \alpha \leq N} (r_\alpha - 1)\varphi(r_\alpha) \qquad k_l = k_\infty + \sum_{l \leq \alpha \leq N} \varphi(r_\alpha)$$

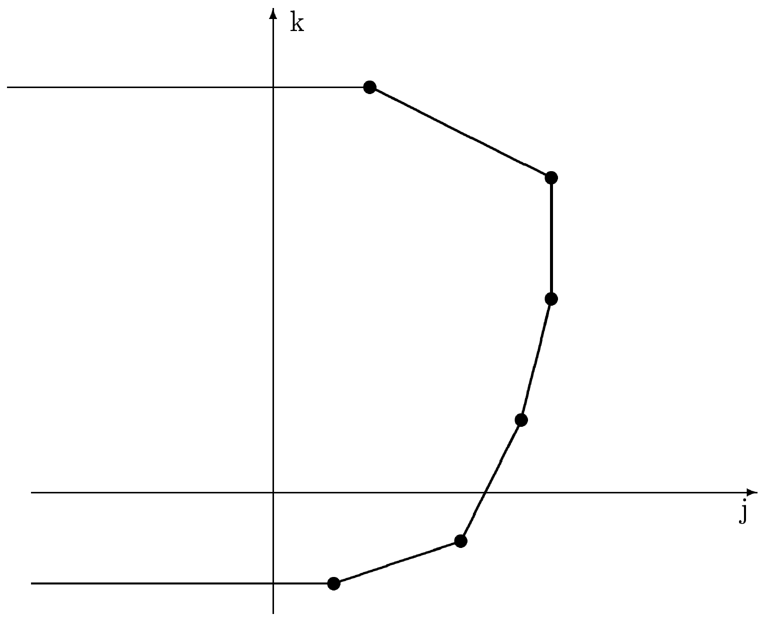

FIG. 1 – *Polygone de Newton "complet"*

On obtient ainsi les sommets du polygone, il suffit de les joindre dans l'ordre pour obtenir une suite de segments de pentes $1/(r_l - 1)$ et de hauteurs $\varphi(r_l)$.

Étant donnés une hypersurface Y de X et un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ au voisinage de Y, on considère la réunion (finie) des supports des cycles lagrangiens $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ pour $r \in]1, +\infty[$. C'est un sous-ensemble analytique lagrangien homogène de T^*Y que nous noterons $\mathfrak{S}_Y(\mathcal{M})$. Pour chaque composante irréductible de $\mathfrak{S}_Y(\mathcal{M})$, on note φ la fonction qui a r associe la multiplicité de $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ le long de cette composante. Cette fonction est nulle sauf pour un nombre fini de valeurs de r donc définit une suite r_l et les nombres $\varphi(r_l)$.

Il reste à déterminer le point (i_∞, k_∞). Ce choix est un peu arbitraire. On pourrait prendre $(0,0)$, mais si on veut retrouver le cas de la dimension 1 on choisit de prendre pour i_∞ la multiplicité de $S_2(\widetilde{Ch}_{\Lambda(\infty)}(\mathcal{M}))$ et pour k_∞ celle de $S_1(\widetilde{Ch}_{\Lambda(\infty)}(\mathcal{M})) - S_2(\widetilde{Ch}_{\Lambda(\infty)}(\mathcal{M}))$.

Rappelons que d'après [11], $S_2(\widetilde{Ch}_{\Lambda(\infty)}(\mathcal{M}))$ est le cycle caractéristique de $\Phi(\mathcal{M})$ (module des cycles évanescents de $\mathcal{M}$) et $S_1(\widetilde{Ch}_{\Lambda(\infty)}(\mathcal{M}))$ celui de $\Psi(\mathcal{M})$ (cycles proches).

Ayant, pour chaque composante irréductible de $\mathfrak{S}_Y(\mathcal{M})$, un point (i_∞, k_∞) et une fonction $\varphi(r)$, on définit suivant la méthode donnée plus haut un polygone de Newton.

Le "polygone de Newton de $\mathcal{M}$ le long de Y" est donc la donnée d'un sous-ensemble analytique lagrangien homogène $\mathfrak{S}_Y(\mathcal{M})$ de T^*Y et pour chaque composante irréductible de cet ensemble d'un polygone de Newton, c'est-à-dire d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

Le corollaire 2.1.3 assure que la fonction $\varphi(r)$ est positive et que $\varphi(r)$ et $(r-1)\varphi(r)$

sont des entiers, il se se traduit donc de la manière suivante :

Corollaire 2.2.1. *Le polygone de Newton est convexe et ses sommets sont à coordonnées entières.*

Si $\mathfrak{S}$ est un sous-ensemble lagrangien homogène de T^*Y, c'est une réunion d'ensembles $T^*_{Y_j}Y$ où les Y_j sont des sous-ensembles algébriques ou analytiques de Y et $T^*_{Y_j}Y$ l'adhérence du conormal à la partie régulière de Y_j.

Il existe donc une stratification $Y = \cup Y_j$ telle que

$$\mathfrak{S} = \cup T^*_{Y_j}Y$$

et que les composantes irréductibles de $\mathfrak{S}_Y(\mathcal{M})$ soient précisément les ensembles $T^*_{Y_j}Y$. On peut donc considérer le polygone de Newton de $\mathcal{M}$ le long de Y comme la donnée d'un polygone de Newton le long de chaque strate Y_j.

Pour chaque valeur de r, on peut lire sur ce polygone le cycle positif $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$: la hauteur du segment de pente $1/(r-1)$ du polygone de Newton en un point est égal à la multiplicité de la strate correspondante dans $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$.

Par définition, si $X = \mathbb{C}$ et $Y = \{0\}$, le polygone de Newton associé au point à Y est le polygone de Newton de Ramis.

En résumé, nous avons donc associé à un $\mathcal{D}_X$-module holonome défini au voisinage de Y deux objets équivalents, son polygone de Newton et la famille (finie) $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ de cycles positifs de T^*Y.

Les cycles $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ étant invariants par dualité, il en est de même du polygone de Newton :

Proposition 2.2.2. *Le polygone de Newton du dual d'un module holonome est égal au polygone de Newton de ce module.*

Il reste à résoudre un cetain nombre de questions importantes comme le comportement du polygône par image directe ou inverse et surtout les propriétés de semi-continuité du polygône de Newton lorsque l'on change de strate. Une réponse partielle à ces problèmes sera donnée dans [13].

Nous allons voir dans la suite que, comme en dimension 1, ce polygone donne la croissance des solutions et leur indice lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$.

2.3 Hyperfonctions holomorphes

Pour étudier l'irrégularité d'un système d'équations, il est classique de comparer les solutions formelles aux solutions convergentes. On peut aussi regarder les solutions "hyperfonctions holomorphes". Ce point de vue est le dual du précédent, il a l'avantage de pouvoir se microlocaliser. Nous allons rappeler brièvement la définition de ces faisceaux.

On considère une hypersurface lisse Y d'une variété analytique complexe X et on note $\mathcal{O}_{X|Y}$ la restriction à Y du faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X et $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ son complété formel le long de Y.

Si dans une carte locale $Y = \{(x,t) \in X \mid t = 0\}$, une section de $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ s'écrit $u = \sum_{n\geq 0} a_n(x)t^n$ et pour tout $r > 1$ on lui associe la série

$$\varphi_r(u) = \sum_{n\geq 0} a_n(x)t^n \,/(n!)^{r-1}$$

On définit alors $\mathcal{O}_{X|Y\{r\}}$ comme le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ des éléments pour lesquels la série $\varphi_r(u)$ est convergente et $\mathcal{O}_{X|Y(r)}$ comme celui des éléments pour lesquels la série $\varphi_r(u)$ a un rayon de convergence infini.

Par définition $\mathcal{O}_{X|Y} = \mathcal{O}_{X|Y\{1\}}$ et on note $\mathcal{O}_{X|Y(\infty)} = \mathcal{O}_{X|Y\{\infty\}} = \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$.

Le faisceau des hyperfunctions holomorphes de [19] est le faisceau de cohomologie de $\mathcal{O}_X$ à support dans Y, c'est-à-dire $\mathcal{B}^\infty_{Y|X} = \mathcal{H}^1_Y(\mathcal{O}_X)$. Si j est le morphisme de plongement $X - Y \hookrightarrow X$, le faisceau $\mathcal{B}^\infty_{Y|X}$ est donc le quotient $j_*j^{-1}\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X$ des fonctions ayant une singularité sur Y par les fonctions holomorphes.

Si on remplace les fonctions à singularités essentielles par le faisceau $\mathcal{O}_{X[*Y]}$ des fonctions méromorphes à pôles sur Y on obtient le faisceau de cohomologie algébrique $\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X[*Y]}/\mathcal{O}_X$.

Pour tout réel $r > 1$, on désigne par $\mathcal{B}_{Y|X(r)}$ le sous-faisceau de $\mathcal{B}^\infty_{Y|X}$ image des fonctions de $j_*j^{-1}\mathcal{O}_X$ qui sont majorées par une fonction $C_0 \exp(Ct^{\frac{1}{r-1}})$ où C et C_0 sont des constantes positives et t une équation de Y.

De même, $\mathcal{B}_{Y|X\{r\}}$ est l'image des fonctions qui, pour tout $\varepsilon > 0$, sont majorées par une fonction $C_\varepsilon \exp(\varepsilon t^{\frac{1}{r-1}})$.

On note encore $\mathcal{B}_{Y|X(\infty)} = \mathcal{B}_{Y|X}$ et $\mathcal{B}_{Y|X\{1\}} = \mathcal{B}^\infty_{Y|X}$. On obtient ainsi une famille de $\mathcal{D}_X$-modules décroissante en $r \geq 1$:

$$\mathcal{B}_{Y|X} \subset \mathcal{B}_{Y|X\{r\}} \subset \mathcal{B}_{Y|X(r)} \subset \mathcal{B}^\infty_{Y|X}$$

Nous renvoyons à [10] pour plus de détails et nous allons à présent rappeler un résultat de [12].

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche quelconque, le complexe des solutions de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{F}$ est, par définition :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{M},\mathcal{F}) = \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$$

Les faisceaux de cohomologie de ce complexe sont les faisceaux $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$.

On dit que $\mathrm{Sol}(\mathcal{M},\mathcal{F})$ est à cohomologie constructible si les faisceaux $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})$ sont constructibles c'est-à-dire localement constants sur une stratification de X et de dimension finie en tout point comme $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On peut alors considérer son *indice* :

$$\chi(\mathcal{M},\mathcal{F})_x = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{F})_x$$

Comme nous l'avons rappelé précédemment, un un sous-ensemble analytique lagrangien homogène Σ de T^*X est une réunion d'ensembles $T^*_{X_j}X$ où les X_j sont des sous-ensembles analytiques de X.

Tout cycle $\widetilde{\Sigma}$ de support Σ peut s'écrire :

$$\widetilde{\Sigma} = \sum_j m_j \left[T^*_{X_j} X\right] \qquad \text{avec } m_j \in \mathbb{Z}$$

L'obstruction d'Euler locale de $\widetilde{\Sigma}$ est une fonction sur X définie par :

$$E_{\widetilde{\Sigma}}(x) = \sum_j m_j (-1)^{\operatorname{codim} X_j} E_{X_j}(x)$$

où $E_{X_j}(x)$ est l'obstruction d'Euler locale de X_j en x. (voir [1] pour plus de détails).

L'obstruction d'Euler ainsi définie établit une bijection entre les cycles lagrangiens de T^*X et les fonctions constructibles de X. Elle est additive mais il faut prendre garde au fait que l'obstruction d'un cycle positif n'est pas une fonction positive au sens usuel.

Kashiwara a démontré dans [4] que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome, alors le complexe $\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est à cohomologie constructible et son indice est donné par la formule :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_x = E_{\widetilde{Ch}(\mathcal{M})}(x)$$

où $\widetilde{Ch}(\mathcal{M})$ est le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$.

On a un résultat analogue pour les hyperfonctions holomorphes :

Théorème 2.3.1. *[12, Corollaire 4.3.2.] Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et Y une hypersurface de X.*

Pour tout r, les complexes $\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X^{(r)}})$ et $\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r\}})$ sont à cohomologie constructible.

Si r_{k-1} et r_k sont deux pentes algébriques consécutives de $\mathcal{M}$, on a pour tout r tel que $r_{k-1} < r < r_k$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X^{(r_k)}}) &= \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X^{(r)}})\\ &= \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r\}}) = \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r_{k-1}\}})\end{aligned}$$

En tout point $x \in Y$ et pour tout $r \in [1, +\infty]$ on a :

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X^{(r)}})_x &= E_{\widetilde{Ch}_{\Lambda^{(r)}}(\mathcal{M})}(x)\\ \chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r\}})_x &= E_{\widetilde{Ch}_{\Lambda\{r\}}(\mathcal{M})}(x)\end{aligned}$$

De plus on remarque [12, corollaire 4.3.4.] que, $\mathcal{M}$ étant holonome, le cycle $\widetilde{Ch}_{\Lambda^{(r)}}(\mathcal{M})$ est lagrangien donc se décompose suivant le lemme 1.2.1. sous la forme

$$\widetilde{Ch}_{\Lambda^{(r)}}(\mathcal{M}) = j_1 p_1^{-1} S_1(\widetilde{Ch}_{\Lambda^{(r)}}(\mathcal{M})) + j_2 p_2^{-1} S_2(\widetilde{Ch}_{\Lambda^{(r)}}(\mathcal{M}))$$

Lemme 2.3.2. *Si un cycle lagrangien bihomogène de $T^*\Lambda$ se décompose sous la forme $\widetilde{\Sigma} = j_1 p_1^{-1} S_1 + j_2 p_2^{-1} S_2$, son obstruction d'Euler est égale à :*

$$\begin{aligned}E_{\widetilde{\Sigma}}(x) &= E_{S_1}(x) - E_{S_2}(x) && \text{si } x \in Y\\ &= E_{S_1}(x) && \text{si } x \in p_1^{-1}(T^*Y) - Y\\ &= -E_{S_2}(x) && \text{si } x \in p_2^{-1}(T^*Y) - Y\\ &= 0 && \text{si } x \notin S_{T^*\Lambda}\end{aligned}$$

Proof. Par linéarité il suffit de considérer le cas ou $\widetilde{\Sigma} = [T^*_{\Sigma_0}\Lambda]$.

Reprenons les notations du paragraphe 1.1 et supposons tout d'abord que $\widetilde{\Sigma}$ est de la forme $j_1 p_1^{-1} S_1$. Cela signifie que $\Sigma_0 = p^{-1} Y_0$ pour une sous-variété Y_0 de Y et $S_1 = T^*_{Y_0} Y$. On a alors, par définition de l'obstruction d'Euler locale, $E_{\Sigma_0} = E_{Y_0}$ et puisque Σ_0 et Y_0 ont même codimension :

$$E_{\widetilde{\Sigma}} = (-1)^{\operatorname{codim} \Sigma_0} E_{\Sigma_0} = (-1)^{\operatorname{codim} Y_0} E_{Y_0} = E_{S_1}$$

Lorsque $\widetilde{\Sigma}$ est de la forme $j_2 p_2^{-1} S_2$, on a $\Sigma_0 = j(Y_0)$, le raisonnement est le même que précédemment mais la codimension de Σ_0 est égale à celle de Y_0 augmentée de 1 et il apparaît donc un changement de signe. $\square$

On obtient donc :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X(r)})_x = E_{\widetilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})}(x) \quad = E_{S_1(\widetilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M}))}(x) - E_{S_2(\widetilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M}))}(x) \qquad (2.3.1)$$

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r\}})_x = E_{\widetilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})}(x) \quad = E_{S_1(\widetilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M}))}(x) - E_{S_2(\widetilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M}))}(x) \qquad (2.3.2)$$

et donc d'après la définition 1.4.1 et les formules (2.1.1) :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X(r)}) - \chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r\}}) = E_{\operatorname{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_\Lambda(r)(\mathcal{M}))} \qquad (2.3.3)$$

Définition 2.3.3. Pour $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$, et $y \in Y$, la fonction d'irrégularité de type r de $\mathcal{M}$ le long de Y est la fonction sur Y définie par :

$$\begin{aligned} \operatorname{irr}_{(r)}(\mathcal{M})_y &= \chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X(r)})_y - \chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r\}})_y \\ &= \chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y(r)})_y - \chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y\{r\}})_y \end{aligned}$$

et la fonction d'irrégularité de $\mathcal{M}$ est :

$$\operatorname{irr}_Y(\mathcal{M}) = \sum_{r>1} \operatorname{irr}_{Y(r)}(\mathcal{M})$$

Avec cette définition, les résultats que nous venons d'obtenir s'écrivent :

Théorème 2.3.4.

1)L'irrégularité $\operatorname{irr}_{(r)}(\mathcal{M})$ *du module* $\mathcal{M}$ *est une fonction constructible égale à l'obstruction d'Euler locale du cycle* $\operatorname{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$.

2) Le cycle $\operatorname{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ *est un cycle analytique lagrangien homogène positif de* T^*Y.

3) La fonction $r\operatorname{irr}_{(r)}(\mathcal{M})$ *est à valeurs entières.*

Démonstration. Le point 1) vient d'être démontré et les points 2) et 3) se déduisent immédiatement du théorème 1.4.2. $\square$

Ce résultat montre que $\operatorname{irr}_{(r)}(\mathcal{M})$ est nul si r n'est pas une pente de $\mathcal{M}$ et en particulier que $\operatorname{irr}(\mathcal{M}) = \sum_{r>1} \operatorname{irr}_{(r)}(\mathcal{M})$ est une somme finie. De plus, si $\operatorname{irr}_{(r)}(\mathcal{M})$ n'est pas nul, r est un nombre *rationnel.*

On a des résultats identiques pour le complété formel des fonctions holomorphes en remplaçant $\mathcal{B}_{Y|X\{r\}}$ par $\mathcal{O}_{X|Y(r)}$ et en changeant le signe, c'est-à-dire [12, corollaire 4.3.6.] :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y\{r\}})_x = -E_{\widetilde{Ch}_\Lambda\{r\}(\mathcal{M})}(x)$$
$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y(r)})_x = -E_{\widetilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})}(x)$$

et donc :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y(r)}) - \chi(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X|Y\{r\}}) = -E_{\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_\Lambda(r)(\mathcal{M}))} \tag{2.3.4}$$

(Les notations utilisées ici diffèrent un peu de celles de [12] et le faisceau $\mathcal{O}_{X|Y\{r\}}$ était noté $\mathcal{O}_{X|Y(r)}$.)

2.4 Le faisceau d'irrégularité muni de sa filtration Gevrey

Soit Y un espace analytique complexe. La catégorie des faisceaux pervers $Perv(\mathbb{C}_Y)$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des complexes constructibles $D^b_c(\mathbb{C}_Y)$. On sait que c'est une sous-catégorie abélienne dont les objets ainsi que les morphismes sont de nature locale. De plus, tout faisceau pervers est localement de longueur finie.

Supposons que Y est une hypersurface de X et soit r un nombre réel ≥ 1 éventuellement infini. On définit les faisceaux de $\mathcal{D}_X$-modules a gauche $\mathcal{Q}_Y\{r\}$ et $\mathcal{L}_Y\{r\}$ par les deux suites exactes :

$$0 \to \mathcal{O}_{X|Y}(1) \to \mathcal{O}_{X|Y}\{r\} \to \mathcal{Q}_Y\{r\} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{B}_{Y|X}\{r\} \to \mathcal{B}_{Y|X}(1) \to \mathcal{L}_Y\{r\} \to 0$$

On définit les foncteurs cohomologiques :

$$\mathrm{Irr}_Y(r)(\mathcal{M}) = \mathrm{Sol}(\mathcal{M}, \mathcal{Q}_Y\{r\})$$
$$\mathrm{Irr}^*_Y(r)(\mathcal{M}) = \mathrm{Sol}(\mathcal{M}^*, \mathcal{L}_Y\{r\})$$

On a note $\mathcal{M}^*$ le complexe dual d'un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules. On a alors les résultats suivants [15] : Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome les complexes $\mathrm{Irr}_Y(r)(\mathcal{M})$ et $\mathrm{Irr}^*_Y(r)(\mathcal{M})$ sont des faisceaux pervers sur Y qui s'échangent par dualité de Verdier définissant des foncteurs *exacts* de la catégorie abélienne des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes $Mh(\mathcal{D}_X)$ dans la catégorie des faisceaux pervers sur Y :

$$\mathrm{Irr}_Y(r), \mathrm{Irr}^*_Y(r) : Mh(\mathcal{D}_X) \to Perv(\mathbb{C}_Y).$$

De plus les faisceaux $\mathrm{Irr}_Y(r)(\mathcal{M})$ constituent une filtration croissante du faisceau d'irrégularité

$$\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}) := \mathrm{Irr}_Y(\infty)(\mathcal{M})$$

et les faisceaux $\mathrm{Irr}^*_Y(r)(\mathcal{M})$ une filtration décroissante du faisceau

$$\mathrm{Irr}^*_Y(\mathcal{M}) := \mathrm{Irr}^*_Y(\infty)(\mathcal{M}).$$

Nous noterons $Gr(r)(\mathrm{Irr}_Y((\mathcal{M}))$ et $Gr(r)(\mathrm{Irr}^*_Y(\mathcal{M}))$ les gradués pour ces filtrations.

On dit que r est une *pente analytique* de $\mathcal{M}$ au point y de Y si y appartient au support de$Gr(r)(\mathrm{Irr}_Y((\mathcal{M}))$.

On désigne par $\widetilde{Ch}(\mathcal{F})$ le cycle caractéristique d'un complexe constructible $\mathcal{F}$. Comme le cycle caractéristique d'un faisceau pervers est lagrangiens *positifs*, cela est vrai pour les cycles $\widetilde{Ch}(\mathrm{Irr}_Y(r)(\mathcal{M}))$, $\widetilde{Ch}(\mathrm{Irr}^*_Y(r)(\mathcal{M}))$, $\widetilde{Ch}(Gr(r)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}))$, et $\tilde{Ch}(Gr(r)(\mathrm{Irr}^*_Y(\mathcal{M}))$.

L'obstruction d'Euler locale définissant une bijection ente cycles lagrangiens de T^*Y et fonctions constructibles sur Y, la formule 2.3.3 montre :

Proposition 2.4.1. *On a, pour tout $r > 1$ des égalités de cycles sur T^*Y :*

$$\widetilde{Ch}(Gr(r)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M})) = \mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$$
$$\widetilde{Ch}(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M})) = \sum_{r>1} \mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$$

La positivité du cycle $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$, que nous avons montré de manière purement géométrique dans le théorème 1.4.2, apparait ici, lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, comme conséquence d'une propriété plus forte, la perversité de $Gr(r)(\mathrm{Irr}_Y(\mathcal{M}))$.

Ces résultats peuvent être résumés par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Mh(\mathcal{D}_X) \arrow[r, "Gr(r)(\mathrm{Irr}_Y)"] \arrow[d, "\widetilde{Ch}_{\Lambda(r)}"'] & Perv(\mathbb{C}_Y) \arrow[d, "\widetilde{Ch}"'] \\ \mathbf{Z}_\mathbf{l}^+(\mathbf{T}^*\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{Irr}_Y"] & \mathbf{Z}_\mathbf{l}^+(\mathbf{T}^*\mathbf{Y}) \end{tikzcd}$$

La première flèche verticale et la deuxième flèche horizontale admettent des descriptions purement algébro-géométriques sur un corps de caractéristique nulle. Ceci fournit en particulier une définition du cycle d'irrégularité en dimension supérieure dont la nullité caractérise la régularité le long de Y.

Une conséquence importante du théorème 1.4.2 est l'égalité entre les pentes algébriques et les pentes analytiques :

Théorème 2.4.2. *Soient Y une hypersurface lisse de X, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome défini au voisinage de Y et y un point de Y. Pour tout point $r \in]1, +\infty[$, il y a équivalence entre :*

a) r est une pente algébrique de $\mathcal{M}$ au point y.

b) La fonction $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ n'est pas nulle au voisinage du point y.

c)

$$\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X(r)}) \neq \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X\{r\}}) \text{ au voisinage de } y.$$

d) r est une pente analytique de $\mathcal{M}$ au point y.

Proof. a)$\Longrightarrow$ c) d'après le théorème 2.3.1 et c)$\Longrightarrow$ b) par définition et de même, les résultats de [12] montrent que a) $\Longrightarrow$ d) et d) $\Longrightarrow$ b).

Il reste à montrer que b)$\Longrightarrow$ c).ce qui se déduit immédiatement des théorèmes 2.3.4 et 1.4.2. □

Cela montre en particulier que l'égalité

$$\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}) = \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^{\infty}_{Y|X})$$

sur un ouvert de Y est équivalente à l'égalité des indices

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{Y|X}) = \chi(\mathcal{M}, \mathcal{B}^{\infty}_{Y|X})$$

sur cet ouvert et est équivalente au fait que $\mathcal{M}$ n'a pas de pentes.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, il resterait à démontrer que si $\mathcal{M}$ est spécialisable et n'a pas de pentes, il est 1-spécialisable le long de Y,

2.5 Microlocalisation

Dans les paragraphes précédents nous avons étudié l'irrégularité d'un $\mathcal{D}_X$-module le long d'une hypersurface. Nous allons montrer à présent que ces résultats se généralisent aux modules microdifférentiels le long d'une variété lagrangienne homogène quelconque. Dans le cas des $\mathcal{D}_X$-modules, cela définit l'irrégularité le long d'une sous-variété de dimension quelconque.

Considérons donc une variété analytique complexe X et une sous-variété (lisse) lagrangienne homogène Λ de $\dot{T}^*X = T^*X - X$ et notons $\mathcal{E}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini de [19].

Les définitions du paragraphe 2.1 se généralisent aux $\mathcal{E}_X$-modules. Il suffit de modifier la définition de la V-filtration et de remplacer le faisceau $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ par le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{(T^*\Lambda)}$ des fonctions polynomiales dans les fibres de $T^*\Lambda \longrightarrow \Lambda$ (voir [10]) pour les détails).

On obtient ainsi les cycles $\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$, $\widetilde{Ch}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$, $\widetilde{Ch}_{\Lambda\{r\}}(\mathcal{M})$ avec les mêmes propriétés et on peut définir les pentes algébriques de $\mathcal{M}$. Pour cela il faut remplacer la variété Y par le quotient de Λ par l'action de $\mathbb{C}^*$. Nous noterons $\mathbb{P}\Lambda$ ce quotient.

Les objets que nous venons de considérer sont tous invariants par transformation canonique quantifiée.

Plus précisément, si φ est une transformation symplectique homogène d'un ouvert de T^*X sur un ouvert d'un cotangent T^*X' qui transforme Λ en une variété lagrangienne Λ', elle induit un isomorphisme de $\mathbb{P}\Lambda$ sur $\mathbb{P}\Lambda'$ et de $T^*\Lambda$ sur $T^*\Lambda'$. Si on associe une transformation canonique quantifiée à cette transformation, celle-ci transformera un $\mathcal{E}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ en un $\mathcal{E}_{X'}$-module cohérent et tout les objets que nous venons de considérer seront transformés de manière compatible.

Enfin on montre dans [10] que si $\mathcal{M}$ est holonome, ses variétés microcaractéristiques sont lagrangiennes.

En utilisant les résultats du paragraphe 1.6 on peut donc définir pour tout r le cycle $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ qui est un cycle analytique lagrangien positif de $T^*(\mathbb{P}\Lambda)$, nul si et seulement si r n'est pas une pente de $\mathcal{M}$.

Ces résultats s'appliquent en particulier à un $\mathcal{D}_X$-module holonome défini au voisinage d'une sous-variété Y de X de codimension quelconque. L'irrégularité est ici un cycle positif du fibré conormal projectif $\mathbb{P}^*_Y X$.

On peut aussi interpréter cette irrégularité en termes de solutions à condition de remplacer les hyperfonctions holomorphes par les faisceaux $\mathcal{C}_{Y|X(r,s)}$ de microfonctions holomorphes dont nous allons rappeler la définition.

Le faisceau $\mathcal{E}_{X(r,s)}$ des opérateurs microdifférentiels à croissance Gevrey a été défini dans [9] pour $+\infty \geq r \geq s \geq 1$. C'est un faisceau d'anneaux sur T^*X.

Si la variété X est munie de coordonnées locale $(x_1, \ldots, x_n)$ et son cotangent T^*X de coordonnées (x, ξ), une section P de $\mathcal{E}_{X(r,s)}$ sur un ouvert U de T^*X est une série formelle $\sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j(x,\xi)$ de fonctions holomorphes sur U, f_j étant homogène de degré j en ξ, qui vérifie pour $+\infty > r > s \geq 1$:

(i) $\forall K \subset\subset U$, $\forall j \geq 0$, $\forall (x,\xi) \in K$, $|p_j(x,\xi)| < C^{j+1}\frac{1}{(j!)^r}$

(ii) $\forall K \subset\subset U$, $\forall j < 0$, $\forall (x,\xi) \in K$, $|p_j(x,\xi)| < C^{-j}(-j)!^s$

Si $+\infty > r = s \geq 1$, on remplace (i) par

(i') $\forall K \subset\subset U$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall j \geq 0$, $\forall (x,\xi) \in K$, $|p_j(x,\xi)| < C_\varepsilon \varepsilon^j \frac{1}{(j!)^r}$

et si $r = +\infty$ par

(i") $\forall K \subset\subset U$, $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\forall j > k$, $\forall (x,\xi) \in K$, $p_j(x,\xi) \equiv 0$

enfin pour $s = +\infty$ on supprime la condition (ii).

En particulier, le faisceau $\mathcal{E}_{X(\infty,1)}$ est le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini noté habituellement $\mathcal{E}_X$, $\mathcal{E}_{X(1,1)}$ est le faisceau $\mathcal{E}_X^\infty$ des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini et $\mathcal{E}_{X(\infty,\infty)}$ est le faisceau $\widehat{\mathcal{E}_X}$ des opérateurs formels.

Si Y est une sous-variété de X, on définit le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}$ des microfonctions holomorphes sur T_Y^*X. Si π est la projection $T^*X \longrightarrow X$ alors $\mathcal{E}_X$ est un $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ module et on a :

$$\mathcal{C}_{Y|X} = \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{B}_{Y|X}$$

On définit les faisceaux de microfonctions holomorphes a croissance Gevrey par :

$$\mathcal{C}_{Y|X(r,s)} = \mathcal{E}_{X(r,s)} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{C}_{Y|X} = \mathcal{E}_{X(r,s)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{B}_{Y|X}$$

En coordonnées locales, on a $T_Y^*X = \{\, (x,t,\xi,\tau) \in T^*X \mid t = 0, \xi = 0 \,\}$ et les sections de $\mathcal{C}_{Y|X(r,s)}$ sur un ouvert U de T_Y^*X sont représentées par les séries formelles $\sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(x,\tau)$ qui vérifient les mêmes majorations que les sections de $\mathcal{E}_{X(r,s)}$.

Remarquons encore que la restriction de $\mathcal{C}_{Y|X(r,s)}$ à la section nulle Y de T_Y^*X est égale à $\mathcal{B}_{Y|X\{r\}}$ si $r = s$ et à $\mathcal{B}_{Y|X(r)}$ si $r > s$. D'autre part, si Y est une hypersurface et $r > r' > s$ on a, π étant la projection $T_Y^*X \to Y$:

$$\mathcal{C}_{Y|X(r,s)} / \mathcal{C}_{Y|X(r',s)} = \pi^{-1}\left(\mathcal{B}_{Y|X(r)} / \mathcal{B}_{Y|X(r')}\right)$$

Plus généralement, si Λ est une sous-variété lagrangienne homogène quelconque de T^*X on peut remplacer le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}$ par un $\mathcal{E}_X$-module holonome simple $\mathcal{N}$ de support Λ. Rappelons qu'une section d'un $\mathcal{E}_X$-module holonome de support Λ est dite non dégénérée si l'idéal de $\mathcal{O}_{T^*X}$ engendré par les symboles principaux des opérateurs de $\mathcal{E}_X$ qui annulent

u est l'idéal de définition de Λ. Un module holonome $\mathcal{N}$ de support Λ est dit simple s'il est engendré localement par une section non dégénérée. On notera $\mathcal{N}(r,s)$ le $\mathcal{E}_{X}(r,s)$-module $\mathcal{E}_{X}(r,s) \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$.

Soit φ est une transformation symplectique homogène d'un ouvert de T^*X sur un ouvert d'un cotangent T^*X' qui transforme Λ en une variété lagrangienne Λ' de T^*X'. Si Φ est une transformation canonique quantifiée associée à φ, elle définit un isomorphisme de $\mathcal{E}_{X}(r,s)$ sur $\mathcal{E}_{X'}(r,s)$ et envoie un module holonome simple de support Λ sur un module holonome simple de support Λ'. Si les deux modules sont donnés, on peut même choisir une quantification qui les échange. En particulier, on peut toujours transformer un module holonome simple en un module $\mathcal{C}_{Y|X}$ ou échanger deux modules de type $\mathcal{C}_{Y|X}$.

On a dans ce cadre, un théorème semblable au théorème 2.3.1 :

Théorème 2.5.1. *[12, Proposition 4.3.7.] Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module holonome défini au voisinage d'une sous-variété lagrangienne Λ de T^*X et soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-module simple de support Λ.*

Pour tout (r,s) tel que $+\infty \geq r \geq s \geq 1$, le complexe de solutions $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}(r,s))$ est à cohomologie constructible sur Λ et :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{N}(r,s))_x = E_{\widetilde{Ch}_\Lambda\{s\}(\mathcal{M})}(\pi(x)) - E_{\widetilde{Ch}_\Lambda(r)(\mathcal{M})}(\pi(x))$$

On peut donc poser la définition suivante :

Définition 2.5.2. Soient Λ une sous-variété lagrangienne de $\dot{T}^*X$ et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-module simple de support Λ.

Pour tout $\mathcal{E}_X$-module holonome $\mathcal{M}$ définit au voisinage d'un point x de Λ et tout (r,s) tel que $+\infty \geq r \geq s \geq 1$, on pose (avec $\gamma : \dot{\Lambda} \to \mathbb{P}\Lambda$) :

$$\begin{aligned} \mathrm{irr}_{\Lambda(r,s)}(\mathcal{M})(\gamma((x)) &= -\chi(\mathcal{M}, \mathcal{N}(r,s))_x \\ \mathrm{irr}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{irr}_{(r+\varepsilon, r-\varepsilon)}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

Théorème 2.5.3.

1. *La fonction $irr_{\Lambda(r,s)}(\mathcal{M})$ est indépendante du choix de $\mathcal{N}$, elle est constante sur les fibres de $\gamma : \dot{\Lambda} \to \mathbb{P}\Lambda$, à valeurs entières et invariante par transformation canonique quantifiée. On la considèrera comme une fonction sur $\mathbb{P}\Lambda$.*

2. *Pour tout $r \in [1, +\infty]$, $irr_{\Lambda(r,r)}(\mathcal{M}) = 0$*

3. *Localement sur $\mathbb{P}\Lambda$, $irr_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ est nulle sauf pour un nombre fini de rationnels qui sont exactement les pentes algébriques de $\mathcal{M}$ et on a :*

$$irr_{\Lambda(r,s)}(\mathcal{M}) = \sum_{s \leq t < r} irr_{\Lambda(t)}(\mathcal{M})$$

4. *$irr_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ est la caractéristique d'Euler du cycle positif $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ et donc la fonction $r.irr_{\Lambda(r)}(\mathcal{M})$ est à valeurs entières.*

Ce théorème se déduit immédiatement du théorème 2.5.1 et des propriétés du cycle $\mathrm{Irr}_\Lambda(\widetilde{\Sigma}_{\Lambda(r)}(\mathcal{M}))$ établies au paragraphe 1.6.

On pourrait aussi remarquer que par transformation canonique, il est essentiellement équivalent au théorème 2.4.2. On peut en effet se ramener par transformation canonique au cas où Λ est le conormal à une hypersurface.

Si Y n'est pas une hypersurface, le polygone de Newton se définit en remplaçant Y par $\mathbb{P}^*_Y X$. Plus généralement on peut associer un polygone de Newton à un $\mathcal{E}_X$-module holonome défini au voisinage d'une variété lagrangienne Λ en remplaçant $\mathbb{P}^*_Y X$ par $\mathbb{P}\Lambda$. L'objet ainsi défini est invariant par transformation canonique.

Références

[1] J.-L. Brylinski, A. Dubson, and M. Kashiwara, *Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale*, C.R. Acad. Sc. Paris serie I **293** (1981), 573–577.

[2] J. Dieudonné and A. Grothendieck, *Etude Cohomologique des Faisceaux Cohérents*, Eléments de Géométrie Algébrique III, Publ. I.H.E.S., vol. 11, 1961.

[3] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Math., Springer, 1984.

[4] M. Kashiwara, *Systems of microdifferential equations*, Progress in Mathematics, vol. 34, Birkhäuser, 1983.

[5] ———, *Vanishing cycles and holonomic systems of differential equations*, Lect. Notes in Math., vol. 1016, Springer, 1983, pp. 134–142.

[6] M. Kashiwara and T. Kawaï, *Second microlocalization and asymptotic expansions*, Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lect. Notes in Physics, vol. 126, Springer, 1980, pp. 21–76.

[7] M. Kashiwara and P. Schapira, *Micro–hyperbolic systems*, Acta Mathematica **142** (1979), 1–55.

[8] ———, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Math., vol. 292, Springer, 1990.

[9] Y. Laurent, *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe*, Progress in Math., vol. 53, Birkhäuser, 1985.

[10] ———, *Polygone de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels*, Ann. Ec. Norm. Sup. 4e série **20** (1987), 391–441.

[11] ———, *Vanishing cycles of $\mathcal{D}$-modules*, Inv. Math. **112** (1993), 491–539.

[12] ———, *Vanishing cycles of irregular $\mathcal{D}$-modules*, Prépublications de l'Institut Fourier **304** (1995), to appear.

[13] Y. Laurent and Z. Mebkhout, *Image inverse d'un $\mathcal{D}$-module et polygone de Newton*, to appear.

[14] B. Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'Enseignement Mathématique **20** (1974), 147–176.

[15] Z. Mebkhout, *Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les $\mathcal{D}$-modules*, The Grothendieck Festschrift III, Progress in Mathematics, vol. 88, 1990, pp. 83–132.

[16] ______, *Le polygone de Newton d'un $\mathcal{D}$-module*, Conférence de La Rabida III, Progress in Mathematics, vol. 134, 1996, pp. 237–258.

[17] J.-P. Ramis, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the AMS **48** (1984), no. 296.

[18] C. Sabbah, *Proximité évanescente, I. la structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module. Appendice en collaboration avec F. Castro.*, Compositio Math. **62** (1987), 283–328.

[19] M. Sato, T. Kawaï, and M. Kashiwara, *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, Lect. Notes in Math., vol. 287, Springer, 1980, pp. 265–529.

[20] P. Schapira, *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der Math., vol. 269, Springer, 1985.

[21] Le Dung Trang and B. Teissier, *Limites d'espaces tangents en géométrie analytique*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 540–578.

[22] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Annals of Math. **81** (1964), 496–549.

(le 17 janvier 1997)