UNE IDENTITÉ ENTRE COEFFICIENTS BINOMIAUX

par Roland Bacher

L'étude du système de racine A_n (cf. [1]) suggère les identités suivantes qui semblent nouvelles :

Théorème 1.

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2 \binom{n+k-1-l}{n-1} = \sum_{l=1}^{n} \binom{n+1}{l}\binom{k-1}{l-1}\binom{n+k-l}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{l}^2 \binom{k-n-2-l}{k-l}$$

pour tout $(n, k) \in \{1, 2, \ldots\} \times \{1, 2, \ldots\}$.

Théorème 2. — *Pour* $(n, k) \in \{1, 2, 3, \ldots\} \times \mathbf{Z}$ *on a égalité entre les quatre nombres suivants :*

$$a(n, k) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2 \binom{n-1+k-l}{n-1},$$

$$b(n, k) = (-1)^{n-1} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2 \binom{n-1-k-l}{n-1},$$

$$c(n, k) = \sum_{s,t=1}^{n} \binom{n+1}{s}\binom{n+1-s}{t}\binom{k-1}{s-1}\binom{k-1}{t-1},$$

$$d(n, k) = \sum_{s,t=1}^{n} (-1)^{s+t} \binom{n+1}{s}\binom{n+1-s}{t}\binom{-k+s-1}{s-1}\binom{-k+t-1}{t-1}.$$

Pour $n, k \in \mathbf{N}$ on définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

et on étend cette définition par $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ pour $x \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$.

Nous résumons les propriétés utilisées des coefficients binomiaux dans la

Proposition 1.

(i) Pour $k \geq 0$ *entier,* $\binom{x}{k}$ *est un polynôme de degré* k *en* x*. Son coefficient dominant est égal à* $\frac{1}{k!}$.

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *entiers,*

(iii) $\binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}$ *pour* $x \in \mathbf{C}$ *et* $k \in \mathbf{N}$,

(iv) $\sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l}\binom{y}{k-l} = \binom{x+y}{k}$ *pour* $x,\ y \in \mathbf{C}$ *et* $k \in \mathbf{N}$.

Preuve. — *(i)--(iii)* sont laissés au lecteur. Pour *(iv)* on remarque que si x et y sont des entiers positifs, alors les deux côtés de *(iv)* dénombrent les choix de k objets parmi $x+y$. On étend ensuite par analyticité à $x, y \in \mathbf{C}$. QED

Proposition 2. — *Pour* $1 \le k, n$ *entiers on a*

$$\sum_{s,t=1}^{n} (-1)^{s+t} \binom{n+1}{s} \binom{n+1-s}{t} \binom{k+s-1}{s-1} \binom{k+t-1}{t-1} = (-1)^{n+1} \sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{l}^2 \binom{k-n-2-l}{k-l} .$$

Lemme 1. — $\frac{d^k}{dz^k} z^r = k!\binom{r}{k} z^{r-k} = (-1)^k k! \binom{k-r-1}{k} \frac{1}{z^{k-r}}$ *pour* $k \in \mathbf{N}$ *et* $r \in \mathbf{Z}$*.*
On a donc en particulier

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{z^r} = (-1)^k k! \binom{r+k-1}{k} \frac{1}{z^{r+k}} .$$

Preuve. — C'est un petit calcul laissé au lecteur.

Lemme 2. — $\left(\frac{d^k}{dx^k} \frac{(1+x)^{k-l}}{x^{n+1}} \right)\Big|_{(x=-1)} = (-1)^{n+1} k! \binom{n+l}{l} .$

Preuve.

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} \frac{(1+x)^{k-l}}{x^{n+1}} &= \sum_i \binom{k}{i} \left(\frac{d^i}{dx^i} \frac{1}{x^{n+1}} \right) \left(\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} (1+x)^{k-l} \right) \\ &= \sum_i \binom{k}{i} \left((-1)^i i! \binom{n+1+i-1}{i} \frac{1}{x^{n+1+i}} \right) \left((k-i)! \binom{k-l}{k-i} (1+x)^{k-l-(k-i)} \right) . \end{aligned}$$

En posant $x = -1$ tous les termes sauf le terme avec $i = l$ sont nuls et on obtient donc

$$\binom{k}{l} \left((-1)^l l! \binom{n+l}{l} \frac{1}{(-1)^{n+1+l}} \right) \left((k-l)! \binom{k-l}{k-l} \right) = \binom{k}{l} (-1)^{n+1} \binom{n+l}{l} \frac{l!(k-l)!}{k!} k!$$

ce qui prouve le lemme (après simplification). QED

Preuve de la proposition 2. — Considérons

$$A(x,y) = \frac{d^k}{dx^k} \frac{d^k}{dy^k} (1 + \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y})^{n+1} = \frac{d^k}{dx^k} \frac{d^k}{dy^k} \sum_{s,t=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \binom{n+1-s}{t} \frac{1}{x^s} \frac{1}{x^t} .$$

Comme $k > 0$, les termes correspondants à $s = 0$ et $t = 0$ sont zéros et en utilisant le lemme 1 on obtient

$$A(x,y) = \sum_{s,t=1}^{n+1} \binom{n+1}{s} \binom{n+1-s}{t} (-1)^k k! \binom{k+s-1}{k} \frac{1}{x^{s+k}} (-1)^k k! \binom{k+t-1}{k} \frac{1}{y^{t+k}}$$

ce qui montre que

$$A(-1,-1) = (k!)^2 \sum_{s,t=1}^{n} (-1)^{s+t} \binom{n+1}{s} \binom{n+1-s}{t} \binom{k+s-1}{k} \binom{k+t-1}{k}$$

est égal à $(k!)^2$ fois le côté gauche de la proposition 2.

D'autre part, en appliquant la règle de Leibnitz à $\frac{1}{x^{n+1}}\frac{1}{x^{n+1}}(xy+x+y)^{n+1}$, on a

$$\begin{aligned}
A(x,y) &= \frac{d^k}{dx^k}\frac{d^k}{dy^k}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\frac{1}{y^{n+1}}(xy+x+y)^{n+1}\right)\\
&= \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left(\frac{d^l}{dy^l}\frac{1}{y^{n+1}}\right)\left(\frac{d^{k-l}}{dy^{k-l}}(xy+x+y)^{n+1}\right)\right)\\
&= \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left((-1)^l l!\binom{n+l}{l}\frac{1}{y^{n+1+l}}\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left((k-l)!\binom{n+1}{k-l}(xy+x+y)^{n+1-k+l}(1+x)^{k-l}\right)\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
A(x,-1) &= \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\left((-1)^l l!\binom{n+l}{l}\frac{1}{(-1)^{n+1+l}}\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left((k-l)!\binom{n+1}{k-l}(-1)^{n+1-k+l}(1+x)^{k-l}\right)\right)\\
&= k!\sum_{l=0}^{k}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{(1+x)^{k-l}}{x^{n+1}}\right)\binom{k}{l}\frac{l!(k-l)!}{k!}\left((-1)^{l-k}\binom{n+l}{l}\binom{n+1}{k-l}\right).
\end{aligned}$$

Par le lemme 2 on a

$$\begin{aligned}
A(-1,-1) &= k!\sum_{l=0}^{k}(-1)^{n+1}k!\binom{n+l}{l}\left((-1)^{l-k}\binom{n+l}{l}\binom{n+1}{k-l}\right)\\
&= (k!)^2(-1)^{n+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{n+l}{l}^2(-1)^{k-l}\binom{n+1}{k-l}\\
&= (k!)^2(-1)^{n+1}\sum_{l=0}^{k}\binom{n+l}{l}^2\binom{k-n-2-l}{k-l}
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $A(-1,-1)$ est aussi égal à $(k!)^2$ fois le côté droit de la proposition 2 et termine donc la preuve. QED

Preuve du théorème 2.

(1) On a

$$\begin{aligned}
a(n,k) &= \sum_l \binom{n}{l}^2\binom{n-1+k-l}{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_l\binom{n}{l}^2\binom{-(n-1+k-l)+(n-1)-1}{n-1}\\
&= (-1)^{n-1}\sum_l\binom{n}{n-l}^2\binom{-k+l-1}{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_l\binom{n}{l}^2\binom{-k+n-l-1}{n-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
c(n,k) &= \sum_{s,t=1}^{n}\binom{n+1}{s}\binom{n+1-s}{t}\binom{k-1}{s-1}\binom{k-1}{t-1}\\
&= \sum_{s,t=1}^{n}\binom{n+1}{s}\binom{n+1-s}{t}(-1)^{s-1}\binom{-(k-1)+(s-1)-1}{s-1}(-1)^{t-1}\binom{-(k-1)+(t-1)-1}{t-1}\\
&= d(n,k)
\end{aligned}$$

ce qui prouve les égalités $a(n,k)=b(n,k)$ et $c(n,k)=d(n,k)$.

(2) Pour $n = 1, 2, \ldots$ on a

$$\begin{aligned}
a(n,0) &= \sum_l \binom{n}{l}^2 \binom{n-1-l}{n-1} = \binom{n}{0}^2 \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n}^2 \binom{-1}{n-1} \\
&= 1+(-1)^{n-1} \binom{-(-1)+(n-1)-1}{n-1} = 1+(-1)^{n-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(n,0) &= \sum_{s,t=1}^{n} (-1)^{s+t} \binom{n+1}{s} \binom{n+1-s}{t} \binom{-0+s-1}{s-1} \binom{-0+t-1}{t-1} \\
&= \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \binom{n+1}{s} \left(\sum_{t=1}^{n+1-s} (-1)^t \binom{n+1-s}{t} \right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^s \binom{n+1}{s} \right) \left(\big(1+(-1)\big)^{n+1-s} - (-1)^0 \right) \\
&= \left(\big(1+(-1)\big)^{n+1} - (-1)^0 - (-1)^{n+1} \right) (-1) = 1+(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $a(n,0) = d(n,0) = c(n,0)$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

(3) On remarque que pour $n \geq 1$ entier, $a(n,k)$ et $c(n,k)$ sont des polynômes de degré $\leq n-1$ en k.

(4) Fixons maintenant un entier $k > 0$ et posons

$$a_k(x) = \sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l}^2 \binom{x-1+k-l}{k-l}.$$

On vérifie sans difficultés que $a_k(x)$ est un polynôme de degré $2k$ en x dont le coefficient dominant est $\frac{1}{(k!)^2}$. De plus, on a $a_k(0) = 0$ et $a_k(n) = a(n,k)$ pour $n > 0$ entier.

D'autre part, toujours pour k un entier positif fixé, posons

$$c_k(x) = \sum_{s,t=1}^{n} \binom{x+1}{s} \binom{x+1-s}{t} \binom{k-1}{s-1} \binom{k-1}{t-1}.$$

Alors $c_k(x)$ est aussi un polynôme de degré $2k$ en x (les termes pour lesquels $s+t > 2k$ sont nuls). Son coefficient dominant provient du terme avec $s = t = k$ et vaut donc $\frac{1}{(k!)^2}$. On vérifie que $c_k(0) = 0$ et qu'on a $c_k(n) = c(n,k)$ pour $n > 0$ entier.

(5) Soit encore $k > 0$ un entier fixé. L'égalité $a(n,-k) = b(n,-k)$ implique $a(n,-k) = (-1)^{n-1} a(n,k)$ ce qui démontré que $(-1)^{n-1} a(n,-k)$ est égal à la valeur $a_k(n)$ du polynôme $a_k(x)$ introduit ci-dessus.

Toujours pour un entier $k > 0$ fixé, posons

$$\tilde{c}_k(x) = \sum_{l=0}^{k} \binom{x+l}{l}^2 \binom{k-x-2-l}{k-l}.$$

On vérifie aisément que $\tilde{c}_k(x)$ est un polynôme de degré $2k$ en x dont le coefficient dominant vaut $\frac{1}{(k!)^2}$. On a $\tilde{c}_k(0) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k-2-l}{k-l} = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{1}{k-l} = 0$. De plus, la proposition 2 montre qu'on a $c(n,-k) = d(n,-k) = (-1)^{n-1} \tilde{c}_k(n)$ pour $n > 0$ entier.

(6) Montrons $a(n, k) = c(n, k)$ par récurrence sur n.

Le point *(3)* montre que $a(1, k)$ et $c(1, k)$ sont des polynômes de degrés 0 en k. Le point *(2)* implique que ces polynômes sont égaux et on a donc $a(1, k) = b(1, k)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Supposons maintenant $a(i, k) = c(i, k)$ pour tout $(i, k) \in \{1, \ldots, 2n-1\} \times \mathbf{Z}$. Par hypothèse de récurrence, pour $j > 0$ entier, les deux polynômes $a_j(x)$ et $c_j(x)$ définis au point *(4)* prennent les mêmes valeurs pour $x = 1, 2, \ldots, 2n-1$. De plus, ces polynômes s'annullent en 0, sont de degré $2j$ et ont même coefficient dominant. Ceci montre qu'ils coincident pour $j \leq n$ (car ils sont de degré $\leq 2n$, prennent les mêmes valeurs sur les $2n$ points distincts $0, 1, \ldots, 2n-1$ et ont même coefficient dominant). Comme $a(m, k) = a_k(m)$ et $c(m, k) = c_k(m)$ pour $k, m > 0$ entiers, on aura aussi $a(2n, j) = c(2n, j)$ et $a(2n+1, j) = c(2n+1, j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Le même raisonnement utilisant les polynômes $a_j(x)$ et $\tilde{c}_j(x)$ montre qu'on a également $a(2n, j) = c(2n, j)$ et $a(2n+1, j) = c(2n+1, j)$ pour $j = -n, -n+1, \ldots, 1$. Le point *(2)* montre qu'on a aussi égalité pour $j = 0$ ce qui montre que $a(2n, j) = c(2n, j)$ et $a(2n+1, j) = c(2n+1, j)$ pour $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Comme $a(2n, j)$ et $c(2n, j)$ (respectivement $a(2n+1, j)$ et $c(2n+1, j)$) sont des polynômes de degré $2n-1$ (respectivement $2n$) (voir point (3)) qui prennent les mêmes valeurs sur les $2n+1$ points distincts $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, ils sont égaux. On a donc $a(i, k) = c(i, k)$ pour tout $(i, k) \in \{1, \ldots, 2n+1\} \times \mathbf{Z}$ ce qui termine la preuve. QED

Preuve du théorème 1. — Le premier terme du théorème 1 est égal au nombre $a(n, k)$ du théorème 2. Le terme du milieu vaut $c(n, k)$ car

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} \binom{n+1}{s}\binom{k-1}{s-1} \sum_{t=1}^{n+1-s} \binom{n+1-s}{t}\binom{k-1}{t-1} &= \sum_{s=1}^{n} \binom{n+1}{s}\binom{k-1}{s-1} \sum_{t=1}^{n+1-s} \binom{n+1-s}{n+1-s-t}\binom{k-1}{t-1} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \binom{n+1}{s}\binom{k-1}{s-1}\binom{n+k-s}{n-s} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \binom{n+1}{s}\binom{k-1}{s-1}\binom{n+k-s}{k} .
\end{aligned}$$

La proposition 2 montre que le dernier terme du théorème 1 est égal à $(-1)^{n-1}d(n, -k)$. Le théorème 2 ($a(n, k) = c(n, k)$ et $(-1)^{n+1}d(n, -k) = (-1)^{n+1}b(n, -k) = a(n, k)$) termine la preuve. QED

Je remercie Pierre de la Harpe et Jacques Helmstetter pour leurs corrections et suggestions.

Bibliographie

[1] Bacher, de la Harpe, Venkov. — *Séries de croissance et réseaux de racines,enprparation.*

[2] Graham, Knuth, Patashnik. — *Concrete mathematics*, Addison Wesley, 1988.

[3] Wilf, Zeilberger. — $a = b$, 1996.

-- ◊ --

Roland BACHER
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS - UJF
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail : Roland.Bacher@ujf-grenoble.fr

(4 décembre 1996)