LE THÉORÈME DE RAY-KNIGHT À TEMPS FIXE

par Christophe LEURIDAN

Introduction

L'objet de cet article est de décrire la loi du processus des temps locaux browniens à instant fixe (théorème 1) et à un instant "inverse" du temps de séjour dans $\mathbf{R}_+$ (théorème 2). Une version moins précise du théorème 1 a déjà été obtenue indépendamment par R. Van der Hofstad, F. den Hollander, W. König dans un article à paraître aux Annals of Probability ([10], lemme 1) et que m'a signalé M. Yor.

Ce lemme 1 de [10], que les auteurs justifient de façon proche mais incomplète, est en effet semblable à notre théorème 1, hormis le fait que certaines lois ne sont pas complètement explicitées. Le lecteur trouvera au paragraphe IV.3 plus de précisions sur les liens et les différences entre les arguments et les résultats de [10] et ceux du présent article.

L'un des avantages de notre présentation est que la méthode permet théoriquement d'obtenir des théorèmes de Ray-Knight pour tous les instants inverses d'une fonctionnelle additive croissante du mouvement brownien. Mais en fait, les résultats ne s'explicitent bien que dans quelques cas, comme celui du théorème 2 (où la fonctionnelle additive est le temps de séjour dans $\mathbf{R}_+$).

On considère donc un mouvement brownien $B = (B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, dans $\mathbf{R}$, issu de 0, et une version continue de ses temps locaux $(L_t^x)_{t \in \mathbf{R}_+}^{x \in \mathbf{R}}$. Lorsque l'on se donne un temps aléatoire τ, les temps locaux L_τ^x définissent un processus indexé par la variable d'espace x. En 1963, D. B. Ray [7] et F. B. Knight [4] ont obtenu la loi du processus $(L_\tau^x)^{x \in \mathbf{R}}$ pour certains instants τ comme :

- le temps d'atteinte d'un point a par le mouvement brownien B :
$$\sigma_a = \inf\left\{t \in \mathbf{R}_+ \mid B_t = a\right\} ;$$
- le temps d'atteinte d'une valeur r par le temps local en 0 :
$$\tau_r^0 = \inf\left\{t \in \mathbf{R}_+ \mid L_t^0 = r\right\} ;$$
- un temps exponentiel indépendant de B.

Depuis, la loi du processus $(L_\tau^x)^{x\in\mathbf{R}}$ a été décrite pour d'autres temps τ, comme :

$$\alpha_r = \inf\left\{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \sup_{x\in\mathbf{R}_+} L_t^x \geq r \right\},$$

par N. Eisenbaum [2]. On trouvera dans [9] quelques extensions, ainsi qu'un résumé des principaux résultats obtenus à ce sujet.

Décrire la loi du processus $(L_\tau^x)^{x\in\mathbf{R}}$ lorsque τ est un instant fixe t est beaucoup plus délicat, car le processus $(L_t^x)^{x\in\mathbf{R}}$ n'est pas markovien, contrairement aux exemples précédents. La principale obstruction empêchant le processus $(L_t^x)^{x\in\mathbf{R}}$ d'être markovien est l'égalité :

$$\int_{\mathbf{R}} L_t^x \, dx = t \, .$$

En 1981, E. Perkins [6] a démontré, au prix de longs calculs, que le processus $(L_1^x)^{x\in\mathbf{R}}$ est une semi-martingale. Il a même donné sa décomposition comme somme d'une martingale (relativement à la filtration $(\mathcal{E}_x)_{x\in\mathbf{R}}$ des excursions au dessous d'un niveau donné) et d'un processus à variation finie. Il conjecture enfin que le processus $\left(L_x^1, \int_x^{+\infty} L_y^1 \, dy, \ \mathbb{1}_{\{x<B_1\}}\right)_{x\in\mathbf{R}}$ est markovien (inhomogène) relativement à la filtration $(\mathcal{E}_x)_{x\in\mathbf{R}}$.

En 1985, T. Jeulin donne dans [3] la décomposition de la semi-martingale $(L_t^x)^{x\in\mathbf{R}}$ dans la filtration $(\widetilde{\mathcal{E}}_x)_{x\in\mathbf{R}}$, où $\widetilde{\mathcal{E}}_x = \sigma\left(\mathcal{E}_x, B_t, \inf_{s\leq t} B_s\right)$, en utilisant la théorie du grossissement de filtrations. La méthode qu'il a employée consiste à conditionner par $\tau = t$ la loi de $(L_\tau^x)^{x\in\mathbf{R}}$, où τ est un temps exponentiel indépendant de B.

Il signale (page 260) que le calcul stochastique permet de montrer que le processus $\left(L_t^x, \int_{-\infty}^x L_t^y \, dy\right)_{x\in\mathbf{R}}$ est markovien conditionnellement à $\left(B_t, \inf_{s\leq t} B_s\right)$ et d'expliciter son générateur ; mais –écrit-il– “le résultat obtenu est assez compliqué et plutôt long à écrire”.

L'objet de ce travail est de donner une description plus simple de la loi du processus $(L_t^x)_{x\in\mathbf{R}}$, en conditionnant par rapport au 5-uplet $\left(B_t, L_t^{B_t}, L_t^0, V_t, V_t'\right)$, où V_t et V_t' désignent le temps passé à l'instant t par le mouvement brownien B hors du segment $[0, B_t]$, du côté de B_t et du côté de 0 :

$$V_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s/B_t>1\}} \, ds = \int_{\mathbf{R}} \mathbb{1}_{\{y/B_t>1\}} L_t^y \, dy$$

$$V_t' = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s/B_t<0\}} \, ds = \int_{\mathbf{R}} \mathbb{1}_{\{y/B_t<0\}} L_t^y \, dy$$

La différence $U_t = t - V_t - V_t'$ représente alors le temps passé à l'instant t par le mouvement brownien B dans le segment $[0, B_t]$.

La description que nous donnons a l'intérêt d'être symétrique, c'est-à-dire de faire apparaître l'identité en loi :

$$\left(B_t, \left(L_t^{B_t-x}\right)^{x\in\mathbf{R}}\right) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(B_t, \left(L_t^x\right)^{x\in\mathbf{R}}\right),$$

qui provient de l'identité en loi :

$$(B_t - B_{t-s})_{0\le s\le t} \overset{\mathcal{L}}{=} (B_s)_{0\le s\le t} \ .$$

La méthode que nous employons est un peu plus simple que celles de E. Perkins et T. Jeulin. Mais avant de la présenter, énonçons les principaux résultats.

Notations et énoncés des résultats.

Suivant l'usage, on note pour $\delta \in \mathbf{R}_+$ et $a, r, r' \in \mathbf{R}_+^*$:

Q_r^δ la loi d'un carré de Bessel de dimension δ issu de r

$Q_{r,r'}^{\delta,a}$ la loi d'un pont de carré de Bessel de dimension δ, de longueur a et de r à r'.

Les densités de certaines variables aléatoires vont jouer un grand rôle dans la suite. En appelant $(X_z)_{z\in\mathbf{R}_+}$ le processus canonique sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on note :

$f(r,\cdot)$	la densité de la variable aléatoire	$\int_0^{+\infty} X_z\,dz$	sous Q_r^0 ,
$q_a(r,\cdot)$	la densité de la variable aléatoire	X_a	sous Q_r^2 ,
$g_a(r,\cdot)$	la densité de la variable aléatoire	$\int_0^a X_z\,dz$	sous Q_r^2 ,
$g_a(r,r',\cdot)$	la densité de la variable aléatoire	$\int_0^a X_z\,dz$	sous $Q_{r,r'}^{2,a}$.

Les deux premières densités ont des expressions relativement simples (voir [8] au chapitre XI)

$$\begin{aligned} f(r,0) &= \tfrac{r}{\sqrt{8\pi}v^{3/2}} \exp\left(-\tfrac{r^2}{8v}\right) && \text{pour } \ v>0 \\ q_a(r,r') &= \tfrac{1}{2a} \exp\left(-\tfrac{r+r'}{2a}\right) I_0\left(\tfrac{\sqrt{rr'}}{a}\right) && \text{pour } \ r'>0\,. \end{aligned}$$

Les deux autres n'ont pas d'expression simple. Cependant, on connaît bien leurs transformées de Laplace. Pour tout $\theta \in \mathbf{R}_+$, on a en effet :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}u\right) g_a(r,u)\,du &= Q_r^2\left[\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^a X_z\,dz\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{r\theta}{2}\,\mathrm{th}(a\theta)\right)\frac{1}{\mathrm{ch}(a\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}u\right) g_a(r,r',u)\,du &= Q_{r,r'}^{2,a}\left[\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^a X_z\,dz\right)\right] \\ &= \frac{\theta a}{\mathrm{sh}(\theta a)} \exp\left(\frac{r+r'}{2a}(1-\theta a\coth(\theta a))\right) I_0\left(\frac{\theta\sqrt{rr'}}{\mathrm{sh}(\theta a)}\right) \Big/ I_0\left(\frac{\sqrt{rr'}}{a}\right) . \end{aligned}$$

On obtient les transformées de Fourier en remplaçant $\frac{\theta^2}{2}$ par $i\lambda$ et θ par $(1+i\,\mathrm{sgn}(\lambda))\sqrt{|\lambda|}$ dans les formules ci-dessus. La formule d'inversion de Fourier montre que l'on peut prendre les densités continues sur $\mathbf{R}_+^*$, et de classe $\mathcal{C}^1$ vis à vis du paramètre r.

Nous pouvons maintenant énoncer :

THÉORÈME 1. — *La loi conjointe de B_t et du processus $(L_t^z)^{z\in\mathbf{R}}$ est décrite par les propriétés suivantes :*

- *le 5-uplet $(B_t, L_t^{B_t}, L_t^0, V_t, V'_t)$ admet comme densité sur $\mathbf{R}\times(\mathbf{R}_+^*)^4$:*

$$(a, r, r', v, v') \longmapsto q_{|a|}(r, r')f(r, v)f(r', v')g_{|a|}(r, r', t-v-v')\,;$$

- *pour $a > 0$, conditionnellement à $(B_t, L_t^{B_t}, L_t^0, V_t, V'_t) = (a, r, r', v, v')$:*
    - *les processus $(L_t^{a+z})_{z\geq 0}$, $(L_t^{-z})_{z\geq 0}$ et $(L_t^{a-z})_{0\leq z\leq a}$ sont indépendants ;*
    - *les processus $\left(L_t^{a+z}, \int_{a+z}^{+\infty} L_t^y\, dy\right)_{z\geq 0}$ et $\left(L_t^{-z}, \int_{-\infty}^{-z} L_t^y\, dy\right)_{z\geq 0}$ sont markoviens de générateur :*

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4 - \frac{x^2}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,;$$

    - *le processus $\left(L_t^{a-z}, \int_0^{a-z} L_t^y\, dy, z\right)_{0\leq z\leq a}$ est markovien de générateur :*

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 + 4x\left(\frac{\partial_1 q_{a-z}}{q_{a-z}}(x, r') + \frac{\partial_1 g_{a-z}}{g_{a-z}}(x, r', y)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,;$$

- *pour $a < 0$, on a des formules semblables par symétrie.*

On dispose d'un résultat similaire pour l'instant τ_s^+ où le temps de séjour dans $\mathbf{R}_+$ du mouvement brownien B atteint la valeur s :

$$\tau_s^+ = \inf\left\{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \int_{\mathbf{R}_+} L_t^y\, dy \geq s \right\}.$$

THÉORÈME 2. — *La loi conjointe de $B_{\tau_s^+}$ et du processus $(L_{\tau_s^+}^z)^{z\in\mathbf{R}_+}$ est donnée par les propriétés suivantes :*

- *le triplet $(B_{\tau_s^+}, L_{\tau_s^+}^{B_{\tau_s^+}}, U_{\tau_s^+})$ admet comme densité sur $(\mathbf{R}_+^*)^3$:*

$$(a, r, u) \longmapsto g_a(r, u)f(r, s-u)\,;$$

- *conditionnellement à $(B_{\tau_s^+}, L_{\tau_s^+}^{B_{\tau_s^+}}, U_{\tau_s^+}) = (a, r, u)$:*
    - *les processus $(L_{\tau_s^+}^{a+z})_{z\geq 0}$ et $(L_{\tau_s^+}^{a-z})_{z\geq 0}$ sont indépendants ;*
    - *le processus $\left(L_{\tau_s^+}^{a+z}, \int_{a+z}^{+\infty} L_{\tau_s^+}^y\, dy\right)_{z\geq 0}$ est markovien de générateur :*

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4 - \frac{x^2}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,;$$

$*$ *le processus* $\left(L_{\tau_s^+}^{a-z}, \int_0^{a-z} L_t^y\, dy\right)_{z\geq 0}$ *est markovien inhomogène ;*

$*$ *le processus* $\left(L_{\tau_s^+}^{a-z}, \int_0^{a-z} L_t^y\, dy, z\right)_{0\leq z\leq a}$ *a pour générateur :*

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 + 4x\frac{\partial_1 g_{a-z}}{g_{a-z}}(x,y)\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\ ;$$

$*$ *le processus* $(L_{\tau_s^+}^{-z})_{z\geq 0}$ *est un carré de Bessel de dimension 0.*

Remarques.

• Dans l'énoncé du théorème 1, on peut remplacer le processus

$$\left(L_t^{a-z}, \int_0^{a-z} L_t^y\, dy, z\right)_{0\leq z\leq a} \quad \text{par} \quad \left(L_t^z, \int_z^a L_t^y\, dy, z\right)_{0\leq z\leq a}$$

à condition d'intervertir r et r' dans l'expression de son générateur.

• Dans l'énoncé du théorème 2, on peut conditionner par rapport à $L_{\tau_s^+}^0$, ce qui fournit une formulation proche de celle du théorème 1.

Des théorèmes 1 et 2, on déduit immédiatement :

Corollaire 3. — *Les processus*

$$\left(L_t^{(B_t\vee 0)+z}, \int_{(B_t\vee 0)+z}^{+\infty} L_t^y\, dy\right)_{z\geq 0}, \qquad \left(L_t^{(B_t\wedge 0)-z}, \int_{-\infty}^{(B_t\wedge 0)-z} L_t^y\, dy\right)_{z\geq 0}$$

et

$$\left(L_{\tau_s^+}^{B_{\tau_s^+}+z}, \int_{B_{\tau_s^+}+z}^{+\infty} L_t^y\, dy\right)_{z\geq 0}$$

sont tous trois markoviens de générateur

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4 - \frac{x^2}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Les trois processus ci-dessus sont tous des couples formés par le temps local et sa primitive vis à vis de la variable d'espace. On peut se ramener à un processus markovien unidimensionnel en faisant un changement de paramètre lié à la primitive du temps local. En effet, on a le résultat suivant :

Proposition 4. — *Soit* $(X_z, Y_z)_{z\geq 0}$ *une diffusion dans* $\mathbf{R}_+^2$ *issue de* $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ *et de générateur*

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4 - \frac{x^2}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Pour $y \in]0, y_0[$, notons $\zeta(y)$ l'unique valeur de z telle que $Y_z = y$. Alors le processus ρ défini par :

$$\rho_t = (y_0 e^{-t})^{-1/2} X_{\zeta(y_0 e^{-t})} \text{ pour } t \geq 0$$

est markovien de générateur :

$$2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{4}{r} - \frac{r}{2}\right)\frac{\partial}{\partial r}.$$

Présentation de la méthode suivie.

Expliquons maintenant la méthode employée pour démontrer les théorèmes 1 et 2.

Étant donné un temps aléatoire τ, fini presque sûrement, on note P^τ la loi du mouvement brownien tué à l'instant τ, c'est-à-dire du processus $(B_u)_{0\leq u\leq \tau}$. Cette loi est une probabilité sur l'espace des trajectoires continues à durée de vie finie :

$$\mathcal{W} = \bigcup_{t\in\mathbf{R}_+} \mathcal{C}([0,t],\mathbf{R}).$$

À une trajectoire $w \in \mathcal{W}$, on associe sa durée de vie $\zeta(w)$ définie par $\zeta(w) = t$ si $w \in \mathcal{C}([0,t],\mathbf{R})$, et la famille de ses temps locaux à l'instant final $\zeta(w)$ définie P^τ-presque sûrement par :

$$L^z(w) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\zeta(w)} \mathbb{1}_{\{|w(u)-z|\leq\varepsilon\}}\, du.$$

On note $\mathcal{L}(P^\tau)$ la loi de $(B_\tau, (L^z_\tau)^{z\in\mathbf{R}})$, qui n'est autre que la mesure image de P^τ par la fonction $\mathcal{L} : w \longmapsto (w(\zeta(w)), L^\cdot(w))$. Cette loi définit une probabilité sur $\mathbf{R}\times\mathcal{C}_c(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ où $\mathcal{C}_c(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$.

Notre but est de décrire les lois $\mathcal{L}(P^t)$ et $\mathcal{L}(P^{\tau_s^+})$ pour $t, s \in \mathbf{R}_+^*$. Les théorèmes de Ray-Knight permettent d'obtenir facilement les lois $\mathcal{L}(P^{\tau_r^a})$, où τ_r^a est le premier instant où le temps local en a atteint la valeur r :

$$\tau_r^a = \inf\{t\in\mathbf{R}_+ | L_t^a \geq r\}.$$

Nous passons des lois $\mathcal{L}(P^{\tau_r^a})$ aux lois $\mathcal{L}(P^t)$ et $\mathcal{L}(P^{\tau_s^+})$ en utilisant les identités suivantes :

$$(1)\qquad \int_0^{+\infty} P^t\, dt = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_0^{+\infty} P^{\tau_r^a}\, dr\right) da$$

$$(2)\qquad \int_0^{+\infty} P^{\tau_s^+}\, ds = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} P^{\tau_r^a}\, dr\right) da.$$

Les identités (1) et (2) entraînent les identités analogues pour les mesures images par $\mathcal{L}$:

$$(1') \qquad \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^t)\, dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_r^a})\, dr \right) da$$

$$(2') \qquad \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_s^+})\, ds = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_r^a})\, dr \right) da\,.$$

Chacune de ces identités représente deux désintégrations d'une même mesure sur $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$:

— dans le membre de gauche, la mesure est désintégrée par rapport à la fonctionnelle $\Lambda_\mu : (a, \ell) \longmapsto \int_{\mathbf{R}} \ell(z)\mu(dz)$, où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{R}_+$;

— dans le membre de droite, la mesure est désintégrée par rapport à la fonctionnelle $(a, \ell) \longmapsto (a, \ell(a))$ de $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.

On passe donc des lois $\mathcal{L}(P^{\tau_r^a})$ aux lois $\mathcal{L}(P^t)$ et $\mathcal{L}(P^{\tau_s^+})$ en intégrant les lois $\mathcal{L}(P^{\tau_r^a})$ par rapport à a et r et en désintégrant par rapport à la fonctionnelle Λ_μ. Nous sommes ainsi conduits à conditionner le processus $(L^z_{\tau_r^a})^{z\in\mathbf{R}}$ par son intégrale sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{R}_+$. Pour cela, il est commode de séparer les restrictions des temps locaux aux trois intervalles délimités par 0 et $B_{\tau_r^a} = a$ pour obtenir trois processus indépendants conditionnellement à $L^0_{\tau_r^a}$.

Pour expliciter les lois obtenues (carrés ou ponts de carrés de Bessel conditionnés par leur intégrale), nous utilisons la théorie des h-processus de Doob.

La suite de notre travail s'organise de la façon suivante :

— dans la première partie ("préliminaires") nous démontrons les identités 1 et 2, nous donnons une description de la loi $\mathcal{L}(P^{\tau_r^a})$ et nous démontrons la proposition 4 (qui se prouve indépendamment du reste) ;

— dans la deuxième partie, nous démontrons en détail le théorème 2 ;

— dans la troisième partie, nous donnons les grandes lignes de la démonstration du théorème 1, très voisine de celle du théorème 2, mais plus lourde à écrire ;

— enfin, dans la quatrième partie, nous terminons par quelques remarques.

I. Préliminaires

1. Démonstration des identités (1) et (2).

Dans l'article [5], j'ai démontré l'identité (1) pour retrouver de façon élémentaire une identité que P. Biane et M. Yor ont déduit de la théorie des excursions. Au cours d'un exposé que j'ai donné à ce sujet aux Journées de Probabilités de 1995, J. Azema m'a suggéré la généralisation suivante :

Soit μ une mesure positive localement finie sur $\mathbf{R}_+$. Considérons la fonctionnelle additive L^μ et son "inverse" τ^μ définis par :

$$\begin{aligned} L_t^\mu &= \int_{\mathbf{R}} L_t^x \, \mu(dx) \ \text{ pour } \ t \in \mathbf{R}_+ \\ \tau_s^\mu &= \inf\{ t \in \mathbf{R}_+ \mid L_t^\mu \geq s \} \ \text{ pour } \ s \in \mathbf{R}_+ \, . \end{aligned}$$

On définit une mesure σ-finie M sur $\mathcal{W}$ en posant, pour toute fonctionnelle F-mesurable positive sur $\mathcal{W}$:

$$M(F) = E\left[\int_0^{+\infty} F\left((B_u)_{0 \leq u \leq t}\right) dL_t^\mu \right] .$$

Cette mesure M ainsi construite vérifie :

$$M = \int_0^{+\infty} P^{\tau_s^\mu} \, ds = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} P^{\tau_r^a} \, dr \right) \mu(da) \, . \tag{3}$$

Les identités (1) et (2) sont les cas particuliers de l'identité (3) obtenus en prenant la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}_+$ comme mesure μ. Il suffit donc de montrer l'identité (3), qui est une conséquence de l'observation suivante :

LEMME 5. — *Presque sûrement la mesure image de la mesure $\mu(da)\ dr$ par l'application $(a, r) \longmapsto \tau_r^a$ est égale à la mesure de Stieltjes dL_t^μ (qui est la mesure image de la mesure ds par l'application $s \mapsto \tau_s^\mu$).*

Une fois le lemme connu, il suffit en effet d'écrire que pour toute fonctionnelle F mesurable positive sur $\mathcal{W}$, on a presque sûrement :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F\left((B_u)_{0 \leq u \leq t}\right) dL_t^\mu &= \int_0^{+\infty} F\left((B_u)_{0 \leq u \leq \tau_s^\mu}\right) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} F\left((B_u)_{0 \leq u \leq \tau_r^a}\right) dr \right) \mu(da) \, . \end{aligned}$$

En passant aux espérances, on démontre l'identité (3).

Démonstration du lemme 5. — Il suffit de constater que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_r^a \leq t\}} \, dr \right) \mu(da) = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{r \leq L_t^a\}} \, dr \right) \mu(da)$$
$$= \int_{\mathbf{R}} L_t^a \, \mu(da) = L_t^\mu = \int_0^t \mathbb{1}_{\{s \leq L_t^\mu\}} ds = \int_0^t \mathbb{1}_{\{\tau_s^\mu \leq t\}} ds \,.$$

2. Description de la loi $\mathcal{L}(P_0^{\tau_r^a})$.

Par symétrie, on peut se contenter de décrire la loi $\mathcal{L}(P_0^{\tau_r^a})$ pour $a \in \mathbf{R}_+$ et $r > 0$. On a bien sûr $B_{\tau_r^a} = a$ presque sûrement. Il suffit donc de décrire la loi du processus $(L^z_{\tau_r^a})^{z \in \mathbf{R}}$. En appliquant la propriété de Markov au premier instant d'atteinte de a par le mouvement brownien B et en utilisant l'additivité des carrés de Bessel, on déduit, des théorèmes de Ray et Knight, la description suivante :

Corollaire (Ray-Knight). — *Soient $a \in \mathbf{R}_+$ et $r > 0$. Les processus $(L^{a+z}_{\tau_r^a})_{z \geq 0}$ et $(L^{a-z}_{\tau_r^a})_{z \geq 0}$ sont indépendants et markoviens, le premier étant homogène mais pas le second :*

- *le processus $(L^{a+z}_{\tau_r^a})_{z \geq 0}$ est un carré de Bessel de dimension 0 issu de r ;*
- *le processus $(L^{a-z}_{\tau_r^a})_{0 \leq z \leq a}$ est un carré de Bessel de dimension* 2 *issu de r ;*
- *le processus $(L^{-z}_{\tau_r^a})_{z \geq 0}$ est un carré de Bessel de dimension 0.*

3. Démonstration de la proposition 4.

Soit $(X_z, Y_z)_{z \geq 0}$ une diffusion sur $(\mathbf{R}_+)^2$ de générateur $2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4 - \frac{x^2}{y}\right) \frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ et issue de $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. On peut supposer que $(X_z, Y_z)_{z \geq 0}$ est la solution du système différentiel stochastique :

$$\begin{cases} dX_z = 2\sqrt{X_z} d\beta_z + (4 - \frac{X_z^2}{Y_z}) \, dz \\ dY_z = -X_z \, dz \end{cases}$$

vérifiant $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0)$, où β est un mouvement brownien.

Soit $\zeta_0 = \inf\{z \in \mathbf{R}_+ \mid Y_z = 0\}$. Pour $0 \leq z < \zeta_0$, on a :

$$d\left(\frac{X_z}{\sqrt{Y_z}}\right) = \left(\frac{dX_z}{\sqrt{Y_z}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{X_z \, dY_z}{Y_z^{3/2}}\right) = 2\sqrt{\frac{X_z}{Y_z}} \, d\beta_z + \left(4 - \frac{X_z^2}{2Y_z}\right) \frac{dz}{\sqrt{Y_z}} \,.$$

Donc en notant $\zeta(y)$ la valeur de z telle que $Y_z = y$ pour $0 < y \leq y_0$ et en posant $\rho_t = (y_0 e^{-t})^{-1/2} X_{\zeta(y_0 e^{-t})}$ pour $t \geq 0$, on a :

$$\rho_t = \rho_0 + 2W_t + \int_0^{\zeta(y_0 e^{-t})} \left(4 - \frac{X_z^2}{2Y_z}\right) \frac{dz}{\sqrt{Y_z}} \;\text{ où }\; W_t = \int_0^{\zeta(y_0 e^{-t})} \sqrt{\frac{X_z}{Y_z}} \, d\beta_z \,.$$

Le processus W est un mouvement brownien puisque :

$$\langle W, W\rangle_t = \int_0^{\zeta(y_0 e^{-t})} \frac{X_z}{Y_z}\, dz = [-\ln Y_z]_{z=0}^{z=\zeta(y_0 e^{-t})} = t\,.$$

En effectuant les changements de variable $y = Y_z$ puis $y = y_0 e^{-s}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\rho_t - \rho_0 - 2W_t = \int_{y_0}^{y_0 e^{-t}} \left(4 - \frac{X^2_{\zeta(y)}}{2y}\right) \frac{dy}{-X_{\zeta(y)}\sqrt{y}} &= \int_0^t \left(4 - \frac{\rho_s^2}{2}\right) \frac{y_0 e^{-s}\, ds}{X_{\zeta(y_0 e^{-s})}(y_0 e^{-s})^{1/2}} \\ &= \int_0^t \left(\frac{4}{\rho_s} - \frac{\rho_s}{2}\right) ds\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.

II. Démonstration du théorème 2

Dans cette partie, on prend la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}_+$ comme mesure μ. La mesure M correspondante est

$$M = \int_0^{+\infty} P^{\tau_s^+}\, ds = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} P^{\tau_r^a}\, dr\right)\, da\,,$$

et la fonctionnelle Λ_μ est l'application $(a, \ell) \longmapsto \int_{\mathbf{R}_+} \ell(y)\, dy$ de $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ dans $\mathbf{R}_+$. L'égalité

$$\mathcal{L}(M) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P_0^{\tau_s^+})\, ds$$

n'est autre que la désintégration de la mesure $\mathcal{L}(M)$ sur $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ par rapport à la fonctionnelle Λ_μ. Nous allons obtenir une autre expression de cette désintégration en décomposant pour $a, r \in \mathbf{R}_+^*$ fixés la probabilité $\mathcal{L}(P^{\tau_r^a})$. Comme $B_{\tau_r^a} = a$ presque sûrement, cela revient à conditionner le processus $(L^z_{\tau_r^a})^{z\in\mathbf{R}}$ par rapport à son intégrale $\int_0^{+\infty} L^y_{\tau_r^a}\, dy$ sur $\mathbf{R}_+$. On commence par le conditionner par le couple $(U_{\tau_r^a}, V_{\tau_r^a})$, vu que $U_{\tau_r^a} = \int_0^a L^y_{\tau_r^a}\, dy$ et $V_{\tau_r^a} = \int_a^{+\infty} L^y_{\tau_r^a}\, dy$.

1. Conditionnement de $(L^z_{\tau_r^a})^{z\in\mathbf{R}}$ par rapport au couple $\left(U_{\tau_r^a}, V_{\tau_r^a}\right)$.

Par indépendance des processus $(L^{a-z}_{\tau_r^a})_{z\geq 0}$ et $(L^{a+z}_{\tau_r^a})_{z\geq 0}$, il suffit de conditionner séparément le premier par $U_{\tau_r^a}$ et le second par $V_{\tau_r^a}$. D'après les théorèmes de Ray-Knight, le processus $(L^{a-z}_{\tau_r^a})_{z\geq 0}$ est markovien inhomogène. Or la variable $U_{\tau_r^a}$ ne dépend que de la restriction de ce processus à l'intervalle $[0, a]$. Donc après conditionnement par rapport à $U_{\tau_r^a}$, le processus $(L^{-z}_{\tau_r^a})_{z\geq 0}$ reste un carré de Bessel de dimension 0 indépendant de $(L^{a-z}_{\tau_r^a})_{0\leq z\leq a}$ conditionnellement à $L^0_{\tau_r^a}$.

La loi du processus $(L^z_{\tau^a_r})^{z\in\mathbf{R}}$ sachant que $(U_{\tau^a_r}, V_{\tau^a_r}) = (u, v)$ est donc la loi $Q_{a,r,u,v}$ définie comme suit. En notant $\ell = (\ell(z))_{z\in\mathbf{R}}$ le processus canonique sur $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$, sa loi sous $Q_{a,r,u,v}$ est donnée par les propriétés suivantes :

- les restrictions de ℓ aux intervalles $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont indépendantes ;
- les restrictions de ℓ aux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, a]$ sont indépendantes conditionnellement à $\ell(0)$;
- le processus $(\ell(a+z))_{z\geq 0}$ est un carré de Bessel de dimension 0 issu de r conditionné à ce que son intégrale vaille v ;
- le processus $(\ell(a-z))_{0\leq z\leq a}$ est un carré de Bessel de dimension 2 issu de r conditionné à ce que son intégrale vaille u ;
- le processus $(\ell(-z))_{z\geq 0}$ est un carré de Bessel de dimension 0.

Nous expliciterons les lois des carrés de Bessel conditionnés par leur intégrale aux paragraphes II.3 et II.4. Mais voyons d'abord en quoi les lois $Q_{a,r,u,v}$ sont utiles pour notre problème.

2. Application à la description des lois $\mathcal{L}(P^{\tau^+_s})$.

Comme les variables $U_{\tau^a_r}$ et $V_{\tau^a_r}$ sont indépendantes et de densité $g_a(r, \cdot)$ et $f(r, \cdot)$, le conditionnement ci-dessus fournit la désintégration suivante :

$$\mathcal{L}(P^{\tau^a_r}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v}) g_a(r, u) f(r, v)\, du\, dv\,.$$

Intégrons cette formule par rapport à a et r. En admettant la mesurabilité de l'application

$$(a, r, u, v) \longmapsto (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v})[F] g_a(r, u) f(r, v),$$

pour toute fonctionnelle F mesurable positive sur $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ on peut intervertir les intégrales et écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(M) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau^a_r})\, da\, dr \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v}) g_a(r, u) f(r, v)\, da\, dr\, du\, dv\,.\end{aligned}$$

Sous la loi $Q_{a,r,u,v}$, les paramètres u et v représentent les intégrales du processus canonique ℓ sur les intervalles $[0, a]$ et $[a, +\infty[$. La quantité $s = u + v$ représente donc l'intégrale sur $\mathbf{R}_+$. Écrivons :

$$\mathcal{L}(M) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u}) g_a(r, u) f(r, s-u)\, da\, dr\, du\right) ds$$

(on peut intégrer par rapport à u sur l'intervalle $[0, +\infty[$ tout entier car $f(r, v) = 0$ pour $v \leq 0$).

Cette égalité constitue une désintégration par rapport à la fonctionnelle Λ_μ de la mesure $\mathcal{L}(M)$, dont on connaissait la désintégration :

$$\mathcal{L}(M) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_s^+})\, ds\,.$$

Par unicité essentielle de la désintégration, on a donc pour presque tout $s \in \mathbf{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(P^{\tau_s^+}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u}) g_a(r,u) f(r,s-u)\, da\, dr\, du\,.$$

En fait, l'égalité a lieu pour tout $s \in \mathbf{R}_+^*$ par continuité, ce que nous justifierons au paragraphe II.5.

Remarque. — Les égalités

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_s^+})\, ds = \mathcal{L}(M)$$
$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u}) g_a(r,u) f(r,s-u)\, da\, dr\, du\right) ds$$

et le fait que $\Lambda_\mu = s$ presque sûrement sous les lois $\mathcal{L}(P^{\tau_s^+})$ et $\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u}$ montrent en particulier que :

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_a(r,u) f(r,s-u)\, da\, dr\, du = 1$$

pour (presque) tout $s \in \mathbf{R}_+^*$, c'est-à-dire que l'application $(a,r,u) \longmapsto g_a(r,u) f(r,s-u)$ est bien une densité de probabilité sur $(\mathbf{R}_+^*)^3$. Cette propriété n'est en fait qu'une conséquence de l'identité :

$$\int_0^{+\infty} P^{\tau_s^+}\, ds = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} P^{\tau_r^a}\, dr\right) da\,.$$

Nous allons maintenant donner une version plus explicite des carrés de Bessel conditionnés par leur intégrale qui interviennent dans la loi $Q_{a,r,u,v}$.

On note (X_z) le processus canonique sur $\mathcal{C}([0,a],\mathbf{R}_+)$ ou sur $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$, $(\mathcal{F}_z)$ la filtration canonique, et $Y_\cdot = \int_0^\cdot X_w\, dw$ la primitive de $X_\cdot$ nulle en 0.

Nous allons exhiber des versions régulières (et mêmes continues) des lois conditionnelles $Q_r^2[\,\cdot \mid Y_a = u]$ et $Q_r^0[\,\cdot \mid Y_\infty = v]$.

3. Description de la loi $Q_r^2[\,\cdot \mid Y_a = u]$.

Soient $z \in [0, a[$, $A \in \mathcal{F}_z$ et B un borélien de $\mathbf{R}_+$. D'après la propriété de Markov, on a :

$$
\begin{aligned}
Q_r^2[A\,;Y_a \in B] &= Q_r^2\left[A\,;Y_z + \int_0^{a-z} X_{z+w}\,dw \in B\right] \\
&= Q_r^2\left[\mathbb{1}_A \cdot \int_{\mathbf{R}} \mathbb{1}_B(Y_z + y) g_{a-z}(X_z, y)\,dy\right] \\
&= \int_B Q_r^2\left[\mathbb{1}_A\, g_{a-z}(X_z, u - Y_z)\right]\,du \\
&= \int_B Q_r^2\left[\mathbb{1}_A\, h_u(X_z, Y_z, z)\right] g_a(r,u)\,du
\end{aligned}
$$

où $h_u(x, y, z) = \frac{g_{a-z}(x,u-y)}{g_a(r,u)}$ pour $x, y, z \in \mathbf{R}_+$.

On peut donc prendre comme version régulière des lois conditionnelles $Q_r^2[\,\cdot \mid Y_a = u]$ la famille de probabilités définies par :

$$Q_r^2[A \mid Y_a = u] = Q_r^2[\mathbb{1}_A\, h_u(X_z, Y_z, z)] \text{ pour } A \in \mathcal{F}_z\,.$$

Sous la loi Q_r^2, le processus $(X_z, Y_z, z)_{0\leq z\leq a}$ est markovien de générateur :

$$L = 2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Donc, d'après la théorie des h-processus (voir proposition 3.9 de [8]), sous la loi $Q_r^2[\,\cdot \mid Y_a = u]$, le processus $(X_z, Y_z, z)_{0\leq z<a}$ est markovien de générateur :

$$
\begin{aligned}
h_u^{-1}L(h_u\cdot) &= L + h_u^{-1}4x\frac{\partial h_u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= 2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 + 4x\frac{\partial_1 g_{a-z}}{g_{a-z}}(x, u-y)\right)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,.
\end{aligned}
$$

Sous la loi $Q_r^2[\,\cdot\,|Y_a = u]$, le processus $(X_z, \int_z^a X_w\,dw, z)_{0\leq z<a}$ est donc markovien de générateur :

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 + 4x\frac{\partial_1 g_{a-z}}{g_{a-z}}(x, y)\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

4. Description de la loi $Q_r^0[\,\cdot \mid Y_\infty = v]$.

Notons $\zeta_0 = \inf\{z \in \mathbf{R}_+ \mid X_z = 0\}$. D'après la propriété de Markov, on a pour tout

$z > 0$, $A \in \mathcal{F}_z$ et tout borélien B de $\mathbf{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
Q_r^0[A\,;z < \zeta_0\,;Y_\infty \in B] &= Q_r^0\left[A\,;z < \zeta_0\,;Y_z + \int_0^{+\infty} X_{z+w}dw \in B\right] \\
&= Q_r^0\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\{z<\zeta_0\}}\int_{\mathbf{R}}\mathbb{1}_B(Y_z+y)f(X_z,y)\,dy\right] \\
&= \int_B Q_r^0\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\{z<\zeta_0\}}f(X_z,v-Y_z)\right]\,dv \\
&= \int_B Q_r^0\left[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\{z<\zeta_0\}}h_v(X_z,Y_z)\right]f(r,v)\,dv
\end{aligned}$$

où $h_v(x,y) = \frac{f(x,v-y)}{f(r,v)}$ pour $x, y \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

En choisissant convenablement la version régulière des lois conditionnelles par rapport à Y_∞, on a donc pour tout $v \in \mathbf{R}_+^*$:

$$Q_r^0[A\,;z<\zeta_0 \mid Y_\infty = v] = Q_r^0[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\{z<\zeta_0\}}h_v(X_z,Y_z)]\,.$$

Or sous la loi Q_r^0, le processus $(X_z,Y_z)_{0\le z<\zeta_0}$ est markovien de générateur $L = 2x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y}$. Donc sous la loi $Q_r^0[\,\cdot \mid Y_\infty = v]$, le processus $(X_z,Y_z)_{0\le z<\zeta_0}$ est markovien de générateur

$$\begin{aligned}
h_v^{-1}L(h_v\cdot) &= L + h_v^{-1}4x\frac{\partial h_v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = L + 4x\frac{\partial_1 f}{f}(x,v-y)\frac{\partial}{\partial x} \\
&= 2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4 - \frac{x^2}{v-y}\right)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\,.
\end{aligned}$$

Donc sous la loi $Q_r^0[\,\cdot \mid Y_\infty = v]$, le processus $(X_z, \int_z^{+\infty}X_w\,dw)_{0\le z<\zeta_0}$ est markovien de générateur $2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4-\frac{x^2}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Le processus $\left(X_z, \int_z^{+\infty}X_w\,dw\right)_{z\ge 0}$ est donc une diffusion issue de (r,v), de générateur $2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(4-\frac{x^2}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, arrêtée lorsqu'elle atteint $(0,0)$.

5. Justification des points manquants du II.2.

Dans le paragraphe II.2, nous avons admis la mesurabilité de l'application :

$$(a,r,u,v) \longmapsto (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v})[F]g_a(r,u)f(r,v)$$

pour toute fonctionnelle mesurable positive F sur $\mathbf{R}\times\mathcal{C}_c(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$, ainsi que la continuité de l'application :

$$s \longmapsto \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(\delta_a\otimes Q_{a,r,u,s-u})g_a(r,u)f(r,s-u)\,da\,dr\,du\,,$$

pour obtenir l'égalité pour tout $s > 0$:

$$P^{\tau_s^+} = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(\delta_a\otimes Q_{a,r,u,s-u})g_a(r,u)f(r,s-u)\,da\,dr\,du\,.$$

En fait, pour obtenir cette égalité, il suffit de montrer l'égalité des lois fini-dimensionnelles correspondantes. On fixe donc n points $z_1, \dots, z_n$, une fonction continue bornée ψ_0 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, et $n+1$ fonctions bornées $\psi_1, \dots, \psi_n, \varphi$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$. On note F et G les fonctionnelles positives sur $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ définies par :

$$G(a, \ell) = \psi_0(a)\psi_1(\ell(z_1)) \cdots \psi_n(\ell(z_n))$$
$$F(a, \ell) = G(a, \ell)\varphi\left(\int_0^{+\infty} \ell(z)\, dz\right) .$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v})[F] &= (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v})[G]\varphi(u+v) \\ &= \psi_0(a) Q_{a,r,u,v}\left[\psi_1(\ell(z_1)) \cdots \psi_n(\ell(z_n))\right] \varphi(u+v) ,\end{aligned}$$

en notant $(\ell(z))_{z\in\mathbf{R}}$ le processus canonique sur $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$. On vérifie que la quantité $Q_{a,r,u,v}\left[\psi_1(\ell(z_1)) \cdots \psi_n(\ell(z_n))\right]$ dépend continûment de chacune des variables a, r, u, v, ainsi que la quantité $g_a(r, u) f(r, v)$.

L'application $(a, r, u, v) \longmapsto (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v})[F] g_a(r, u) f(r, v)$ est donc mesurable ce qui permet d'appliquer le théorème de Fubini-Tonnelli. On a ainsi :

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_s^+})[G]\varphi(s)\, ds \\ &\quad= \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_s^+})[F]\, ds = \mathcal{L}(M)[F] \\ &\quad= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_r^a})[F]\, da\, dr \\ &\quad= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,v})[F] g_a(r, u) f(r, v)\, da\, dr\, du\, dv \\ &\quad= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u})[G] g_a(r, u) f(r, s-u)\, da\, dr\, du\right) \varphi(s)\, ds .\end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour toute fonction φ continue bornée de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, on a donc pour presque tout $s \in \mathbf{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(P^{\tau_s^+})[G] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u})[G] g_a(r, u) f(r, s-u)\, da\, dr\, du .$$

Il reste à montrer la continuité de chaque membre vis à vis de s pour obtenir l'égalité pour tout $s \in \mathbf{R}_+^*$. Le membre de gauche est égal à :

$$E\left[\psi_0(B_{\tau_s^+})\psi_1(L^{z_1}_{\tau_s^+}) \cdots \psi_n(L^{z_n}_{\tau_s^+})\right] .$$

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée, compte tenu de ce que $\tau_s^+ \to \tau_{s_0}^+$ presque sûrement quand $s \to s_0$.

Pour le membre de droite, on remarque que les fonctions

$$h_s : (a, r, u) \mapsto g_a(r, u) f(r, s-u)$$

convergent simplement vers la fonction h_{s_0} quand $s \to s_0$. Toutes ces fonctions étant positives et d'intégrale 1, il y a également convergence dans $L^1((\mathbf{R}_+^*)^3)$. En effet, comme la fonction $h_s - h_{s_0}$ est d'intégrale nulle, on a :

$$\|h_s - h_{s_0}\|_1 = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(h_{s_0} - h_s)_+(a, r, u)\, da\, dr\, du\,,$$

et on peut utiliser la domination $(h_{s_0} - h_s)_+ \le h_{s_0}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u})[G]\, h_s(a, r, u)\, da\, dr\, du \\
&\qquad - \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s_0-u})[F]\, h_{s_0}(a, r, u)\, da\, dr\, du \\
&\quad = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u})[G](h_s(a, r, u) - h_{s_0}(a, r, u))\, da\, dr\, du \\
&\qquad + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}((\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s-u})[G] - (\delta_a \otimes Q_{a,r,u,s_0-u})[G])\, h_{s_0}(a, r, u)\, da\, dr\, du
\end{aligned}$$

et on termine en utilisant la continuité de l'application $s \mapsto Q_{a,r,u,s-u}[G]$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

III. Démonstration du théorème 1

Dans cette partie, on prend la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ comme mesure μ. La mesure M correspondante M est :

$$M = \int_0^{+\infty} P^t\, dt = \int_{\mathbf{R}}\left(\int_0^{+\infty} P^{\tau_r^a}\, dr\right)\, da,$$

et la fonctionnelle Λ_μ est l'application $(a, \ell) \longmapsto \int_{\mathbf{R}} \ell(y)\, dy$ de $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ dans $\mathbf{R}_+$. L'égalité :

$$\mathcal{L}(M) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^t)\, dt$$

représente la désintégration de la mesure $\mathcal{L}(M)$ par rapport à la fonctionnelle Λ_μ. Nous allons obtenir une autre expression de cette désintégration en décrivant, pour tout $a \in \mathbf{R}^*$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$, les lois conditionnelles du processus $(L^z_{\tau_r^a})^{z\in\mathbf{R}}$ par rapport à son intégrale $\int_{\mathbf{R}} L^y_{\tau_r^a}\, dy$. La première étape consiste à conditionner le processus $(L^z_{\tau_r^a})^{z\in\mathbf{R}}$ par rapport au quadruplet $(L^0_{\tau_r^a}, U_{\tau_r^a}, V_{\tau_r^a}, V'_{\tau_r^a})$

1. Conditionnement du processus $(L^z_{\tau^a_r})^{z\in\mathbf{R}}$ par rapport au quadruplet $(L^0_{\tau^a_r}, U_{\tau^a_r}, V_{\tau^a_r}, V'_{\tau^a_r})$.

Par symétrie, on peut se contenter de décrire les lois conditionnelles pour $a \in \mathbf{R}_+^*$. D'après les théorèmes de Ray-Knight, la variable $L^0_{\tau^a_r}$ admet comme densité $r' \mapsto q_a(r, r')$, et conditionnellement à $L_{\tau^a_r} = r'$:

- les processus $(L^{a+z}_{\tau^a_r})_{z\geq 0}$, $(L^{-z}_{\tau^a_r})_{z\geq 0}$ et $(L^{a-z}_{\tau^a_r})_{0\leq z\leq a}$ sont indépendants ;
- les processus $(L^{a+z}_{\tau^a_r})_{z\geq 0}$ et $(L^{-z}_{\tau^a_r})_{z\geq 0}$ sont des carrés de Bessel de dimension 0 respectivement issus de r et r' ;
- le processus $(L^{a-z}_{\tau^a_r})_{0\leq z\leq a}$ est un pont de carré de Bessel de dimension 2, de longueur a, et de r à r'.

La loi du processus $(L^z_{\tau^a_r})^{z\in\mathbf{R}}$ sachant que $(L^0_{\tau^a_r}, U_{\tau^a_r}, V_{\tau^a_r}, V'_{\tau^a_r}) = (r', u, v, v')$ est donc la loi $Q_{a,r,r',u,v,v'}$ sous laquelle le processus canonique $\ell = (\ell(z))_{z\in\mathbf{R}}$ sur $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ possède les propriétés suivantes :

- les restrictions de ℓ aux intervalles $]-\infty, 0]$, $[0, a]$ et $[a, +\infty[$ sont indépendantes ;
- le processus $(\ell(a+z))_{z\geq 0}$ est un carré de Bessel de dimension 0 issu de r conditionné à ce que son intégrale vaille v ;
- le processus $(\ell(-z))_{z\geq 0}$ est un carré de Bessel de dimension 0 issu de r' conditionné à ce que son intégrale vaille v' ;
- le processus $(\ell(a-z))_{0\leq z\leq a}$ est un pont de carré de Bessel de dimension 2, de longueur a, de r à r', conditionné à ce que son intégrale vaille u.

Les lois de carrés de Bessel de dimension 0 conditionnés par leur intégrale ont été explicitées au paragraphe II.4. Les lois des ponts de carrés de Bessel de dimension 2 conditionnés par leur intégrale s'explicitent par une méthode semblable à celle que nous avons utilisée au paragraphe II.3.

En notant X le processus canonique sur $\mathcal{C}([0, a], \mathbf{R})$ et $Y = \int_0^\cdot X_z\, dz$, on trouve que sous la loi $Q^{2,a}_{r,r'}$, le processus $(X_z, Y_z, z)_{0\leq z<a}$ est markovien de générateur :

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 + 4x\frac{\partial_1 q_{a-z}}{q_{a-z}}(x, r')\right)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

sous la loi conditionnelle $Q^{2,a}_{r,r'}[\,\cdot \mid Y_a = u]$, le processus $(X_z, Y_z, z)_{0\leq z<a}$ est markovien de générateur :

$$2x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2 + 4x\left(\frac{\partial_1 q_{a-z}}{q_{a-z}}(x, r') + \frac{\partial_1 g_{a-z}}{g_{a-z}}(x, r', u-y)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. Application à la description des lois $\mathcal{L}(P^t)$.

Conditionnellement à $L^0_{\tau^a_r} = r'$, les variables aléatoires $U_{\tau^a_r}$, $V_{\tau^a_r}$ et $V'_{\tau^a_r}$ sont indépendantes de densités $g_{|a|}(r, r', \cdot)$, $f(r, \cdot)$ et $f(r', \cdot)$. Le conditionnement du processus $(L^z_{\tau^a_r})^{z\in\mathbf{R}}$ par rapport au quadruplet $(L^0_{\tau^a_r}, U_{\tau^a_r}, V_{\tau^a_r}, V'_{\tau^a_r})$ fournit la désintégration suivante :

$$\mathcal{L}(P^{\tau^a_r}) = \int_{(\mathbf{R}_+)^4} (\delta_a \otimes Q_{a,r,r',u,v,v'})q_{|a|}(r, r')g_{|a|}(r, r', u)f(r, v)f(r', v')\, dr'\, du\, dv\, dv'.$$

En intégrant cette formule par rapport à $da\, dr$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, on obtient :

$$\mathcal{L}(M) = \int_{\mathbf{R}\times(\mathbf{R}_+)^5} (\delta_a \otimes Q_{a,r,r',u,v,v'})q_{|a|}(r, r')g_{|a|}(r, r', u)f(r, v)f(r', v')\, da\, dr\, dr'\, du\, dv\, dv'.$$

Sous la loi $Q_{a,r,r',u,v,v'}$, l'intégrale sur $\mathbf{R}$ du processus canonique ℓ vaut $u+v+v'$. Effectuons donc le changement de variables $t = u + v + v'$ dans l'intégrale ci-dessus. On obtient :

$$\mathcal{L}(M) = \int_{\mathbf{R}\times(\mathbf{R}_+)^5} (\delta_a \otimes Q_{a,r,r',t-v-v',v,v'})q_{|a|}(r, r')g_{|a|}(r, r', t-v-v') \\ f(r, v)f(r', v')\, da\, dr\, dr'\, dt\, dv\, dv'.$$

On peut garder $\mathbf{R} \times (\mathbf{R}_+)^5$ comme domaine d'intégration compte-tenu de ce que $g_{|a|}(r, r', u) = 0$ pour $u < 0$.

Par unicité essentielle de la désintégration de la mesure $\mathcal{L}(M)$ par rapport à la fonctionnelle Λ_μ, on a ainsi :

$$\mathcal{L}(P^t) = \int_{\mathbf{R}\times(\mathbf{R}_+)^4} (\delta_a \otimes Q_{a,r,r',t-v-v',v,v'})q_{|a|}(r, r')g_{|a|}(r, r', t-v-v') \\ f(r, v)f(r', v')\, da\, dr\, dr'\, dv\, dv'$$

pour presque tout $t \in \mathbf{R}^*_+$. On montre comme au paragraphe II.5 que cette identité est en fait vraie pour tout $t \in \mathbf{R}^*_+$, par continuité.

IV. Remarques

1. Une généralisation possible de la méthode.

Dans les parties II et III, nous nous sommes servis des identités :

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} P^t\, dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} P^{\tau^a_r}\, dr \right) da$$

$$(2) \qquad \int_0^{+\infty} P^{\tau^+_s}\, ds = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} P^{\tau^a_r}\, dr \right) da$$

pour décrire les lois $\mathcal{L}(P^t)$ et $\mathcal{L}(P^{\tau_s^+})$. Il est tout à fait possible d'obtenir des résultats proches de ceux de T. Jeulin [3], en décrivant plus généralement les lois $\mathcal{L}(P^{\tau_s^\mu})$ pour une large classe de mesures μ. Il suffit pour cela d'appliquer la même méthode avec l'identité plus générale suggérée par J. Azema :

$$(3) \qquad \int_0^{+\infty} P^{\tau_s^\mu}\, ds = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} P^{\tau_r^a}\, dr \right) \mu(da)$$

Mais, dans cette généralité, les formules obtenues sont alors fort lourdes, peu explicites, et perdent une partie de leur intérêt.

On obtient des formules explicites dans le cas particulier où μ est une combinaison des mesures de Lebesgue sur $\mathbf{R}_+$ et sur $\mathbf{R}_-$. Les deux lois que nous avons étudiées en sont les exemples les plus simples et les plus intéressants.

2. Lien entre les théorèmes de Ray-Knight "à temps fixe" et à temps exponentiel indépendant.

Une idée pour décrire les lois $\mathcal{L}(P^t)$ consiste à partir de la loi $\mathcal{L}(P^T)$ où T est un temps exponentiel indépendant de B, donnée par le théorème de Ray, et à conditionner par $T = \int_{\mathbf{R}} L_T^x\, dx$. T. Jeulin a utilisé cette méthode ainsi que la théorie du grossissement de filtrations pour décomposer la semi-martingale $(L_t^x)^{x\in\mathbf{R}}$.

Il est possible de retrouver le théorème 1 en déduisant les lois $\mathcal{L}(P^t)$ de la loi $\mathcal{L}(P^T)$: on commence par conditionner le couple formé de la variable B_T et du processus $(L_T^z)^{z\in\mathbf{R}}$ par le 6-uplet $(B_T, L_T^{B_T}, L_T^0, U_T, V_T, V_T')$, puis on conditionne par $T = U_T + V_T + V_T'$ seulement.

Cette méthode a l'inconvénient de faire intervenir des lois moins "classiques" que celles des carrés de Bessel. Mais en fait, elle n'est pas vraiment différente de celle que nous avons menée au paragraphe III.2. En effet, la formulation simple du théorème de Ray, due à Biane et Yor [1] se démontre à partir des deux théorèmes de Ray et Knight les plus connus, et d'une identité en loi très voisine de l'identité (1) que nous utilisons (voir à ce sujet [5]).

3. Lien avec les travaux de R. Van der Hofstad, F. den Hollander, W. König.

Sous une formulation différente, mais équivalente à celle de notre théorème 1, le lemme 1 de [10] indique :

- la densité du 5-uplet $(B_t, L_t^{B_t}, L_t^0, V_t, V_t')$;
- l'indépendance des processus $(L_t^{B_t+z})_{z\geq 0}$, $(L_t^{-z})_{z\geq 0}$ et $(L_t^{B_t-z})_{0\leq z\leq B_t}$ sachant que $(B_t, L_t^{B_t}, L_t^0, V_t, V_t') = (a, r, r', v, v')$ pour $(a, r, r', v, v') \in {\mathbf{R}_+}^5$.

En revanche, R. Van der Hofstad, F. den Hollander et W. König se contentent de décrire la loi conditionnelle de ces processus comme celle de carrés, ou de ponts de carrés de Bessel conditionnés par leur intégrale. Ils n'ont pas explicité le générateur des couples formés des temps locaux et de leur primitive sur les trois intervalles délimités par 0 et B_t, mais ils n'en avaient pas besoin pour obtenir les théorèmes limites qui étaient le but de leur article.

Pour justifier le lemme 1, ils ont fait les observations suivantes :

- l'application $(a, r) \longmapsto \tau_r^a$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$ est injective et admet comme inverse à gauche l'application $t \mapsto (B_t, L_t^{B_t})$. Elle est "presque" bijective au sens où pour tout $t > 0$:
$$\tau^{B_t}_{L_t^{B_t}} = t \text{ presque sûrement}.$$
- On a l'identité en loi suivante :
$$(*) \qquad P[\tau_r^a \in dt]\, da\, dr = P[B_t \in da\,;\ L_t^{B_t} \in dr]\, dt$$

Ils ont ensuite affirmé que la loi du processus $(L_t^x)^{x \in \mathbf{R}}$ sachant que $(B_t, L_t^{B_t}) = (a, r)$ est égale à la loi du processus $(L_{\tau_r^a}^x)^{x \in \mathbf{R}}$ sachant que $\tau_r^a = t$. Comme il n'y a pas de notion intrinsèque de conditionnement par des événements de mesure nulle, cette affirmation nécessite une démonstration, et les arguments précédents ne suffisent pas.

Néanmoins, l'identité (1) que nous avons utilisée, et qui se trouve déjà dans [5] permet de donner une justification rigoureuse, en exprimant de deux manières différentes la désintégration de la mesure sur $\mathbf{R} \times \mathcal{C}_c(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$:
$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^t)\, dt = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(P^{\tau_r^a})\, dr \right) da$$
par rapport à la fonctionnelle :
$$(a, \ell) \longmapsto \left(a, \ell(a), \int_{\mathbf{R}} \ell(z)\, dz \right).$$

Signalons enfin que l'identité en loi $(*)$ de R. Van der Hofstad, F. den Hollander et W. König peut être vue comme un corollaire de l'identité trajectorielle :
$$\mathbb{1}_{\{\tau_r^a \in dt\}}\, da\, dr = \mathbb{1}_{\{B_t \in da\,;L_t^{B_t} \in dr\}} dt,$$
que l'on démontre comme le lemme 5.

Bibliographie

[1] BIANE P., YOR M. — *Sur la loi des temps locaux pris en un temps exponentiel*, Sém. Prob. XXII, LNM **1321**, Springer (1988), 454–466.

[2] EISENBAUM N. — *Un théorème de Ray-Knight lié au suprepum des temps locaux browniens*, PTRF **87** (1990), 79–95.

[3] JEULIN T., YOR M. — *Grossissement de filtrations: exemples et applications*, LNM **1118**, Springer, 1985.

[4] KNIGHT F. B. — *Random walks and a sojourn density process of brownian motion*, Trans. Am. Math. Soc. **109** (1963), 56–86.

[5] LEURIDAN C. — *Une démonstration élémentaire d'une identité de Biane et Yor*, Sém. Prob. XXX, LNM **1626**, Springer (1996), 255–260.

[6] PERKINS E. — *Local time is a semimartingale*, Z.W. **60** (1982), 79–117.

[7] RAY D. B. — *Sojourn times of a diffusion process*, Ill. J. Math. **7** (1963), 615–630.

[8] REVUZ D., YOR M. — *Continuous martingales and brownian motion*, Springer, 1991.

[9] VALLOIS P. — *Une extension des théorèmes de Ray et Knight sur les temps locaux browniens*, PTRF **88**, vol 4 (1991), 445–482.

[10] VAN DER HOFSTAD R., DEN HOLLANDER F., KÖNIG W. — *Central limit theorem for the Edwards model*, À paraître dans Annals of Probability.

– ◊ –

Christophe LEURIDAN
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail: Christophe.Leuridan@ujf-grenoble.fr

(25 octobre 1996)