FONCTION DE LITTLEWOOD-PALEY ET ESPACES DE LIPSCHITZ

par Alain SALLAZ

1. Introduction et notations

Soit ψ une fonction de Littlewood-Paley définie sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0$.

(ii) Il existe $c \geq 0$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}^n$ on ait :

$$|\psi(x)| \leq c(1+|x|)^{-(n+1)}.$$

(iii) Il existe $c \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|y| \leq \frac{|x|}{2}$ on ait :

$$|\psi(x+y) - \psi(x)| \leq \frac{c|y|^\varepsilon}{(1+|x|)^{n+1+\varepsilon}}.$$

(iii) et (i) montrent que ψ est nulle presque partout si $\varepsilon > 1$; nous supposerons désormais que ε appartient à $]0,1]$.

Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{n+1}} dx < +\infty.$$

Pour tout f de $\mathcal{M}$ nous pouvons considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$(x,y) \longmapsto f * \psi_y(x), \quad (\psi_y(x) = \frac{1}{y^n}\psi(\frac{x}{y}))$$

et la fonction de Littlewood-Paley associée à f (et à ψ) définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$g(f)(x) = \Big(\int_0^{+\infty} |f * \psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2}.$$

Enfin si $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ nous poserons $(\mathcal{V})_0 = \{f \in \mathcal{V} : g(f) \not\equiv +\infty\}$.

Dans [4] S. Wang a montré

THÉORÈME. — *Si $f \in (\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n))_0$ avec $0 < \alpha < \varepsilon$, $g(f) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\|g(f)\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

(Rappelons que $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$, désigne l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty$, cette quantité étant par définition $\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$).

L'utilisation des méthodes développées dans [1] va nous permettre de renforcer et compléter le théorème précédent ainsi que de donner une démonstration directe de celui-ci (n'utilisant pas en particulier les caractérisations données dans [3] p. 213 des fonctions lipschitziennes).

Précisément nous démontrons :

THÉORÈME. — *Soit $f \in (\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n))_0$ alors :*

(i) Si $0 < \alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, $g^2(f) \in \mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que

$$\|g^2(f)\|_{\mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) Supposons de plus $\varepsilon = 1$:

— Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $g^2(f)$ appartient à la classe Λ_* de Zygmand et il existe une constante c ne dépendant que de n telle que

$$\|g^2(f)\|_{\Lambda_*} \leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_{1/2}(\mathbb{R}^n)}.$$

— Si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $g^2(f)$ est dérivable et pour $i \in [1,n]$ $\frac{\partial}{\partial x_i}(g^2(f)) \in \mathrm{Lip}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^n)$. De plus il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(g^2(f))\right\|_{\mathrm{Lip}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} (i \in [1,n]).$$

Dans le paragraphe 2 nous énonçons et démontrons deux lemmes nous permettant de contrôler la fonction $f * \psi_y$ et nous en déduisons une démonstration directe du théorème énoncé dans [4].

Dans le paragraphe 3 nous démontrons le théorème précédemment énoncé, après avoir rappelé la définition de la classe Λ_* de Zygmund.

Dans les démonstrations qui vont suivre c désignera toujours une constante ne dépendant que de α et de n, celle-ci pouvant changer ligne à ligne.

2. Estimations sur $f * \psi_y$

LEMME 1. — *Soit $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \alpha < 1)$; il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* : |f * \psi_y(x)| \leq c\, y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. — On a

$$f * \psi_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s)\psi_y(x-s)\, ds = \int_{\mathbb{R}^n} (f(s) - f(x))\psi_y(x-s)\, ds$$

et donc

$$|f * \psi_y(x)| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |s-x|^\alpha |\psi_y(x-s)|\, ds = \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\psi_y(x)|\, dx.$$

Compte tenu de la définition de ψ_y et des conditions imposées à ψ on obtient :

$$|f * \psi_y(x)| \leq c\, y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^\alpha}{(1+|x|)^{n+1}} dx = c\, y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

LEMME 2. — *Soit $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)(0 < \alpha < 1)$; il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\forall (x,x',y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*, y \geq |x-x'| : |f*\psi_y(x) - f*\psi_y(x')| \leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \Big(\frac{|x-x'|^\varepsilon}{y^{\varepsilon-\alpha}}\Big).$$

Preuve. — On a

$$f * \psi_y(x) - f * \psi_y(x') = \int_{\mathbb{R}^n} [f(s) - f(x')][\psi_y(x-s) - \psi_y(x'-s)]\, ds$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} |\psi_y(x-s) - \psi_y(x'-s)| &= \frac{1}{y^n}\Big|\psi\Big(\frac{x-s}{y}\Big) - \psi\Big(\frac{x'-s}{y}\Big)\Big| \\ &\leq \frac{c}{y^n} \frac{\big|\frac{x-x'}{y}\big|^\varepsilon}{\big(1+\big|\frac{x'-s}{y}\big|\big)^{n+1+\varepsilon}} \quad \text{si} \quad |x-x'| \leq \frac{1}{2}|x'-s| \end{aligned}$$

pour obtenir la majoration annoncée, écrivons en posant $r = |x-x'|$

$$\begin{aligned} |f * \psi_y(x) - f * \psi_y(x')| \leq &\int_{|x'-s|\geq 2r} |f(s) - f(x')|\, |\psi_y(x-s) - \psi_y(x'-s)|\, ds \\ &+ \int_{|x'-s|\leq 2r} |f(s) - f(x')|\, |\psi_y(x-s) - \psi_y(x'-s)|\, ds \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II} \end{aligned}$$

pour majorer I nous utilisons la majoration rappelée sur ψ et obtenons

$$\begin{aligned} I &\le \frac{c}{y^{n+\varepsilon}} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} |x-x'|^\varepsilon \int_{|x'-s|\ge 2r} \frac{|s-x'|^\alpha}{(1+\frac{|s-x'|}{y})^{n+1+\varepsilon}}\, ds \\ &= \frac{c}{y^{\varepsilon-\alpha}} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} |x-x'|^\varepsilon \int_{|\eta|\ge \frac{2r}{y}} \frac{|\eta|^\alpha}{(1+|\eta|)^{n+1+\varepsilon}} d\eta \le c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \frac{|x-x'|^\varepsilon}{y^{\varepsilon-\alpha}} \end{aligned}$$

pour majorer II remarquons que

$$|\psi_y(x-s)| \le \frac{c}{y^n} \frac{1}{(1+|\frac{x-s}{y}|)^{n+1}} = \frac{c}{y^n} \times \Big(\frac{1+|x'-s|/y}{1+|x-s|/y}\Big)^{n+1} \times \frac{1}{(1+\frac{|x'-s|}{y})^{n+1}}$$

et que

$$\frac{1+|x'-s|/y}{1+|x-s|/y} \le \frac{1+|x-s|/y+|x-x'|/y}{1+|x-s|/y} \le 2$$

puisque $|x-x'|/y \le 1$. D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &\le \frac{c}{y^n} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{|x'-s|\le 2r} |s-x'|^\alpha \frac{1}{(1+\frac{|s-x'|}{y})^{n+1}}\, ds \\ &= c\, y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{|\eta|\le 2r/y} \frac{|\eta|^\alpha}{(1+|\eta|)^{n+1}} d\eta \end{aligned}$$

mais

$$\int_{|\eta|\le 2r/y} \frac{|\eta|^\alpha}{(1+|\eta|)^{n+1}} d\eta = c\int_0^{2r/y} \frac{\rho^{n+\alpha-1}}{(1+\rho)^{n+1}}\, d\rho = c\frac{r}{y}$$

et donc

$$\mathrm{II} \le \frac{c}{y^{1-\alpha}} |x-x'| \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \le c\frac{|x-x'|^\varepsilon}{y^{\varepsilon-\alpha}} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Corollaire ([4]). — *Soit $f \in (\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n))_0$, $0 < \alpha < \varepsilon$. Alors $g(f) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\|g(f)\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. — Pour $r > 0$ posons

$$g_1(x) = \Big(\int_0^r |f*\psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2}, \quad g_2(x) = \Big(\int_r^{+\infty} |f*\psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2}.$$

On a grâce au lemme 1

$$g_1(x) \le c\Big(\int_0^r y^{2\alpha}\frac{dy}{y}\Big)^{1/2} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = c\, r^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|g_2(x)-g_2(x')| &= \left|\left(\int_r^{+\infty}|f*\psi_y(x)|^2\frac{dy}{y}\right)^{1/2}-\left(\int_r^{+\infty}|f*\psi_y(x')|^2\frac{dy}{y}\right)^{1/2}\right|\\ &\le \left(\int_r^{+\infty}|f*\psi_y(x)-f*\psi_y(x')|^2\frac{dy}{y}\right)^{1/2}\\ &\le c\left(\int_r^{+\infty}\frac{|x-x'|^{2\varepsilon}}{y^{2(\varepsilon-\alpha)}}\frac{dy}{y}\right)^{1/2}\times\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

La première inégalité résultant de l'inégalité triangulaire, la deuxième du lemme 2. La dernière intégrale est convergente si et seulement si $\alpha < \varepsilon$. On obtient ainsi pour $|x-x'| < r$

$$|g_2(x)-g_2(x')| \le c\, r^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}|g(f)(x)-g(f)(x')| &= \left|\left[g_1^2(x)+g_2^2(x)\right]^{1/2}-\left[g_1^2(x')+g_2^2(x')\right]^{1/2}\right|\\ &\le \left(|g_1(x)-g_1(x')|^2+|g_2(x)-g_2(x')|^2\right)^{1/2}\\ &\le c\, r^\alpha\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

3. Démonstration du théorème

Pour la première partie du théorème, en utilisant les notations du corollaire, nous écrivons en supposant $|x-x'| \le r$

$$\begin{aligned}|g_2^2(x)-g_2^2(x')| &\le \int_r^{+\infty}|f*\psi_y(x)-f*\psi_y(x')|\,|f*\psi_y(x)+f*\psi_y(x')|\frac{dy}{y}\\ &\le c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\int_r^{+\infty}\frac{r^\varepsilon}{y^{\varepsilon-\alpha}}\cdot y^\alpha\frac{dy}{y}\end{aligned}$$

en utilisant les deux lemmes précédents. Cette intégrale converge si, et seulement si, $\alpha < \varepsilon/2$ et l'on obtient

$$|g_2^2(x)-g_2^2(x')| \le c\, r^{2\alpha}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$$

d'où

$$|g^2(f)(x)-g^2(f)(x')| \le |g_1^2(x)-g_1^2(x')|+|g_2^2(x)-g_2^2(x')| \le c\, r^{2\alpha}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Remarque. — De façon élémentaire si $g^2(f)$ appartient à $\mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $g(f)$ appartient à $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Supposons maintenant $\varepsilon = +1$; la fonction ψ est dérivable presque partout ([2], p.250) et l'on a, compte tenu de la définition d'une fonction de Littlewood-Paley, pour presque tout x

$$\Big|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)\Big| \leq \frac{c}{(1+|x|)^{n+2}} \qquad (j\in[1,n])\,.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3. — *Il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que pour tout* $(x,x',y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^*$ *on ait :*

$$\Big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\Big| \leq \frac{c}{y^{1-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \qquad (j\in[1,n])$$

$$\Big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)-f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x')\Big| \leq \frac{c|x-x'|^\alpha}{y}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \qquad (j\in[1,n])\,.$$

Preuve. — On a

$$\begin{aligned}\Big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(s)\frac{1}{y^{n+1}}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\big(\frac{x-s}{y}\big)\,ds\Big|\\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n}\big[f(s)-f(x)\big]\frac{1}{y^{n+1}}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\big(\frac{x-s}{y}\big)\,ds\Big|\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\Big| &\leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}|s-x|^\alpha\frac{1}{y^{n+1}}\cdot\frac{1}{\big(1+\frac{|x-s|}{y}\big)^{n+2}}\,ds\\ &\leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\frac{y^\alpha}{y}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^\alpha}{(1+|u|)^{n+2}}\,du = \frac{c}{y^{1-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité :

$$\begin{aligned}\Big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)-f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x')\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|f(x-s)-f(x'-s)|\,\Big|\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(s)\Big|\,ds\\ &\leq c|x-x'|^\alpha\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{y^{n+1}}\frac{1}{\big(1+\frac{|s|}{y}\big)^{n+2}}\,ds\\ &= \frac{c}{y}|x-x'|^\alpha\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si $\alpha\in]\frac12,1[$, $g^2(f)$ est dérivable et que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g^2(f))(x) = \int_0^{+\infty}2(f*\psi_y(x))\cdot\big(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\big)\,\frac{dy}{y} \quad (j\in[1,n]).$$

Pour cela écrivons $g^2(f)(x)=\int_0^1|f*\psi_y(x)|^2\frac{dy}{y}+\int_1^\infty|f*\psi_y(x)|^2\frac{dy}{y}=\mathrm{I}+\mathrm{II}$. On peut appliquer le théorème de dérivation de Lebesgue pour I puisque, grâce aux lemmes 1 et 3,

$$|f*\psi_y(x)|\,|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\big)\leq c\,\frac{y^\alpha}{y^{1-\alpha}}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}=\frac{c}{y^{1-2\alpha}}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$$

cette dernière quantité étant intégrale par rapport à $\frac{dy}{y}$ sur $[0,1]$ puisque $\alpha > \frac{1}{2}$.

Pour II, fixons un point x_0 dans $\mathbb{R}^n$; nous avons

$$|f * \psi_y(x)| \leq c\big(|f * \psi_y(x_0)| + |x - x_0|^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\big)$$

et donc, grâce au lemme 3,

$$|f * \psi_y(x)|\,\Big|f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)\Big| \leq c\frac{|x - x_0|}{y^{1-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} + c \cdot \frac{1}{y^{1-\alpha}}|f * \psi_y(x_0)|$$

$\frac{1}{y^{1-\alpha}}$ est intégrable par rapport à $\frac{dy}{y}$ sur $[1, +\infty[$; $\frac{1}{y^{1-\alpha}}|f * \psi_y(x_0)|$ aussi puisque grâce à l'inégalité de Schwartz nous avons

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{y^{1-\alpha}}|f * \psi_y(x_0)|\frac{dy}{y} &\leq \Big(\int_1^\infty \frac{1}{y^{2-2\alpha}}\frac{dy}{y}\Big)^{1/2}\Big(\int_1^\infty |f * \psi_y(x_0)|^2\frac{dy}{y}\Big)^{1/2} \\ &\leq c \cdot g(f)(x_0).\end{aligned}$$

On peut donc dériver II sous le signe somme et l'on obtient la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}g^2(f)(x) = \int_0^{+\infty} 2(f * \psi_y(x)) \cdot \Big(f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)\Big)\frac{dy}{y} \quad (j \in [1,n]).$$

Pour obtenir la dernière partie du théorème réitérons, sur cette formule, le procédé du corollaire ; supposons à nouveau $r > |x - x'|$:

— d'une part,

$$\Big|\int_0^r (f * \psi_y(x)) \cdot (f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)\Big)\frac{dy}{y}\Big| \leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\int_0^r \frac{y^\alpha}{y^{1-\alpha}}\frac{dy}{y} = c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}r^{2\alpha-1}$$

grâce aux lemmes 1 et 3 ;

— d'autre part,

$$\begin{aligned}&\Big|\int_r^{+\infty}\big[(f * \psi_y(x))(f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x))\big] - \big[(f * \psi_y(x')) \cdot (f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x'))\big]\frac{dy}{y}\Big| \\ &\quad\leq \int_r^{+\infty} |f * \psi_y(x) - f * \psi_y(x')|\,|f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)|\frac{dy}{y} \\ &\qquad\qquad + \int_r^{+\infty} |f * \psi_y(x')|\,\Big|f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x) - f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x')\Big|\frac{dy}{y} \\ &\quad\leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\Big[\int_r^{+\infty}\frac{r}{y^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{y^{1-\alpha}}\frac{dy}{y} + \int_r^{+\infty} y^\alpha \cdot \frac{r^\alpha}{y} \cdot \frac{dy}{y}\Big] \\ &\quad= c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}r^{2\alpha-1}.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x_j}g^2(f)(x) - \frac{\partial}{\partial x_j}g^2(f)(x')\Big| \leq c\, r^{2\alpha-1}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour finir examinons le cas $\alpha = 1/2$; nous rappelons :

Définition. — *$\Lambda_*(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\\ y\neq 0}} \dfrac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{|y|} < +\infty$ cette quantité étant, par définition $\|f\|_{\Lambda_*}$.*

Soit (x,x') un point de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$; il existe θ et θ' dans $]0,1[$ tels que

$$|f*\psi_y|^2(x+x') - |f*\psi_y|^2(x) = 2\sum_{j=1}^n x'_j((f*\psi_y)(x+\theta x'))\cdot\big(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}\big)(x+\theta x')$$

$$|f*\psi_y|^2(x-x') - |f*\psi_y|^2(x) = -2\sum_{j=1}^n x'_j(f*\psi_y)(x-\theta' x'))\cdot\big(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}\big)(x+\theta' x')$$

(avec $x'=(x'_j)_{j\in[1,n]}$). Posons pour simplifier $\zeta = x+\theta x'$, $\zeta' = x-\theta' x'$, on obtient :

$$\begin{aligned}\big||f*\psi_y|^2(x+x')+&|f*\psi_y|^2(x-x')-2|f*\psi_y|^2(x)\big|\\ &\le 2\sum_{j=1}^n |x'_j|\,|f*\psi_y(\zeta)-f*\psi_y(\zeta')|\,\big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(\zeta)\big|\\ &\quad+2\sum_{j=1}^n |x'_j|\,|f*\psi_y(\zeta')|\,\big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(\zeta)-f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(\zeta')\big|\end{aligned}$$

qui est majoré, en utilisant les lemmes 1, 2 et 3 par

$$c|x'|\,\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\Big[\frac{|x'|}{y^{1/2}}\cdot\frac{1}{y^{1/2}}+\frac{1}{y^{1/2}}\cdot\frac{|x'|^{1/2}}{y}\Big]\qquad (y>|x'|)$$

et donc pour tout $r>|x'|$

$$\begin{aligned}\int_r^{+\infty}&\big||f*\psi_y|^2(x+x')+|f*\psi_y|^2(x-x')-2|f*\psi_y|^2(x)\big|\frac{dy}{y}\\ &\le c|x'|\,\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\cdot\Big(r\cdot\int_r^{+\infty}\frac{dy}{y^2}+r^{1/2}\int_r^{+\infty}\frac{dy}{y^{1/2}}\Big)\\ &= c|x'|\,\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Puisque pour tout u de $\mathbb{R}^n$, $\int_0^r |f*\psi_y|^2(u)\frac{dy}{y}\le c\, r\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$ (lemme 1) on a

$$\big|g^2(f)(x+x')+g^2(f)(x-x')-2g^2(f)(x)\big|\le c(r+|x'|)\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\qquad (r>|x'|).$$

D'où

$$\big|g^2(f)(x+x')+g^2(f)(x-x')-2g^2(f)(x)\big|\le c|x'|\,\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Bibliographie

[1] R. BANUELOS and J. BROSSARD. — *The area integral and its density for BMO and VMO functions*, Ark. Math. **31** (1993), 175–196.

[2] E.M. STEIN. — *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1970.

[3] A. TORDIMSKY. — *Real-variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, San Diego, Calif., 1986.

[4] S. WANG. — *Boundness of the Littewood-Paley g-function on* $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \alpha < 1)$, Illinois Journal of Mathematics **33** (1989), 531–541.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(1er juillet 1996)