DIVISEURS ESSENTIELS, COMPOSANTES ESSENTIELLES DES VARIÉTÉS TORIQUES SINGULIÈRES

par Catherine BOUVIER

Introduction

Dans ce qui suit, V est un plongement torique affine normal d'un tore T de dimension d défini sur un corps algébriquement clos k. Nous cherchons à caractériser les valuations divisorielles du corps des fractions rationnelles $k(V)$ qui interviennent nécessairement dans les désingularisations de V.

Nous désignerons par *désingularisation* de V un morphisme propre et birationnel $\pi : X \to V$ où X est une variété non singulière. Si $\pi' : X' \to V$ est une autre désingularisation de V et D une sous-variété irréductible de codimension 1 dans X, l'application birationnelle $\pi'^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ est alors définie au point générique de D parce que π' est un morphisme propre. Elle l'envoie sur le point générique d'une sous-variété irréductible Y de X' dont nous dirons qu'elle est l'image de D sur X'. Nous dirons que D est un *diviseur essentiel* relativement à V si, pour toute désingularisation $\pi' : X' \to V$, l'image de D sur X' est de codimension 1 dans X'. Nous dirons que D est une *composante essentielle* relativement à V si, pour toute désingularisation $\pi' : X' \to V$, l'image de D sur X' est une composante irréductible de la fibre $\pi'^{-1}(\pi(D))$.

Puisque V possède des désingularisations équivariantes , un diviseur essentiel relativement à V est représenté par une composante irréductible du complémentaire de T dans une variété torique X qui désingularise V. Dans [B,G-S], nous avons donné une description combinatoire des diviseurs essentiels pour les désingularisations équivariantes de V. Nous montrons ici que ces diviseurs restent essentiels lorsque l'on envisage toutes les désingularisations de V (théorème 1.2). Il suffit donc de connaître les désingularisations équivariantes de V pour comprendre les diviseurs essentiels relativement à V. Ce résultat est à rapprocher de celui de J. Fine dans [F], d'où il vient immédiatement qu'une désingularisation de V sur laquelle tout diviseur irréductible est essentiel doit être équivariante.

Si la dimension de V dépasse 2, certaines composantes irréductibles du lieu exceptionnel d'une désingularisation de V peuvent être de codimension strictement supérieure à 1. Il semble donc utile d'étudier aussi les composantes essentielles relativement à V.

Nous reprenons là, dans le cas où V est torique, une problématique exposée dans [N] par J. Nash dans un cadre plus général. Nous n'obtenons de résultats que pour les diviseurs D dont l'image sur V est une adhérence d'orbite. Si un tel diviseur D est une composante essentielle relativement à V, alors il existe une désingularisation équivariante $\pi : X \to V$ telle que l'image de D sur X soit une adhérence d'orbite de codimension 1 dans X (remarque 2.2). Nous donnons une description combinatoire des adhérences d'orbites de codimension 1 qui sont des composantes essentielles, et nous montrons qu'il suffit là encore d'envisager les désingularisations équivariantes de V pour les comprendre (théorème 2.3). À cette fin, nous considérons les morphismes de Spec $k[[t]]$ dans V qui proviennent d'une translation d'un sous-groupe à un paramètre de T par un point de T, puis nous déterminons parmi eux ceux dont les déformations ρ : Spec $k[[t,w]] \to V$ se relèvent aux désingularisations équivariantes de V. Cette dernière démarche est largement inspirée par [L-J] et des discussions avec Monique Lejeune-Jalabert, que je tiens à remercier.

1. Diviseurs essentiels

1.1. — Rappelons que le groupe M des caractères du tore T et celui N de ses sous-groupes à 1 paramètre sont des **Z**-modules libres de rang d. Pour un point m de M et un point n de N, nous noterons $\mathfrak{X}^m$ la fonction régulière sur T définie par m et $\lambda_n : k^* \to T$ le morphisme qui correspond à n. On a une dualité naturelle donnée par l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (m,n) &\longmapsto \langle m,n \rangle \end{aligned}$$

où $\langle m,n \rangle$ est l'entier tel que, pour tout t dans k^*, on ait

$$\mathfrak{X}^m(\lambda_n(t)) = t^{\langle m,n \rangle}\,.$$

Les points n de N pour lesquels le morphisme λ_n se prolonge en un morphisme de k dans V engendrent dans le **Q**-espace vectoriel $N \bigotimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ un cône polyédral fortement convexe σ. L'algèbre des fonctions régulières sur V est alors $k[\check{\sigma} \cap M]$ où $\check{\sigma}$ désigne le cône dual de σ dans l'espace vectoriel $M \bigotimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Étant donné un morphisme birationnel $\pi : X \to V$ et une sous-variété irréductible D de codimension 1 dans X, nous noterons ν_D la valuation discrète de $k(V)$ dont l'anneau est $\mathcal{O}_{X,D}$. On obtient ainsi toutes les valuations divisorielles de $k(V)$ centrées sur V ([S,Z], théorème 31, vol. II, p. 89). Une valuation ν_D induit une forme linéaire $\dot{\nu}_D$ sur M donnée par

$$\dot{\nu}_D(m) = \nu_D(\mathfrak{X}^m)\,.$$

Le vecteur $\dot{\nu}_D$ de N que l'on définit là appartient au cône σ, car pour tout point m de $\check{\sigma}$, on a $\dot{\nu}_D(m) \geq 0$, la fonction $\mathfrak{X}^m$ étant régulière sur V, et par suite sur X.

Si de plus le morphisme π est équivariant et si D est une composante irréductible de $X \setminus T$ alors le vecteur $\dot{\nu}_D$ est primitif dans N car l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,D}$ est engendré par une fonction $\mathfrak{X}^m$ pour un point m de M vérifiant $\dot{\nu}_D(m) = 1$. Réciproquement, un vecteur primitif n de $\sigma \cap N$ définit une valuation discrète ν de $k(V)$ telle que $\dot{\nu} = n$ par

$$\nu\Big(\Sigma a_m \mathfrak{X}^m\Big) = \min_m n(m)\,.$$

On a alors $\nu = \nu_D$ pour le diviseur irréductible D que l'on obtient comme lieu exceptionnel du morphisme birationnel et équivariant Spec $k[\langle n\rangle^{\vee} \cap M] \to V$.

Les subdivisions Σ de σ donnent les morphismes équivariants birationnels propres $\pi : X \to V$. Les vecteurs primitifs sur les arêtes d'une subdivision Σ sont les formes linéaires $\dot{\nu}_D$ pour D parcourant l'ensemble des composantes irréductibles de codimension 1 de $X \setminus T$. La variété X est non singulière lorsque la subdivision Σ est *régulière*, c'est-à-dire lorsque pour tout cône τ de dimension d de Σ, il existe une base de N qui engendre τ.

L'ensemble $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ est un semi-groupe pour l'addition. L'ensemble G de ses éléments irréductibles en est un système de générateurs et il est contenu dans tous les autres, G est donc l'unique système générateur minimal de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$. Il décrit les diviseurs essentiels pour les désingularisations équivariantes de V. Plus précisément, étant donné $\pi : X \to V$ une désingularisation équivariante et D une composante irréductible de codimension 1 de $X \setminus T$, la forme linéaire $\dot{\nu}_D$ appartient à G si, et seulement si, le diviseur D est essentiel pour les désingularisations équivariantes de V ([B,G-S], théorème 1.10). Nous montrons ici qu'un tel diviseur demeure essentiel lorsque l'on envisage toutes les désingularisations de V :

1.2. Théorème. — *Soit $\pi : X \to V$ une désingularisation équivariante de V et D une composante irréductible de codimension 1 de $X \setminus T$. Si D est un diviseur essentiel pour les désingularisations équivariantes de V, alors D est essentiel.*

Démonstration. — Soit $\pi' : X' \to V$ une désingularisation de V, non nécessairement équivariante. Notons Y l'image de D sur X'. Nous prouvons d'abord l'existence d'un diviseur irréductible Δ sur X' qui contient Y et pour lequel on a $\dot{\nu}_D = \dot{\nu}_\Delta$. Nous montrons ensuite que l'on a $Y = \Delta$.

1ère étape. Puisque la variété X' n'est pas singulière, l'anneau local $\mathcal{O}_{X',Y}$ est factoriel. Désignons par t_k, $1 \leq k \leq s$, les éléments irréductibles de l'anneau $\mathcal{O}_{X',Y}$ qui interviennent dans la factorisation d'au moins une fraction rationnelle $\mathfrak{X}^m$ pour un élément m de M. L'ensemble de ces facteurs irréductibles est fini car il suffit de considérer les factorisations des fractions rationnelles $\mathfrak{X}^m$ pour m parcourant une base de M et chaque fraction rationnelle n'a qu'une seule écriture réduite.

On a alors, pour tout m de M,

$$(*) \qquad \mathfrak{X}^m = u_m \prod_{k=1}^{s} t_k^{a_k(m)}$$

où $a_k(m) \in \mathbf{Z}$ et $u_m \in \mathcal{O}^*_{X',Y}$. L'anneau $\mathcal{O}_{X',Y}$ étant factoriel, chaque élément irréductible t_k engendre dans $\mathcal{O}_{X',Y}$ un idéal premier p_k de hauteur 1. Le corps k étant supposé algébriquement clos, cet idéal p_k détermine dans X' une sous-variété irréductible Δ_k de codimension 1 telle que p_k soit l'idéal des fonctions de $\mathcal{O}_{X',Y}$ nulles sur Δ_k. Dans le localisé $\mathcal{O}_{X',\Delta_k}$ de $\mathcal{O}_{X',Y}$ la fonction t_k engendre l'idéal maximal $p_k\mathcal{O}_{X',\Delta_k}$. Par suite, dans la décomposition $(*)$, on a $a_k(m) = \nu_k(\mathfrak{X}^m) = \dot{\nu}_k(m)$ où ν_k désigne la valuation discrète de $k(V)$ dont l'anneau est $\mathcal{O}_{X',\Delta_k}$.

L'anneau local $\mathcal{O}_{X,D}$ contient $\mathcal{O}_{X',Y}$. Les fonctions u_m, inversibles dans $\mathcal{O}_{X',Y}$, le sont aussi dans $\mathcal{O}_{X,D}$. On a donc, pour tout m, dans M,

$$\dot{\nu}_D(m) = \nu_D(\mathfrak{X}^m) = \sum_{k=1}^{s} \dot{\nu}_k(m)\nu_D(t_k)\,,$$

d'où l'égalité dans N :

$$\dot{\nu}_D = \sum_{k=1}^{s} \nu_D(t_k)\dot{\nu}_k\,.$$

Les formes linéaires $\dot{\nu}_k$ appartiennent à σ. Elles ne sont pas nulles, car par construction, pour chaque valeur de k, $1 \leq k \leq s$, l'une au moins des fractions rationnelles $\mathfrak{X}^m$ a un zéro ou un pôle le long de Δ_k. De plus, les entiers $\nu_D(t_k)$ sont strictement positifs car les fonctions t_k sont nulles sur Y, et par suite sur D. Or, le diviseur D est supposé essentiel pour les désingularisations équivariantes de V. La forme linéaire $\dot{\nu}_D$ appartient donc au système générateur minimal G du semi-groupe $\sigma \cap N \setminus \{0\}$. Dans l'écriture $\dot{\nu}_D = \sum_{k=1}^{s} \nu_D(t_k)\dot{\nu}_k$ on a alors $s = 1$, $\nu_D(t_1) = 1$ et $\dot{\nu}_D = \dot{\nu}_1$. Notons désormais $\Delta_1 = \Delta$. On a donc $\dot{\nu}_D = \dot{\nu}_\Delta$ et au point Y de X', les fractions rationnelles $\mathfrak{X}^m$ n'ont qu'un seul zéro ou pôle possible, c'est Δ.

2ème étape. L'application birationnelle $\varphi = \pi'^{-1} \circ \pi$ est définie au point générique de D, elle l'envoie sur le point générique de Y. Pour montrer que Y est le diviseur Δ tout entier, il suffit de montrer que l'application birationnelle φ^{-1} est définie au point générique de Y. En effet, φ^{-1} doit alors envoyer le point générique de Y sur celui de D, ce qui contraint Y à être une sous-variété de codimension 1 dans X', et puisque Δ contient Y, on a bien $Y = \Delta$.

Considérons l'ouvert U' de X' dont le complémentaire est la réunion des diviseurs de X', distincts de Δ, le long desquels l'une au moins des fractions rationnelles $\mathfrak{X}^m$ admet un zéro ou un pôle. Aucun de ces diviseurs ne contient Y, par suite l'ouvert U' contient le point générique de Y. Nous montrons que l'application birationnelle φ^{-1} est définie sur U'. Nous supposerons pour cela que le morphisme équivariant $\pi : X \to V$ provient de l'éclatement d'un idéal I de $\Gamma(V,\mathcal{O}_V)$: pour obtenir un tel morphisme, il suffit de raffiner la subdivision de σ qui donne π. L'idéal I est alors engendré par des fractions rationnelles $\mathfrak{X}^{m_j}$, $1 \leq j \leq r$, $m_j \in M$.

Dans X, on trouve un ouvert stable par le tore qui contient le point générique de D et sur lequel le faisceau d'idéaux $I\mathcal{O}_X$ est principal, engendré par un élément $\mathfrak{X}^{m_0}$ de I avec m_0 dans M. On a alors

$$\dot{\nu}_D(m_0) = \min_{1\leq j\leq r} \dot{\nu}_D(m_j)$$

et, puisque $\dot{\nu}_D = \dot{\nu}_\Delta$ dans le dual N de M,

$$\dot{\nu}_\Delta(m_0) = \min_{1\leq j\leq r} \dot{\nu}_\Delta(m_j)\,.$$

Mais le long d'un diviseur irréductible de U' distincts de Δ, aucune des fonctions $\mathfrak{X}^m$ n'a de zéro ni de pôle. On a donc, pour tout diviseur irréductible Γ de U',

$$\nu_\Gamma(\mathfrak{X}^{m_0}) = \min_{1\leq j\leq r} \nu_\Gamma(\mathfrak{X}^{m_j})\,,$$

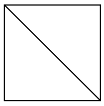
ce qui signifie que l'élément $\mathfrak{X}^{m_0}$ de I engendre le faisceau d'idéaux $I\mathcal{O}_{X'}$ sur U', car X' est normale. L'application birationnelle φ^{-1} est donc bien définie sur l'ouvert U', par la propriété universelle des éclatements. ∎

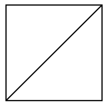
2. Composantes essentielles

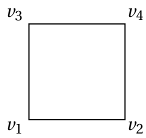
2.1. — Si V est de dimension supérieure ou égale à 3, il se peut que le lieu exceptionnel d'une désingularisation de V ne contienne aucun diviseur essentiel. Pourtant, comme le suggèrent les exemples qui suivent, certaines composantes irréductibles du lieu exceptionnel demeurent indispensables aux désingularisations de V.

Exemple 1. — Prenons l'exemple du flop torique en dimension 3 : V est le cône affine sur une quadrique de $\mathbb{P}^3$, le cône σ est engendré dans $N \bigotimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^3$ par les vecteurs $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$, $v_4 = (1,1,1)$. On obtient deux désingularisations $\pi_i : X_i \to V$, $i = 1{,}2$ en éclatant les idéaux premiers de $\Gamma(V,\mathcal{O}_V)$ qui définissent les diviseurs irréductibles contenus dans $X \setminus T$. Nous avons représenté la trace des subdivisions

Σ_i, $i = 1{,}2$ associées aux morphismes équivariants π_i, $i = 1{,}2$ dans le plan affine P de $N \bigotimes\limits_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ qui contient les points v_1, v_2, v_3 et v_4.

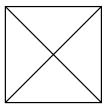
Σ_1 : 

Σ_2 : 

σ : 

Le lieu exceptionnel du morphisme π_i, $i = 1{,}2$, est une courbe irréductible C_i. Les seuls diviseurs essentiels relativement à V sont donc les diviseurs irréductibles de V.

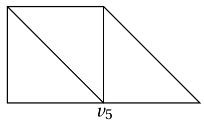
En éclatant la courbe C_i, $i = 1{,}2$, on obtient un morphisme $\varepsilon_i : Z_i \to X_i$ et puisque les variétés X_i et C_i sont non singulières, la variété Z_i ne l'est pas non plus, et le lieu exceptionnel du morphisme ε_i est un diviseur irréductible E_i. Les variétés Z_1 et Z_2 sont isomorphes et la trace dans le plan P de la subdivision Σ' associée à Z_1 est la suivante :

Σ' : 

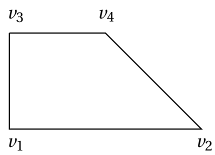
On a $\dot{v}_{E_i} = v_1 + v_4 = v_2 + v_3$. Le critère du théorème 2.3 permet d'affirmer que le diviseur $E = E_1 = E_2$ est une composante essentielle relativement à V : son image sur toute désingularisation de V est une composante irréductible de l'image réciproque du lieu singulier de V. Ici le lieu singulier de V est l'image de E sur V.

Exemple 2. — Le cône σ est engendré par les vecteurs $v_1 = (0{,}0{,}1)$, $v_2 = (2{,}0{,}1)$, $v_3 = (0{,}1{,}1)$, $v_4 = (1{,}1{,}1)$ dans $\mathbf{Q}^3$. Le lieu singulier de V est une courbe irréductible L. L'éclatement de L donne une désingularisation équivariante $\pi : X \to V$. La subdivision Σ de σ qui lui est associée a pour trace dans le plan affine P qui contient les vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$

Σ :



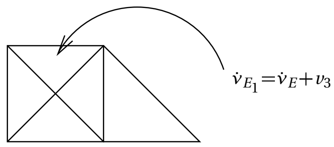
σ :



Le lieu exceptionnel du morphisme π est un diviseur irréductible E. On a $\dot{v}_E = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Le vecteur $\dot{v}_E$ appartient au système générateur minimal de $\sigma \cap N \smallsetminus \{0\}$. Le diviseur E est donc essentiel relativement à V.

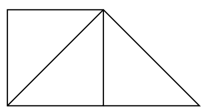
Par le morphisme π l'orbite fermée de V a pour image réciproque la réunion de deux courbes irréductibles L_1 et L_2 associées respectivement aux cônes $\langle v_3, v_5\rangle$ et $\langle v_4, v_5\rangle$ de Σ. L'éclatement de L_1 donne un morphisme équivariant $\varepsilon_1 : Z_1 \to X$ où Z_1 est non singulière. Le lieu exceptionnel de ε_1 est un diviseur irréductible E_1 et on a $\dot{v}_{E_1} = \dot{v}_E + v_3$. La subdivision Σ_1 associée à ε_1 a la trace suivante dans le plan P :

Σ_1 :

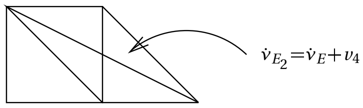


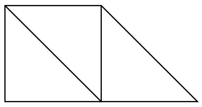
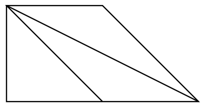
La contraction divisorielle décrite dans l'exemple 1 donne un morphisme $c_1 : Z_1 \to X_1$ et on obtient une désingularisation équivariante $\pi_1 : X_1 \to V$ dont le lieu exceptionnel possède deux composantes irréductibles : un diviseur irréductible $\widetilde{E}$ d'image E par l'application birationnelle $\varepsilon_1 \circ c_1^{-1}$ et une courbe irréductible C_1 qui est contractée par π_1 sur l'orbite fermée de V. La subdivision Σ_1' associée au morphisme π_1 a la trace suivante dans le plan P :

Σ_1' :



Des transformations analogues à partir de L_2 permettent d'isoler, dans le lieu exceptionnel d'une désingularisation équivariante $\pi_2 : X_2 \to V$ associée à une subdivision Σ_2', une composante irréductible C_2 de codimension 2 dans X_2 dont l'éclatement produit une variété Z_2 isomorphe à celle obtenue dans l'éclatement de L_2. Le lieu exceptionnel de l'éclatement de C_2 est un diviseur irréductible E_2 avec $\dot{v}_{E_2} = \dot{v}_E + v_4$. Notons Σ_2 la subdivision de σ associée à Z_2. On a les traces suivantes dans le plan P :

Σ_2 : 

Σ :  Σ_2' : 

Selon le critère du théorème 2.3, les diviseurs E_1 et E_2 produits respectivement dans les éclatements de L_1 et L_2 sont des composantes essentielles relativement à V : dans toute désingularisation $\pi' : X' \to V$ l'image de E_i, $i = 1,2$, sur X' est une composante irréductible de l'image réciproque de l'orbite fermée de V par π'. Ici l'orbite fermée de V est l'image de E_i sur V.

2.2 Remarque. — Soient $\pi : X \to V$ et $\pi' : X' \to V$ deux désingularisations de V. Une sous-variété irréductible D de codimension 1 dans X et son image Y sur X' ont toutes deux la même image sur V. Supposons que l'on puisse désingulariser Y par des éclatements de centres lisses dans Y et obtenir ainsi une variété non singulière X'' dans laquelle la transformée stricte $\widetilde{Y}$ de Y soit non singulière. C'est le cas par exemple si π et π' sont équivariantes ou si le corps k est de caractéristique nulle. Le morphisme $\varepsilon : X^{(3)} \to X''$ obtenu dans l'éclatement de $\widetilde{Y}$ a alors pour lieu exceptionnel un diviseur irréductible Δ et si le diviseur D est une composante essentielle relativement à V, alors Δ est l'image de D sur $X^{(3)}$ et on a $\nu_D = \nu_\Delta$. En effet, l'image Z de D sur $X^{(3)}$ a elle-même pour image Y sur X'. On a donc $Z \subset \Delta$. Or l'image de Δ sur V est $\pi'(Y)$ et on a $\pi'(Y) = \pi(D)$. Le diviseur Δ est donc une composante irréductible de l'image réciproque de $\pi(D)$ par le morphisme de désingularisation $X^{(3)} \to V$. Si D est une composante essentielle relativement à V, l'image Z de D sur $X^{(3)}$ doit alors être le diviseur Δ tout entier. L'application birationnelle $X^{(3)} \dashrightarrow X$ est définie au point générique de Z, qu'elle doit envoyer sur celui de D. Les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,D}$ et $\mathcal{O}_{X^{(3)},\Delta}$, vus comme sous-anneaux de $k(V)$, coïncident et on a $\nu_D = \nu_\Delta$.

2.3. — Soient $\pi : X \to V$ un morphisme équivariant et D une composante irréductible de codimension 1 de $X \setminus T$. L'image de D sur V est l'adhérence de l'orbite associée à l'unique face γ de σ dont l'intérieur $\mathring{\gamma}$ contient $\dot{\nu}_D$.

Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de M. On obtient donc d fonctions algébriquement indépendantes $\mathfrak{X}^{e_1}, \ldots, \mathfrak{X}^{e_d}$. Pour un point $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$ de T, le translaté $\omega\lambda_{\dot{\nu}_D}$:

$k^* \to T$ du sous-groupe à un paramètre $\lambda_{\dot\nu_D}$ est donné par le morphisme d'algèbres de $k[M]$ dans $k(t)$ qui envoie $\mathfrak{X}^{e_i}$ sur $\omega_i t^{\dot\nu_D(e_i)}$, $1 \le i \le d$. Il se prolonge en un morphisme de k dans V dont l'image est contenue dans l'ouvert affine Spec $k[\gamma^\vee \cap M]$ de V et en un morphisme de k dans X dont l'image est contenue dans l'ouvert affine Spec $k[\langle \dot\nu_D\rangle^\vee \cap M]$ de X. Notons $j_{D,\omega}$: Spec $k[[t]] \to V$ le morphisme défini par $\omega\lambda_{\dot\nu_D}$ et $\tilde{j}_{D,\omega}$: Spec $k[[t]] \to X$ son relèvement à X. Lorsque ω parcourt T, l'image sur X du point fermé de Spec $k[[t]]$ décrit l'orbite associée à $\dot\nu_D$, dont l'adhérence est D, et son image sur V décrit celle associée à γ, dont l'adhérence est $\pi(D)$.

Théorème. — *Soient $\pi : X \to V$ une désingularisation équivariante et D une composante irréductible de codimension 1 de $X \setminus T$. Soit γ l'unique face de σ dont l'intérieur contient $\dot\nu_D$. Les propriétés suivantes du diviseur D sont équivalentes :*

1. D est une composante essentielle relativement à V.

2. Pour tout point ω du tore et pour tout morphisme ρ : Spec $k[[t,w]] \to V$ *vérifiant :*

(i) la restriction de ρ à Spec $k[[t]]$ *coïncide avec le morphisme $j_{D,\omega}$*

et

(ii) l'image par ρ de Spec $k[[w]]$ *est contenue dans l'adhérence $\pi(D)$ de l'orbite sur V associée à γ ;*

il existe un relèvement $\tilde\rho$ de ρ à X.

3. La forme linéaire $\dot\nu_D$ appartient à l'ensemble Λ_γ où

$$\Lambda_\gamma = \Big\{ n \in \overset{\circ}{\gamma} \cap N \mid \forall \nu_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \cap N, \forall \nu_2 \in \gamma \cap N,\, n = \nu_1 + \nu_2 \Longrightarrow \nu_2 = 0 \Big\}.$$

Démonstration.

1 ⇒ 3. Si le point $\dot\nu_D$ n'appartient pas à Λ_γ, il s'écrit $\dot\nu_D = \nu_1 + \nu_2$ où $\nu_1 \in \overset{\circ}{\gamma} \cap N$, $\nu_2 \in \gamma \cap N$, $\nu_2 \neq 0$. On peut alors construire comme suit une désingularisation équivariante $\pi' : X' \to V$ telle que l'image Y de D sur X' soit contenue strictement dans une composante irréductible de $\pi'^{-1}(\pi(D))$.

Le vecteur $\dot\nu_D$ étant primitif dans N, les vecteurs ν_1 et ν_2 engendrent un cône de dimension 2 dans N. Ce cône possède une subdivision régulière minimale unique Σ_M. Le point $\dot\nu_D$ appartient à (au moins) un cône τ de dimension 2 de Σ_M, et puisque les vecteurs primitifs des arêtes de τ sont parmi les points du bord de l'enveloppe convexe de $\langle \nu_1, \nu_2\rangle \cap N \setminus \{0\}$, le vecteur $\dot\nu_D = \nu_1 + \nu_2$ se trouve en fait dans l'intérieur $\overset{\circ}{\tau}$ du cône τ. De plus, les vecteurs primitifs des arêtes de Σ_M, hormis peut-être ν_2, appartiennent à l'intérieur $\overset{\circ}{\gamma}$ de γ. Il en est donc ainsi pour l'un au moins des vecteurs extrémaux de τ, notons-le v. En procédant selon la méthode décrite en [B,G-S], théorème 1.10 ou [T-E], théorème 11, on construit une subdivision régulière Σ' de σ qui contient le cône τ. Soit alors $\pi' : X' \to V$ la désingularisation de V associée à Σ'. L'image Y de D sur X' est l'adhérence dans X' de l'orbite associée à τ, Y est donc une sous-variété de codimension 1 du diviseur D_v associé à l'arête $\langle v \rangle$ de Σ'. Mais puisque v est à l'intérieur de γ, l'image de D_v sur V est l'adhérence de l'orbite associée à γ, c'est-à-dire $\pi(D)$. Le diviseur D n'est donc pas une composante essentielle relativement à V.

3 ⇒ 2. Soit ω un point du tore et $\rho : \operatorname{Spec} k[[t,w]] \to V$ un morphisme vérifiant les conditions *(i)* et *(ii)* exigées dans la propriété 2.

L'image du point générique de Spec $k[[t]]$ par le morphisme $j_{D,\omega}$ est un point de T. Il en est de même de l'image du point générique de Spec $k[[t,w]]$ par le morphisme ρ. Le morphisme d'algèbres associé ρ^* se prolonge donc à un morphisme de $k[M]$ dans le corps des fractions de $k[[t,w]]$. L'anneau $k[[t,w]]$ étant factoriel, les images des fractions rationnelles $\mathfrak{X}^{e_i}$, $1 \leq i \leq d$, s'écrivent

$$\rho^*(\mathfrak{X}^{e_i}) = u_i \prod_{k=1}^{s} p_k(t,w)^{a_{i,k}}$$

avec, pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq k \leq s$, u_i inversible dans $k[[t,w]]$, p_k irréductible dans $k[[t,w]]$ et $a_{i,k} \in \mathbf{Z}$. Ces entiers $a_{i,k}$ définissent s éléments ν_k de N, $1 \leq k \leq s$, tels que l'on ait, pour tout m dans M, $m = \sum_{i=1}^{d} m_i e_i$,

$$\rho^*(\mathfrak{X}^m) = \Big(\prod_{i=1}^{d} u_i^{m_i}\Big) \prod_{k=1}^{s} p_k(t,w)^{\nu_k(m)}\,.$$

L'image de Spec $k[[t]]$ par le morphisme $j_{D,\omega}$ est contenue dans l'ouvert affine Spec $k[\check{\gamma} \cap M]$ de V. Il en est donc de même de celle de Spec $k[[t,w]]$ par le morphisme ρ et le morphisme ρ^* envoie $k[\check{\gamma} \cap M]$ dans $k[[t,w]]$. Puisque la décomposition en éléments irréductibles dans $k[[t,w]]$ est unique à unités près, on en déduit que les formes linéaires ν_k appartiennent au cône dual de $\check{\gamma}$, c'est-à-dire à γ. De plus, l'une d'elles appartient à $\mathring{\gamma}$ car l'image de la restriction du morphisme ρ à Spec $k[[w]]$ est contenue dans l'adhérence de l'orbite sur V associée à γ : l'image réciproque par ρ^* de l'idéal de $k[[t,w]]$ engendré par t contient donc les fonctions de $k[\check{\gamma} \cap M]$ qui s'annulent sur l'orbite associée à γ, en particulier les caractères $\mathfrak{X}^m$ pour m dans $\check{\gamma} \setminus \gamma^{\perp}$. L'écriture de $\rho^*(\mathfrak{X}^m)$ comme produit d'éléments irréductibles de $k[[t,w]]$ étant unique, l'un des $p_k(t,w)$, par exemple p_1, est égal à t et on a $\nu_1(m) > 0$ pour tout m de $\check{\gamma} \setminus \gamma^{\perp}$. Par conséquent, la forme linéaire ν_1 n'appartient à aucune face stricte de γ. C'est bien un élément de $\mathring{\gamma}$.

Ensuite, si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_D)$, la condition *(i)* donne pour tout m de $\gamma^\vee \cap M$,

$$\Big(\prod_{i=1}^{d} \omega_i^{m_i}\Big) t^{\dot\nu_D(m)} = j^*_{D,\omega}(\mathfrak{X}^m) = \Big(\prod_{i=1}^{d} u_i(t,0)^{m_i}\Big) \prod_{k=1}^{s} p_k(t,0)^{\nu_k(m)}\,.$$

Les $p_k(t,0)$, $1 \leq k \leq s$, sont donc des éléments non nuls de $k[[t]]$. Ils s'écrivent $p_k(t,0) = \delta_k t^{\alpha_k}$ où δ_k est une unité de $k[[t]]$ et α_k un entier positif ou nul. On obtient alors, pour tout m dans $\gamma^\vee \cap M$,

$$\Big(\prod_{i=1}^{d} \omega_i^{m_i}\Big) t^{\dot\nu_D(m)} = \Big(\prod_{i=1}^{d} u_i(t,0)^{m_i}\Big)\Big(\prod_{k=1}^{s} \delta_k^{\nu_k(m)}\Big) t^{\big(\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \nu_k(m)\big)}$$

et puisque $\gamma^\vee \cap M$ engendre le Z-module M, on a dans N

$$\dot\nu_D = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \nu_k\,.$$

Les ν_k, $1 \leq k \leq s$, appartiennent à γ et ν_1 à $\mathring{\gamma}$. De plus, les entiers α_k sont strictement positifs. Sinon les $p_k(t,w)$ seraient inversibles dans $k[[t,w]]$, ce qui n'est pas le cas.

Si le point $\dot\nu_D$ appartient à Λ_γ, on a alors $s = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\dot\nu_D = \nu_1$. Le morphisme ρ est donné par le morphisme d'algèbres $\rho^* : k[\gamma^\vee \cap M] \longrightarrow k[[t,w]]$ qui pour tout m de $\gamma^\vee \cap M$ envoie $\mathfrak{X}^m$ sur

$$\rho^*(\mathfrak{X}^m) = \Big(\prod_{i=1}^{d} u_i^{m_i}\Big) t^{\dot\nu_D(m)}$$

le morphisme ρ^* se prolonge donc à un morphisme de $k[\langle\dot\nu_D\rangle^\vee \cap M]$ dans $k[[t,w]]$, qui donne un relèvement de ρ à l'ouvert affine Spec $k[\langle\dot\nu_D\rangle^\vee \cap M]$ de X.

2 ⇒ 1. Supposons que dans une désingularisation $\pi' : X' \to V$ l'une des composantes irréductibles Z de $\pi'^{-1}(\pi(D))$ contienne strictement l'image Y de D sur X'. On construit alors un point ω du tore et un morphisme ρ : Spec $k[[t,w]] \longrightarrow V$ vérifiant *(i)* et *(ii)* qui ne se relève pas à X.

Lorsque le point ω parcourt le tore, l'image Q du point fermé de Spec $k[[t]]$ par le morphisme $\tilde{j}_{D,\omega}$ décrit l'orbite sur X associée à $\dot\nu_D$. Puisque cette orbite est dense dans le diviseur D, on peut choisir ω de sorte que le point Q appartienne à un ouvert U de X sur lequel l'application birationnelle $\pi'^{-1} \circ \pi : X \dashrightarrow X'$ soit définie et dont l'intersection avec $\pi^{-1}(\pi(D))$ ne rencontre aucune autre composante irréductible de $\pi^{-1}(\pi(D))$ que le diviseur D lui-même.

Le point Q a alors une image Q' sur X' par l'application birationnelle $\varphi = \pi'^{-1} \circ \pi$ et le morphisme $j_{D,\omega}$ a pour relèvement $\tilde{j}'_{D,\omega}$: Spec $k[[t]] \longrightarrow$ Spec $\widehat{\mathcal{O}}_{X',Q'}$. Soit par ailleurs h : Spec $k[[w]] \longrightarrow$ Spec $\widehat{\mathcal{O}}_{X',Q'}$ le germe en Q' d'une courbe tracée sur Z et non contenue dans l'image Y de D sur X'. L'anneau local $\mathcal{O}_{X',Q'}$ étant régulier, son complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X',Q'}$ est k-isomorphe à l'anneau des séries formelles en d variables à coefficients dans k. Soient d éléments x_i, $1 \le i \le d$ algébriquement indépendants dans $\widehat{\mathcal{O}}_{X',Q'}$ tels que l'on ait $\widehat{\mathcal{O}}_{X',Q'} = k[[x_1, \ldots, x_d]]$. On définit alors un morphisme ℓ : Spec $k[[t,w]] \longrightarrow$ Spec $\widehat{\mathcal{O}}_{X',Q'}$ en posant pour $1 \le i \le d$

$$\ell^*(x_i) = \tilde{j}'_{D,\omega}{}^*(x_i) + h^*(x_i)\,.$$

On obtient ainsi un morphisme ℓ': Spec $k[[t,w]] \to X'$ et un morphisme $\rho = \pi' \circ \ell'$: Spec $k[[t,w]] \to V$. Notons i_1 (resp. i_2) l'immersion fermée de Spec $k[[t]]$ (resp. Spec $k[[w]]$) dans Spec $k[[t,w]]$. On a alors $\rho \circ i_1 = \pi' \circ \tilde{j}'_{D,\omega} = j_{D,\omega}$, et la restriction $\rho \circ i_2$ de ρ à Spec $k[[w]]$ est le germe d'une courbe tracée sur $\pi(D)$, puisque h est le germe d'une courbe tracée sur une sous-variété Z de $\pi'^{-1}(\pi(D))$: le morphisme ρ vérifie bien les conditions *(i)* et *(ii)*.

Il ne se relève pas à X. Sinon la restriction $\tilde{\rho} \circ i_1$ à Spec $k[[t]]$ d'un tel relèvement $\tilde{\rho}$ de ρ à X serait elle-même un relèvement de $\rho \circ i_1 = j_{D,\omega}$ à X. Mais le relèvement de $j_{D,\omega}$ à X est unique, car l'application birationnelle π^{-1} est définie au point image sur X du point générique de Spec $k[[t]]$. On aurait donc $\tilde{\rho} \circ i_1 = \tilde{j}_{D,\omega}$ et le morphisme $\tilde{\rho}$ enverrait le point fermé de Spec $k[[t,w]]$ sur Q. Puisque l'application birationnelle $\varphi = \pi'^{-1} \circ \pi$ est définie en Q, on obtiendrait alors un morphisme $\varphi \circ \tilde{\rho}$: Spec $k[[t,w]] \longrightarrow X'$ qui relèverait ρ à X', tout comme ℓ'. Or l'image du point générique de Spec $k[[t,w]]$ par ρ est un point de V où l'application birationnelle π'^{-1} est définie. Les relèvements ℓ' et $\varphi \circ \tilde{\rho}$ de ρ à X' devraient donc coïncider.

Mais la restriction $\tilde{\rho} \circ i_2$: Spec $k[[w]] \longrightarrow X$ de l'hypothétique relèvement $\tilde{\rho}$ de ρ à X aurait son image dans $\pi^{-1}(\pi(D))$ puisque celle de $\rho \circ i_2$ est dans $\pi(D)$. De plus, le point fermé de Spec $k[[t,w]]$ serait envoyé sur Q par $\tilde{\rho}$ donc le point fermé de Spec $k[[w]]$ serait lui aussi envoyé sur Q par $\tilde{\rho} \circ i_2$. Puisque la seule composante irréductible de $\pi^{-1}(\pi(D))$ contenant Q est D, l'image de Spec $k[[w]]$ sur X par le morphisme $\tilde{\rho} \circ i_2$ serait contenue dans le diviseur D et l'image de Spec $k[[w]]$ sur X' par le morphisme $\varphi \circ \tilde{\rho} \circ i_2$ serait contenue dans l'image Y de D sur X'. Or par construction l'image de Spec $k[[w]]$ par le morphisme $\ell' \circ i_2 = h$ n'est pas contenue dans Y. Puisque l'on devrait avoir $\ell' = \varphi \circ \tilde{\rho}$, ceci contredit l'existence du relèvement $\tilde{\rho}$ de ρ à X. ■

Références

[B,G-S] C. Bouvier, G. Gonzalez-Sprinberg. — *Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisation de variétés toriques*, Tôhoku Math. J. **47** (1995), 125–149.

[B] C. Bouvier. — *Germes de courbes tracées sur une variété torique singulière et diviseurs essentiels*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), 387–390.

[F] J. Fine. — *On varieties isomorphic in codimension one to torus embeddings*, Duke mathematical journal (1989), 79–88.

[G-S,L-J] G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert. — *Sur l'espace des courbes tracées sur une singularité*, Algebraic Geometry and Singularities Campillo, Narvaez Editors, Progress in Math., Birkhauser **134** (1996), 9–32.

[L-J] M. Lejeune-Jalabert. — *Arcs analytiques et résolution minimale des singularités des surfaces quasi homogènes*, Springer Lecture Notes in Math. **777** (1980), 303–336.

[N] J. Nash. — *Arc structure of singularities*, Duke Math. Journal **81** (1) (1995), 31–38.

[S,Z] P. Samuel, O. Zariski. — *Commutative algebra*, Van Nostrand, 1960.

[T-E] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint Donat. — *Toroïdal embdeddings, I*, Springer Lecture Notes in Math. **339** (1973), .

– ◊ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(11 juin 1996)