Théorème d'annulation générique pour des fibrés semi-négatifs

Christophe Mourougane

Abstract : We generalize Green and Lazarsfeld theorems about generic vanishing for the cohomology of flat vector bundles to the case of semi-negative vector bundles. We also describe the structure of exceptional sets. Main tools are provided by an Hodge theory in the semi-negative case.

1 Introduction

Dans toute la suite, (X, ω) désignera une variété kählérienne compacte connexe lisse de dimension n, $F \to X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X de rang r. Φ désignera une $(0,1)-$forme harmonique sur X.

Nous noterons $\mathrm{Pic}^0(X)$ le tore complexe qui paramètre les classes d'isomorphie de fibrés en droites plats (topologiquement triviaux) sur X. Pour $y \in \mathrm{Pic}^0(X)$, λ_y désignera un représentant de y. Pour $(p, q, m) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^\star$, nous étudions les lieux exceptionnels de cohomologie :

$$S_m^{p,q}(F) := \{y \in \mathrm{Pic}^0(X) / h^{p,q}(F \otimes \lambda_y) \geq m\}.$$

Si p est nul, nous l'omettrons dans la notation $S_m^{p,q}(F)$. De même, si m vaut 1, nous l'omettrons.

Par utilisation des techniques de déformation de groupes de cohomologie, Green et Lazarsfeld ont obtenu des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels de cohomologie pour les fibrés plats [G-L1] [G-L2] [G-L3]. Cette restriction est due à l'utilisation de la théorie de Hodge comme argument ultime. Au paragraphe 2, nous étudions des notions de semi-négativité pour obtenir des outils analytiques analogues à ceux fournis par la théorie de Hodge. Nous étudions en particulier les morphismes de Lefschetz et les morphismes de produit tensoriel par une section agissant sur la cohomologie des fibrés semi-négatifs. Nous étendons au paragraphe 3 les théorèmes d'annulation générique aux fibrés semi-négatifs.

Nous définissons au paragraphe 4 une condition de dégénérescence relative à (X, F, Φ) et nous montrons que cette condition réduit à l'obstruction du premier ordre les obstructions supérieures qui apparaissent dans la déformation des classes de cohomologie de F dans la direction Φ. Nous proposons ensuite des hypothèses de semi-négativité analytiques et algébriques sur F qui assurent la condition de dégénérescence et, par suite, la structure linéaire du lieu exceptionnel de la cohomologie des déformations de F par produit tensoriel par les fibrés en droites plats.

Nous définissons ensuite une condition forte du premier ordre qui réduit les obstructions supérieures à l'obstruction du premier ordre et implique aussi l'annulation de cette dernière obstruction. Sous cette condition, toutes les déformations de F ont la même cohomologie. Nous donnons des hypothèses analytiques et algébriques qui assurent la condition forte du premier ordre.

Au paragraphe 5, nous étendons les résultats précédents au cas de la cohomologie des déformations d'un fibré en droites numériquement effectif et abondant sur une variété projective. Nous montrons au paragraphe 6 comment obtenir des résultats pour les fibrés vectoriels.

Nous noterons $\alpha = \alpha_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ le morphisme d'Albanese de X. Le prototype des théorèmes que nous obtenons est

Théorème : Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte lisse de dimension d'Albanese $\dim \alpha(X)$ et $F \to X$ un fibré en droites dont le dual est globalement engendré. Alors, pour tout $q < \dim \alpha(X)$, le lieu exceptionnel $S^q(F)$ de la cohomologie des déformations de F par les fibrés en droites plats est un ensemble analytique réunion de translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$ de codimension supérieure à $\dim \alpha(X) - q$. De plus, $S^q(F) \subset S^q(F^2) \subset S^q(F^3) \subset \cdots$.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Demailly de m'avoir indiqué le type de résultats à obtenir et de m'avoir fait part de ses idées. Je tiens à remercier Indranil Biswas de m'avoir suggéré l'utilisation de revêtements galoisiens pour le cas des fibrés abondants. Je tiens aussi à remercier Laurent Bonavero, Thierry Bouche, Laurent Manivel et Mihaïl Paun pour quelques discussions utiles.

2 Notions de semi-négativité

2.1 Définitions

Soit la variété (X, ω) et le fibré vectoriel $F \to X$ comme dans l'introduction. On munit F d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les métriques ω et h permettent de définir sur l'espace des formes à valeurs dans F un produit scalaire global noté $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$. On note $D := D' + D''$ la connexion de Chern sur le fibré holomorphe hermitien (F,h) et $\delta := \delta' + \delta''$ l'adjoint de D pour le produit scalaire $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$. Λ désigne l'adjoint de la multiplication extérieure par ω notée L agissant sur les formes différentielles à valeurs dans F. On note Δ (resp. Δ', Δ'') le Laplacien associé à l'opérateur D (resp. D', D'').

Dans ce contexte, on dispose des identités de Hodge :

$$\begin{aligned}
&[\delta'', L] = iD' \quad [\delta', L] = -iD'' \quad i.e.\ [\delta, L] = i(D' - D'')\\
&[D'', \Lambda] = i\delta' \quad [D', \Lambda] = -i\delta''
\end{aligned}$$

de la relation entre Laplaciens (conséquence de $[D', \delta''] = 0$ et de $[D'', \delta'] = 0$)

$$\Delta = \Delta' + \Delta''$$

de la relation de commutation (conséquence par l'identité de Jacobi de l'identité $[D, [\delta, L]] = 0$)

$$[\Delta, L] = 0$$

et de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano :

$$\Delta'' = \Delta' + [ic_h(F), \Lambda].$$

L'opérateur $[ic_h(F), \Lambda]$ agit ponctuellement de la manière suivante : en notant

$$\begin{aligned}
&\omega_x = i \textstyle\sum_l dz_l \wedge d\overline{z}_l\\
&ic_h(F)_x = i \textstyle\sum_{jk\lambda\mu} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\overline{z}_k e_\lambda^\star \otimes e_\mu\\
&u = \sum_{|I|=p, |J|=q, \lambda} u_{IJ}^\lambda dz_I \wedge d\overline{z}_J \otimes e_\lambda \in \Lambda^{p,q} T_x^\star X \otimes F_x,
\end{aligned}$$

et en convenant que les tenseurs $u_{I,J}^\lambda$ sont alternés en les indices I et J

$$\begin{aligned}
< [ic_h(F), \Lambda]u, u > \quad = \quad & \sum c_{jk\lambda\mu} u_{kI',J}^\lambda \overline{u}_{jI',J}^\mu\\
& + \sum c_{jk\lambda\mu} u_{I,jJ'}^\lambda \overline{u}_{I,kJ'}^\mu\\
& - \sum c_{jj\lambda\mu} u_{I,J}^\lambda \overline{u}_{I,J}^\mu .
\end{aligned}$$

Définition 1 *: On dira que le fibré vectoriel F est $(p,q)-$semi-positif s'il peut être muni d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que l'opérateur $[ic_h(F), \Lambda]$ soit semi-positif sur $\Lambda^{p,q} T^\star X \otimes F$. On dira alors que (F,h) est $(p,q)-$semi-positif.*

Puisqu'il s'agit d'une propriété de courbure, cette notion est conservée par produit tensoriel par un fibré en droites plat. Par exemple, un fibré en droites qui admet une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ à courbure semi-négative (resp. semi-positive), est $(0,q)-$ et $(p,0)-$semi-positif (resp. $(n,q)-$ et $(p,n)-$semi-positif) pour tous p et q.

On dit qu'un fibré vectoriel holomorphe est *semi-ample* si une de ses puissances symétriques est globalement engendrée. Un fibré en droites dont le dual est semi-ample est $(0,q)-$ et $(p,0)-$semi-positif pour tous p et q. Un fibré en droites semi-ample est $(n,q)-$ et $(p,n)-$semi-positif pour tous p et q.

Un fibré vectoriel globalement engendré est $(p,n)-$semi-positif pour tout p. Pour les fibrés vectoriels, on obtiendra au paragraphe 6 des théorèmes plus précis.

On utilisera essentiellement la $(0,q)-$semi-positivité et on y fera référence comme à une notion de semi-négativité. L'intérêt de cette notion repose dans le lemme suivant, conséquence simple de la semi-positivité des Laplaciens, de la relation entre Laplaciens et de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano :

Lemme 1 *: Une $(p,q)-$forme à valeurs dans un fibré vectoriel $(p,q)-$semi-positif est $\Delta''-$harmonique si et seulement si elle est $\Delta-$harmonique.*

Pour une $(p,q)-$forme ξ, $\Delta''-$harmonique à valeurs dans un fibré vectoriel hermitien $(p,q)-$positif on a

$$D'\xi = \delta'\xi = D''\xi = \delta''\xi = 0 \text{ et } [ic_h(F),\Lambda]\xi = 0.$$

2.2 Dualité de Serre

On dispose du

Lemme 2 *: Sur une variété de dimension n, un fibré est $(p,q)-$semi-positif si et seulement si son dual est $(n-p,n-q)-$semi-positif.*

Démonstration : Si $\sharp : \Lambda^{p,q}T^\star X \otimes F \to \Lambda^{n-p,n-q}T^\star X \otimes F^\star$ désigne l'opérateur de Hodge tel que

$$u \wedge \sharp v = \langle u, v\rangle dV_\omega$$

pour u et v dans $\Lambda^{p,q}T^\star X \otimes F$, et si $F^\star$ est muni de la métrique duale $h^\star$ d'une métrique h sur F, on a

$$\langle [ic_{h^\star}(F^\star),\Lambda]\sharp u, \sharp u\rangle = \langle [ic_h(F),\Lambda]u, u\rangle.$$

□

2.3 Morphisme de Lefschetz

Pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leq n$, on considère le morphisme de Lefschetz

$$H^{p,q}(X,F) \xrightarrow{L^{n-p-q}} H^{n-q,n-p}(X,F).$$

Théorème 1 *:*

(i) Si a est une $(p,q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans un fibré vectoriel hermitien $(p,q)-$semi-positif, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $L^r a$ est $\Delta''-$harmonique.

(ii) Si $p+q \leq n$ et si F est $(p,q)-$semi-positif, alors le morphisme de Lefschetz L^{n-p-q} est injectif.

(iii) Les composantes de la décomposition primitive d'une $(p,q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans un fibré vectoriel hermitien (p,q)-positif sont $\Delta''-$-harmoniques.

(iv) Si $p+q \leq n$ et si F est $(n-q,n-p)-$semi-positif, alors le morphisme de Lefschetz L^{n-p-q} est surjectif.

Démonstration :

(i) Puisque ω est kählérienne, $D''(L^r a) = 0$.

Par les identités de Hodge,

$$\begin{aligned} \delta''(L^r a) &= L^r \delta'' a + \sum_{k=0}^{r-1} L^k [\delta'', L] L^{r-k-1} a \\ &= i \sum_{k=0}^{r-1} L^k D' L^{r-k-1} a \\ &= i r L^{r-1} D' a = 0 \end{aligned}$$

par le lemme 1.

(ii) Soit a une $(p,q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans F telle que $L^{n-p-q}a$ soit $\Delta''-$exacte. D'après (i), $L^{n-p-q}a$ est $\Delta''-$harmonique et donc nulle. Soit $\sum_{r\geq 0} L^r a_r$ la décomposition primitive de a. $\sum_{r \geq 0} L^{r+n-p-q} a_r$ est une décomposition primitive de la forme nulle de bidegré $(n-q, n-p)$. Par unicité, on conclut à la nullité de a.

(iii) Soit b une $(p,q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans F. On considère $\sum_{r \geq \max(0, p+q-n)} L^r b_r$ sa décomposition primitive. Par le lemme 1, b est $\Delta-$harmonique. Puisque L et Λ commutent avec Δ, les formes b_r sont $\Delta-$harmoniques par unicité de la décomposition primitive. La relation entre Laplaciens et leur semi-positivité montrent alors que les formes b_r sont $\Delta''-$harmoniques.

(iv) Soit b une $(n-q, n-p)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans F et $\sum_{r \geq n-p-q} L^r b_r$ sa décomposition primitive. D'après (iii), les formes b_r sont $D''-$fermées. $\sum_{r \geq n-p-q} L^{r-n+p+q} b_r$ est donc un antécédent de b par L^{n-p-q}.□

Ce dernier résultat figure en bidegré $(p, 0)$ dans [En].

2.4 Produit tensoriel par une section

Pour décrire des relations d'inclusion entre lieux exceptionnels de cohomologie, on généralise le théorème d'injectivité de Kollár ([Ko] Théorème 2.2).

Théorème 2 : *Soit $F \to X$ un fibré en droites $(n, q)-$semi-positif sur une variété kählérienne compacte lisse de dimension n. Soit s une section globale non nulle d'une puissance F^k $(k \in \mathbb{N}^\star)$ de F. Alors les morphismes induits en cohomologie par le produit tensoriel par s*

$$\cdot \otimes s : H^q(K_X \otimes F^l \otimes \lambda) \to H^q(K_X \otimes F^{l+k} \otimes \lambda)$$

sont injectifs pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, et λ fibré en droites plat sur X.

Il en découlera le

Corollaire 1 : *Soit $F \to X$ et s comme dans le théorème précédent. Alors pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, les lieux exceptionnels de cohomologie vérifient*

$$S_m^{n,q}(F^l) \subset S_m^{n,q}(F^{l+k}).$$

Démonstration : Elle peut se faire en suivant [En]. On utilise ici une démarche légèrement différente. Soit h une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur F à courbure $(n, q)-$semi-positive et h_λ une métrique à courbure nulle sur λ. Soit ξ une $(n, q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans le fibré en droites $F^l \otimes \lambda$ muni de la métrique $h^l \otimes h_\lambda$.

On montre d'abord que $\xi \otimes s$ est une $(n, q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans $F^{l+k} \otimes \lambda$ muni de la métrique $h^{l+k} \otimes h_\lambda$. Il est clair que $D''(\xi \otimes s) = 0$. Par les identités de Hodge, on trouve

$$\begin{aligned} \delta''(\xi \otimes s) &= i[D', \Lambda](\xi \otimes s) = iD'\left(\Lambda(\xi \otimes s)\right) = iD'\left((\Lambda\xi) \otimes s\right) \\ &= i([D', \Lambda]\xi) \otimes s + (-1)^{\deg \xi} i\Lambda\xi \wedge D's \\ &= \delta''\xi \otimes s + (-1)^{\deg \xi} i\Lambda\xi \wedge D's = (-1)^{\deg \xi} i\Lambda\xi \wedge D's. \end{aligned}$$

Maintenant, $D''(\Lambda\xi) = [D'', \Lambda]\xi = i\delta'\xi = 0$ par le lemme 1 et $D''D's = D^2 s = c(F^k) \wedge s$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta''(\xi \otimes s) &= d''\delta''(\xi \otimes s) = i\Lambda\xi \wedge D''D's \\ &= i\Lambda\xi \wedge c(F^k) \wedge s = [ic(F^k), \Lambda]\xi \otimes s \end{aligned}$$

car ξ est de bidegré (n, q). Par l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano, ξ est en tout point de X dans le noyau de $[ic(F^l \otimes \lambda), \Lambda]$ et donc dans celui de $[ic(F^k), \Lambda]$. Ainsi $\xi \otimes s$ est $\Delta''-$harmonique.

Si de plus $\xi \otimes s$ est $D''-$exacte, elle est nulle et par conséquent ξ est nulle. □

3 Théorème d'annulation pour les fibrés semi-négatifs

Dans ce paragraphe, on se propose de démontrer le

Théorème 3 : *Soit la variété X et le fibré vectoriel F comme dans l'introduction. Soit $0 \leq q < \dim \alpha(X)$. Supposons que $F \to X$ soit $(0,q)-$semi-positif. Alors, $S^q(F)$ est un sous-ensemble analytique de $\mathrm{Pic}^0(X)$ de codimension supérieure à $\dim \alpha(X) - q$.*

Il en résultera le

Corollaire 2 : *Si de plus X est de type d'Albanese général, i.e. si $\dim \alpha(X) = \dim X$, alors $(-1)^n \chi(F) = \chi(K_X \otimes F^\star) \geq 0$.*

Exemple : On considère un tore complexe T de dimension $g \geq 2$ et le fibré en droites $L := p_1^\star \mathcal{O}(-3) \to \mathbb{P}^1 \times T =: X$ où p_1 est la première projection. L est $(0,1)-$semi-positif. La dimension d'Albanese de X est g. On a $H^1(X, L) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-3)) \simeq \mathbb{C}^2$. Mais d'après le théorème précédent, pour y générique dans $\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(T)$, $H^1(X, L \otimes \lambda_y) = 0$. C'est aussi une conséquence de la formule de Künneth.

L'outil essentiel est apporté par la

Proposition 1 : *Soit (F,h) un fibré vectoriel hermitien $(0,q)-$semi-positif. Si Φ une $(0,1)-$forme harmonique et a une $(0,q)-$ forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans (F,h), alors $\Phi \wedge a$ est $\Delta''-$harmonique.*

Démonstration : On a déjà

$$D''(\Phi \wedge a) = (\overline{\partial}\Phi) \wedge a - \Phi \wedge D''a = 0.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} i\delta''(\Phi \wedge a) &= [\Lambda, D'](\Phi \wedge a) \\ &= \Lambda D'(\Phi \wedge a) \quad \text{car } \Phi \wedge a \text{ est de type } (0, q+1) \\ &= \Lambda(\Phi \wedge D'a) \quad \text{car } \Phi \text{ est harmonique} \\ &= 0 \quad \text{d'après le lemme 1.} \end{aligned}$$

□

Remarque : par le même calcul, on prouve que le produit extérieur d'une $(0,q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans un fibré $(0,q)-$semi-positif par une $(0,q')-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans un fibré $(0,q')-$semi-positif est $\Delta''-$harmonique pour la métrique produit.

Démonstration du théorème 3 :

L'analyticité de $S^q_m(F)$ provient de l'existence locale sur $\mathrm{Pic}^0(X)$ d'un complexe de faisceaux localement libres qui calcule la cohomologie des déformations de F ([G-L1] paragraphe 1). La proposition 1 rend possible l'utilisation de la démarche qui conduit au théorème 2.10 de [G-L1] : soit y_0 un point lisse de $S^q_m(F)$ où $h^q(X, F\otimes\lambda_{y_0}) = m \neq 0$. On prend a une $(0,q)-$forme $\Delta''-$harmonique à valeurs dans $F\otimes\lambda_{y_0}$. On définit

$$\mathcal{W} := \{\Phi\ (0,1)-\text{forme harmonique } /[\Phi\wedge a] = 0 \text{ dans } H^{q+1}(X, F\otimes\lambda_{y_0})\}.$$

Comme F, le fibré $F\otimes\lambda_{y_0}$ est $(0,q)-$semi-positif. En fait, puisqu'une forme $\Delta''-$harmonique et $D''-$exacte est nulle, la proposition 1 montre que

$$\forall\Phi\in\mathcal{W},\quad \Phi\wedge a = 0.$$

Par un lemme simple d'algèbre linéaire, pour tout $x\in X$ où $a(x)\neq 0$,

$$\dim\{\Phi(x)\in\overline{T^\star_x X}, \Phi\in\mathcal{W}\} \le \dim\{v\in\overline{T^\star_x X}/v\wedge a(x) = 0\} \le \mathrm{deg} a = q.$$

On note e est l'application d'évaluation des $(0,1)-$formes globales sur X. La transposée de la différentielle du morphisme d'Albanese α est l'application d'évaluation des $(1,0)-$formes globales sur X. Par conjugaison, on obtient donc

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rang}\alpha(x) & = & h^{0,1}(X) - \dim\ker e(x) \\ \dim\{\Phi(x)\in\overline{T^\star_x X}, \Phi\in\mathcal{W}\} & \ge & \dim\mathcal{W} - \dim\ker e(x). \end{array}$$

Par conséquent, puisque $\dim\alpha(X) = \mathrm{rang}\alpha(x)$ en un point x générique de X,

$$\mathrm{codim}(\mathcal{W}, H^1(X,\mathcal{O})) = h^{0,1}(X) - \dim\mathcal{W} \ge \dim\alpha(X) - q.$$

Le théorème du complexe dérivé ([G-L1] Théorème 1.6) affirme que, dans l'espace tangent à $\mathrm{Pic}^0(X)$ en y_0, le cône tangent en y_0 au lieu exceptionnel $S^q_m(F)$ (ici l'espace tangent au point lisse y_0 de $S^q_m(F)$) est inclus dans le lieu exceptionnel $S^q_m(D^\bullet(F,y_0))$ du complexe dérivé de F en y_0. Ce complexe est le complexe de faisceaux localement libres et triviaux

$$D^\bullet(F,y_0):\ T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)\times H^\bullet(X,F\otimes\lambda_{y_0}) \to T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)\times H^{\bullet+1}(X,F\otimes\lambda_{y_0})$$

la différentielle étant donnée en un point $z\in T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)\simeq H^1(X,\mathcal{O})$ par le produit extérieur par la $(0,1)-$forme harmonique Φ qui représente la classe de cohomologie z. En particulier, puisque $h^q(F \otimes \lambda_{y_0})$ est égal à m, le lieu $S^q_m(D^\bullet(F, y_0))$ est inclus dans $\mathcal{W}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{codim}_{y_0}(S^q_m(F), \mathrm{Pic}^0(X)) &= \mathrm{codim}(T_{y_0}S^q_m(F), T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)) \\
&\geq \mathrm{codim}(S^q_m(D^\bullet(F, y_0)), T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X)) \\
&\geq \mathrm{codim}(\mathcal{W}, H^1(X, \mathcal{O})) \geq \dim \alpha(X) - q.
\end{aligned}$$

□

Remarque : Si un groupe fini G agit sur X et de manière compatible sur $F \to X$, la construction du complexe dérivé, le théorème 1.6 de [G-L1] et par suite le théorème précédent restent valides si on s'intéresse à la cohomologie $G-$équivariante.

4 Lieux exceptionnels de cohomologie

L'étude repose sur le calcul d'une suite spectrale de déformation des groupes de cohomologie de F. On définit d'abord une condition de dégénérescence qui permet ce calcul et on présente ensuite des hypothèses de semi-négativité qui impliquent la condition de dégénérescence.

4.1 Condition de dégénérescence

Définition 2 : *Soit (X, F, Φ) comme dans l'introduction. On dira que le triplet (X, F, Φ) vérifie la condition de dégénérescence en bidegré (p, q) si pour tout couple (a, b) de $(p, q)-$formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans F tel que*

- $D''a = \Phi \wedge b$
- *b est $\Delta''-$harmonique,*

on a

$$D''a = 0.$$

Remarque : Si un groupe fini G agit sur X et de manière compatible sur $F \to X$, la condition de dégénérescence se généralise pour les formes Φ, $G-$équivariantes : il suffit de ne considérer dans la définition que les couples (a, b) de formes $G-$équivariantes.

4.2 Déformation des groupes de cohomologie

Soit y_0 un point lisse de $S^{p,q}_m(F)$ où $h^{p,q}(F \otimes \lambda_{y_0})$ est exactement égal à m. Soit $\Phi \in T_{y_0}\mathrm{Pic}^0(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O})$ tangent en y_0 à $S^{p,q}_m(F)$. Par le théorème du complexe dérivé ([G-L1] théorème 1.6), la forme Φ est dans le lieu exceptionnel $S^q_m(D^\bullet(\Omega^p_X \otimes F, y_0))$ du complexe dérivé de $\Omega^p_X \otimes F$ en y_0 ; par conséquent, les applications

$$H^{p,q-1}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \xrightarrow{\wedge\Phi} H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \xrightarrow{\wedge\Phi} H^{p,q+1}(X, F \otimes \lambda_{y_0})$$

sont nulles.

Soit Z la "droite" de $\mathrm{Pic}^0(X)$ passant par y_0 et de direction Φ. On désigne par z une coordonnée sur Z centrée en y_0. Soit $A^{p,q}(F \otimes \lambda_{y_0})$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) des $(p,q)-$formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X à valeurs dans $F \otimes \lambda_{y_0}$. Un complexe de faisceaux sur Z qui calcule la cohomologie de $(F \otimes \lambda_y)_{y \in Z}$ est ([G-L2] proposition 2.4)

$$(A^{p,\bullet}, d^\bullet) : \quad A^{p,\bullet}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Z \xrightarrow{d^\bullet} A^{p,\bullet+1}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Z$$

où

$$d = D''_{F \otimes \lambda_{y_0}} + z\Phi \wedge .$$

On notera désormais $D'' = D''_{F \otimes \lambda_{y_0}}$.

Proposition 2 : *Avec les notations précédentes, si de plus $(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \Phi)$ vérifie la condition de dégénérescence en bidegrés $(p, q-1)$ et (p,q) alors les fibres de faisceaux en y_0*

$$(\mathcal{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet))_{y_0} \text{ et } H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_Z)_{y_0}$$

sont isomorphes et par suite Z est totalement incluse dans $S^{p,q}_m(F)$.

Démonstration : L'idéal maximal $\mathcal{M}_{y_0}$ de $(\mathcal{O}_Z)_{y_0}$ induit une filtration de $B^\bullet := A^{p,\bullet}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_Z)_{y_0}$ par

$$F^s B^\bullet = A^{p,\bullet}(F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{M}_{y_0})^s$$

puis une suite spectrale ([G-L2] paragraphe 6). On convient comme dans [G-H] que $\frac{E}{F}$ est une notation pour $\frac{E}{E \cap F}$.

- En rang 0,

$$\begin{array}{rcl} E_0^{s,t} = \dfrac{F^s B^{s+t}}{F^{s+1} B^{s+t}} & \xrightarrow{d_0} & E_0^{s,t+1} \\ [a] = \left[\displaystyle\sum_{s' \geq s} a_{s'} z^{s'} \right] & \longmapsto & [z^s D'' a_s] \bmod F^{s+1} B^{s+t+1}. \end{array}$$

Donc,

$$E_1^{s,t} = H^{p,s+t}(X, F\otimes\lambda_{y_0})\otimes_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}^s_{y_0}}{\mathcal{M}^{s+1}_{y_0}}.$$

• En rang 1,

$$\begin{array}{rcl} E_1^{s,t} = \dfrac{\{a\in F^sB^{s+t}/da\in F^{s+1}B^{s+t+1}\}}{F^{s+1}B^{s+t}+d(F^sB^{s+t-1})} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{s+1,t} \\ [a] = \left[\displaystyle\sum_{s'\geq s} a_{s'}z^{s'}\right] & \longmapsto & \left[z^{s+1}(D''a_{s+1}+\Phi\wedge a_s)\right] \\ \text{avec } D''a_s = 0. & & \text{mod } F^{s+2}B^{s+t+1} \\ & & +dF^{s+1}B^{s+t}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} d_1[a] &\equiv \left[z^{s+1}D''a_{s+1} + z^{s+2}\Phi\wedge a_{s+1} + z^{s+1}\Phi\wedge a_s\right] \\ &\equiv \left[d(z^{s+1}a_{s+1}) + z^{s+1}\Phi\wedge a_s\right] \\ &\equiv \left[z^{s+1}\Phi\wedge a_s\right]. \end{aligned}$$

On simplifiera désormais comme ci-dessus les formes $D''-$exactes. Or, si $s+t = q-1$ ou q, puisque les différentielles du complexe dérivé de $\Omega_X^p\otimes F$ en y_0 sont nulles, $\Phi\wedge a_s$ est $D''-$exacte : $d_1[a]=0$.

• En rang 2,

$$\begin{array}{rcl} E_2^{s,t} = \dfrac{\{a\in F^sB^{s+t}/da\in F^{s+2}B^{s+t+1}\}}{F^{s+1}B^{s+t}+d(F^{s-1}B^{s+t-1})} & \xrightarrow{d_2} & E_2^{s+2,t-1} \\ [a] = \left[\displaystyle\sum_{s'\geq s} a_{s'}z^{s'}\right] & \longmapsto & \left[z^{s+2}\Phi\wedge a_{s+1}\right] \\ \text{avec } D''a_s = 0 & & \text{mod } F^{s+3}B^{s+t+1} \\ \text{et } D''a_{s+1}+\Phi\wedge a_s = 0. & & +dF^{s+1}B^{s+t}. \end{array}$$

Modulo $F^{s+1}B^{s+t}+d(F^{s-1}B^{s+t-1})$, on peut supposer que a_s est $\Delta''-$harmonique. La condition de dégénérescence en bidegrés $(p,q-1)$ et (p,q) montre que $D''a_{s+1}=0$ si $s+t=q-1$ ou q. Puisque les différentielles du complexe dérivé de $\Omega_X^p\otimes F$ en y_0 sont nulles pour ces bidegrés, $\Phi\wedge a_{s+1}$ est $D''-$exacte : d_2^{q-1} et d_2^q sont nulles.

• En rang r quelconque supérieur à 2,

$$E_r^{s,t} = \frac{\{a\in F^sB^{s+t}/da\in F^{s+r}B^{s+t+1}\}}{F^{s+1}B^{s+t}+d(F^{s-r+1}B^{s+t-1})} \xrightarrow{d_r} E_r^{s+r,t-r+1}$$

$$
\begin{aligned}
[a] = \left[\sum_{s' \geq s} a_{s'} z^{s'}\right] \quad & \longmapsto \quad [z^{s+r}\Phi \wedge a_{s+r-1}] \\
\text{avec } D''a_s = 0 \quad & \quad \bmod F^{s+r+1}B^{s+t+1} \\
D''a_{s+1} + \Phi \wedge a_s = 0 \quad & \quad +dF^{s+1}B^{s+t}. \\
\vdots \quad & \\
D''a_{s+r-1} + \Phi \wedge a_{s+r-2} = 0. \quad &
\end{aligned}
$$

Modulo $F^{s+1}B^{s+t} + d(F^{s-r+1}B^{s+t-1})$, et par applications successives de la condition de dégénérescence, on peut supposer que pour tout $i \in [0, r-2] \cap \mathbb{N}$, a_{s+i} est $\Delta''-$ harmonique. La condition de dégénérescence permet d'affirmer que $D''a_{s+r-1} = 0$. L'argument du complexe dérivé montre alors que $\Phi \wedge a_{s+r-1}$ est $D''-$exacte et que $d_r[a] = 0$ en bidegrés $(p, q-1)$ et (p, q).

- En conclusion, en degré q la suite spectrale précédente dégénère en E_1.

$$
\bigoplus_{s+t=q} E_1^{s,t} = H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_s \frac{\mathcal{M}_{y_0}^s}{\mathcal{M}_{y_0}^{s+1}}\right)
$$

est le gradué associé à une filtration de la fibre en y_0 du faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet)$. En dehors d'un sous-ensemble analytique propre de Z, tous les faisceaux $(\mathcal{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet))_{q\in\mathbb{N}}$ sont localement libres et

$$
\mathcal{H}^q(A^{p,\bullet}, d^\bullet) \otimes \frac{\mathcal{O}_y}{\mathcal{M}_y} = H^{p,q}(X, F \otimes \lambda_y).
$$

Sur un voisinage épointé de y_0 dans Z, ce dernier groupe est donc de dimension $h^{p,q}(X, F \otimes \lambda_{y_0}) = m$. Le voisinage et par conséquent toute la droite Z sont dans l'ensemble analytique $S_m^{p,q}(F)$. □

4.3 Structure des lieux exceptionnels de cohomologie

Proposition 3 *: Supposons que le fibré vectoriel F soit $(0, q)-$semi-positif. Alors, pour toute $(0, 1)-$forme Φ harmonique sur X, (X, F, Φ) vérifie la condition de dégénérescence en bidegré $(0, q)$.*

Démonstration : Soit a et b deux $(0, q)-$formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans F telles que $D''a = \Phi \wedge b$ et b soit $\Delta''-$harmonique. $\Phi \wedge b$ est $\Delta''-$harmonique d' après la proposition 1 et $D''-$exacte par hypothèse : elle est donc nulle. □

Théorème 4 *:*
(i) Si F est $(0, q-1)-$ et $(0, q)-$semi-positif, alors le lieu exceptionnel $S_m^q(F)$ est une réunion de translatés de sous -tores de $\operatorname{Pic}^0(X)$.

(ii) Si F est un fibré en droites qui admet une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ à courbure semi-négative, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le lieu exceptionnel $S^q_m(F)$ est une réunion de translatés de sous -tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$.

(iii) Si F est un fibré en droites de dual semi-ample, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le lieu exceptionnel $S^q_m(F)$ est une réunion de translatés de sous -tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Démonstration : Puisque $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$, on se place sous les hypothèses (i). Par la proposition précédente, pour toute $(0,1)-$forme harmonique Φ et pour tout $y \in \mathrm{Pic}^0(X)$, $(X, F \otimes \lambda_y, \Phi)$ vérifie la condition de dégénérescence en bidegrés $(0, q-1)$ et $(0,q)$. La proposition montre qu'aux points lisses y de $S^q_m(F)$ où $h^q(X, F \otimes \lambda_y) = m$ toutes les droites tangentes à $S^q_m(F)$ sont en fait incluses dans $S^q_m(F)$. Ceci suffit pour affirmer que les composantes irréductibles du lieu exceptionnel $S^q_m(F)$ sont des translatés de sous-tores de $\mathrm{Pic}^0(X)$. $\square$

On peut préciser la structure des composantes irréductibles des lieux exceptionnels.

Corollaire 3 : *Si F est un fibré en droites $(0,q-1)-$ et $(0,q)-$semi-positif, et si Z est une composante irréductible de $S^q_m(F)$, alors il existe un espace complexe normal N, une application analytique surjective à fibres connexes $f : X \to N$ tels que*

(i) il existe $\lambda_0 \in \mathrm{Pic}^0(X)$, tel que $Z \subset \lambda_0 + f^\star(\mathrm{Pic}^0(N))$,

(ii) $\dim N \leq q$,

(iii) N est de type d'Albanese général.

Démonstration : Elle suit celle de [G-L3](Théorème 0.1). On considère

$$u : X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X) \longrightarrow \hat{Z}$$

obtenue en intégrant les $1-$formes holomorphes sur X dont les conjuguées sont tangentes à $Z \subset S^q_m(F)$. Ici $\hat{Z}$ est le tore dual du tore Z. N est alors l'espace complexe intermédiaire qui apparait dans la factorisation de Stein de u. (i) et (iii) sont des conséquences de la construction de N. Pour (ii), on raisonne comme dans la démonstration du théorème 3 en remplaçant le mophisme d'Albanese α_X de X par sa restriction u et donc $h^{0,1}(X)$ par $\dim N$.$\square$

4.4 Condition forte du premier ordre

Définition 3 : *Soit (X, F, Φ) comme dans l'introduction. On dira que le triplet (X, F, Φ) vérifie la condition forte du premier ordre en bidegré (p,q) si pour tout couple (a,b) de $(p,q)-$formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans F tel que*

- $D''a = \Phi \wedge b$

il existe une $(p,q)-$forme c de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans F telle que

$$\Phi \wedge a = D''c.$$

Remarque : La condition forte du premier ordre en bidegré (p,q) implique l'annulation de la différentielle en degré q du complexe dérivé de $\Omega_X^p \otimes F$ en $[\mathcal{O}_X]$, le point 0 de $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Proposition 4 *: Si $y_0 \in S_m^{p,q}(F)$ et si $(X, F \otimes \lambda_{y_0}, \Phi)$ vérifie la condition forte du premier ordre en bidegrés $(p, q-1)$ et (p,q), alors la "droite" passant par y_0 et de direction Φ est incluse dans le lieu exceptionnel $S_m^{p,q}(F)$.*

Idée de démonstration : La condition forte du premier ordre montre, sans supposer m égal à $h^{p,q}(F \otimes \lambda_{y_0})$ ni Φ tangente à $S_m^{p,q}(F)$, que les différentielles d_r^{q-1} et d_r^q de la suite spectrale considérée dans la démonstration de la proposition 2 sont nulles en rang $r \geq 1$. □

Proposition 5 *: Soit Φ une $(0,1)-$forme harmonique sur X. Supposons qu'il existe une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur F et un nombre réel ε strictement positif tels que*

$$[ic_h(F), \Lambda] \geq \varepsilon[i\overline{\Phi} \wedge \Phi \otimes Id_F, \Lambda] \text{ sur } \Lambda^{n,q+1}T^\star X \otimes F.$$

Alors (X, F, Φ) vérifie la condition forte du premier ordre en bidegré (n,q).

Démonstration : Soit a et b deux $(n,q)-$formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans F telles que $D''a = \Phi \wedge b$. On cherche à appliquer à $\Phi \wedge a$ le principe des estimations L^2 pour l'opérateur D''.

On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} D''(\Phi \wedge a) &= \Phi \wedge D''a && \text{car } \Phi \text{ est harmonique} \\ &= \Phi \wedge \Phi \wedge b && \text{par hypothèse} \\ &= 0 && \text{car } \Phi \text{ est de bidegré } (0,1). \end{aligned}$$

Soit v une $(n, q+1)-$forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans F muni de la métrique h. v s'écrit $v_1 + v_2$ avec $v_1 \in \ker D''$ et $v_2 \in (\ker D'')^\perp \subset \mathrm{Ker}\delta''$. On note $\iota(\Phi)$ l'adjoint de la multiplication extérieure par Φ.

$$\begin{aligned} |\langle\!\langle \Phi \wedge a, v \rangle\!\rangle|^2 &= |\langle\!\langle \Phi \wedge a, v_1 \rangle\!\rangle|^2 \\ &= |\langle\!\langle a, \iota(\Phi) v_1 \rangle\!\rangle|^2 \leq \|a\|^2 \|\iota(\Phi) v_1\|^2. \end{aligned}$$

Or, puisque v_1 est de bidegré $(n, q+1)$ et $\overline{\Phi}$ de bidegré $(1,0)$,

$$\iota(\Phi) v_1 = -i[\overline{\Phi}, \Lambda] v_1 = -i\overline{\Phi} \wedge \Lambda v_1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|\iota(\Phi)v_1\|^2 &= \langle\!\langle -i\overline{\Phi}\wedge\Lambda v_1, \iota(\Phi)v_1\rangle\!\rangle\\ &= \langle\!\langle i\overline{\Phi}\wedge\Phi\wedge\Lambda v_1, v_1\rangle\!\rangle\\ &= \langle\!\langle [i\overline{\Phi}\wedge\Phi,\Lambda]v_1, v_1\rangle\!\rangle.\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de courbure sur F, puisque v_1 est de bidegré $(n, q+1)$,

$$\langle\!\langle [i\overline{\Phi}\wedge\Phi,\Lambda]v_1, v_1\rangle\!\rangle \leq \frac{1}{\varepsilon}\langle\!\langle [ic_h(F),\Lambda]v_1, v_1\rangle\!\rangle.$$

L'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano fournit

$$\langle\!\langle [ic_h(F),\Lambda]v_1, v_1\rangle\!\rangle \leq \|D''v_1\|^2 + \|\delta''v_1\|^2 = \|\delta''v_1\|^2 = \|\delta''v\|^2.$$

Ainsi,

$$|\langle\!\langle \Phi\wedge a, v\rangle\!\rangle|^2 \leq \frac{\|a\|^2}{\varepsilon}\|\delta''v\|^2.$$

Par le théorème d'Hahn-Banach et les propriétés d'ellipticité de D'', il existe $c\in\mathcal{C}^\infty(X,\Lambda^{n,q}T^\star X\otimes F)$ telle que $\Phi\wedge a = D''c$. □

Théorème 5 *:*

(i)Soit Ω une métrique kählérienne sur $Alb(X)$. Supposons qu'il existe une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur F telle que $[ic_h(F),\Lambda] \geq [\alpha^\star\Omega\otimes Id_F,\Lambda]$ sur $\Lambda^{n,q}T^\star X\otimes F$ et sur $\Lambda^{n,q+1}T^\star X\otimes F$. Alors pour tout $m\in\mathbb{N}, S_m^{n,q}(F) = S_m^{n-q}(F^{-1})$ est soit vide, soit égal à $\mathrm{Pic}^0(X)$.

(ii)En particulier, si F est un fibré en droites dont une puissance F^k est globalement engendrée et vérifie $H^1(X,F^k)=0$, alors pour tout $(q,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star, S_m^q(F^{-1})$ est soit vide, soit égal à $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Démonstration : (i) Par hypothèse, pour tout $\Phi\in H^1(X,\mathcal{O})$ harmonique et pour tout $y\in\mathrm{Pic}^0(X)$, il existe une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $F\otimes\lambda_y$ et un $\varepsilon>0$ tel que

$$[ic_h(F\otimes\lambda_y),\Lambda] \geq \varepsilon[i\overline{\Phi}\wedge\Phi\otimes Id_{F\otimes\lambda_y},\Lambda] \text{ sur } \Lambda^{n,q}T^\star X\otimes F \text{ et sur } \Lambda^{n,q+1}T^\star X\otimes F.$$

D'après la proposition 5, $(X, F\otimes\lambda_y,\Phi)$ vérifie la condition forte du premier ordre en bidegrés $(n,q-1)$ et (n,q). Par la proposition 4, toutes les droites passant par un point de $S_m^{n,q}(F)$ sont incluses dans $S_m^{n,q}(F)$.

(ii) Soit $\Phi\in H^1(X,\mathcal{O})$ et E_Φ l' extension de F^k par lui-même définie par Φ.

$$0\to F^k\to E_\Phi\to F^k\to 0.$$

Puisque $H^1(X,F^k)=0$ et que F^k est globalement engendré, la suite exacte longue associée montre que E_Φ est aussi globalement engendré et par suite semi-positif au sens de Griffiths. Pour une métrique quotient sur F^k, par un calcul de ([Gr] 2.d),

$$ic(F) \geq \frac{i}{k}\overline{\Phi} \wedge \Phi.$$

On conclut alors comme dans (i). □

5 Fibrés de dual nef et abondants

Dans cette partie, on se propose d'étendre au cas des fibrés de dual nef et abondants sur les variétés projectives, les théorèmes d'annulation et de structure des lieux exceptionnels de cohomologie précédement démontrés pour les fibrés de dual semi-amples.

5.1 Définitions et propriétés

Soit $F \to X$ un fibré en droites nef sur une variété compacte X de dimension n. Sa dimension numérique $\nu(F)$ est le plus grand des entiers k tels que $c_1(F)^k$ soit non nulle dans $H^{2k}(X, \mathbb{Z})$. Sa dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(F)$ est la dimension maximale des images de X par les applications rationnelles canoniques définies par les systèmes linéaires complets $|F^m|$. Si tous ces systèmes linéaires sont vides, la dimension de Kodaira-Iitaka de F est par définition $-\infty$. Les premières propriétés des ces invariants birationnels sont résumées dans la

Proposition 6 *:*
(i) $\kappa(F) \leq \nu(F)$.
(ii) Si F *est semi-ample, alors* $\kappa(F) = \nu(F)$.
(iii) Si $\kappa(F) = n - 1$ *ou* n*, ou si* $\nu(F) = n$ *alors* $\kappa(F) = \nu(F)$.

Définition 4 *:*
Un fibré en droites nef est dit abondant *si sa dimension de Kodaira-Iitaka coïncide avec sa dimension numérique.*

Pour un fibré en droites quelconque F*, on définit sa* dimension de Kodaira-Iitaka topologique $\kappa'(F)$ *par*

$$\kappa'(F) := \max_{\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)} \kappa(F \otimes \lambda).$$

Un fibré en droites nef est dit topologiquement abondant *si sa dimension de Kodaira-Iitaka topologique coïncide avec sa dimension numérique. Cela revient à dire que le fibré devient abondant après tensorisation par un fibré plat.*

Exemple : Un fibré plat mais pas de torsion est nef ; aucune de ses puissances n'a de sections : il n'est donc pas abondant. Il est par contre topologiquement abondant.

5.2 Théorème d'annulation

Dans ce paragraphe, on démontre le

Théorème 6 : *Soit X une variété projective lisse et $F \to X$ un fibré en droites nef et topologiquement abondant. Soit $q < \dim \alpha(X)$. Alors $S^q(F^{-1})$ est un ensemble analytique réunion de translatés de sous-tores de* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *de codimension supérieure à* $\dim \alpha(X) - q$.

Remarque : Le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg montre que pour un fibré en droites nef sur une variété projective, $S^q(F^{-1})$ est vide en degrés q strictement inférieurs à la dimension numérique $\nu(F)$.

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où F est abondant. On cherche à se ramener au cas où F est globalement engendré en dehors d'un diviseur, puis à réduire les multiplicités de ce diviseur.

Lemme 3 *([Ka] proposition 2.1, voir aussi [E-V] lemme 5.11) :*
Il existe une variété projective lisse X_1, une modification $\tau : X_1 \to X$, un diviseur effectif D_1 sur X_1 et un entier m_0 tels que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $\tau^\star F^{mm_0} \otimes \mathcal{O}(-D_1)$ soit semi-ample.

Puisque l'image inverse d'un fibré semi-ample par une application quelconque est semi-ample, on peut supposer quitte à prendre une nouvelle modification, que D_1 est à croisements normaux (i.e. à composantes lisses et transverses aux points d'intersection.) On peut par choix de m_0 supposer que les multiplicités de D_1 sont strictement inférieures à m_0.

Comme dans [Bi], on utilise le

Lemme 4 *([Ka] lemme 3.1 appliqué à $\frac{D_1}{m_0}$) :*
Il existe une variété projective lisse X_2, un revêtement galoisien $\pi : X_2 \to X_1$ de groupe G et un diviseur D_2 sur X_2 tels que

$$\pi^\star \mathcal{O}_{X_1}(D_1) = \mathcal{O}_{X_2}(D_2)^{m_0}$$

et tels que le fibré $\mathcal{O}_{X_2}(D_2)$ soit muni d'une action ρ_0 du groupe G telle que la partie invariante du faisceau image directe du faisceau $\mathcal{O}_{X_2}(D_2)$ soit

$$(\pi_\star \mathcal{O}_{X_2}(D_2))^{\rho_0} = \mathcal{O}_{X_1}(\left[\frac{D_1}{m_0}\right]) = \mathcal{O}_{X_1}.$$

où [ ] désigne la partie entière des diviseurs.

Démonstration : On rappelle brièvement comment ce revêtement est obtenu comme composé de revêtements cycliques [E-V]. Il suffit de traiter le cas où D est irréductible. Soit A un diviseur très ample sur X_1 tel que $\mathcal{O}(m_0 A - D)$ soit engendré par ses sections globales. Soit $H_1, \cdots, H_n$, n diviseurs génériques dans le système linéaire complet $|m_0 A - D|$ tels que $D + \sum_{i=1}^n H_i$ soit un diviseur à croisements normaux. On peut supposer que $D \cap \bigcap_i H_i = \emptyset$. On construit successivement

$\pi^1 : X_2^1 \to X_1$ revêtement cyclique associé à $H_1 + D \in |m_0 A|$,

$\pi^2 : X_2^2 \to X_2^1$ revêtement cyclique associé à $\pi^{1\star}(H_2 + D) \in |m_0 \pi^{1\star} A|$,

...

$\pi^n : X_2^n \to X_2^{n-1}$ revêtement cyclique associé à $(\pi^{n-1} \circ \pi^{n-2} \circ \cdots \pi^1)^\star (H_n + D) \in |m_0(\pi^{n-1} \circ \pi^{n-2} \circ \cdots \pi^1)^\star A|$,

On pose $X_2 := X_2^n$ et $\pi := \pi^n \circ \pi^{n-1} \circ \cdots \pi^1$.

Sur X_2^1 (et a fortiori sur X_2), on dispose d'une racine $m_0^{ième}$ de $H_1 + D$, donc de D. Mais X_2^1 peut avoir des singularités au dessus de $H_1 \cap D$. Par contre, puisque $\pi^{1\star} D$ est un multiple de $m_0(\pi^{1\star} D)_{réd}$ les revêtements $\pi^2, \cdots \pi^n$ correspondent respectivement aux revêtements associés à $\pi^{1\star} H_2, \cdots, (\pi^{n-1} \circ \pi^{n-2} \circ \cdots \pi^1)^\star H_n$ qui sont des diviseurs irréductibles lisses. Les singularités éventuelles de X_2 sont donc sur $\pi^{-1}(D \cap H_1)$. Puisque X_2 ne dépend pas de l'ordre des diviseurs H_i, et que $D \cap \bigcap_i H_i = \emptyset$, on en déduit que X_2 est lisse. □

Maintenant,

$$((\pi^\star \tau^\star F) \otimes \mathcal{O}(-D_2))^{m_0} = \pi^\star \left(\tau^\star F^{m_0} \otimes \mathcal{O}(-D_1)\right)$$

est semi-ample. $\tilde{F} := (\pi^\star \tau^\star F) \otimes \mathcal{O}(-D_2)$ est donc semi-ample. Il est de plus muni d'une $G-$action $1 \otimes \rho_0$, où 1 désigne la $G-$action triviale sur le fibré $\pi^\star \tau^\star F$ qui provient de X_1. Cette action permettra de conclure malgré l'augmentation d'irrégularité entre X_1 et X_2 : les images réciproques sur X_2 des fibrés en droites plats sur X_1 peuvent être retrouvés parmi les fibrés en droites plats sur X_2, grâce à l'opération du groupe de Galois G sur une partie du groupe de Picard de X_2. La clef est le

Lemme 5 *: Soit* $\Pi : X' \to X$ *un revêtement cyclique de groupe* $\mathbb{Z}_{/m}$ *construit à partir d'une section de la puissance tensorielle* $m^{ième}$ *d'un fibré en droites. Soit* $L' \to X'$ *un fibré en droites sur* X' *muni d'une action* a *de* $\mathbb{Z}_{/m}$ *telle que* (L', a) *soit dans la composante irréductible de* $(\Pi^\star \mathcal{O}_X, 1)$ *des* $\mathbb{Z}_{/m}-$*fibrés en droites sur* X'*. Alors, il existe un fibré en droites* $L \to X$ *sur* X *tel que* (L', a) *soit isomorphe à* $(\Pi^\star L, 1)$.

Démonstration : Le fibré en droites trivial $\Pi^\star \mathcal{O}_X$ est muni de l'action triviale 1 de G. Puisque dans un revêtement cyclique les points de ramification sont fixes pour l'action du groupe, au voisinage du lieu de ramification l'action du groupe sur un fibré en droites est donnée par un caractère. De plus, pour un groupe fini, il n'y a qu'un nombre fini de caractères. L'action a est donc comme l'action 1 triviale au voisinage du lieu de ramification. En dehors du lieu de ramification de Π, L' est $\mathbb{Z}_{/m}-$équivariant. En choisissant une trivialisation de L' sur un recouvrement de X' invariant par $\mathbb{Z}_{/m}$, on définit sur X un fibré en droites L tel que $(\Pi^\star L, 1)$ soit isomorphe à (L, a). □

Soit (λ_2, ρ_2) un $G-$fibré en droites plat sur X_2 dans la composante irréductible de $(\pi^\star \mathcal{O}_{X_1}, 1)$ des $G-$fibrés en droites sur X_2. Le revêtement π est composé de revêtements cycliques, on peut donc écrire (λ_2, ρ_2) sous la forme $(\pi^\star \lambda_1, 1)$. Puisque

$$H^2(X_1, \mathbb{Z}) \underset{\pi_\star}{\overset{\pi^\star}{\rightleftarrows}} H^2(X_2, \mathbb{Z})^G$$

est un isomorphisme, λ_1 est plat sur X_1. Puisque τ est une modification, il existe un fibré en droites $\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)$ tel que $\lambda_1 = \tau^\star \lambda$. Réciproquement, tout fibré en droites λ plat sur X permet de construire $(\pi^\star \tau^\star \lambda, 1)$, $G-$fibré en droites plat sur X_2, dans la composante irréductible de $(\pi^\star \mathcal{O}_{X_1}, 1)$ des $G-$fibrés en droites sur X_2.

Il faut maintenant relier la cohomologie $G-$équivariante des déformations du fibré en droites semi-ample $\tilde{F}$ sur X_2 à celle des déformations de F sur X.

$$\begin{aligned}
\left[H^q(X_2, \tilde{F}^{-1} \otimes \lambda_2)\right]^G &= H^q\left(X_1, \pi_\star(\tilde{F}^{-1} \otimes \lambda_2)^G\right) \\
&= H^q\left(X_1, \pi_\star(\pi^\star \tau^\star F^{-1} \otimes \mathcal{O}_{X_2}(D_2) \otimes \lambda_2)^{1 \otimes \rho_0 \otimes \rho_2}\right) \\
&= H^q\left(X_1, \tau^\star F^{-1} \otimes \lambda_1 \otimes \pi_\star(\mathcal{O}(D_2))^{\rho_0}\right) \\
&= H^q\left(X_1, \tau^\star(F^{-1} \otimes \lambda)\right) \\
&= H^q\left(X, F^{-1} \otimes \lambda\right).
\end{aligned}$$

La dernière égalité a lieu car τ est une modification entre variétés projectives. En effet, le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg montre alors que les images directes supérieures $\mathcal{R}^j \tau_\star(K^\tau_{X_1/X})$ du faisceau canonique relatif $K^\tau_{X_1/X}$ sont nulles pour tout $j > 0$. Il faut ensuite utiliser la dualité de Serre.

Le théorème 6 est alors une conséquence des versions $G-$équivariantes du théorème analogue pour les fibrés semi-amples. $\square$

6 Fibrés vectoriels

La $(0, q)-$semi-positivité est une hypothèse difficile à obtenir pour un fibré vectoriel. Le but de cette partie est de montrer comment obtenir des théorèmes d'annulation générique pour la cohomologie des fibrés vectoriels sous des hypothèses algébriques simples.

6.1 Par les variétés de drapeaux

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel nef et abondant de rang r sur X projective. Par définition, le fibré en droites $\mathcal{O}_E(1) \to \mathbb{P}(E)$ est nef et abondant sur $\mathbb{P}(E)$ projective : on peut donc lui appliquer les résultats précédents. On note π :

$\mathbb{P}(E) \to X$ la submersion naturelle. Le morphisme d'Albanese de $\mathbb{P}(E)$ est la composée

$$\alpha_{\mathbb{P}(E)} : \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\alpha_X} \mathrm{Alb}(X).$$

et les fibrés en droites plats sur $\mathbb{P}(E)$ sont donnés par l'isomorphisme

$$\pi^\star : \mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(\mathbb{P}(E))$$

qui respecte les structures affines. Puisque

pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\pi_\star \mathcal{O}_E(k) = S^k E$,

pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{R}^j \pi_\star(\mathcal{O}_E(k)) = 0$

et que $K_{\mathbb{P}(E)} := \pi^\star(K_X \otimes \det E) \otimes \mathcal{O}_E(-r)$,

la suite spectrale de Leray associée à π donne pour tous $k \in \mathbb{N}^\star$ et $m \in \mathbb{N}^\star$, l'isomorphisme affine

$$\pi^\star : S_m^{q-r+1}(S^k E^\star \otimes \det E^\star) \simeq S_m^q(\mathcal{O}_E(-r-k)).$$

On obtient donc des théorèmes d'annulation générique et de structure des lieux exceptionnels pour les fibrés $S^k E^\star \otimes \det E^\star$ en degrés q plus petits ou égaux à la dimension d'Albanese de X moins le rang de E. La même démarche sur d'autres variétés de drapeaux, ou sur des produits de copies de $\mathbb{P}(E)$ donne des théorèmes pour d'autres représentations du groupe linéaire.

6.2 Par l'isomorphisme de Le Potier

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Pic}^0(X)$, sur $\pi : \mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}(E \otimes \lambda) \to X$, les fibrés en droites $\mathcal{O}_{E\otimes\lambda}(1)$ et $\mathcal{O}_E(1) \otimes \pi^\star(\lambda)$ sont isomorphes. L'isomorphisme de Le Potier [L P] donne donc pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $m \in \mathbb{N}^\star$

$$S_m^{p,q}(E) \simeq S_m^{p,q}(\mathcal{O}_E(1)).$$

6.3 Par les notions de semi-positivité

La semi-positivité d'un fibré vectoriel hermitien au sens de Nakano (utile pour les théorèmes d'annulation de cohomologie) implique la semi-positivité au sens de Griffiths (géométrique). La "réciproque" établie dans [D-S] montre en particulier que si E est un fibré vectoriel hermitien semi-positif au sens de Griffiths (par exemple un fibré vectoriel globalement engendré), alors $E \otimes \det E$ est $(n,q)-$semi-positif pour tout $q > 0$ et par dualité $E^\star \otimes \det E^\star$ est $(0,q)-$semi-positif pour tout $q < \dim X$. Le théorème 3 d'annulation pour les fibrés semi-négatifs s'applique donc et donne le

Corollaire 4 : *Soit E un fibré vectoriel semi-positif au sens de Griffiths. Alors pour λ générique dans* $\mathrm{Pic}^0(X)$,

$$H^q(X, E^\star \otimes \det E^\star \otimes \lambda) = 0 \text{ pour tout } q < \dim \alpha(X).$$

En guise d'application, on considère Y une sous-variété de codimension r de X définie par une section s d'un fibré vectoriel de rang r de la forme $F = E \otimes \det E$ avec E semi-positif au sens de Griffiths. L'hypothèse sur la codimension de Y assure que s est localement donnée par des familles régulières de fonctions holomorphes. Le complexe de Koszul associé à s :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{r} F^{\star} \xrightarrow{s\rfloor} \ldots \bigwedge^{2} F^{\star} \xrightarrow{s\rfloor} F^{\star} \xrightarrow{s\rfloor} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

donne donc une résolution de $\mathcal{I}_Y$. On déduit du corollaire précédent que pour λ générique dans $\mathrm{Pic}^0(X)$ et $q \leq \dim \alpha(X) - \mathrm{rang}(F)$, on a

$$H^q(X, \mathcal{I}_Y \otimes \lambda) = 0.$$

7 Références

[Bi] I. Biswas, *On the cohomology of parabolic line bundles*, Math. Res. Letters 2 (1995) 783-790.

[D-S] J. P. Demailly et H. Skoda, *Relations entre les notions de positivité de P. A. Griffiths et de S. Nakano*, Séminaire P. Lelong et H. Skoda, année 1978-79, Lecture notes in Math. 822 (1980) 304-309.

[En] I. Enoki, *Kawamata-Viehweg vanishing for compact Kähler manifolds*, Enstein metric and Yang-mills connections (ed. T. Mabuchi, S.Mukai) Marcel Dekker, (1993) 59-68.

[E-V] H. Esnault et E. Viehweg, *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar (1992) Band 20.

[G-L1] M. Green et R. Lazarsfeld, *Deformation theory, generic vanishing theorems, and some conjectures of Enriques, Catanese, and Beauville*, Invent. Math. 90 (1987) 389-407.

[G-L2] M. Green et R. Lazarsfeld, *Deformation theory for cohomology of analytique vector bundles on Kähler manifolds, with applications*, Mathematical Aspects of String Theory, World Scientific, (1987) 416-440.

[G-L3] M. Green et R. Lazarsfeld, *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles*, J. of American Math. Soc. 4 (1991) 87-103.

[Gr] P. A. Griffiths, *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles* , in : Global analysis, Princeton : Princeton University press, (1969).

[G-H] P. A. Griffiths et J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, (1978).

[Ka] Y. Kawamata, *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties*, Invent. Math. 79 (1985) 567-588.

[Ko] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves I*, Annals of Math. 123 (1986) 11-42.

[L P] J. Le Potier, Théorème d'annulation en cohomologie, C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973) 535-537.

Christophe Mourougane
Institut Fourier, Université Grenoble I, B.P 74
38402 Saint - Martin d'Hères. France.
e-mail : Christophe.Mourougane@puccini.ujf-grenoble.fr