Sur les variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective

Paun Mihai

Adresses:
Laboratoire de Mathématiques associé au CNRS, UMR 5528,
Institut Fourier, BP 74, F-38240 Saint Martin d'Hères.

et

Institut de Mathématiques, Bucarest, Roumanie

e-mail: paun@puccini.ujf-grenoble.fr

0. Introduction.

L'objet de cet article est l'étude de la géométrie des variétés kählériennes compactes dont le fibré anticanonique est numériquement effectif, poursuivant ainsi les résultats obtenus dans [CaP], [DPS1] et [DPS2]. On s'intéresse en particulier à la structure du morphisme d'Albanese et à celle du groupe fondamental. Rappelons d'abord la notion de fibré numériquement effectif. Si X est une variété complexe compacte et $L \to X$ un fibré holomorphe en droites, on pose la definition suivante:

Définition 1. *On dit que L est numériquement effectif (nef en abrégé) si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une métrique h_ε sur L telle que, si ω est une métrique hermitienne fixée sur X, on ait*

$$\Theta_{h_\varepsilon}(L) \geq -\varepsilon\omega.$$

On observe que si X est projective, la notion définie ci-dessus coïncide avec la notion habituelle de la géométrie algébrique (selon laquelle $L \to X$ est dit nef si pour chaque courbe $C \subset X$ on a $L \cdot C \geq 0$). Pour plus de détails et quelques exemples concernant la définition 1, voir [DPS1]. Le but de cette note est de démontrer le résultat suivant:

Théorème principal. *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec K_X^{-1} nef. Alors*

i) $h^1(X, \mathcal{O}_X) \leq n$.

ii) *Si Γ est un sous-groupe du groupe fondamental de X, engendré par un nombre fini d'éléments, alors il existe Γ_1 sous-groupe normal d'indice fini de Γ, engendré par au plus $4^{2n} + 1$ éléments.*

Dans le cas d'une variété kählérienne dont le fibré anticanonique est semi-positif, on a des résultats beaucoup plus précis. On sait que le morphisme d'Albanese est une submersion et que le groupe fondamental est presque abélien (il existe un sous-groupe abélien libre d'indice fini dans $\pi_1(X)$), le premier nombre de Betti est inférieur où égal à la dimension réelle, et dans le cas d'égalité la variété en question est isométrique à un tore (voir par exemple [Li1], [Li2], [CG] ainsi que [DPS3] pour un théorème de structure des variétés dont K_X^{-1} est semi-positif). Dans le cas où X est projective avec K_X^{-1} nef, Qi Zhang [Zh] a démontré que le morphisme d'Albanese est surjectif, ce qui implique aussi $h^1(X, \mathcal{O}_X) \leq n$; la méthode de Zhang utilise de manière essentielle des arguments de déformation en caractéristique $p > 0$. Malheureusement, il paraît difficile d'étendre ces résultats au cas où la variété est kählérienne compacte et non projective, lorsque le fibré anticanonique est seulement supposé nef.

La démonstration du théorème 1 est basée sur quelques résultats de Mikhail Gromov (voir [Gr], chapitre 5), combinés avec des résultats obtenus par Demailly-Peternell-Schneider dans [DPS1]. J'adresse mes remerciements à mon directeur de thèse, Jean-Pierre Demailly, pour ce sujet très riche et intéressant et pour des nombreuses et utiles suggestions qu'il m'a faites au sujet de cet article.

1. Démonstration du théorème principal.

Avant de passer à la démonstration proprement dite, fixons quelques notations. $\pi_1(X)$ désigne le groupe fondamental de X, basé en un point quelconque x de X; $\pi : \tilde{X} \to X$ est le revêtement universel de X. Si ω est une métrique sur X, elle induit une métrique $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ sur $\tilde{X}$, et on note $d_{\tilde{\omega}}$ la distance géodésique induite par $\tilde{\omega}$.

Démonstration du i). Une première partie consiste en la construction de métriques kählériennes convenables sur X, à l'aide du théorème d'Aubin-Calabi-Yau. Le fibré K_X^{-1} étant nef, pour chaque $\varepsilon > 0$ nous avons une métrique h_ε sur K_X^{-1}, telle que

$$u_\varepsilon = \Theta_{h_\varepsilon}(K_X^{-1}) \geq -\varepsilon\omega$$

où ω est une métrique kählérienne fixée sur X. On observe que la classe de cohomologie de u_ε est égale à $c_1(X)$, la première classe de Chern du fibré tangent à X. En résolvant une équation de type Monge-Ampère (voir [DPS2], page 221), on trouve sur X une suite $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de métriques kählériennes dans la classe de cohomologie ω telle que

$$\mathrm{Ricci}_{\omega_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega_\varepsilon$$

En effet, il suffit de chercher ω_ε telle que

$$\text{Ricci}_{\omega_\varepsilon} = -\varepsilon\omega_\varepsilon + \varepsilon\omega + u_\varepsilon \tag{1}$$

On peut écrire $u_\varepsilon = \text{Ricci}_\omega + i\partial\overline{\partial} f_\varepsilon$ (car u_ε et Ricci_ω appartiennent toutes les deux à la classe $c_1(X)$). On cherche donc un potentiel φ_ε tel que $\omega_\varepsilon = \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon$. Un calcul rapide montre que (1) est équivalent à

$$\frac{(\omega + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon)^n}{\omega^n} = e^{\varepsilon\varphi_\varepsilon - f_\varepsilon},$$

et cette équation a une unique solution, d'après [Au].

Dans ce qui va suivre, on expose très brièvement le résultat de Gromov concernant une majoration de b_1. Soit (M, g) une variété riemannienne, telle que le tenseur de Ricci satisfasse

$$\text{Ricci}_g \geq -(n-1)rg,$$

r étant un réel positif et n la dimension de M. Pour γ un élément quelconque de $\pi_1(M)$, on note $|\gamma|_{\tilde{m}} = d_{\tilde{g}}(\tilde{m}, \gamma\tilde{m})$. Il est facile de voir que $|\gamma|_{\tilde{m}}$ est la plus petite longueur d'un lacet basé en $m = \pi(\tilde{m})$ représentant la classe d'homotopie de γ.

Remarque. Si $\tilde{m} \in \tilde{M}$ est un point quelconque et s un réel, on n'a qu'un nombre fini de classes d'homotopies $\gamma \in \pi_1(M)$ telles que $|\gamma|_{\tilde{m}} < s$. C'est une conséquence simple du théorème d'Ascoli et du fait que dans $\mathcal{C}(S^1, M)$, l'ensemble des lacets appartenant à une même classe d'homotopie est un ouvert.

Dans ce contexte, on a le théorème suivant (voir [Gr], page 73).

Théorème (Gromov). *Il existe une fonction $\varphi(n, r, d)$ à valeurs entières telle que pour toute variété riemannienne (M, g) de diamètre d, dimension n et courbure de Ricci minorée par $-(n-1)rg$, le premier nombre de Betti de M vérifie l'inégalité $b_1 \leq \varphi(n, r, d)$. En outre, quand rd^2 est assez petit, φ vaut n.*

Pour une application directe du résultat de Gromov sus-mentionné, on aurait besoin de savoir que $\varepsilon\big(\text{diam}_{\omega_\varepsilon}(X)\big)^2$ tend vers 0 avec ε (car a priori, la seule majoration qu'on a sur la norme géométrique des générateurs de $\pi_1(X)$ est $2\text{diam}_{\omega_\varepsilon}(X)$. Comme par rapport à ω_ε, le diamètre de X n'a aucune raison de rester borné, rien n'assure que $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\big(\text{diam}_{\omega_\varepsilon}(X)\big)^2 = 0$. Fort heureusement, on dispose du lemme suivant, qui fait le lien entre la partie analytique et la partie géométrique de la démonstration.

Lemme 1. *Soit U un ensemble compact de $\tilde{X}$. Alors pour chaque $\delta > 0$, il existe un ensemble fermé $U_{\varepsilon,\delta} \subset U$, tel que $Vol_\omega(U \setminus U_{\varepsilon,\delta}) < \delta$, et $\text{diam}_{\omega_\varepsilon} U_{\varepsilon,\delta} < C_1\delta^{-\frac{1}{2}}$, avec C_1 constante indépendante de δ, ε.*

(Pour une démonstration de ce lemme, voir [DPS2], page 223-224). En gros, ce résultat montre que même si $\text{diam}_{\omega_\varepsilon}(X)$ tend vers l'infini alors quitte à changer le point base de $\pi_1(X)$ on peut engendrer ce groupe de manière "économique", c'est-à-dire trouver des représentants de longueur bornée. Maintenant on prend

U compact qui contient un domaine fondamental E de l'action de $\pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$, tel que pour chaque γ_j dans un ensemble de générateurs, $U \cap \gamma_j U \neq \emptyset$. Pour $\delta > 0$ tel que $\delta < \frac{1}{4}\mathrm{Vol}_\omega(U \cap \gamma_j U)$ et $\delta < \frac{1}{2}\mathrm{Vol}_\omega E$, le lemme ci-dessus implique l'existence d'une partie $U_{\varepsilon,\delta} \subset U$, compacte, telle que $\mathrm{diam}_{\omega_\varepsilon}(U_{\varepsilon,\delta}) < C_1 \delta^{-\frac{1}{2}} := C$. De plus, la choix de δ et le fait que γ_j agit isométriquement sur $\tilde{X}$ impliquent: $U_{\varepsilon,\delta} \cap \gamma_j U_{\varepsilon,\delta} \neq \emptyset$, pour chaque j.

Si on considère l'ensemble $W_{\varepsilon,\delta} = \bigcup \gamma_j U_{\varepsilon,\delta}$, alors $\mathrm{diam}_{\omega_\varepsilon}(W_{\varepsilon,\delta}) \leq 2C$, car la multiplication par γ_j est une isométrie. En choisissant $a_\varepsilon \in U_{\varepsilon,\delta}$, la dernière inégalité implique $|\gamma_j|_{a_\varepsilon} \leq 2C$ (ici il faut comprendre que la norme géométrique est considérée par rapport à la métrique ω_ε; on ne change pas seulement le point, mais la métrique aussi). Soit $h : \pi_1(X) \to H_1(X;\mathbb{R})$ le morphisme de Hurewicz et $\gamma_1, \ldots, \gamma_{b_1}$ des éléments de $\pi_1(X)$, tels que $h(\gamma_1), \ldots, h(\gamma_{b_1})$ soit une base de $H_1(X;\mathbb{R})$ (on désigne par b_1 le premier nombre de Betti de M). Si Γ' est le sous-groupe engendré par les γ_j, alors considérons l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{\gamma \in \Gamma' / \ |\gamma|_{a_\varepsilon} < C\}$$

(évidemment, cet ensemble dépend aussi de ε, mais cela n'a pas d'importance pour nous). D'après la remarque antérieure, $\mathcal{P}$ n'a qu'un nombre fini d'éléments. Donc si γ et toutes ses puissances ont une norme inférieure à C, il est d'ordre fini et il s'ensuit qu'il est dans le noyau de h. Par suite pour $\gamma \in \mathcal{P}$ qui n'est pas dans le noyau de h, il existe un entier m, tel que $C \leq |\gamma^m|_{a_\varepsilon} \leq 2C$. Ensuite on choisit un indice j tel que $h(\gamma)$ a une j-composante non-nulle et on remplace γ_j par γ^m; le nouveau sous-groupe a moins d'éléments de norme géométrique inférieure à C (simplement parce que γ n'est plus dans Γ'). Après un nombre fini d'opérations, on aboutit (quelque soit $\varepsilon > 0$) à un sous-groupe Γ_ε de $\pi_1(X)$ engendré par b_1 éléments tel que

1) les générateurs ont une norme géométrique (par rapport à ω_ε) inférieure à $2C$;
2) tous les éléments de Γ_ε sauf ceux du noyau de h ont une norme géométrique supérieure à C.

Maintenant on considère la famille de représentants des éléments du groupe quotient Γ_ε modulo son intersection avec le noyau de h, donnée par

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{\gamma_1^{i_1} \ldots \gamma_{b_1}^{i_{b_1}} \ \ / \ \ i_1, \ldots, i_{b_1} \text{entiers}\}$$

où les γ_j sont les générateurs de Γ_ε. On prend l'orbite $\mathcal{F}_\varepsilon a_\varepsilon$ et p un nombre entier. Le nombre de points de cette orbite dans la boule $B_{\tilde{\omega}_\varepsilon}(a_\varepsilon, 2pC)$ est supérieur au nombre de points $(\lambda_j) \in \mathbb{Z}^{b_1}$, tel que $\sum |\lambda_j| \leq p$, donc supérieur à $\dfrac{(2p - 2b_1)^{b_1}}{b_1!}$. Par 2), les boules $B_{\tilde{\omega}_\varepsilon}(\gamma a_\varepsilon, \frac{C}{2})$ sont disjointes et contenues dans $B_{\tilde{\omega}_\varepsilon}(a_\varepsilon, 2pC + \frac{C}{2})$; on peut majorer leur nombre par le lemme suivant dû à Bishop-Gromov:

Lemme. *Soit M une variété riemannienne de dimension n et vérifiant* $\mathrm{Ricci}_g \geq -(n-1)r \cdot g$, *où g est la métrique et r un réel. Soient m un point de M et deux réels $R \leq R'$. Alors*

$$\frac{\mathrm{Vol}_g\left(B(m,R)\right)}{\mathrm{Vol}_g\left(B(m,R')\right)} \geq \frac{\int_0^R (\sinh\sqrt{r}t)^{n-1}dt}{\int_0^{R'} (\sinh\sqrt{r}t)^{n-1}dt}$$

(pour une démonstration du lemme, voir [Gr]). Donc le nombre de points de l'orbite est majoré par

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}_\varepsilon}\left(B_{\tilde{\omega}_\varepsilon}(a_\varepsilon, 2pC+\frac{C}{2})\right)}{\mathrm{Vol}_{\tilde{\omega}_\varepsilon}\left(B_{\tilde{\omega}_\varepsilon}(a_\varepsilon, \frac{C}{2})\right)} \leq \frac{\int_0^{(2pC+\frac{C}{2})\sqrt{\frac{\varepsilon}{n-1}}}(\sinh t)^{2n-1}dt}{\int_0^{C\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{n-1}}}{2}}(\sinh t)^{2n-1}dt}\,.$$

Quand ε tend vers 0, le membre droit tend vers $(4p+1)^{2n}$ et on va montrer que cela implique $b_1 \leq 2n$. En effet, les arguments donnés ci-dessus montrent que pour tout p entier positif on a l'inégalité

$$\frac{(2p-2b_1)^{b_1}}{b_1!} \leq (4p+1)^{2n}\,.$$

La croissance des deux membres quand p tend vers ∞ impose $b_1 \leq 2n$, inégalité équivalente à celle énoncée dans l'alinea i) du théorème principal.

Démonstration du ii). Soit $X_\Gamma \to X$ le revêtement de X associé à Γ (tel que $\pi_1(X_\Gamma)$ est isomorphe à Γ). Au moyen de la projection du revêtement de X on transporte sur X_Γ les métriques de Calabi-Yau ω_ε. Comme Γ n'a qu'un nombre fini de générateurs, les longueurs de ces générateurs sont uniformement bornées par une constante C_1 qui ne dépend pas de ε, c'est-à-dire de la métrique, mais seulement de leurs longueur par rapport au générateurs de $\pi_1(X)$. On a le lemme suivant (dû essentiellement à Gromov) qui dit que quitte à passer à un revêtement fini de X_Γ, on trouve une borne inférieure pour les distances entre les générateurs aussi grande qu'on veut, en contrôlant la croissance de leurs longueurs géométriques.

Lemme 2. *Soit (M,g) une variété riemannienne complète, dont le groupe fondamental est de type fini et soient $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$ des générateurs de $\pi_1(M)$. Soit C_0 un nombre réel, tel que $|\gamma_j|_g \leq C_0$, pour tout j. Alors pour tout $\delta > 0$ il existe un revêtement fini $M' \to M$ tel que $\pi_1(M')$ soit engendré par $\rho_1,\ldots,\rho_s$ avec*

a) $|\rho_j|_g \leq C_0 + \delta$

et

b) $|\rho_j \cdot \rho_k^{-1}|_g \geq \delta$

pour j et k distincts (les normes géométriques sont prises par rapport à un point de revêtement universel de M au-dessus du point base du $\pi_1(M)$).

Démonstration du lemme. Considérons les familles $\{\rho_j\}$ d'éléments de $\pi_1(M)$ vérifiant les propriétés a) $|\rho_j|_g \leq C_0+\delta$ et b) si j et k distincts, $|\rho_j\cdot\rho_k^{-1}|_g \geq \delta$. L'existence d'une telle famille est évidente, donc nous pouvons choisir une famille comportant le nombre maximum d'éléments et noter Φ le sous-groupe de $\pi_1(M)$ qu'elle engendre. On lui associe un revêtement $r : M' \to M$, quotient de $\tilde{M}$ par l'action de Φ. Si m est le point base de $\pi_1(M)$ et $\tilde{m}$ un point au-dessus du m dans le revêtement universel de M, soit m' la projection de $\tilde{m}$ dans M'.

On va montrer que la fibre de r au dessus de m est finie et donc que Φ est d'indice fini dans $\pi_1(M)$. Supposons qu'il existe z'_0 dans $r^{-1}(m)$ tel que $d(m', z'_0) > \delta$. Soit α dans le groupe fondamental de M représenté par la projection d'une géodésique minimale joignant m' à z'_0 dans M'. Alors $|\phi\alpha|_g \geq d(m', z'_0) > \delta$ pour tout ϕ dans Φ. Soit $\alpha_0 \in \pi_1(M)$ un élément de longueur minimale par rapport aux générateurs γ_j, tel que $|\phi\alpha_0|_g > \delta$ pour tout $\phi \in \Phi$. Alors si $\alpha_0 = \beta_0\gamma_j^{\varepsilon_j}$ avec $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ et β_0 de longueur inférieure à celle de α_0, il existe $\phi_0 \in \Phi$ tel que $|\phi_0\beta_0|_g \leq \delta$, et par suite $|\phi_0\alpha_0|_g = |\phi_0\beta_0\gamma_j^{\varepsilon_j}|_g \leq C_0 + \delta$. On contredit alors la maximalité de la famille $\{\rho_j\}$ en ajoutant l'élément $\rho_0 = \phi_0\alpha_0$.

Par conséquent la fibre $r^{-1}(m)$ est contenue dans la boule géodésique de centre m' et de rayon δ, et elle est donc finie. Le lemme est démontré.

On va appliquer le lemme 2 pour les données suivantes: $M = X_\Gamma$, $g = \omega_\varepsilon$ et $\delta = \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$, pout tout $\varepsilon > 0$. Le lemme nous fournit une suite de variétés $X_{\Gamma,\varepsilon}$ et notons par Γ_ε les groupes fondamentaux correspondants. Alors:

1) chaque Γ_ε est d'indice fini dans Γ,

2) les générateurs de Γ_ε ont une norme géométrique inférieure à $C_1 + \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ et la distance entre eux est supérieure à $\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$.

On considère le revêtement universel de chaque $X_{\Gamma,\varepsilon}$ et on applique une fois de plus l'inégalité de Bishop (fixons $\tilde{x}_\varepsilon$ tel que les normes ci-dessus sont prises par rapport à lui; si on note par $\gamma_{\varepsilon,j}$ les générateurs de Γ_ε, alors les boules $B(\gamma_{\varepsilon,j}x_\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{4}})$ sont disjointes et contenues dans $B(x_\varepsilon, C_1 + 2\varepsilon^{-\frac{1}{4}})$.

Donc le nombre de générateurs de Γ_ε est inférieur à

$$\frac{\int_0^{(C_1+2\varepsilon^{-\frac{1}{4}})\sqrt{\varepsilon}}(\sinh t)^{2n-1}dt}{\int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}}(\sinh t)^{2n-1}dt\,.}$$

Quand ε tend vers zéro, le quotient des intégrales tend vers 4^{2n}, et donc pour un ε suffisamment petit le groupe Γ_ε aura les propriétés mentionnées dans l'énoncé du théorème 1.

2. Applications à l'étude du morphisme d'Albanese.

a) La démonstration du premier point du théorème montre qu'en fait si Γ est un sous-groupe du groupe fondamental de X et si nous avons un morphisme surjectif de Γ dans un groupe abélien G, alors le rang du groupe G est inférieur à $2n$. En particulier, l'abélianisé de chaque sous-groupe de $\pi_1(X)$ est de rang inférieur à $2n$.

b) Soit $L \to X$ un fibré holomorphe en droites nef. On définit sa dimension numérique par

$$\nu(L) = \max\{k \ / \ c_1(L)^k \neq 0 \ \text{ dans } \ H^{k,k}(X)\}$$

Dans ce contexte, on a le théorème d'annulation suivant:

Théorème *(Kawamata-Viehweg). Si L est un fibré en droites nef, alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X + L)\big) = 0 \quad pour \quad q > n - \nu(L).$$

Si le fibré anticanonique de X est nef et de dimension numérique maximale, on sait que X est simplement connexe; cela résulte immédiatement du "Basepoint-free theorem" (voir [CKM],page 57) et du théorème de structure donné dans [DPS3]: en effet, par le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg appliqué à $L = -K_X$ on a $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $q \geq 1$; donc $b_1 = 0$ et la caracteristique du faisceau $\mathcal{O}_X$ vaut $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$. Le "Basepoint-free theorem" nous donne la semi-positivité de $-K_X$ et le théorème de structure des variétés dont le fibré anticanonique est hermitien semi-positif montre que $\pi_1(X)$ est un groupe fini (cf. [DPS3]). Maintenant un argument standard dû à Kobayashi montre que $\pi_1(X) = 0$: pour tout revêtement fini $k : 1$ de X, soit $\tilde{X} \to X$, alors $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = k\chi(\mathcal{O}_X)$ et comme $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 1$ on conclut que $k = 1$.

c) Si X est une variété projective dont le fibré anticanonique est nef et de dimension numérique égale à $n - 1$, alors l'irrégularité de X, notée $q(X) := h^1(X, \mathcal{O}_X)$ est inférieure ou égale à 1. En effet, on a alors $H^j(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $j \geq 2$ par Kawamata-Viehweg, d'où $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X)$. Si $q(X) > 0$ il existe pour tout k entier positif $X_k \to X$ un revêtement abélien cyclique de degré k. Le fibré anticanonique de X_k a les mêmes propriétés numériques que celui de X, donc par Riemann-Roch on a

$$\chi(\mathcal{O}_{X_k}) = 1 - q(X_k) = k\big(1 - q(X)\big).$$

Mais $q(X_k)$ satisfait $0 \leq q(X_k) \leq n$ d'après le théorème principal, donc le membre gauche de l'égalité ci-dessus est borné indépendamment de k et ceci force $q(X) = 1$. En particulier on a

Corollaire. *Soit X une variété projective de dimension n dont le fibré anticanonique est nef et de dimension numérique supérieure ou égale à $n - 1$. Alors le morphisme d'Albanese de X est soit trivial, soit une fibration surjective sur une courbe elliptique.*

Références:

[Au] Aubin, T. — *Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes*, Bull. Sci. Math. **102** (1978), 63–95.

[CaP] Campana, F., Peternell, Th. — *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective*, Math. Ann. **289** (1991), 169–187.

[CG] Cheeger, J., Gromoll, D. — *The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **6** (1971), 119–128.

[CKM] Clemens, H., Kollár, J., Mori, S. — *Higher dimensional complex geometry*, Astérisque **166** (1988).

[DPS1] Demailly, J.-P., Peternell, T., Schneider, M. — *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Alg. Geometry, **3** (1994), 295–345.

[DPS2] Demailly, J.-P., Peternell, T., Schneider, M. — *Kähler manifolds with numerically effective Ricci class*, Compositio Math. **89** (1993), 217–240.

[DPS3] Demailly, J.-P., Peternell, T., Schneider, M. — *Compact Kähler manifolds with hermitian semipositive anticanonical bundle*, Compositio Math. **101** (1996), 217–224.

[Gr] Gromov, M. — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cours rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Textes Mathématiques, 1. Paris: Cedic/Fernand Nathan, Vol. VII, (1981), 152 p.

[Li1] Lichnerowicz, A. — *Variérés kählériennes et première classe de Chern*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 195–224

[Li2] Lichnerowicz, A. — *Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative*, J. Diff. Geom. **6** (1971), 47–94.

[Zh] Zhang Qi. — *On projective manifolds with nef anticanonical bundle*, à paraître dans J. für die reine und angewandte Math.