Localisation de l'espace de Hardy H^1 et opérateurs de Calderón-Zygmund

Lucien Chevalier

1. — Introduction

Le but de cet article est de démontrer une version locale de certains résultats classiques concernant l'espace de Hardy H^1 et l'action sur cet espace des opérateurs de Calderón-Zygmund. Plus précisément, voici deux exemples de questions étudiées :

La première concerne l'invariance de l'espace H^1 relativement aux fonctions maximales utilisées pour le définir. On sait que, si une fonction f est telle qu'une certaine fonction maximale raisonnable $M_1 f$ soit intégrable dans R^n, alors toute autre fonction maximale raisonnable $M_2 f$ est également intégrable dans R^n. Si on suppose seulement que $M_1 f$ est intégrable sur une boule de R^n, que peut-on dire de l'intégrabilité de $M_2 f$?

La seconde concerne l'action sur l'espace H^1 des opérateurs de Calderón-Zygmund. Un résultat classique de cette théorie affirme que, si T est un opérateur de Calderón-Zygmund (resp. un opérateur de Calderón-Zygmund vérifiant la condition $T^*(\mathbf{1}) = 0$) et si $f \in H^1$, alors $T(f) \in L^1$ (resp. $T(f) \in H^1$). Que peut-on dire de $T(f)$, si on suppose seulement qu'une certaine fonction maximale associée à f est intégrable sur une boule de R^n ?

La deuxième question s'est naturellement posée au cours de notre dernier travail [3], dans lequel nous avons eu besoin de certains résultats du paragraphe 4 du présent article. A notre connaissance, ces résultats ne se trouvent pas dans la littérature et pour les obtenir, on doit "localiser" convenablement les méthodes utilisées classiquement pour établir les résultats globaux orrespondants; nous en rappelons les grandes lignes, qui fixent le plan de notre article. La description de l'action des opérateurs de Calderón-Zygmund sur H^1 est basée sur la décomposition atomique de cet espace; de façon un peu similaire, notre réponse à la deuxième question passe par le résultat de localisation du paragraphe 3 qui est, sans être aussi précis, dans l'esprit des décompositions atomiques. A son tour, la décomposition atomique de H^1 est une conséquence du fait que cet espace puisse être défini au moyen de "grandes" fonctions maximales; parallèlement, notre résultat de localisation du paragraphe 3 utilise une version locale de ce résultat, qui fait l'objet du paragraphe 2.

Nous nous réfèrerons très souvent au livre [10] de E. M. Stein. Pour cette raison nous adopterons, à quelques détails près, les mêmes notations. Avant d'énoncer notre théorème, il est nécessaire de rappeler quelques définitions.

On désigne par n un entier ≥ 1, fixé une fois pour toutes, et par R_+^{n+1} le demi-espace $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}_+$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables et à décroissance rapide définies dans R^n. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^n \times \mathrm{N}^n$, nous considérons la semi-norme $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ définie sur $\mathcal{S}$ par

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathrm{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$$

(avec les conventions usuelles concernant les multi-indices).

Pour toute fonction φ définie dans R^n et tout $t > 0$, on note φ_t la nouvelle fonction définie par

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right).$$

Comme dans [10], nous appellerons *distribution bornée* toute distribution tempérée f telle que $f * \varphi \in L^\infty$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$.

Nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des distributions bornées f telles que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$, il existe deux nombres C et N tels qu'on ait, pour $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\sup_{x \in \mathrm{R}^n; t > \varepsilon} |f * \varphi_t(x)| \leq C \varepsilon^{-N}.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'espace $\mathcal{E}$ contient l'espace H^p pour tout $p > 0$ (cf. [10], p. 98), ainsi que toutes les mesures bornées et leurs dérivées.

Etant donné une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$, on associe à toute distribution bornée f les deux fonctions maximales $M_\varphi f$ et $M_\varphi^* f$ définies dans R^n par

$$M_\varphi f(x) = \sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)|$$

et

$$M_\varphi^* f(x) = \sup_{|y-x|<t} |f * \varphi_t(y)|.$$

Pour toute famille finie $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha_i,\beta_i}; 1 \leq i \leq k\}$ de semi-normes sur $\mathcal{S}$, on désigne par $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué des fonctions φ telles que $\|\varphi\|_{\alpha_i,\beta_i} \leq 1$ pour $1 \leq i \leq k$. Toute famille finie $\mathcal{F}$ de semi-normes permet d'associer à toute distribution bornée f sa “grande” fonction maximale $\mathcal{M}_\mathcal{F} f$, définie par dans R^n par

$$\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}} M_\varphi f(x).$$

Comme dans l'étude de l'espace H^1, le noyau de Poisson jouera un rôle particulier parmi toutes les approximations régulières de l'unité. Nous posons, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$p(x) = \frac{c_n}{(|x|^2 + 1)^{(n+1)/2}},$$

où c_n désigne la constante de normalisation habituelle. On vérifie que, si f est une distribution bornée, alors les distributions $f * p_t$ sont bien définies, et sont en fait des fonctions bornées de classe $\mathcal{C}^\infty$ (cf. [10], p. 89-90). L'intégrale de Poisson $P(f)$ de f, définie dans R_+^{n+1} par $P(f)(y,t) = f * p_t(y)$, permet d'associer à toute distribution $f \in \mathcal{E}$ sa fonction maximale non tangentielle usuelle $N(f)$, définie dans R^n par

$$N(f)(x) = \sup_{|x-y|<t} |P(f)(y,t)|.$$

Les espaces L^p considérés sont relatifs à la mesure de Lebesgue dans R^n, et la norme usuelle dans L^p est notée $\|\cdot\|_p$. Enfin, l'espace H^1 est défini comme l'ensemble des fonctions $f \in L^1$ telles que $\|f\|_{H^1} = \|N(f)\|_1 < +\infty$

2. — Equivalence locale des différentes fonctions maximales non-tangentielles

Le but de ce paragraphe est la démonstration d'une version locale du résultat classique de Ch. Fefferman et E. M. Stein (cf [4]), suivant lequel l'espace H^1 peut être défini au moyen de n'importe quelle fonction maximale associée à une approximation de l'unité suffisamment régulière. Ce résultat est basé sur un certain nombre d'estimations entre différentes fonctions maximales. Certaines sont ponctuelles, et nous pourrons donc les utiliser telles quelles; d'autres sont au contraire des estimations L^1, et la partie non triviale de notre travail consistera précisément à "localiser" convenablement ces dernières estimations. Nous nous référerons très souvent aux méthodes utilisées pour démontrer le résultat cité plus haut, et plus particulièrement à la présentation qui en est faite par E. M. Stein dans [10], pp. 88-99.

Notre version locale du résultat global de Fefferman-Stein est le

THÉORÈME 1. — *Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$. Pour toute distribution $f \in \mathcal{E}$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *Si, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que $\int_{\mathrm{R}^n} \varphi(x)dx \neq 0$, la fonction maximale $M_\varphi^* f$ est intégrable sur B_2, alors il existe une famille finie $\mathcal{F}$ de semi-normes sur $\mathcal{S}$ telle que la "grande" fonction maximale $\mathcal{M}_\mathcal{F} f$ soit intégrable sur B_1.*

(ii) *Si la fonction maximale $N(f)$ est intégrable sur B_2, alors on a la même conclusion que dans* (i).

(iii) *Si, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que $\int_{\mathrm{R}^n} \varphi(x)dx \neq 0$, la fonction maximale $M_\varphi^* f$ est intégrable sur B_2, alors la fonction maximale $N(f)$ est intégrable sur B_1.*

Démonstration de l'assertion (i):

Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ et tout nombre r, il existe un nombre C et une famille finie $\mathcal{F}$ de semi-normes sur $\mathcal{S}$ telle qu'on ait, pour toute distribution bornée f, l'estimation ponctuelle

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \leq C M^{**}_{\varphi,r} f(x)$$

où

$$M^{**}_{\varphi,r} f(x) = \sup_{y \in \mathrm{R}^n; t>0} |f * \varphi_t(x-y)| \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-r}$$

pour tout $x \in \mathrm{R}^n$ (cf. [10], p. 95). Par conséquent, il suffit de montrer que la fonction maximale $M^{**}_{\varphi,r} f$ est, sous nos hypothèses et pour r assez grand, intégrable sur B_1. La première étape consiste à utiliser une majoration ponctuelle de $M^{**}_{\varphi,r} f$ par un barycentre de fonctions maximales non-tangentielles, de la manière suivante. Pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathrm{R}^n$, on désignera par $\Gamma_a(x)$ l'ensemble des points $(y,t) \in \mathrm{R}^{n+1}_+$ tels que $|x-y| < at$ et on posera, pour toute fonction u définie dans R^{n+1}_+ et tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$N_a(u)(x) = \sup_{z \in \Gamma_a(x)} |u(z)|.$$

Il est clair que, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$\mathrm{R}^{n+1}_+ = \Gamma_1(x) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (\Gamma_{2^k}(x) \setminus \Gamma_{2^{k-1}}) \right),$$

et par suite on a l'estimation ponctuelle (cf. [10], p. 93)

$$M^{**}_{\varphi,r} f(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(1-k)r} N_{2^k}(F)(x), \tag{1}$$

où $F(y,t) = f * \varphi_t(y)$. Ceci nous amène à estimer les intégrales $\int_{B_1} N_{2^k}(F)(x)dx$. Pour cela, nous utiliserons le résultat suivant (cf. [1]) :

LEMME 1. — *Soient a et b deux nombres tels que $0 < a < b$, B_1 et B_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$, δ la distance de B_1 à B_2^c, $\varepsilon = \delta/(a+b)$, u une application de R^{n+1}_+ dans R et*

$$\sigma_\varepsilon(u) = \sup_{y \in \mathrm{R}^n; t \geq \varepsilon} |u(y,t)|.$$

On a alors, pour tout $\lambda > \sigma_\varepsilon(u)$,

$$m(N_b(u) > \lambda; B_1) \leq C \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n m(N_a(u) > \lambda; B_2),$$

où m désigne la mesure de Lebesgue dans R^n et C est un nombre qui ne dépend que de la dimension n.

Pour tout entier $k \geq 1$, nous appliquons ce lemme avec $a = 1$, $b = 2^k$ et $u = F$; nous obtenons ainsi, en posant $\varepsilon_k = \delta/(1+2^k)$,

$$\int_{B_1} N_{2^k}(F)(x)\, dx \leq \sigma_{\varepsilon_k}(F) m(B_1) + C 2^{kn} \int_{B_2} M_\varphi^* f(x)\, dx.$$

Puisque $f \in \mathcal{E}$, il existe deux nombres C et N tels que $\sigma_{\varepsilon_k}(F) \leq C 2^{kN}$ pour tout $k \in \mathrm{N}$ et par suite, en vertu de l'estimation (1), on voit que $\int_{B_1} M_{\varphi,r}^{**} f(x) dx < +\infty$ dès que $r > \max(n, N)$, ce qui termine la preuve de l'assertion (i).

Démonstration de l'assertion (ii):

D'après (i), il suffit de prouver qu'il existe $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que $\int_{\mathrm{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ et telle que $M_\varphi^* f$ soit intégrable sur la boule B_2. Pour cela, nous reprenons l'argument utilisé dans [10], p. 99; il est basé sur l'existence d'une fonction à décroissance rapide η définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$, vérifiant $\int_1^{+\infty} \eta(s) ds = 1$, et telle que la fonction φ définie dans R^n par

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \eta(s) p_s(x) ds$$

appartienne à l'espace $\mathcal{S}$. Pour cette fonction φ nous avons, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$M_\varphi^* f(x) \leq \int_1^{+\infty} |\eta(s)| \sup_{|x-y|<t} |P(f)(y, st)|\, ds \leq \left(\int_1^{+\infty} |\eta(s)|\, ds \right) N(f)(x),$$

d'où le résultat.

Démonstration de l'assertion (iii):

D'après (i), il existe une famille finie $\mathcal{F}$ de semi-normes sur $\mathcal{S}$ telle que la fonction $\mathcal{M}_\mathcal{F} f$ soit intégrable sur B_1. L'argument utilisé dans [10], p. 98 donne une estimation ponctuelle de la forme $N(f)(x) \leq C \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x)$, d'où le résultat.

3. — Application à un résultat de localisation

Le principal résultat de ce paragraphe est le

THÉORÈME 2. — *Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$. Pour toute fonction $f \in L^1$ telle que $N(f)$ soit intégrable sur la boule B_2, il existe une fonction $g \in H^1$ telle que la fonction $h = f - g$ soit bornée sur la boule B_1.*

Démonstration :

L'idée est de localiser au niveau d'une boule convenable la méthode utilisée dans [10], pp. 101-105, pour obtenir une variante de la décomposition de Calderón-Zygmund utilisée en vue des décompositions atomiques.

La première étape consiste à remplacer la fonction maximale $N(f)$ par une "grande" fonction maximale. Pour cela, on considère une boule ouverte auxiliaire B telle que $\overline{B_1} \subset B$ et $\overline{B} \subset B_2$, et on applique l'assertion (ii) du théorème 1 au couple de boules (B, B_2) et à la fonction f. On obtient ainsi l'existence d'une famille finie $\mathcal{F}$ de semi-normes sur $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f$ soit intégrable sur B; on fixe alors un nombre λ tel que $\{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \leq \lambda\} \neq \emptyset$

La deuxième étape est classique (cf. [10]); elle consiste à appliquer le lemme de recouvrement de Whitney à l'ouvert $O = B \bigcap \{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f > \lambda\}$. Ce lemme fournit l'existence d'une suite (Q_k) de cubes fermés, de centre x_k et d'arête l_k, possédant les propriétés suivantes : $O = \bigcup_{k\in \mathrm{N}} Q_k$, $\mathring{Q}_i \bigcap \mathring{Q}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $l_k \leq d(Q_k, O^c) \leq 4 l_k$ pour tout $k \in \mathrm{N}$ (cf. [9], p. 16). Soient a et b deux nombres tels que $1 < a < b$; on pose $Q_k^* = aQ_k$ et $Q_k^{**} = bQ_k$ pour tout $k \in \mathrm{N}$. Si b est suffisamment proche de 1, il existe un nombre K tel que tout point de O appartienne à au plus K cubes Q_k^{**}, et on a encore l'égalité $O = B \bigcap \{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f > \lambda\} = \bigcup_{k\in \mathrm{N}} Q_k^{**}$. On choisit ensuite une fonction positive $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, égale à 1 dans le cube d'arête 1 centré en 0, à support inclus dans le cube concentrique d'arête a, puis on pose $\zeta_k(x) = \zeta((x - x_k)/l_k)$, $\eta_k = \zeta_k/(\sum_{j\in \mathrm{N}} \zeta_j)$ et $h_k = (f - c_k)\eta_k$, où les c_k sont des nombres choisis de façon à ce que $\int_{\mathrm{R}^n} h_k(x)dx = 0$ pour tout $k \in \mathrm{N}$.

La suite de la démonstration repose sur l'observation suivante, simple mais cruciale : Si on désigne par E l'ensemble des entiers k tels que $Q_k^* \bigcap B_1 \neq \emptyset$, il existe un nombre c tel que, pour tout $k \in E$,

$$cQ_k^* \bigcap \{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \leq \lambda\} \neq \emptyset.$$

Pour le voir, nous écrivons $E = E_1 \bigcup E_2$, où E_1 est l'ensemble des entiers k tels que $d(Q_k^*, \{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \leq \lambda\}) \leq d(Q_k^*, B^c)$ et $E_2 = E \setminus E_1$. Si $k \in E_1$, on a $d(Q_k^*, \{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \leq \lambda\}) \leq d(Q_k^*, O^c)$, qui est de l'ordre de l_k comme il résulte du lemme de Whitney, et par suite il existe un nombre c_1 tel que $c_1 Q_k^* \bigcap \{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \leq \lambda\} \neq \emptyset$ pour tout $k \in E_1$. Si $k \in E_2$, on a $d(Q_k^*, O^c) = d(Q_k^*, B^c)$; le premier membre de cette égalité est de l'ordre de l_k, et le second est de l'ordre de $\delta = d(B_1, B^c)$ puisque $Q_k^* \bigcap B_1 \neq \emptyset$. Donc l_k est de l'ordre de δ et par suite, pour un nombre c_2 convenable, on a $c_2 Q_k^* \bigcap \{\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \leq \lambda\} \neq \emptyset$ pour tout $k \in E_2$. Finalement, le nombre $c = \max(c_1, c_2)$ convient.

Nous définissons h comme la somme (localement finie) $\sum_{k\in E} h_k$, et nous posons $g = f - h$. Nous commençons par montrer que la fonction g est bornée dans la boule B_1. On a $g(x) = f(x)$ si $x \in O^c$, et $|f(x)| \leq C\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \leq C\lambda$ dans $B \backslash O$ (où C dépend uniquement de $\mathcal{F}$); par suite $|g(x)| \leq C\lambda$ dans $B \backslash O$. D'autre part, pour tout $x \in O \bigcap B_1$, on a $\eta_k(x) = 0$ si $k \notin E$, donc $g(x) = \sum_{k\in E}(f\eta_k -$

$h_k)(x) = \sum_{k\in E} c_k\eta_k(x)$, et par suite $|g(x)| \le \sum_{k\in E} |c_k|\eta_k \le \sup_{k\in E}|c_k|$. Pour voir que cette quantité est finie, il suffit de reprendre l'argument utilisé dans [10], ce qui est rendu possible par l'observation précédente.

Il reste donc à prouver que $h \in H^1$. Pour cela il suffit (d'après les résultats de [4]) de montrer que la fonction maximale $M_\varphi h$ est intégrable, où $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ est une fonction à support inclus dans la boule unité et d'intégrale égale à 1. La propriété des cubes Q_k^* lorsque $k \in E$ que nous avons observée précédemment permet de montrer, en utilisant la même méthode que dans [10], pp. 102-104, que

$$\int_{\mathrm{R}^n} M_\varphi h_k(x)\,dx \le C \int_{Q_k^{**}} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)\,dx$$

pour tout $k \in E$, où C est une constante indépendante de k. On en déduit ensuite, en utilisant la propriété d'intersection finie des cubes Q_k^{**}, que (pour une autre constante C)

$$\int_{\mathrm{R}^n} M_\varphi h(x)\,dx \le C \int_{\bigcup_{k\in E} Q_k^{**}} \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)\,dx \le C \int_B \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)\,dx < +\infty,$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Ce résultat a pour conséquence une propriété intéressante de l'espace H^1_{loc} étudié par D. Goldberg dans [5] (rappelons que H^1_{loc} peut être défini comme l'espace des fonctions $f \in L^1$ telles que la fonction maximale tronquée $x \mapsto \sup_{0<t\le 1} |f * \varphi_t(x)|$ soit intégrable dans R^n, où φ désigne une fonction de $\mathcal{S}$ d'intégrale non nulle), qui est la suivante :

COROLLAIRE. — *Soient B une boule ouverte de R^n et $f \in L^1$ telle que $N(f)$ soit intégrable sur B. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, à support inclus dans B, la fonction $\varphi f \in H^1_{loc}$.*

Démonstration :

Soit B' une boule ouverte contenant le support de φ et telle que $\overline{B'} \subset B$. D'après le théorème précédent, il existe une fonction $h \in H^1$ telle que la fonction $g = f - h$ soit bornée sur B'. On écrit $\varphi f = \varphi g + \varphi h$; la fonction φg est bornée et à support compact. Donc, pour une fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ convenable, $\varphi g - \psi \in H^1$, et par suite $\varphi g \in H^1 + \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n) \subset H^1_{loc}$; d'autre part, $\varphi h \in H^1_{loc}$ car $H^1 \subset H^1_{loc}$ et $\mathcal{S}H^1_{loc} \subset H^1_{loc}$ (cf. [5] ou [10], p. 134).

Remarque. — Inversement, le corollaire implique le théorème 2. En effet, si les boules B_1, B_2 et la fonction f vérifient les hypothèses de ce théorème, on peut appliquer le corollaire en prenant pour B la boule B_2 et pour φ une fonction égale à 1 sur B_1 et à support inclus dans B_2. La fonction φf est à support compact, appartient à H^1_{loc} d'après le corollaire, donc s'écrit $h+g$, où $h \in H^1$ et $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ (cf. [5] ou [10], p. 134). Comme enfin $f = \varphi f$ sur la boule B_1, la conclusion du théorème 2 est obtenue.

Nous ne savons pas s'il est possible de déduire simplement le théorème 2 (ou son corollaire) de résultats connus concernant les espaces H^1 et H^1_{loc}.

4. — Action locale des opérateurs de Calderón-Zygmund

Nous arrivons aux résultats qui constituent notre motivation initiale pour l'étude des questions précédentes. Le premier est la version locale du fait que tout opérateur de Calderón-Zygmund applique H^1 dans L^1.

THÉORÈME 3. — *Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$. Pour toute fonction $f \in L^1$ telle que $N(f)$ soit intégrable sur la boule B_2, et tout opérateur de Calderón-Zygmund T, la fonction $T(f)$ est intégrable sur la boule B_1.*

Démonstration :

On considère une boule ouverte B telle que $\overline{B_1} \subset B$ et $\overline{B} \subset B_2$; en utilisant le théorème 2, on voit qu'il existe $h \in H^1$ telle que $g = f - h$ soit bornée sur B. On écrit ensuite

$$T(f) = T(h) + T(g\chi_B) + T(g\chi_{B^c}). \tag{2}$$

Les propriétés générales des opérateurs de Calderón-Zygmund (cf. [7]) font que $T(h) \in L^1$ et $T(g\chi_B) \in L^2$, et par conséquent il reste uniquement à étudier l'intégrabilité sur B_1 de $T(g\chi_{B^c})$. Or, cette fonction est bornée sur B_1 ; en effet, soit K le noyau associé à T; il vérifie une estimation de la forme $|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$ et on a, pour tout $x \in B_1$, $T(g\chi_{B^c})(x) = \int_{B^c} K(x,y)g(y)dy$. Par conséquent, $|T(g\chi_{B^c})(x)| \leq C\delta^{-n}\|g\|_1$ pour tout $x \in B_1$, où $\delta = d(B_1, B^c)$, d'où le résultat.

Le résultat suivant est la version locale du fait que tout opérateur de Calderón-Zygmund vérifiant la condition d'annulation adéquate applique H^1 dans H^1.

THÉORÈME 4. — *Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$, et soit T un opérateur de Calderón-Zygmund tel que $T^*(\mathbf{1}) = 0$. Pour toute fonction $f \in L^1$ telle que $N(f)$ soit intégrable sur la boule B_2, et vérifiant la condition supplémentaire*

$$\int_{\mathrm{R}^n} \frac{|T(f)(x)|}{1+|x|^n}\, dx < +\infty,$$

la fonction $N(T(f))$ est intégrable sur la boule B_1.

Démonstration :

On reprend le début de la démonstration du théorème 3, avec les mêmes notations, jusqu'à l'égalité (2). On a toujours $T(g\chi_B) \in L^2$, donc $N(T(g\chi_B)) \in L^2$ en vertu de propriétés bien connues des fonctions maximales. D'autre part, on a $T(h) \in H^1$, donc $N(T(h)) \in L^1$, parce que $h \in H^1$ et que T vérifie la condition $T^*(\mathbf{1}) = 0$ (cf. [7], p. 237). Par conséquent, il reste uniquement à prouver l'intégrabilité de $N(T(g\chi_{B^c}))$ sur B_1. Posons $k = |T(g\chi_{B^c})|$; nous allons montrer que la fonction $N(k)$ est en fait bornée sur B_1. Pour cela, nous considérons une boule ouverte B_1' telle que $\overline{B_1} \subset B_1'$ et $\overline{B_1'} \subset B$ et nous écrivons, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$,

$$P(k)(x,t) = \int_{B_1'} p_t(x-\xi)k(\xi)\,d\xi + \int_{(B_1')^c} p_t(x-\xi)k(\xi)\,d\xi.$$

Si on pose $\delta = d(B_1', B^c)$, l'argument utilisé dans la démonstration du théorème 3 montre que $k(\xi) \leq C\delta^{-n}\|g\|_1$ pour tout $\xi \in B_1'$, et par suite la première intégrale du second membre est majorée par cette même constante, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. D'autre part, il existe un nombre C' tel que, pour tout $\xi \in (B_1')^c$, tout $x \in B_1$ et tout $t > 0$, $p_t(x-\xi) \leq C' p_t(x_1 - \xi)$, où x_1 est le centre de la boule B_1. Par conséquent on a, pour tout $x \in B_1$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0} \int_{(B_1')^c} p_t(x-\xi)k(\xi)\,d\xi \\
&\qquad \leq C' \int_{(B_1')^c} \sup_{t>0}(p_t(x_1-\xi))k(\xi)\,d\xi \leq C'' \int_{\mathbb{R}^n} \frac{k(\xi)}{1+|\xi|^n}\,d\xi,
\end{aligned}$$

pour un certain nombre C''. Mais on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{k(\xi)}{1+|\xi|^n}\,d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|T(f)(\xi)|}{1+|\xi|^n}\,d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|T(h)(\xi)|}{1+|\xi|^n}\,d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|T(g\chi_B)(\xi)|}{1+|\xi|^n}\,d\xi.$$

La première des intégrales du second membre est finie par hypothèse, la seconde l'est parce que $T(h) \in L^1$, et la troisième parce que $T(g\chi_B) \in L^2$. On a donc prouvé que la fonction maximale "radiale" $x \mapsto \sup_{t>0} P(k)(x,t)$ est bornée sur la boule B_1. Comme $k \geq 0$, la fonction maximale non-tangentielle $N(k)$ l'est donc aussi, en vertu des inégalités de Harnack. Ceci termine la démonstration.

En raison de l'importance des systèmes de fonctions harmoniques conjuguées dans la théorie des espaces de Hardy, le cas des transformations de Riesz mérite une mention particulière. Etant donné une fonction $f \in L^1$, il est bien connu (cf. [10]) que $f \in H^1$ si et seulement si les transformées de Riesz $R_j f$ sont toutes dans L^1 $(1 \leq j \leq n)$ Le résultat suivant (conjecturé dans [1]) est la version locale de cette caractérisation.

THÉORÈME 5. — *Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes de* R^n *telles que* $\overline{B_1} \subset B_2$. *Pour toute fonction $f \in L^1$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *Si la fonction maximale $N(f)$ est intégrable sur la boule B_2, alors les transformées de Riesz $R_j f$ sont intégrables sur la boule B_1 $(1 \leq j \leq n)$.*

(ii) *Si les transformées de Riesz $R_j f$ sont intégrables sur la boule B_2 $(1 \leq j \leq n)$, alors la fonction maximale $N(f)$ est intégrable sur la boule B_1.*

Démonstration :

Les transformations de Riesz étant des opérateurs de Calderón-Zygmund, la première assertion est un cas particulier du théorème 3.

Pour prouver la seconde, nous avons besoin de quelques notations. Pour $1 \leq j \leq n$, et tout $x \in \mathrm{R}^n$, nous posons

$$q^j(x) = c_n \frac{x_j}{(|x|^2+1)^{(n+1)/2}},$$

où c_n est la constante de normalisation habituelle. Nous posons ensuite, pour tout $(x,t) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$, $u_0(x,t) = f * p_t(x)$, $u_j(x,t) = f * q_t^j(x)$ $(1 \leq j \leq n)$, et

$$F(x,t) = (u_0(x,t), u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t)).$$

Il est bien connu, et facile de vérifier, qu'on définit ainsi un système F de $n+1$ fonctions harmoniques conjuguées. Notre démonstration dépend du

LEMME 2. — *Soient $q = 1-1/2n$, $g_0 = |f|^q \chi_{\{|f|>1\}}$ et $g_j = |R_j f|^q \chi_{\{|R_j f|>1\}}$ $(1 \leq j \leq n)$. Il existe un nombre C, dépendant uniquement de n et tel que, pour tout $(x,t) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$,*

$$|F(x,t)| \leq C \left(1 + \sum_{j=0}^{n} (g_j * p_t(x))^{1/q}\right). \tag{3}$$

Nous admettons provisoirement ce résultat. Dans toute la suite, nous désignerons par C un nombre variable, dépendant uniquement de n. De l'estimation (3) on déduit que, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$N(f)(x) = \sup_{|y-x|<t} |u_0(y,t)| \leq \sup_{|y-x|<t} |F(y,t)| \leq C \left(1 + \sum_{j=0}^{n} (N(g_j)(x))^{1/q}\right).$$

On obtient donc, en utilisant la majoration bien connue $N \leq CM$, où M désigne l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood,

$$\int_{B_1} N(f)(x)\,dx \leq C\left(m(B_1) + \sum_{j=0}^{n} \int_{B_1} (M(g_j)(x))^{1/q}\,dx\right).$$

Par conséquent, il suffit d'établir la finitude des intégrales $\int_{B_1} (M(g_j)(x))^{1/q}\,dx$. Soit $\delta = d(B_1, B_2^c)$; pour toute fonction borélienne k à valeurs ≥ 0, et tout $x \in \mathrm{R}^n$, on a évidemment $M(k)(x) \leq C(\delta^{-n}\|k\|_1 + M^\delta(k)(x))$, où

$$M^\delta(k)(x) = \sup_{0<r<\delta} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} k(y)\,dy.$$

Par conséquent,

$$\int_{B_1} (M(g_j)(x))^{1/q}\,dx \leq C\left(\delta^{-n/q} m(B_1)\|g_j\|_1^{1/q} + \int_{B_1} (M^\delta(g_j)(x))^{1/q}\,dx\right).$$

Puisque $f \in L^1$, les n fonctions $R_j f$ appartiennent à l'espace L^1 faible en vertu du théorème de Calderón-Zygmund, ainsi que la fonction f elle-même. Donc, puisque $q < 1$, $g_j \in L^1$ pour $0 \leq j \leq n$. D'autre part,

$$\int_{B_1} (M^\delta(g_j)(x))^{1/q}\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda^{1/q-1} m(M^\delta(g_j) > \lambda; B_1)\,d\lambda.$$

Pour majorer l'intégrale du second membre, nous avons besoin de la version locale suivante de l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood :

LEMME 3. — *Avec les notations précédentes on a, pour toute fonction borélienne $k \geq 0$ et tout $\lambda > 0$*

$$m(M^\delta(k) > \lambda; B_1) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{B_2 \cap \{k > \lambda/2\}} k(x)dx.$$

En utilisant ce résultat et la dernière égalité, on obtient facilement les majorations

$$\int_{B_1} (M^\delta(g_0)(x))^{1/q}\,dx \leq C \int_{B_2} |f(x)|\,dx$$

et

$$\int_{B_1} (M^\delta(g_j)(x))^{1/q}\,dx \leq C \int_{B_2} |R_j f(x)|\,dx$$

pour $1 \leq j \leq n$, ce qui termine la démonstration, sous réserve de la preuve des deux lemmes.

Démonstration du lemme 2:

Nous traitons d'abord le cas particulier dans lequel $f \in L^1 \bigcap L^2$. Dans ce cas, l'argument classique de sous-harmonicité (cf. [9], p. 217) et les égalités $R_j f * p_t = q_t^j * f$ (cf. [9], p. 78) donnent facilement l'estimation

$$|F(x,t)|^q \leq \left(|f|^q + \sum_{j=1}^{n} |R_j f|^q \right) * p_t(x),$$

dont on déduit aussitôt l'inégalité (3). Pour passer au cas général, nous approchons la fonction f au moyen d'une suite (f_k) d'éléments de $L^1 \bigcap L^2$, telle que $||f_k||_1 \leq ||f||_1$ pour tout k. Pour $0 \leq j \leq n$ et $k \in \mathrm{N}$, nous définissons les fonctions $u_{j,k}$, F_k et $g_{j,k}$ en remplaçant f par f_k dans la définition des fonctions u_j, F et g_j. La première partie de la démonstration montre qu'il existe une constante C dépendant uniquement de n telle que, pour tout $(x,t) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$ et tout $k \in \mathrm{N}$, on ait

$$|F_k(x,t)| \leq C \left(1 + \sum_{j=0}^{n} (g_{j,k} * p_t(x))^{1/q} \right). \tag{4}$$

Il suffit de montrer que, pour $0 \leq j \leq n$, une suite extraite de la suite $(g_{j,k})$ est uniformément intégrable et converge vers g_j presque partout dans R^n, car ensuite on en déduit facilement que les deux membres de l'inégalité (4) convergent vers les membres correspondants de l'inégalité (3) lorsque k tend vers l'infini. On sait que, lorsque k tend vers l'infini, f_k tend vers f et $R_j f_k$ tend vers $R_j f$ dans L^1 faible ($1 \leq j \leq n$); en passant à une sous-suite, on peut supposer que cette convergence a lieu presque partout dans R^n, et dans ce cas on a aussi $\lim_{k \to +\infty} g_{j,k} = g_j$ presque partout dans R^n, pour $0 \leq k \leq n$. D'autre part, si on pose $r = (1 - 1/3n)/(1 - 1/2n)$, on a

$$||g_{j,k}||_r^r = \int_1^{+\infty} \lambda^{-1/3n} m(|R_j f_k| > \lambda)\, d\lambda \leq C||f_k||_1 \int_1^{+\infty} \lambda^{-1-1/3n}\, d\lambda \leq C||f||_1$$

pour $1 \leq j \leq n$; on a évidemment une estimation semblable pour $||g_{0,k}||_r^r$. On a donc prouvé (puisque $r > 1$) l'uniforme intégrabilité de la suite $(g_{j,k})$ pour $0 \leq j \leq n$, et ceci achève la démonstration du lemme 2.

Démonstration du lemme 3:

Il suffit d'adapter la démonstration de l'inégalité maximale usuelle basée sur le lemme de recouvrement de Vitali (cf. [10], pp. 12-13). Les détails sont laissés au lecteur.

5. — Application à l'étude locale des relations entre les espaces H^1 et $L \log L$

Au moyen d'une version appropriée de la "densité de l'intégrale d'aire", nous allons établir un théorème qui généralise des résultats antérieurs de E. M. Stein ([8], th. 3) et de A. P. Calderón et A. Zygmund ([2]). Nous répondons ainsi à une question laissée ouverte dans un de nos articles précédents (cf. [1], remarque 4). Pour toute fonction convenable f définie dans R^n, et tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, nous posons

$$D_*^0(f)(\xi) = \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} \frac{c_n y^2}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \Delta |P(f)|(dz).$$

Comme la fonction $|P(f)|$ est sous-harmonique, son laplacien au sens des distributions est une mesure positive, et par suite on définit bien ainsi une application de R^n dans $\mathrm{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$.

Notre résultat, que l'on peut considérer comme une "caractérisation locale" de la classe $L \log L$ de Zygmund, est le

THÉORÈME 6. — *Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$. Pour toute fonction $f \in L^1$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *Si les transformées de Riesz $R_j f$ $(1 \leq j \leq n)$ et la fonction $D_*^0(f) \log^+ D_*^0(f)$ sont intégrables sur la boule B_2 , alors la fonction $|f| \log^+ |f|$ est intégrable sur la boule B_1.*

(ii) *Si la fonction $|f| \log^+ |f|$ est intégrable sur la boule B_2, alors les transformées de Riesz $R_j f$ $(1 \leq j \leq n)$ et la fonction $D_*^0(f) \log^+ D_*^0(f)$ sont intégrables sur la boule B_1.*

Démonstration :

Soit B une boule ouverte telle que $\overline{B_1} \subset B$ et $\overline{B} \subset B_2$. Pour prouver (i), on commence par utiliser l'assertion (ii) du théorème 5, qui montre que la fonction maximale $N(f)$ est intégrable sur B. D'autre part, la fonction $D_*^0(f) \log^+ D_*^0(f)$ est aussi intégrable sur B et par suite, d'après l'assertion (i) du théorème 3 de [3], la fonction $|f| \log^+ |f|$ est intégrable sur B_1.

Pour prouver (ii), on utilise d'abord l'assertion (ii) du théorème 3 de [3], qui donne l'intégrabilité sur B des fonctions $N(f)$ et $D_*^0(f) \log^+ D_*^0(f)$; il suffit ensuite d'utiliser l'assertion (i) du théorème 5 pour terminer la démonstration.

L'assertion (i) était connue auparavant dans le cas particulier où la fonction f est à valeurs ≥ 0 (voir l'article [8] de E. M. Stein). La partie de l'assertion (ii) portant sur les transformées de Riesz est un résultat plus ancien (cf. [2]) de A. P. Calderón et A. Zygmund. L'utilisation de la fonctionnelle D_*^0 permet donc de préciser ce dernier résultat et d'étendre celui de E. M. Stein aux fonctions de signe variable. Les fonctionnelles de ce type ont été introduites par R. F. Gundy au début des années 80, sous une forme légèrement différente, et pour usage tout à fait différent (cf. [6]).

Références

[1] J. Brossard et L. Chevalier. — *Classe L log L et densité de l'intégrale d'aire dans* R_+^{n+1}. Ann. of Math. **128** (1988), 603-618.

[2] A. P. Calderón and A. Zygmund. — *Singular integrals and periodic functions.* Studia Math. **14** (1954), 249-271.

[3] L. Chevalier. — *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications.* A paraître.

[4] Ch. Fefferman and E. M. Stein . — H^p *spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[5] D. Goldberg. — *A local version of real Hardy spaces.* Duke Math. J. **46**,1 (1979), 27-42.

[6] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983), 138-149.

[7] Y. Meyer. — *Opérateurs de Calderón-Zygmund.* Hermann, Paris, 1990.

[8] E. M. Stein. — *Note on the class* $L \log L$. Studia Math. **32** (1969), 305-310.

[9] E. M. Stein. — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1970.

[10] E. M. Stein. — *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1993.

Institut Fourier
U.R.A. 188 du C.N.R.S.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
e-mail: lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr