TROIS PROPRIÉTÉS DU FLOT GÉODÉSIQUE EN COURBURE NÉGATIVE

par Hamid-Reza FANAÏ

Généralement il existe deux sortes de regard pour étudier la rigidité d'une variété riemannienne. Le premier est de comparer cette variété riemannienne à une autre, à partir de certaines données géométriques ou bien dynamiques, et c'est dans ce cadre qu'on va se mettre dans les deux premières parties. Dans la première partie, on compare une variété riemannienne compacte localement symétrique de courbure strictement négative à une famille de variétés riemanniennes qui ont leurs flots géodésiques C^0-conjugués à celui de la variété de départ, et dans la seconde partie on considère deux métriques conformément équivalentes de courbure strictement négative sur une variété compacte qui ont leurs mesures de Lebesgue équivalentes sur le bord à l'infini.

Le deuxième regard est de chercher ce qui se passe lorsqu'on impose une condition reliant deux objets différents définis sur une même variété riemannienne. Dans la troisième partie on se trouve dans une telle situation en supposant que les mesures harmoniques associées au feuilletage fortement stable et fortement instable d'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative sont égales. Dans les trois parties, nous obtenons, de manière très simple des résultats de rigidité.

1. — Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. On suppose que M et toutes les métriques considérées sur M sont C^∞ et que $\dim M \geq 3$. Si g_0 est localement symétrique, alors le résultat suivant exprime la rigidité du flot géodésique de g_0, ([1]):

Théorème 1. — *Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte localement symétrique de courbure strictement négative et* $\dim M \geq 3$. *Toute variété riemannienne dont le flot géodésique est C^1-conjugué à celui de (M, g_0) est isométrique à (M, g_0).*

Il est naturel de se poser la même question, lorsque la conjugaison n'est plus que de classe C^0. En fait la régularité C^1 n'est utilisée que pour montrer l'égalité des volumes et en considérant cette remarque, l'objet de cette partie est de donner une réponse partielle à notre question. Plus précisément :

Proposition 2. — *Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte localement symétrique de courbure strictement négative et* $\dim M \geq 3$. *Toute perturbation $\{g_\beta\}_{\beta \geq 0}$*

variant de manière C^1 en β, de métriques riemanniennes sur M, telle que le flot géodésique de g_β est C^0-conjugué à celui de (M, g_0) pour tout β petit, est triviale, i.e. g_β est isométrique à g_0.

Preuve. — Il suffit de montrer l'égalité des volumes. On remarque tout d'abord que par conjugaison avec g_0, les vecteurs périodiques de $S_\beta M$, le fibré unitaire tangent de (M, g_β), sont denses dans $S_\beta M$ et que dans chaque classe non triviale d'homotopie libre de courbes, il existe une unique géodésique périodique de (M, g_β).

Soient γ_β une géodésique périodique de (M, g_β) et γ_λ, pour λ proche de β, l'unique géodésique périodique de (M, g_λ) dans la classe d'homotopie libre de γ_β. La g_β-longueur de γ_β est égale à la g_λ-longueur de γ_λ. Soit ℓ cette longueur et on paramétrise γ_λ, pour tout λ par la longueur d'arc, c'est-à-dire pour tout $t \in [0, \ell]$ on a $\|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\lambda = 1$ où $\dot\gamma_\lambda(t)$ est le vecteur tangent à γ_λ en t, et $\|\cdot\|_\lambda$ est la norme induite par g_λ sur TM, le fibré tangent de M. On peut choisir les paramétrisations telles que pour tout $t \in [0, \ell]$, la courbe $\lambda \to \dot\gamma_\lambda(t)$ soit continue dans TM, car la perturbation est C^1.

Nous redémontrons les formules connues dans le cas de perturbations C^∞. Pour tout $v \in TM$, on peut écrire :

$$\|v\|_\lambda = \|v\|_\beta + (\lambda-\beta)\cdot \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\beta}\|v\|_\alpha + o(|\lambda-\beta|, v)$$

où $\lim\limits_{\lambda\to\beta} \frac{o(|\lambda-\beta|, v)}{\lambda-\beta} = 0$. On remarque que $o(|\lambda-\beta|, v)$ est une fonction continue de deux variables. Par continuité en λ, $US_\lambda M$ pour λ proche de β, forme un ensemble compact et on a l'uniforme continuité de la fonction $o(|\lambda-\beta|, v)$, c'est-à-dire $\frac{o(|\lambda-\beta|, v)}{\lambda-\beta}$ tend vers 0 uniformément pour tout $v \in US_\lambda M$ lorsque λ tend vers β.

Si $S_\beta = \frac{\partial}{\partial\alpha}\big|_{\alpha=\beta} g_\alpha$, alors $\frac{\partial}{\partial\alpha}\big|_{\alpha=\beta}\|v\|_\alpha = \frac{1}{2}\frac{S_\beta(v,v)}{\|v\|_\beta}$. Pour un t fixé dans $[0, \ell]$ on a donc :

$$\|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\lambda = \|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\beta + (\lambda-\beta)\cdot \frac{1}{2}\frac{S_\beta(\dot\gamma_\lambda(t), \dot\gamma_\lambda(t))}{\|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\beta} + o(|\lambda-\beta|, \dot\gamma_\lambda(t))$$

mais $1 = \|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\lambda = \|\dot\gamma_\beta(t)\|_\beta$, donc

$$\frac{\|\dot\gamma_\beta(t)\|_\beta - \|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\beta}{\lambda-\beta} = \frac{1}{2}\frac{S_\beta(\dot\gamma_\lambda(t), \dot\gamma_\lambda(t))}{\|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\beta} + \frac{o(|\lambda-\beta|, \dot\gamma_\lambda(t))}{\lambda-\beta}$$

la continuité de $\|\cdot\|_\beta$ et $S_\beta(\cdot,\cdot)$ impliquent que $\frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=\beta}\|\dot\gamma_\lambda(t)\|_\beta$ existe et est égale à $-\frac{1}{2}S_\beta(\dot\gamma_\beta(t), \dot\gamma_\beta(t))$. On a donc :

$$-\frac{1}{2}\int_0^\ell S_\beta(\dot\gamma_\beta(t), \dot\gamma_\beta(t))\, dt = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\beta}\ell_\beta(\gamma_\lambda)$$

où $\ell_\beta(\gamma_\lambda)$ est la g_β-longueur de γ_λ.

Si $\beta > 0$, γ_β étant une géodésique de (M, g_β), l'existence de $\frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=\beta}\ell_\beta(\gamma_\lambda)$ donne $\frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=\beta}\ell_\beta(\gamma_\lambda) = 0$ donc $\int_0^\ell S_\beta(\dot\gamma_\beta(t), \dot\gamma_\beta(t))\, dt = 0$. Pour $\beta = 0$, la même égalité est vraie à l'aide de la continuité, ce qui veut dire pour tout β petit, on a $\int_{S_\beta M} S_\beta(v,v)d\delta_\beta(v) = 0$ où δ_β est la mesure de Dirac invariante par le flot géodésique de (M, g_β) définie par la géodésique γ_β. La densité de telles mesures dans l'ensemble des mesures invariantes par le flot géodésique de (M, g_β) implique que $\int_{S_\beta M} S_\beta(v,v)\, d\mu_\beta(v) = 0$ où μ_β est la mesure de Liouville de (M, g_β). Ceci avec la formule :

$$\int_{S_\beta M} S_\beta(v,v)\, d\mu_\beta(v) = \frac{\omega(n-1)}{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\beta} \mathrm{vol}(M, g_\lambda)$$

donne l'égalité des volumes. Ce qui termine la preuve à l'aide du théorème fondamental de [1]. ■

Si le flot géodésique de (M, g_β) est d'Anosov, on peut remplacer la condition de conjugaison par une condition plus faible. De manière plus précise, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2'. — *Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte localement symétrique de courbure strictement négative et* $\dim M \geq 3$. *Toute perturbation $\{g_\beta\}_{\beta \geq 0}$ variant de manière C^1 en β, de métriques riemanniennes sur M ayant leur flot géodésique de type Anosov, dont les longueurs des géodésiques périodiques dans chaque classe d'homotopie libre de courbes ne dépendent pas du paramètre β, est triviale.*

La preuve est similaire en utilisant les résultats de [9] et la formule de l'entropie topologique d'un flot d'Anosov de [2].

Remarque 3. — Si on considère une perturbation $\{g_\beta\}_{\beta \geq 0}$ variant de manière C^1 en β, de métriques riemanniennes de courbure strictement négative sur M, telle que g_0 et g_β sont isospectrales, pour tout β petit, alors g_β est isométrique à g_0. En effet, g_β a le même volume que g_0 et en courbure négative, le spectre du Laplacien détermine le spectre non marqué des longueurs, et par la régularité C^1 de la perturbation, les multiplicités des géodésiques périodiques, étant des nombres entiers, ne varient pas et on a donc l'égalité des entropies topologiques et le théorème fondamental de [1] s'applique. Ceci est comparable au résultat de Guillemin-Kazhdan où des perturbations considérées sont C^∞.

2. — Dans cette partie, on s'intéresse à la notion d'intersection de deux métriques (geodesic stretch) déjà utilisée par G. Knieper ([11]). On va démontrer une généralisation d'un résultat de [8] prouvé en dimension 2, qui peut s'écrire comme le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soient M une variété compacte et g_1, g_2 deux métriques riemanniennes de courbure strictement négative sur M. Si la mesure de Lebesgue sur le bord à l'infini de $\widetilde{M}$, induite par g_1 est absolument continue par rapport à celle induite par g_2 et en plus g_1 et g_2 sont dans la même classe conforme, alors elles sont égales (à une constante près).*

À l'aide de ce théorème, on obtient le

Corollaire 5 (G. Knieper). — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. Toute métrique conformément équivalente à g, de courbure strictement négative sur M, dont le flot géodésique est C^0-conjugué à celui de g, est égale à g.*

Preuve. — D'après [5] toute conjugaison de classe C^0 envoie la mesure de Liouville normalisée d'une métrique de courbure strictement négative sur celle de l'autre. On vérifie facilement que ceci donne la condition nécessaire sur les mesures de Lebesgue, dans l'énoncé du théorème précédent. ■

Remarque 6. — Ce corollaire a été déjà démontré par A. Katok ([7]). G. Knieper en a une preuve courte (non publiée).

Avant de prouver le théorème 4, rappelons la définition de l'intersection de deux métriques. Soient M une variété compacte et g_1, g_2 deux métriques riemanniennes sur M. Pour $v \in S_{g_1}M$, on désigne par $\widetilde{C}_v^{g_1}(t)$ le relevé de la géodésique définie par v dans (M, g_1) au revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. On définit $a_1(v,t) = d_{g_2}\left(\widetilde{C}_v^{g_1}(0), \widetilde{C}_v^{g_1}(t)\right)$ où d_{g_2} est la distance sur $\widetilde{M}$ induite par $\tilde{g}_2$. On voit que ([11]) la limite $I(g_1,g_2,v) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{a_1(v,t)}{t}$ existe, pour $\mu_L^{g_1}$-presque tout $v \in S_{g_1}M$, où $\mu_L^{g_1}$ est la mesure de Liouville normalisée sur $S_{g_1}M$, et elle est $\mu_L^{g_1}$-intégrable et invariante par le flot géodésique de (M, g_1).

On définit l'intersection de g_2 par rapport à g_1 comme l'intégral :

$$I(g_1,g_2) = \int_{S_{g_1}M} I(g_1,g_2,v)\, d\mu_L^{g_1}(v)$$

on définit également de manière similaire $I(g_2,g_1)$ et $a_2(w,t)$, $w \in S_{g_2}M$.

Si g_1 et g_2 sont de courbure strictement négative, on désigne par $\partial\widetilde{M}$ le bord à l'infini de $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_1)$, que l'on identifie à celui de $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_2)$. En chaque point $x \in (\widetilde{M}, \widetilde{g}_1)$, la mesure de Lebesgue sur $S_x\widetilde{M}$ que l'on projette sur $\partial\widetilde{M}$ donne une classe de mesure de Lebesgue sur $\partial\widetilde{M}$ (induite par g_1).

Lemme 7. — *Si la mesure de Lebesgue sur $\partial\widetilde{M}$ induite par g_1 est absolument continue par rapport à celle induite par g_2, alors $I(g_1,g_2)\cdot I(g_2,g_1) = 1$.*

Preuve. — On fixe un $\varepsilon > 0$ assez petit. La mesure $\mu_L^{g_1}$ étant ergodique implique que $I(g_1,g_2) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{a_1(v,t)}{t}$ pour $\mu_L^{g_1}$-presque tout $v \in S_{g_1}M$.

Il existe donc un $T = T(\varepsilon) > 0$ tel que l'ensemble :

$$A(\varepsilon) = \left\{ v \in S_{g_1}(M) \mid \left|\frac{a_1(v,t)}{t} - I(g_1,g_2)\right| \leq \varepsilon,\ \forall t \geq T \right\}$$

vérifie $\mu_L^{g_1}(A(\varepsilon)) \geq \frac{1}{2}$. Si on associe à chaque vecteur $v \in S_{g_1}\widetilde{M}$, le couple $(p,\xi) \in \widetilde{M} \times \partial \widetilde{M}$ où p est le point base de v et $\xi = \widetilde{C}_v^{g_1}(+\infty)$, en utilisant la décomposition canonique de $\mu_L^{g_1}$, on peut trouver un point $p \in \widetilde{M}$ tel que :

$$\theta_p^{g_1}\left(\left\{\xi \in \partial \widetilde{M} \mid (p,\xi) \in A(\varepsilon)\right\}\right) \geq d > 0$$

où d est une constante et $\theta_p^{g_1}$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial \widetilde{M}$, pour la métrique g_1, obtenue par la projection $S_p\widetilde{M} \to \partial \widetilde{M}$. À l'aide de notre condition dans le lemme et en remarquant que les mesures riemanniennes sur $\widetilde{M}$ associées à g_1 et g_2 sont équivalentes, on peut choisir le point $p \in \widetilde{M}$ et le point $\xi \in \partial \widetilde{M}$ tels que $v = (p,\xi) \in A(\varepsilon)$ et $w \in S_{g_2}\widetilde{M}$, $w = (p,\xi)$ vérifie :

$$\left|\frac{a_2(w,t)}{t} - I(g_2,g_1)\right| \leq \varepsilon,\ \forall t \geq T\,.$$

Pour tout $t > 0$, on prend t' tel que $\widetilde{C}_w^{g_2}(t')$ soit la g_2-projection du point $\widetilde{C}_v^{g_1}(t)$ sur la géodésique $\widetilde{C}_w^{g_2}$. La métrique g_1 étant quasi-isométrique à g_2, implique que $\widetilde{C}_v^{g_1}$ est à distance bornée de $\widetilde{C}_w^{g_2}$, il existe donc une constante universelle assez grande $K > 0$, vérifiant l'inégalité triangulaire suivante :

$$a_1(v,t) - K \leq t' \leq a_1(v,t) + K,\ \forall t > 0.$$

Si $t \geq T$ est assez grand tel que $\left|\frac{K}{t}\right| \leq \varepsilon$ et $t' \geq T$ on a :

$$-2\varepsilon + I(g_1,g_2) \leq \frac{t'}{t} \leq 2\varepsilon + I(g_1,g_2).$$

D'autre part, l'inégalité triangulaire donne également $t \leq K + a_2(w,t')$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon + I(g_1,g_2)} \leq \frac{t}{a_1(v,t)} &\leq \frac{K + a_2(w,t')}{(I(g_1,g_2) - \varepsilon)\cdot t} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{I(g_1,g_2) - \varepsilon} + \frac{a_2(w,t')}{t'}\cdot\frac{t'}{t}\cdot\frac{1}{I(g_1,g_2) - \varepsilon} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{I(g_1,g_2) - \varepsilon} + (\varepsilon + I(g_2,g_1))\cdot\frac{2\varepsilon + I(g_1,g_2)}{I(g_1,g_2) - \varepsilon}
\end{aligned}$$

quand ε tend vers 0, on trouve : $\frac{1}{I(g_1,g_2)} \leq I(g_2,g_1)$.

On obtient de façon similaire l'autre inégalité. ■

Preuve du théorème 4. — On utilise un résultat de [11], où il est démontré que si deux métriques g_1, g_2 de courbure strictement négative sont dans la même classe conforme, alors $I(g_1,g_2) \leq \left(\frac{\mathrm{vol}(M,g_2)}{\mathrm{vol}(M,g_1)}\right)^{1/n}$ où $n = \dim M$, avec l'égalité si et seulement si $g_1 = cg_2$, pour une constante $c > 0$.

Le lemme précédent donne le cas d'égalité. ■

3. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. Son flot géodésique est d'Anosov et la décomposition correspondante donne lieu à quatre feuilletages : stable, fortement stable, instable et fortement instable. D'après [4] on peut considérer les mesures harmoniques sur SM associées à ces feuilletages. Dans [10], [12], [13] et [14] on trouve de nombreux résultats concernant ce sujet et ce que représente l'égalité de telles mesures avec les autres mesures naturelles définies sur SM, comme la mesure de Liouville ou la mesure de Bowen-Margulis.

Dans cette dernière partie, nous considérons le cas d'égalité $\omega^{su} = \omega^{ss}$, où ω^{su} (resp. ω^{ss}) est la mesure harmonique sur SM associée au feuilletage fortement instable (resp. fortement stable). Cette égalité est équivalente au fait que les mesures de Patterson-Sullivan $\{\mu_x\}_{x\in\widetilde{M}}$ sur $\partial\widetilde{M}$, soient invariantes par la symétrie (flip-invariant), *i.e.* pour tout $x \in \widetilde{M}$ on a :

$$d\mu_x(\xi) = d\mu_x(-_x\,\xi),\ \forall \xi \in \partial\widetilde{M}$$

où $-_x\,\xi$ désigne l'image symétrique de ξ par rapport à x ([14]).

À l'aide de [1], nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative, $n \geq 3$. Si $\omega^{su} = \omega^{ss}$, alors g est localement symétrique.*

Preuve. — Pour toute fonction $\varphi : SM \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à ω^{su} et dérivable dans la direction du flot géodésique X, on a ([10], [12], [14]) :

$$\int_{SM} (X\varphi)(v)d\omega^{su}(v) = \int_{SM} (h - \operatorname{tr} U^+(v))\varphi(v)d\omega^{su}(v)$$

où h est l'entropie topologique et $U^+(v)$ est la seconde forme fondamentale de l'horosphère instable associée à v, en point base de v. Pour la mesure ω^{ss}, on a aussi :

$$\int_{SM} (X\phi)(v)d\omega^{ss}(v) = \int_{SM} (\operatorname{tr} U^+(-v) - h)\phi(v)d\omega^{ss}(v).$$

Si $\omega^{su} = \omega^{ss}$, alors : $\int_{SM} \left[2h - \operatorname{tr} U^+(v) - \operatorname{tr} U^+(-v)\right]\phi(v)\ d\omega^{su}(v) = 0$, donc pour tout $v \in SM$: $2h = \operatorname{tr} U^+(v) + \operatorname{tr} U^+(-v)$. On sait que la fonction $\operatorname{tr} U^+$ restreinte à chaque feuille instable est C^∞, mais l'égalité : $\operatorname{tr} U^+(v) = 2h - \operatorname{tr} U^+(-v)$ implique que cette fonction restreinte à chaque feuille stable est également C^∞. En utilisant [6], on obtient que $\operatorname{tr} U^+$ est C^∞ sur SM, ceci avec une généralisation de [3], due à A. Katok (voir par exemple [16]) implique que le flot géodésique de (M, g) est C^∞-conjugué au flot géodésique d'une variété localement symétrique de courbure strictement négative, qui avec [1] termine la preuve. ■

Remarque 9. — En dimension 2, ce résultat a été démontré par F. Ledrappier ([12], p. 139). C.B. Yue a également étudié ce cas en dimensions supérieures ([14], p. 180 et [15]).

Pour un point $x \in \widetilde{M}$ et $R > 0$, on désigne par $S_x(R)$ la sphère du centre x et du rayon R dans $\widetilde{M}$. On a la mesure de Lebesgue $\lambda_{x,R}$ sur $S_x(R)$ définie par la métrique induite sur $S_x(R)$ et on considère la symétrie sur $S_x(R)$ envoyant tout point $y \in S_x(R)$ à $-_x (y)$, l'image symétrique de y par rapport à x. Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 10. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative, $n \geq 3$. Si pour tout $x \in \widetilde{M}$, les mesures $\lambda_{x,R}$ sont invariantes, par la symétrie, pour tout $R > 0$ assez grand, alors g est localement symétrique.*

Preuve. — Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \widetilde{M}$, la mesure de Patterson-Sullivan μ_x sur $\partial \widetilde{M}$ est la limite vague des mesures $\mu_{x,R} = e^{\frac{1}{hR}\widetilde{\lambda}_{x,R}}$ sur $\partial \widetilde{M}$, quand R tend vers l'infini, où $\widetilde{\lambda}_{x,R}$ est l'image de $\lambda_{x,R}$ par la projection $S_x(R) \to \partial \widetilde{M}$. ∎

Remerciements. — *Je tiens à remercier Gérard Besson pour ses précieux conseils. Mes sincères remerciements vont également à François Ledrappier pour sa disponibilité, son soutien et les discussions fructueuses, notamment sa remarque-clé pour le théorème 8. Je ne manquerai pas de remercier aussi Sylvestre Gallot pour ses collaborations cachées !*

Références bibliographiques

[1] Besson G., Courtois G. et Gallot S. — *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, GAFA **5** (1995), 731–799.

[2] Bowen R. — *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Am. J. Math. **94** (1972), 1–30.

[3] Foulon P. et Labourie F. — *Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques*, Invent. Math. **109** (1992), 97–111.

[4] Garnett L. — *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*, J. Fun. Anal. **51** (1983), 285–311.

[5] Hamenstädt U. — *Regularity at infinity of compact negatively curved manifolds*, Erg. Th. & Dyn. Syst. **14** (1994), 493–514.

[6] Journé J.L. — *On a regularity problem occuring in connection with Anosov diffeomorphisms*, Commun. Math. Phys. **106** (1986), 345–351.

[7] Katok A. — *Entropy and closed geodesics*, Erg. Th. & Dyn. Syst. **2** (1982), 339–367.

[8] Katok A. — *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, Erg. Th. & Dyn. Syst. **8*** (1988), 139–152.

[9] Klingenberg W. — *Riemannian manifolds with geodesic flows of Anosov type*, Ann. of Math. **99** (1974), 1–13.

[10] Knieper G. — *Spherical means on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, Diff. Geometry and Appl. **4** (1994), 361–390.

[11] Knieper G. — *Volume growth, entropy and the geodesic stretch*, Math. Research Let. **2** (1995), 39–58.

[12] Ledrappier F. — *Ergodic properties of the stable foliations*, Ergodic theory and related topics, III, Springer Lecture Notes in Math. **1514** (1992), 131–145.

[13] Ledrappier F. — *Harmonic 1-forms on the stable foliation*, Bol. Soc. Bras. Math. **25** (1994), 121–138.

[14] Yue C.B. — *Brownian motion on Anosov foliations and manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geometry **41** (1995), 159–183.

[15] Yue C.B. — *Conditional measure and flip invariance of Bowen-Margulis and harmonic measures on manifolds of negative curvature*, Erg. Th. & Dyn. Syst. **15** (1995), 807–811.

[16] Yue C.B. — *On Green's conjecture*, preprint.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(3 avril 1996)