

Classification des courbes toriques dans l'espace projectif, module de Rao et liaison

Laurence COUDURIER et Marcel MORALÈS

1 Introduction

Une courbe torique C de \mathbb{P}^3 est donnée par une paramétrisation $x = s^a, y = s^{a-c}t^c, z = s^{a-b}t^b, w = t^a$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, non nuls, distincts, premiers entre eux. Soit $M(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_C(n))$ le module de Hartshorne-Rao de C ; c'est un invariant de liaison, à dualité et graduation près.

Nous avons étudié la question suivante: étant donnée une courbe torique C dans \mathbb{P}^3 , existe-t-il une courbe torique C' dans la classe de liaison paire (resp. impaire) de C ?

Le problème de la liaison paire a été résolu uniquement dans le cadre des courbes monomiales ($a > b > c > 0$) par Bresinsky et Huneke [BrH], mais l'étude des classes de liaison impaire est restée un problème ouvert.

Dans cet article, nous rappelons une base minimale explicite de l'idéal $I(C)$, pour C courbe torique de \mathbb{P}^3 (cf. [M]) ce qui nous permet de décrire entièrement les syzygies de $R/I(C)$, et d'étudier la liaison paire des courbes toriques (paragraphe 4). Puis nous nous intéressons au module de Rao $M(C)$, nous donnons sa matrice de présentation, et nous étudions la liaison impaire des courbes toriques (paragraphe 5). Nous énonçons le théorème 5.18 qui démontre la conjecture suivante (énoncée dans [BrH]): Si C est une courbe monomiale telle que $\mu(I(C)) \geq 5$, alors il n'existe pas de courbe monomiale dans la classe de liaison impaire de C .

2 Rappels et définitions

Nous rappelons brièvement quelques résultats sur la notion de liaison. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [PS], [R], [MP], ou [SV]. Soit k un corps algébriquement clos. Soit $R = k[x, y, z, w]$ l'anneau des polynômes dans les variables x, y, z, w gradué naturellement.

Définition 2.1 *Soit C une courbe (projective, localement Cohen-Macaulay, dans \mathbb{P}^3), X une courbe intersection complète de deux surfaces contenant C . L'image canonique du faisceau $\text{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_X)$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X$ est un idéal de \mathcal{O}_X qui définit une courbe Γ contenue dans X . On dit alors que C et Γ sont liées (algébriquement) par X . On dit que deux courbes C et C' sont dans la même classe de liaison si et seulement si il existe des courbes $C_0 = C, C_1, \dots, C_n = C'$ telles que C_i et C_{i+1} soient liées;*

de plus si n est pair (resp. impair) on parlera de classe de liaison paire (resp. impaire). La classe de liaison paire est aussi appelée classe de biliaison.

On rappelle que deux courbes C et C' sont dans la même classe de biliaison si et seulement si $M(C) = M(C')[n]$ pour un certain entier n , et qu'elles sont dans la même classe de liaison impaire si et seulement si $M(C) = (M(C'))^*[n]$ pour un certain entier n où, si $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ est un R -module gradué, le k -espace vectoriel dual

$$M^* = \text{Hom}_k(M, k) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_k(M_{-n}, k) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (M^*)_n$$

gradué par les $(M^*)_n$ est muni d'une structure de R -module par $Pf(m) = f(Pm)$ pour $P \in R, f \in M^*, m \in M$. Soit M le module de Rao de la courbe C , et considérons une résolution minimale (par des R -modules libres gradués) du R -module M :

$$0 \rightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \rightarrow 0.$$

Comme M est un R -module Cohen-Macaulay, le dual $M^*(4)$ a pour résolution

$$0 \rightarrow L_0^\vee \xrightarrow{\sigma_1^\vee} L_1^\vee \xrightarrow{\sigma_2^\vee} L_2^\vee \xrightarrow{\sigma_3^\vee} L_3^\vee \xrightarrow{\sigma_4^\vee} L_4^\vee \rightarrow M^*(4) \rightarrow 0$$

où $L_i^\vee = \text{Hom}_R(L_i, R)$. Le lien entre $M(C)$ et $I(C)$ est donné par Rao ([R] Theorem (2.5)).

Théorème 2.2 *La résolution de $R/I(C)$ est*

$$0 \longrightarrow L_4 \xrightarrow{(\sigma_4, 0)} L_3 \bigoplus_{\substack{r \\ 1}} R(-l_i) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\mu(C) \\ 1}} R(-e_i) \longrightarrow R \longrightarrow R/I(C) \longrightarrow 0$$

3 Equations des courbes toriques

Nous rappelons les principaux résultats de [M].

Définition 3.1 *Une courbe projective torique C dans \mathbb{P}^3 est donnée par une paramétrisation $x = s^a, y = s^{a-c}t^c, z = s^{a-b}t^b, w = t^a$, avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tous non nuls, premiers entre eux. Une courbe projective monomiale dans \mathbb{P}^3 est une courbe torique, dont la paramétrisation vérifie $a > b > c > 0$.*

Définition 3.2 *Le réseau associé à la courbe torique $x = s^a, y = s^{a-c}t^c, z = s^{a-b}t^b, w = t^a$ est $\text{Ker}(\Phi) = \{(s, p) \in \mathbb{Z}^2 \mid sb - pc \equiv 0 \pmod{a}\}$.*

Définition 3.3 *Pour tout point $(s, p) \in \text{Ker}(\Phi)$, on définit les entiers*

$$r = (sb - pc)/a \quad \text{et} \quad r' = s - p - r$$

Nous rappelons que, à tout point $(s, p) \in \text{Ker}(\Phi) \cap \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ correspond, de façon biunivoque, un binôme $B = (z^s - y^p w^r x^{r'}) y^{\max(0, -p)} w^{\max(0, -r)} x^{\max(0, -r')}$, qui est un élément de $I(C)$.

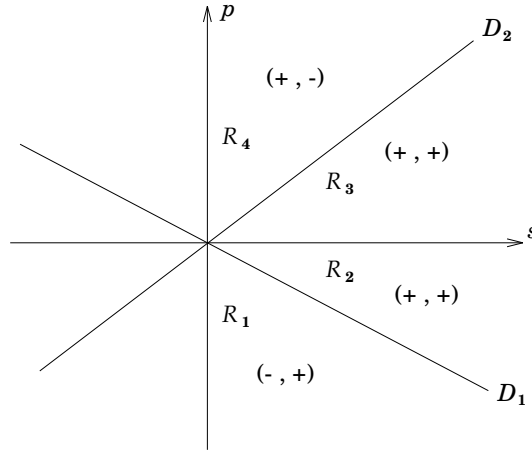
Lemme 3.4 *Soit C une courbe torique projective, paramétrée par $x = s^a$, $y = s^{a-c} t^c$, $z = s^{a-b} t^b$, $w = t^a$. Alors il existe une nouvelle paramétrisation de C par les variables u, v :*

$$x = u^{a'}, y = u^{a'-c'} v^{c'}, z = u^{a'-b'} v^{b'}, w = v^{a'} \text{ avec } a' > b' > c' > 0 \quad (\mathcal{P})$$

(à permutation des coordonnées x, y, z, w près).

Démonstration : Posons $\beta = a - c$, $\gamma = a - b$. C est paramétrée par $x = s^a$, $y = s^\beta t^c$, $z = s^\gamma t^b$, $w = t^a$. On peut supposer $a > 0$, quitte à changer s en s^{-1} et t en t^{-1} . Les différents cas possibles sont donnés par les signes respectifs de b , c , β et γ . Il suffit de définir le changement de paramétrisation ψ dans chaque cas.

Nous allons étudier le cas $b, \beta, \gamma > 0$ et $c < 0$. On a alors l'inégalité $b\beta - c\gamma > 0$. Sur la figure ci-dessous, les droites D_1 d'équation $sb - pc = 0$ et D_2 d'équation $s\gamma - p\beta = 0$ et l'axe $p = 0$ partagent le demi-plan $s > 0$ en quatre régions R_i .



Dans chaque région, les signes de r et de r' (indiqués dans cet ordre sur la figure) sont invariants. Ceci définit la forme des éléments de $I(C)$ correspondant aux vecteurs du réseau dans chaque région, ce qui donne ici :

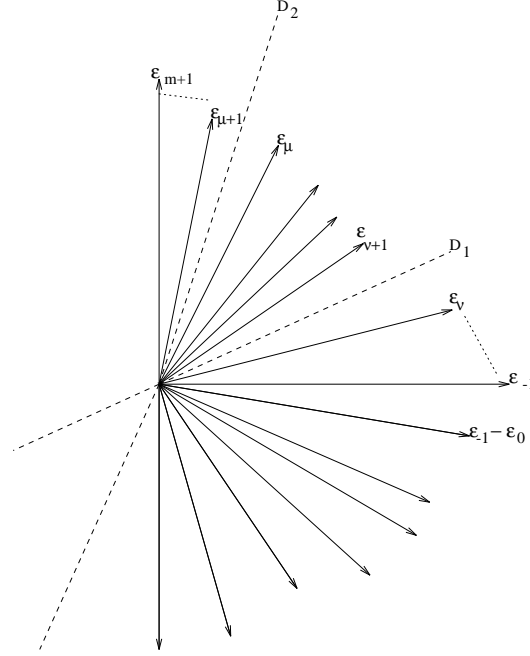
$$\begin{aligned} z^s y^{-p} w^{-r} - x^{r'} &\text{ pour } R_1, & z^s y^{-p} - w^r x^{r'} &\text{ pour } R_2, \\ z^s - y^p w^r x^{r'} &\text{ pour } R_3, & z^s x^{-r'} - y^p w^r &\text{ pour } R_4. \end{aligned}$$

Donc $(I(C), y, w)$ est un idéal primaire et (y, w) est une suite de paramètres pour $I(C)$. En écrivant x et z en fonction de y et w , on obtient la nouvelle paramétrisation :

$$y = u^\beta, x = u^a v^{\beta-a}, z = u^\gamma v^{\beta-\gamma}, w = v^\beta.$$

Remarque : A partir de maintenant, une courbe torique sera considérée sous sa forme monomiale normalisée (\mathcal{P}) .

Proposition 3.5 *Nous avons une décomposition en éventail de $\text{Ker}(\Phi) \cap \mathbb{Z}_+^2$, c'est à dire, on peut décrire les vecteurs $\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{m+1} \in \text{Ker}(\Phi) \cap \mathbb{Z}_+^2$ ayant la plus petite norme possible tels que $\det(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) > 0$ et $\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$ est une base de $\text{Ker}(\Phi)$ pour $-1 \leq i \leq m$.*



Nous rappelons ci-dessous la construction de cet éventail:

Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$ et $d' = \text{pgcd}(a, c)$. Soit s_0 l'unique entier tel que $s_0 b/d \equiv c \pmod{a/d}$ et $0 \leq s_0 < a/d$.

Posons $s_{-1} = a/d$ et considérons la suite des fractions continues de Jung-Hirzebruch:

$$\begin{aligned} s_{-1} &= q_1 s_0 - s_1 \\ s_0 &= q_2 s_1 - s_2 \\ &\dots \\ s_{m-1} &= q_{m+1} s_m \\ s_{m+1} &= 0 \end{aligned}$$

où $q_i \geq 2$ et $s_i \geq 0$ pour tout i .

Définissons les suites d'entiers $p_i, r_i, r'_i, -1 \leq i \leq m+1$, par:

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 0, \quad p_0 = d, \\ p_{i+1} &= p_i q_{i+1} - p_{i-1} \quad 0 \leq i \leq m, \\ r_i &= (s_i b - p_i c)/a \quad -1 \leq i \leq m+1, \\ r'_i &= s_i - p_i - r_i \quad -1 \leq i \leq m+1. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\epsilon_i = (s_i, p_i)$ satisfont le théorème et nous avons $\det(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = s_i p_{i+1} - s_{i+1} p_i = a$. Plus généralement nous avons le lemme suivant qui sera très utile pour déterminer la paramétrisation d'une courbe à partir de ses équations.

Lemme 3.6 1) Les suites s_i, r_i, r'_i sont strictement décroissantes tandis que la suite p_i est strictement croissante.

2) $p_{m+1} = a/d', r_{-1} = b/d, r_{m+1} = -c/d', r'_{-1} = (a-b)/d, r'_{m+1} = -(a-c)/d'$.

3) Les quatre suites vérifient la relation de récurrence $v_{i+2} = q_{i+2}v_{i+1} - v_i$ pour $-1 \leq i \leq m-1$.

4) On a, pour tout i ,

$$\begin{aligned} i) \quad & s_i p_{i+1} - s_{i+1} p_i = a \\ ii) \quad & s_{i+1} r_i - s_i r_{i+1} = c \\ iii) \quad & p_{i+1} r_i - p_i r_{i+1} = b \\ iv) \quad & p_{i+1} r'_i - p_i r'_{i+1} = a - b \\ v) \quad & s_{i+1} r'_i - s_i r'_{i+1} = a - c \end{aligned}$$

Définition 3.7 Soit μ (resp ν) l'unique entier tel que $r_{\mu+1} \leq 0 < r_\mu$ (resp. $r'_{\nu+1} < 0 \leq r'_\nu$.)

Les entiers μ et ν sont très importants. Dans la suite de l'article, nous verrons que μ, ν et les valeurs prises par les suites s_i, p_i, r_i, r'_i , et q_i pour $\nu \leq i \leq \mu + 1$ donnent toutes les informations sur la courbe.

Théorème 3.8 [M] Soit C une courbe torique projective munie de sa paramétrisation (\mathcal{P}) .

1) Nous avons $-1 \leq \nu \leq \mu \leq m + 1$

2) La courbe C est arithmétiquement Cohen-Macaulay si et seulement si $\mu = \nu$.

Dans ce cas, l'idéal I est engendré par:

$$\begin{aligned} F &= x^{r'_\mu} y^{p_\mu} w^{r_\mu} - z^{s_\mu} \\ G &= x^{-r'_{\mu+1}} z^{s_{\mu+1}} w^{-r_{\mu+1}} - y^{p_{\mu+1}} \\ H &= x^{r'_\mu - r'_{\mu+1}} w^{r_\mu - r_{\mu+1}} - z^{s_\mu - s_{\mu+1}} y^{p_{\mu+1} - p_\mu} \end{aligned}$$

3) Si la courbe C n'est pas arithmétiquement Cohen Macaulay, on a $\nu < \mu$. Dans ce cas, l'idéal I est engendré par $3 + (q_{\nu+2} - 1) + \dots + (q_{\mu+1} - 1)$ équations :

$$\begin{aligned} & z^{s_\nu} - x^{r'_\nu} y^{p_\nu} w^{r_\nu} \\ & y^{p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - s_{\nu+1}} - x^{r'_\nu - r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - r_{\nu+1}} \\ & x^{-r'_{\nu+1}} z^{s_{\nu+1}} - y^{p_{\nu+1}} w^{r_{\nu+1}} \\ & y^{2p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - 2s_{\nu+1}} - x^{r'_\nu - 2r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - 2r_{\nu+1}} \\ & \dots \\ & y^{(q_{\nu+2} - 1)p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - (q_{\nu+2} - 1)s_{\nu+1}} - x^{r'_\nu - (q_{\nu+2} - 1)r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - (q_{\nu+2} - 1)r_{\nu+1}} \\ & x^{-r'_{\nu+2}} z^{s_{\nu+2}} - y^{p_{\nu+2}} w^{r_{\nu+2}} \\ & \dots \\ & \dots \\ & x^{-r'_\mu} z^{s_\mu} - y^{p_\mu} w^{r_\mu} \\ & y^{2p_\mu - p_{\mu-1}} z^{s_{\mu-1} - 2s_\mu} - x^{r'_{\mu-1} - 2r'_\mu} w^{r_{\mu-1} - 2r_\mu} \\ & \dots \\ & y^{(q_{\mu+1} - 1)p_\mu - p_{\mu-1}} z^{s_{\mu-1} - (q_{\mu+1} - 1)s_\mu} - x^{r'_{\mu-1} - (q_{\mu+1} - 1)r'_\mu} w^{r_{\mu-1} - (q_{\mu+1} - 1)r_\mu} \\ & y^{p_{\mu+1}} - x^{-r'_{\mu+1}} z^{s_{\mu+1}} w^{-r_{\mu+1}} \end{aligned}$$

Théorème 3.9 *Les éléments ci dessus forment une base de Groebner pour l'idéal I pour l'ordre lexicographique inverse avec $z > y > x > w$. Ils sont également un ensemble minimal de générateurs, dans le cas non Cohen-Macaulay.*

Lemme 3.10 *Soit j tel que $\nu + 1 \leq j \leq \mu$. Alors:*

- 1) $s_j \neq 1$ (resp. $p_j \neq 1$).
- 2) si $s_j = 2$ alors $r_j = 1$ (resp. si $p_j = 2$ alors $-r'_j = 1$).
- 3) si $\mu - \nu \geq 2$, on ne peut pas avoir simultanément $s_j = 2$ et $p_j = 2$.

Démonstration : Nous rappelons que pour tout j , $\nu + 1 \leq j \leq \mu$, r_j, r'_j sont différents de 0.

1) et 2): Si $s_j = 1$ ou $p_j = 1$, l'équation suivante de C mène à une contradiction suivant que l'on pose $x = 1$ ou $w = 1$.

$$y^{p_j} w^{r_j} - x^{-r'_j} z^{s_j}$$

Si $s_j = 2$ (resp. $p_j = 2$), la même équation donne $r_j = 1$ (resp. $-r'_j = 1$).

3): La suite s_i est décroissante tandis que la suite p_i est croissante, l'hypothèse de 3) entraîne une contradiction avec 1).

4 Syzygies des courbes toriques

Lorsque l'on veut décrire les syzygies des courbes toriques, il apparait naturellement cinq types de courbes (cf 3.8):

Type 0) Courbes toriques arithmétiquement Cohen-Macaulay.

Type I) $\mu = \nu + 1$ et $q_{\nu+2} = 2$.

Type II) $\mu = \nu + 1$ et $q_{\nu+2} > 2$.

Type III) $\mu > \nu + 1$ et $q_{\nu+i} = 2 \forall i = 2, \dots, \mu - \nu + 1$.

Type IV) $\mu > \nu + 1$ et $\exists i \in \{2, \dots, \mu - \nu + 1\} \mid q_{\nu+i} > 2$.

Bresinsky [Br] a démontré que, si C est une courbe monomiale, la résolution de $R/I(C)$ est de la forme:

$$0 \longrightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\Sigma} \bigoplus_1^{\mu(C)} R(-e_i) \longrightarrow R \longrightarrow R/I(C) \longrightarrow 0$$

avec $\text{rang}(L_3) = 2\mu(C) - 4$ et $\text{rang}(L_4) = \mu(C) - 3$.

Nous allons décrire les matrices des syzygies Σ et σ_4 , pour les courbes de types I, II, et III, ce qui améliore nettement le résultat de Bresinsky [Br]. Pour démontrer les propositions suivantes, nous nous inspirons de ses démonstration, en appliquant le critère de Buchsbaum-Eisenbud [BE]. Pour la suite de l'article, soit $\tau = \mu(I(C)) - 2$.

Proposition 4.1 *Soit C une courbe de type I (i.e. $\mu = \nu + 1$ et $q_{\nu+2} = 2$). Posons $m = s_\nu - s_{\nu+1}$, $s_\nu = \sigma + 2m$, $p_\nu = \pi$, $n = p_{\nu+1} - p_\nu$, $r'_\nu = r'$, $r_\nu = r$, $r'_\nu - r'_{\nu+1} = k$ et $r_\nu - r_{\nu+1} = l$. Dans ce cas, l'idéal I est minimalement engendré par quatre générateurs:*

$$\begin{aligned} & x^{r'} y^\pi w^r - z^{\sigma+2m} \\ & y^{\pi+n} w^{r-l} - x^{-(r'-k)} z^{\sigma+m} \\ & x^k w^l - y^n z^m \\ & y^{\pi+2n} - x^{-(r'-2k)} z^\sigma w^{-(r-2l)} \end{aligned}$$

et les matrices Σ^\vee et σ_4 sont

$$\Sigma^\vee = \begin{pmatrix} y^n & z^{\sigma+m} & x^{r'} w^l & 0 \\ x^{-(r'-k)} & y^\pi w^{r-l} & z^m & 0 \\ 0 & z^\sigma x^{-(r'-k)} & -y^n & w^{r-l} \\ 0 & y^{\pi+n} & -x^k w^{-(r-2l)} & z^m \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} x^{-(r'-k)} \\ -y^n \\ -z^m \\ w^{r-l} \end{pmatrix}$$

Proposition 4.2 *Soit C une courbe de type II (i.e. $\mu = \nu + 1$ et $q_{\nu+2} > 2$). Dans ce cas, $\tau = q_{\nu+2}$ et l'idéal I est minimalement engendré par les $\tau + 2$ éléments*

$$\begin{aligned} & x^{r'} y^{p_\nu} w^{r_\nu} - z^{s_\nu} \\ & y^{p_{\nu+1}} w^{r_{\nu+1}} - x^{-r'_{\nu+1}} z^{s_{\nu+1}} \\ & x^{r'_\nu - r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - r_{\nu+1}} - y^{p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - s_{\nu+1}} \\ & x^{r'_\nu - 2r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - 2r_{\nu+1}} - y^{2p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - 2s_{\nu+1}} \\ & \dots \\ & x^{r'_\nu - jr'_{\nu+1}} w^{r_\nu - jr_{\nu+1}} - y^{jp_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - js_{\nu+1}} \\ & \dots \\ & x^{r'_\nu - (\tau-1)r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - (\tau-1)r_{\nu+1}} - y^{(\tau-1)p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - (\tau-1)s_{\nu+1}} \\ & y^{p_{\nu+2}} - x^{-r'_{\nu+2}} z^{s_{\nu+2}} w^{-r_{\nu+2}} \end{aligned}$$

la matrice Σ^\vee est

$$\begin{pmatrix} y^{p_{\nu+1} - p_\nu} & -z^{s_{\nu+1}} & x^{r'_\nu} w^{r_\nu - r_{\nu+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^{-r'_{\nu+1}} & -y^{p_\nu} w^{r_{\nu+1}} & z^{s_\nu - s_{\nu+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y^{p_{\nu+1}} & x^{r'_\nu - r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - 2r_{\nu+1}} & -z^{s_{\nu+1}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^{-r'_{\nu+1}} & y^{p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - 2s_{\nu+1}} & -w^{r_{\nu+1}} & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & x^{r'_\nu - (\tau-2)r'_{\nu+1}} w^{r_\nu - (\tau-1)r_{\nu+1}} & \dots & y^{p_{\nu+1}} & -z^{s_{\nu+1}} & 0 \\ 0 & 0 & y^{(\tau-2)p_{\nu+1} - p_\nu} z^{s_\nu - (\tau-1)s_{\nu+1}} & \dots & x^{-r'_{\nu+1}} & -w^{r_{\nu+1}} & 0 \\ 0 & 0 & w^{-r_{\nu+2}} x^{r'_{\nu+1} - r'_{\nu+2}} & \dots & 0 & y^{p_{\nu+1}} & -z^{s_{\nu+1} - s_{\nu+2}} \\ 0 & 0 & y^{p_{\nu+2} - p_{\nu+1}} & \dots & 0 & x^{-r'_{\nu+1}} z^{s_{\nu+2}} & -w^{r_{\nu+1}} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \sigma_4 = \begin{pmatrix} x^{-r'_{\nu+1}} & 0 & \dots & 0 \\ -y^{p_{\nu+1}-p_{\nu}} & 0 & \dots & 0 \\ -w^{r_{\nu+1}} & x^{-r'_{\nu+1}} & \dots & 0 \\ z^{s_{\nu+1}} & -y^{p_{\nu+1}} & \dots & 0 \\ 0 & -w^{r_{\nu+1}} & \dots & 0 \\ 0 & z^{s_{\nu+1}} & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & x^{-r'_{\nu+1}} \\ 0 & 0 & \dots & -y^{p_{\nu+1}} \\ 0 & 0 & \dots & -w^{r_{\nu+1}} \\ 0 & 0 & \dots & z^{s_{\nu+1}-s_{\nu+2}} \end{pmatrix}$$

Proposition 4.3 *Soit C une courbe de type III (i.e. $\mu > \nu + 1$ et $q_{\nu+i} = 2$, $\forall i = 2, \dots, \mu - \nu + 1$). Alors on a $\tau = \mu - \nu + 1$. Posons $m = s_{\nu} - s_{\nu+1}$, $s_{\nu} = \sigma + \tau m$, $\pi = p_{\nu}$, $n = p_{\nu+1} - p_{\nu}$, $r' = r'_{\nu}$, $r = r_{\nu}$, $k = r'_{\nu} - r'_{\nu+1}$ et $l = r_{\nu} - r_{\nu+1}$. Dans ce cas, l'idéal I est minimalement engendré par les $\tau + 2$ générateurs*

$$\begin{aligned} & x^{r'} y^{\pi} w^r - z^{\sigma+\tau m} \\ & y^{\pi+n} w^{r-l} - x^{-(r'-k)} z^{\sigma+(\tau-1)m} \\ & x^k w^l - y^n z^m \\ & y^{\pi+2n} w^{r-2l} - x^{-(r'-2k)} z^{\sigma+(\tau-2)m} \\ & \dots \\ & y^{\pi+(\tau-1)n} w^{r-(\tau-1)l} - x^{-(r'-(\tau-1)k)} z^{\sigma+m} \\ & y^{\pi+\tau n} - x^{-(r'-\tau k)} z^{\sigma} w^{-(r-\tau l)} \end{aligned}$$

avec la matrice $2\tau \times (\tau + 2)$ $\Sigma^{\vee} =$

$$\begin{pmatrix} x^{-(r'-k)} & -y^{\pi} w^{r-l} & z^m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ y^n & -z^{\sigma+(\tau-1)m} & x^{r'} w^l & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\pi+n} w^{r-2l} & -x^k & z^m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{\sigma+(\tau-2)m} x^{-(r'-k)} & -y^n & w^l & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\pi+2n} w^{r-3l} & 0 & -x^k & z^m & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{\sigma+(\tau-3)m} x^{-(r'-2k)} & 0 & -y^n & w^l & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & y^{\pi+(\tau-2)n} w^{r-(\tau-1)l} & 0 & \dots & 0 & 0 & -x^k & z^m & 0 \\ 0 & z^{\sigma+m} x^{-(r'-(\tau-2)k)} & 0 & \dots & 0 & 0 & -y^n & w^l & 0 \\ 0 & y^{\pi+(\tau-1)n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -x^k w^{-(r-\tau l)} & z^m \\ 0 & z^{\sigma} x^{-(r'-(\tau-1)k)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -y^n & w^{r-(\tau-1)l} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \sigma_4 = \begin{pmatrix}
-y^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
x^{-(r'-k)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
w^l & -y^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-z^m & x^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & w^l & -y^n & \dots & 0 & 0 \\
0 & -z^m & x^k & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & w^l & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -z^m & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -y^n & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & x^k & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & w^l & -y^n \\
0 & 0 & 0 & \dots & -z^m & x^k \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w^{r-(\tau-1)l} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -z^m
\end{pmatrix}$$

Remarque: Pour chaque exemple de courbe de type IV, il est facile d'écrire les syzygies. Mais compte tenu de la diversité qui existe dans ce type de courbes (il peut exister de nombreux entiers i tels que $q_{\nu+i} > 2$, et pour ces i , $q_{\nu+i}$ peut être très grand), nous avons choisi de ne pas détailler les résultats ici. Nous pouvons néanmoins indiquer que les matrices de syzygies des courbes de type IV ont une structure en blocs (qui dépend de la suite d'entiers $q_{\nu+i}$) où alternent des blocs correspondant aux syzygies d'une courbe de type II (lorsque $q_{\nu+i} > 2$) et des blocs correspondant à celles d'une courbe de type III (lorsque $q_{\nu+i} = 2$ pour $i_0 \leq i \leq i_n$).

Remarque 4.4 D'après les résultats rappelés au paragraphe 2, σ_4^\vee est la matrice de présentation de $M^*(C)$. L'étude de $M(C)$ est beaucoup plus difficile et nous l'abordons sous un double aspect, à savoir, dans le paragraphe 5, la description de la matrice de présentation de $M(C)$, et dans le paragraphe 6, le calcul d'une résolution de σ_4^\vee .

5 Module de Rao et liaison impaire

Comme le module de Rao d'une courbe arithmétiquement Cohen-Macaulay est trivial, nous considérerons seulement le cas des courbes toriques de \mathbb{P}^3 qui ne sont pas arithmétiquement Cohen-Macaulay. Grâce au lemme 3.4, on se ramène à une paramétrisation (\mathcal{P}), et alors $M(C)$ peut être calculé par la formule de Deligne car (x, w) forment une suite de paramètres (voir [SV], page 30).

Proposition 5.1 $M(C) = A_{(x)} \cap A_{(w)} / A$.

Théorème 5.2 Soit $R = K[x, y, z, w]$ et $A = R/I$ l'anneau de coordonnées d'une courbe torique projective. Alors $A_{(x)} \cap A_{(w)}$ est engendré en tant que A -algèbre par les éléments

$$E_{\nu+i} = \frac{z^{s_{\nu+i}}}{w^{r_{\nu+i}}} = \frac{y^{\nu+i}}{x^{-r'_{\nu+i}}} \quad 1 \leq i \leq \mu - \nu.$$

- 2) $x^k E = 0$, mais $x^{k-1} E \neq 0$
- 3) $z^{s_\nu - m} E = 0$, mais $z^{s_\nu - m - 1} E \neq 0$
- 4) $y^{p_{\mu+1} - n} E = 0$, mais $y^{p_{\mu+1} - n - 1} E \neq 0$

Démonstration: Les premières affirmations des quatre énoncés sont claires. Prouvons les deuxièmes. Si $w^{l-1} E = 0$, alors il existe un monôme P tel que $z^m - wP \in I$. D'après le théorème 3.9, on doit avoir $m \geq s_\nu$, ce qui contredit les hypothèses. On démontre de la même façon les trois autres affirmations.

Corollaire 5.5 *Pour $1 \leq i \leq \mu - \nu$, nous avons:*

- 1) $w^{r_{\nu+i}} E_{\nu+i} = 0$, mais $w^{r_{\nu+i}-1} E_{\nu+i} \neq 0$
- 2) $x^{-r'_{\nu+i}} E_{\nu+i} = 0$, mais $x^{-r'_{\nu+i}-1} E_{\nu+i} \neq 0$
- 3) $z^{s_\nu - s_{\nu+i}} E_{\nu+i} = 0$, mais $z^{s_\nu - s_{\nu+i}-1} E_{\nu+i} \neq 0$
- 4) $y^{p_{\mu+1} - p_{\nu+i}} E_{\nu+i} = 0$, mais $y^{p_{\mu+1} - p_{\nu+i}-1} E_{\nu+i} \neq 0$

L'étude de \mathcal{D} , et par conséquent de $M(C)$, nous amène à distinguer quatre cas, les courbes de type I, II, III et IV.

Proposition 5.6 *Soit C une courbe de type I (i.e. \mathcal{D} a un seul élément). Alors, le module de Rao est monogène, engendré par $\frac{z^{\sigma+m}}{w^{r-l}} = \frac{y^{\pi+n}}{x^{-(r'-k)}}$, et il est isomorphe à $K[x, y, z, w]/(x^{-(r'-k)}, y^n, z^m, w^{r-l})$. Sa résolution est donnée par le complexe de Koszul associé à la suite régulière $(x^{-(r'-k)}, y^n, z^m, w^{r-l})$.*

Démonstration: C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent, une autre preuve triviale est déduite de 4.1 et du théorème 2.2 .

Exemple 5.6.1 Soit C la courbe paramétrée par $x = s^{510}$, $y = s^{221}t^{289}$, $z = s^{127}t^{383}$, $w = t^{510}$. C'est une courbe de type I dont l'idéal est minimalement engendré par les équations

$$\begin{aligned} z^{34} - y^8 x^5 w^{21} \\ z^{17} y^{11} - x^9 w^{19} \\ z^{17} x^4 - y^{19} w^2 \\ y^{30} - x^{13} w^{17} \end{aligned}$$

On peut alors décrire les matrices σ_4 et σ_1^\vee

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} x^4 \\ -y^{11} \\ -z^{17} \\ w^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_1^\vee = \begin{pmatrix} w^2 \\ -z^{17} \\ -y^{11} \\ x^4 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.7 *Soit C une courbe de type II (i.e. $\text{Card}(\mathcal{D}) \geq 2$ et \mathcal{D} est formé des multiples d'un seul point). Alors $M(C)$ est minimalement engendré comme R -module*

par $E_{\nu+1}, E_{\nu+1}^2, \dots, E_{\nu+1}^{q_{\nu+2}-1}$. Si $p_\nu \neq 0$ et $s_{\nu+2} \neq 0$, la transposée de la matrice de présentation de $M(C)$ est

$$\sigma_1^Y = \begin{pmatrix} x^{-r'_{\nu+1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -w^{r_{\nu+1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -y^{p_{\nu+1}} & x^{-r'_{\nu+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z^{s_{\nu+1}} & -w^{r_{\nu+1}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y^{p_{\nu+1}} & x^{-r'_{\nu+1}} & & 0 & 0 \\ 0 & z^{s_{\nu+1}} & -w^{r_{\nu+1}} & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y^{p_{\nu+1}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{s_{\nu+1}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^{-r'_{\nu+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -w^{r_{\nu+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y^{p_{\nu+1}} & x^{-r'_{\nu+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z^{s_{\nu+1}} & -w^{r_{\nu+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -y^{p_{\nu+1}-p_\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z^{s_{\nu+1}-s_{\nu+2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y^{p_{\nu+1}-p_\nu} z^{s_{\nu+1}-s_{\nu+2}} & 0 \end{pmatrix}$$

et les nombres de Betti de $M(C)$ sont $\text{rang}(L_4) = \tau - 1$, $\text{rang}(L_3) = 2\tau$, $\text{rang}(L_2) = 2\tau + 3$, $\text{rang}(L_1) = 2\tau + 1$, $\text{rang}(L_0) = \tau - 1$.

Si $p_\nu = 0$ ou si $s_{\nu+2} = 0$, il suffit d'enlever la dernière ligne de σ_1^Y , et alors $\text{rang}(L_2) = 2\tau + 2$ et $\text{rang}(L_1) = 2\tau$, et $\text{rang}(L_i)$, $i \in \{0, 3, 4\}$ sont les mêmes que dans le cas précédent.

Démonstration: Il est immédiat de vérifier que la matrice σ_1 induit des relations entre les générateurs de $M(C)$. Nous montrons ci-dessous que ces relations forment un système minimal. Tout d'abord remarquons que, puisque I est engendré par des binômes, les relations entre les générateurs de $M(C)$ seront engendrées par des relations monomiales ou binomiales. Considérons une relation non triviale dans $M(C)$:

$$(1) \quad PE_i - QE_{i+k} = 0$$

où $1 \leq i \leq q_{\nu+2} - 1$, $k > 0$ si $Q \neq 0$ et P, Q sont des monômes en x, y, z, w lorsque ils ne sont pas nuls. Une telle relation signifie qu'il existe un polynôme B tel que $Pz^i s_{\nu+1} w^{kr_{\nu+1}} - Qz^{(i+k)s_{\nu+1}} \equiv w^{(i+k)r_{\nu+1}} B \pmod{I}$. Or I est engendré par des binômes ce qui nous donne les cas suivants :

$$(a) \quad Pw^{kr_{\nu+1}} - Qz^{ks_{\nu+1}} \in I$$

(b) il existe des monômes B_1, B_2 tels que

$$(b_1) \quad Pz^i s_{\nu+1} - w^{ir_{\nu+1}} B_1 \in I$$

$$(b_2) \quad Qz^{(i+k)s_{\nu+1}} - w^{(i+k)r_{\nu+1}} B_2 \in I$$

Ce qui nous ramène à l'étude des relations monomiales:

$$(c) \quad PE_i = 0 \quad 1 \leq i \leq q_{\nu+2} - 1$$

et au vu des relations énoncées dans le lemme, on peut supposer que aucun des monômes $x^{-r'_{\nu+1}}, w^{r_{\nu+1}}, y^{p_{\nu+1}}, z^{s_{\nu+1}}$ ne divise P . La relation (c) signifie qu'il existe un monôme B tel que :

$$(c_1) \quad Pz^{is_{\nu+1}} - w^{ir_{\nu+1}}B \in I$$

Maintenant nous allons utiliser le fait que l'ensemble de générateurs décrits dans 1.5 est une base de Groebner pour l'ordre lexicographique inverse; le fait que $w^{r_{\nu+1}}$ ne divise pas P implique que le terme dominant de $Pz^{is_{\nu+1}} - w^{ir_{\nu+1}}B$ est $Pz^{is_{\nu+1}}$. Donc il est divisible par l'un des termes dominants de la base de Groebner de I . Comme $x^{-r'_{\nu+1}}, y^{p_{\nu+1}}$ ne divisent pas P , il existe un entier $1 \leq j \leq q_{\nu+2} - 1$ tel que $Pz^{is_{\nu+1}}$ est divisible par $y^{jp_{\nu+1}-p_{\nu}}z^{s_{\nu}-js_{\nu+1}}$; or $jp_{\nu+1} - p_{\nu} \geq p_{\nu+1}$ dès que $j > 1$. On en déduit que $j = 1$. Soit z^{α} la plus grande puissance de z qui divise P ; alors on aura $s_{\nu+1} > \alpha > s_{\nu} - (i+1)s_{\nu+1}$ et ceci n'est possible que si

$$i) \quad i = q_{\nu+2} - 1, \text{ car } s_{\nu+1} > \alpha > s_{\nu} - (q_{\nu+2})s_{\nu+1} = -s_{\nu+2}$$

$$\text{ou ii) } \quad i = q_{\nu+2} - 2, \text{ car } s_{\nu+1} > \alpha > s_{\nu} - (q_{\nu+2} - 1)s_{\nu+1} = s_{\nu+1} - s_{\nu+2}.$$

Dans le premier cas, la relation (c) est un multiple de la relation $y^{p_{\nu+1}-p_{\nu}}E_{q_{\nu+2}-1} = 0$. De la même façon, dans le deuxième cas, la relation (c) est un multiple de la relation

$$y^{p_{\nu+1}-p_{\nu}}z^{s_{\nu+1}-s_{\nu+2}}E_{q_{\nu+2}-2} = 0.$$

Enfin, si $s_{\nu+2} = 0$ ou si $p_{\nu} = 0$, la dernière relation provient des précédentes.

La matrice σ_1 nous donne $\text{rang}(L_0)$ et $\text{rang}(L_1)$. La matrice σ_4 , déterminée dans la proposition 4.2, nous donne $\text{rang}(L_3)$ et $\text{rang}(L_4)$. On peut alors déduire $\text{rang}(L_2)$ de la relation

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^{i+1} \text{rang}(L_i) = 0.$$

Exemple 5.7.1 Soit C la courbe paramétrée par $x = s^{534}, y = s^{245}t^{289}, z = s^{144}t^{390}, w = t^{534}$. Les suites s_i, p_i, r_i, r'_i, q_i sont données par le tableau suivant.

i	s_i	p_i	r_i	r'_i	q_i
-1	89	0	65	24	0
0	51	6	34	11	0
1	13	12	3	-2	2
2	1	42	-22	-19	4
3	0	534	-289	-245	13

$\nu = 0, \mu = 1, q_{\nu+2} = 4$. La courbe C est de type II telle que $s_{\nu+2} \neq 0$ et $p_{\nu} \neq 0$. L'idéal $I(C)$ est engendré par

$$\begin{aligned} & z^{51} - y^6 x^{11} w^{34} \\ & z^{38} y^6 - x^{13} w^{31} \\ & z^{13} x^2 - y^{12} w^3 \\ & z^{25} y^{18} - x^{15} w^{28} \\ & z^{12} y^{30} - x^{17} w^{25} \\ & y^{42} - z x^{19} w^{22} \end{aligned}$$

Les matrices σ_4 et σ_1 sont données par

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ -y^6 & 0 & 0 \\ -w^3 & x^2 & 0 \\ z^{13} & -y^{12} & 0 \\ 0 & -w^3 & x^2 \\ 0 & z^{13} & -y^{12} \\ 0 & 0 & -w^3 \\ 0 & 0 & z^{12} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_1^\vee = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ -w^3 & 0 & 0 \\ -y^{12} & x^2 & 0 \\ z^{13} & -w^3 & 0 \\ 0 & -y^{12} & x^2 \\ 0 & z^{13} & -w^3 \\ 0 & 0 & -y^6 \\ 0 & 0 & z^{12} \\ 0 & y^6 z^{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.7.2 Soit C la courbe paramétrée par $x = s^{165}$, $y = s^{77}t^{88}$, $z = s^{20}t^{145}$, $w = t^{165}$. Les suites s_i, p_i, r_i, r'_i, q_i sont données par le tableau suivant.

i	s_i	p_i	r_i	r'_i	q_i
-1	33	0	29	4	0
0	11	5	7	-1	0
1	0	15	-8	-7	3

$\nu = -1, \mu = 0, q_{\nu+2} = 3$. La courbe C est de type II telle que $s_{\nu+2} = 0$ et $p_\nu = 0$. L'idéal $I(C)$ est engendré par

$$\begin{aligned} z^{33} - x^4 w^{29} \\ z^{22} y^5 - x^5 w^{22} \\ z^{11} x - y^5 w^7 \\ z^{11} y^{10} - x^6 w^{15} \\ y^{15} - x^7 w^8 \end{aligned}$$

Les matrices σ_4 et σ_1 sont données par

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -y^5 & 0 \\ -w^7 & x \\ z^{11} & -y^5 \\ 0 & -w^7 \\ 0 & z^{11} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_1^\vee = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -w^7 & 0 \\ -y^5 & x \\ z^{11} & -w^7 \\ 0 & -y^5 \\ 0 & z^{11} \end{pmatrix}$$

Proposition 5.8 Soit C une courbe de type III (i.e. $\text{Card}(\mathcal{D}) \geq 2$ et \mathcal{D} ne contient que des vecteurs de l'éventail). Alors

a) $M(C)$ est minimalement engendré comme R -module par

$$E_j = \frac{z^{\sigma+jm}}{w^{r-(\tau-j)l}} \quad 1 \leq j \leq \tau - 1.$$

b) La transposée de la matrice de présentation de $M(C)$ est

$$\sigma_1^\vee = \begin{pmatrix} -y^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w^{r-(\tau-1)l} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^k & -y^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z^m & w^l & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^k & -y^n & & 0 & 0 \\ 0 & -z^m & w^l & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z^m & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^k & -y^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z^m & w^l \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^{-(r'-k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -z^m \end{pmatrix}$$

et les nombres de Betti de $M(C)$ sont $\text{rang}(L_4) = \tau - 1$, $\text{rang}(L_3) = 2\tau$, $\text{rang}(L_2) = 2\tau + 2$, $\text{rang}(L_1) = 2\tau$, $\text{rang}(L_0) = \tau - 1$.

Démonstration: Soient $1 \leq i \leq j \leq \tau - 1$. Pour montrer a), il suffira de démontrer que

$$E_i E_j = \frac{z^{2\sigma+(i+j)m}}{w^{2r-(2\tau-(i+j)l)}} = \frac{y^{2\pi+(2\tau-(i+j)n)}}{x^{-(2r'-(2\tau-(i+j)k))}}$$

se trouve dans le A -module engendré par $E_1, \dots, E_{\tau-1}$. Ce qui est vrai car

$$E_i E_j = \begin{cases} z^\sigma w^{-(r-\tau l)} E_{i+j} & \text{si } i + j < \tau \\ 0 & \text{si } i + j = \tau \\ x^{r'} y^\pi E_{(i+j)-\tau} & \text{si } i + j > \tau \end{cases}$$

Pour démontrer b), on montre que σ_1 est bien la matrice de relations de $M(C)$ en procédant comme dans la démonstration de la proposition 4.3 ; pour les nombres de Betti de $M(C)$, on regarde les dimensions de la matrice σ_1 pour $\text{rang}(L_0)$ et $\text{rang}(L_1)$, et de la matrice σ_4 , donnée dans la proposition 4.3, pour $\text{rang}(L_3)$ et $\text{rang}(L_4)$. On obtient enfin $\text{rang}(L_2)$ grâce à la relation

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^{i+1} \text{rang}(L_i) = 0.$$

Exemple 5.8.1 Soit C la courbe paramétrée par $x = s^{292}$, $y = s^{89}t^{203}$, $z = s^{23}t^{269}$, $w = t^{292}$. Les suites s_i, p_i, r_i, r'_i, q_i sont données par le tableau suivant.

i	s_i	p_i	r_i	r'_i	q_i
-1	292	0	269	23	0
0	207	1	190	16	0
1	122	2	111	9	2
2	37	3	32	2	2
3	26	10	17	-1	4
4	15	17	2	-4	2
5	4	24	-13	-7	2
6	1	79	-54	-24	4
7	0	292	-203	-89	4

$\nu = 2, \mu = 4, q_{\nu+2} = q_{\nu+3} = 2$. La courbe C est de type III. L'idéal $I(C)$ est engendré par

$$\begin{aligned} & z^{37} - y^3 x^2 w^{32} \\ & z^{11} y^7 - x^3 w^{15} \\ & z^{26} x - y^{10} w^{17} \\ & z^{15} x^4 - y^{17} w^2 \\ & y^{24} - z^4 x^7 w^{13} \end{aligned}$$

Les matrices σ_4 et σ_1 sont données par

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} -y^{11} & 0 \\ x & 0 \\ w^{15} & -y^{15} \\ -z^{11} & x^3 \\ 0 & w^2 \\ 0 & -z^{11} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_1^\vee = \begin{pmatrix} -y^{11} & 0 \\ w^2 & 0 \\ x^3 & -y^{11} \\ -z^{11} & w^{15} \\ 0 & x \\ 0 & -z^{11} \end{pmatrix}$$

Proposition 5.9 *Soit C une courbe de type IV (i.e. $\mu > \nu+1$ et $\exists i \in \{2, \dots, \mu-\nu+1\} \mid q_{\nu+i} > 2$). Soit $\mu(M(C))$ le cardinal d'un système de générateurs du R -module $M(C)$. Alors $\mu(M(C)) > \mu(C) - 3$, en particulier $\mu(M(C)) > \mu(M^*(C))$.*

Démonstration: Nous savons que $\mu(C) = 3 + (q_{\nu+2} - 1) + \dots + (q_{\mu+1} - 1)$. La proposition sera une conséquence des trois affirmations suivantes:

- i) $j(s_i, p_i) \in \mathcal{D}$ pour $1 \leq j \leq q_{i+1} - 1$ et $\nu + 1 \leq i \leq \mu$.
- ii) Si $q_{i+1} > 2$ pour un $\nu + 1 \leq i \leq \mu - 1$, alors $j(s_i, p_i) + (s_{i+1}, p_{i+1}) \in \mathcal{D}$ pour $1 \leq j \leq q_{i+1} - 2$.
- iii) Si $q_{i+1} = 2$ pour tout $\nu + 1 \leq i \leq \mu - 1$, mais si $q_{\mu+1} > 2$, alors $(s_{\mu-1}, p_{\mu-1}) + j(s_\mu, p_\mu) \in \mathcal{D}$ pour $1 \leq j \leq q_{\mu+1} - 2$.

preuve de i): $js_i \leq (q_{i+1} - 1)s_i = q_{i+1}s_i - s_i = s_{i-1} + s_{i+1} - s_i = s_{i-1} - (s_i - s_{i+1}) < s_{i-1} \leq s_\nu$. De même, $jp_i \leq (q_{i+1} - 1)p_i = q_{i+1}p_i - p_i = p_{i-1} + p_{i+1} - p_i = p_{i+1} - (p_i - p_{i-1}) < p_{i+1} \leq p_{\mu+1}$.

preuve de ii): $js_i + s_{i+1} \leq (q_{i+1} - 2)s_i + s_{i+1} = q_{i+1}s_i - 2s_i + s_{i+1} = s_{i-1} + s_{i+1} - 2s_i + s_{i+1} = s_{i-1} - 2(s_i - s_{i+1}) < s_{i-1} \leq s_\nu$. De même, $jp_i + p_{i+1} \leq (q_{i+1} - 2)p_i + p_{i+1} = q_{i+1}p_i - 2p_i + p_{i+1} = p_{i-1} + p_{i+1} - 2p_i + p_{i+1} = (p_{i-1} - p_i) + 2p_{i+1} - p_i < (p_{i-1} - p_i) + q_{i+2}p_{i+1} - p_i \leq p_{\mu+1}$.

preuve de iii): $s_{\mu-1} + js_{\mu} \leq s_{\mu-1} + (q_{\mu+1} - 2)s_{\mu} = s_{\mu-1} - 2s_{\mu} + s_{\mu-1} + s_{\mu+1} = s_{\mu-2} - s_{\mu-1} + s_{\mu-1} - (s_{\mu} - s_{\mu+1}) < s_{\mu-2} \leq s_{\nu}$. De même, $p_{\mu-1} + jp_{\mu} \leq p_{\mu-1} + (q_{\mu+1} - 2)p_{\mu} = p_{\mu+1} - 2(p_{\mu} - p_{\mu-1}) < p_{\mu+1}$.

Exemple 5.9.1 Soit C la courbe paramétrée par $x = s^{416}$, $y = s^{79}t^{337}$, $z = st^{415}$, $w = t^{416}$. Les suites s_i, p_i, r_i, r'_i, q_i sont données par le tableau suivant.

i	s_i	p_i	r_i	r'_i	q_i
-1	416	0	415	1	0
0	79	1	78	0	0
1	58	6	53	-1	6
2	37	11	28	-2	2
3	16	16	3	-3	2
4	11	37	-19	-7	3
5	6	58	-41	-11	2
6	1	79	-63	-15	2
7	0	416	-337	-79	6

$\nu = 0, \mu = 3, q_{\nu+2} = q_{\nu+3} = 2, q_{\nu+4} = 3$. La courbe C est de type IV. L'idéal $I(C)$ est engendré par

$$\begin{aligned}
& z^{79} - yw^{78} \\
& z^{21}y^5 - xw^{25} \\
& z^{58}x - y^6w^{53} \\
& z^{37}x^2 - y^{11}w^{28} \\
& z^{16}x^3 - y^{16}w^3 \\
& z^5y^{21} - x^4w^{22} \\
& y^{37} - z^{11}x^7w^{19}
\end{aligned}$$

Les matrices σ_4 et σ_1 peuvent être calculées par le logiciel *macaulay*.

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} -y^5 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ w^{25} & -y^5 & 0 & 0 \\ -z^{21} & x & 0 & 0 \\ 0 & w^{25} & -y^5 & 0 \\ 0 & -z^{21} & x & 0 \\ 0 & 0 & -w^3 & -x^3 \\ 0 & 0 & z^{16} & y^{16} \\ 0 & 0 & 0 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & -z^5 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_1^{\vee} = \begin{pmatrix} -y^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & -y^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -y^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -y^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & -y^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & y^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x \\ -w^3 & 0 & 0 & z^{16} & 0 & 0 \\ z^5 & 0 & 0 & 0 & w^{22} & 0 \\ 0 & -w^3 & 0 & 0 & -z^{16} & 0 \\ 0 & z^5 & 0 & 0 & 0 & w^{22} \\ 0 & 0 & -w^3 & 0 & 0 & -z^{16} \\ 0 & 0 & z^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^5y^5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.10 *Soit C une courbe torique projective. Alors $\mu(M(C)) \geq \mu(M^*(C))$ et l'inégalité est stricte si et seulement si C est de type IV.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des trois propositions précédentes. Le problème de savoir si les classes de liaison des courbes toriques coïncident avec les classes de biliaison est complètement résolu par le théorème suivant.

Théorème 5.11 *Soit C une courbe torique projective, considérée sous sa forme monomiale normalisée (\mathcal{P}) .*

1) *Si C est du type I, alors sa classe de liaison impaire coïncide avec sa classe de biliaison.*

2) *Soit C une courbe torique de type III et ayant les invariants τ, r', k, n, m, r, l . Considérons le système suivant:*

$$\begin{cases} a' &= \bar{\sigma}(l+k) + (r+r')m \\ b' &= \bar{\sigma}l + rm \\ c' &= \bar{\sigma}l + rm + r'l - rk \\ \bar{\pi} &= \bar{\sigma} + r + r' - \tau n \end{cases}$$

Alors, il existe un entier $\bar{\sigma} \geq 0$ tel que $a' > b' > c'$ sont premiers entre eux et tel que $\bar{\pi} \geq 0$. La courbe C est alors liée de façon impaire avec une courbe C' paramétrée par $x = s^{a'}, z = s^{a'-c'}t^{c'}, y = s^{a'-b'}t^{b'}, w = t^{a'}$, de sorte que la courbe \tilde{C} donnée par $x = s^{a'}, y = s^{a'-c'}t^{c'}, z = s^{a'-b'}t^{b'}, w = t^{a'}$ est une courbe torique de type III ayant les invariants $\tilde{\tau} = \tau, \tilde{r}' = \tau l - r, \tilde{k} = l, \tilde{n} = n, \tilde{m} = m, \tilde{r} = \tau k - r', \tilde{l} = k$.

3) *Si C est du type II et telle que $p_\nu \neq 0$ et $s_{\nu+2} \neq 0$ ou du type IV, alors sa classe de liaison impaire ne contient aucune courbe torique projective.*

Démonstration: 1) La résolution de Koszul est autoduale.

2) On a bien $a' > b' > c' : k > 0$ et $r' \geq 0$ implique $a' > b'$. Par définition de ν , $r' < k$. De plus, $\tau \geq 3$ donc $l < r$. D'où $r'l < rk$ et donc $b' > c'$.

On voit facilement qu'il existe des valeurs, aussi grandes qu'on veut, de $\bar{\sigma}$ telles que $\bar{\sigma} \geq \tau n - r - r'$, et a', b', c' premiers entre eux. Choisissons l'une de ces valeurs. La courbe \tilde{C} est alors une courbe de type III, $\bar{\pi}$ est l'entier p_ν de \tilde{C} , et $\bar{\sigma}$ est l'entier $s_{\mu+1}$ de \tilde{C} . Ses invariants sont $\tau, \tau l - r, l, n, m, \tau k - r', k$. La proposition 4.3 nous permet d'écrire sa matrice σ_4 . Comme on obtient C' en échangeant les coordonnées y et z dans \tilde{C} , il suffit d'effectuer cet échange dans $\sigma_4(\tilde{C})$ pour obtenir que $\sigma_4(C') = \sigma_1^\vee(M(C))$.

3) Soit C une courbe torique projective de type II ou IV. Supposons qu'il existe une autre courbe torique projective C' telle que $M(C)$ est isomorphe à $M^*(C')$.

Si C est de type II vérifiant $p_\nu \neq 0$ et $s_{\nu+2} \neq 0$, alors $\beta_1(M(C)) = 2\mu(C) - 3$ est un nombre impair alors que $\beta_1(M^*(C')) = 2\mu(C') - 4$ est un nombre pair pour une courbe torique.

Si C est de type IV, d'après ce qui précède nous avons $\mu(M(C')) \geq \mu(M^*(C')) = \mu(M(C)) > \mu(M^*(C))$ et alors $\mu(M(C')) > \mu(M^*(C))$, ce qui est absurde car $M(C')$ est isomorphe à $M^*(C)$. Dans les deux cas nous arrivons à une contradiction.

Exemple 5.12 Soit C la courbe monomiale donnée par la paramétrisation $x = s^{68}, y = s^{66}t^2, z = s^{11}t^{57}, w = t^{68}$. La courbe C est de type III et possède les invariants $\tau = 3, r' = 0, k = 11, n = 11, m = 2, r = 5, l = 2$. Les entiers a', b', c' sont donnés par les équations $a' = 13\bar{\sigma} + 10, b' = 2\bar{\sigma} + 10, c' = 2\bar{\sigma} - 45$. On a $\tilde{\pi} = \bar{\sigma} - 28$. Il faut donc $\bar{\sigma} \geq 28$. Pour $\bar{\sigma} = 28$, on a $\text{pgcd}(a', b', c') = 11$. Pour $\bar{\sigma} = 29, a' = 387, b' = 68, c' = 13$ sont premiers entre eux. On peut vérifier que la courbe C' paramétrée par $x = s^{387}, y = s^{319}t^{68}, z = s^{374}t^{13}, w = t^{387}$ est dans la classe de liaison impaire de C .

Remarque 5.13 Si C , paramétrée par $x = s^a, y = s^{a-c}t^c, z = s^{a-b}t^b, w = t^a$ est une courbe de type II telle que $p_\nu = 0$, alors la courbe \hat{C} paramétrée par $x = t^a, y = t^b s^{a-b}, z = t^c s^{a-c}, w = s^a$ est une courbe de type II telle que $\hat{s}_{\nu+2} = 0$, obtenue par une simple permutation des variables x, y, z, w . Pour les deux propositions qui suivent, il existe des énoncés similaires lorsqu'on étudie la classe de liaison impaire d'une courbe de type II et telle que $s_{\nu+2} = 0$.

Proposition 5.14 Soit C une courbe de type II telle que $p_\nu = 0$, paramétrée par $x = s^a, y = s^{a-c}t^c, z = s^{a-b}t^b, w = t^a$. Pour $0 \leq \alpha \leq \tau p_{\nu+1}$, on définit

$$\begin{cases} a' &= r_{\nu+1}(\tau s_{\nu+1} - s_{\nu+2}) \\ b' &= r_{\nu+1}(\tau p_{\nu+1} + \alpha) \\ c' &= p_{\nu+1} s_{\nu+2} + \alpha s_{\nu+1} \end{cases}$$

Les seules courbes \tilde{C} de type II telles que $\tilde{p}_\nu = 0$ dans la classe de liaison impaire de C sont celles paramétrées par $x = s^{a'}, w = s^{a'-c'}t^{c'}, z = s^{a'-b'}t^{b'}, y = t^{a'}$, s'il existe α tel que $(a', b', c') = 1$.

Les seules courbes \hat{C} de type II telles que $\hat{s}_{\nu+2} = 0$ dans la classe de liaison impaire de C sont celles paramétrées par $x = t^{a'}, w = t^{b'} s^{a'-b'}, z = t^{c'} s^{a'-c'}, y = s^{a'}$, s'il existe α tel que $(a', b', c') = 1$.

Démonstration: On commence par prouver que s'il existe une courbe \tilde{C} de type II telle que $\tilde{p}_\nu = 0$ dans la classe de liaison impaire de C , elle vérifie $\tilde{\tau} = \tau, \tilde{s}_{\nu+1} = s_{\nu+1}, \tilde{p}_{\nu+1} = r_{\nu+1}$ et $\tilde{r}_{\nu+1} = p_{\nu+1}$, par comparaison de la matrice σ_4 de C et de σ_1^\vee de \tilde{C} , sa forme monomiale normalisée étant obtenue par un simple échange des variables y et w . En posant $\tilde{r}_{\nu+2} = \alpha$, on en déduit la paramétrisation de \tilde{C} , et les expressions de a', b', c' . Réciproquement, s'il existe α tel que $(a', b', c') = 1$, alors \tilde{C} est comme ci-dessus. La matrice σ_4 associée à \tilde{C} est donc exactement la matrice σ_1^\vee de C . Donc \tilde{C} est dans la classe de liaison impaire de C . Pour les courbes \hat{C} telles que $\hat{s}_{\nu+2} = 0$, on utilise la remarque 5.13 et le résultat que l'on vient de prouver.

Remarque 5.15 Il existe des courbes C de type II telles que $p_\nu = 0$ mais pour lesquelles, quel que soit α , on aura $(a', b', c') \neq 1$. C'est le cas des courbes C vérifiant $(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}, s_{\nu+2}) \neq 1$. Par exemple, la courbe C paramétrée par $x = s^{100}, y = s^{76}t^{24}, z = s^{35}t^{65}, w = t^{100}$ vérifie la condition précédente. Par conséquent, il n'existe aucune courbe de type II et telle que $p_\nu = 0$ dans la classe de liaison impaire de C .

Proposition 5.16 *Soit C une courbe de type II telle que $p_\nu = 0$. C est liée de façon impaire aux courbes de type III suivantes:*

- \tilde{C} paramétrée par $x = t^{\tilde{a}}, y = s^{\tilde{a}-\tilde{c}}t^{\tilde{c}}, z = s^{\tilde{a}}, w = s^{\tilde{a}-\tilde{b}}t^{\tilde{b}}$, avec

$$\begin{cases} \tilde{a} &= p_{\nu+1}(-\tau r'_{\nu+1} - s_{\nu+2}) + \pi(s_{\nu+1} - r'_{\nu+1}) \\ \tilde{b} &= -r'_{\nu+1}(\tau p_{\nu+1} + \pi) \\ \tilde{c} &= -r'_{\nu+1}(\pi + \tau(p_{\nu+1} - s_{\nu+1}) - s_{\nu+2}) \end{cases}$$

pour les entiers π tels que $\tilde{a} > \tilde{b} > \tilde{c} > 0$ sont premiers entre eux.

- \hat{C} paramétrée par $x = s^{\hat{a}}, y = s^{\hat{a}-\hat{b}}t^{\hat{b}}, z = t^{\hat{a}}, w = s^{\hat{a}-\hat{c}}t^{\hat{c}}$, avec

$$\begin{cases} \hat{a} &= r_{\nu+1}(\tau s_{\nu+1} - s_{\nu+2}) + \pi(s_{\nu+1} - r'_{\nu+1}) \\ \hat{b} &= r_{\nu+1}(\tau s_{\nu+1} - s_{\nu+2}) + \pi s_{\nu+1} \\ \hat{c} &= (r_{\nu+1} + r'_{\nu+1})(\tau s_{\nu+1} - s_{\nu+2}) + \pi s_{\nu+1} \end{cases}$$

pour les entiers π tels que $\hat{a} > \hat{b} > \hat{c} > 0$ sont premiers entre eux.

Démonstration: On cherche les courbes C' de type III susceptibles d'appartenir à la classe de liaison impaire de C en identifiant la matrice σ_1^Y de C à la matrice σ_4 de C' . Ceci suggère deux permutations possibles des variables x, y, z, w dans l'écriture de la paramétrisation de la courbe C' , et nous donne la valeur des invariants de C' . En posant $\pi = p'_\nu$, on obtient les valeurs de a', b', c' dans chaque cas. Réciproquement, s'il existe une valeur de π telle que $(a', b', c') = 1$, on a trouvé une courbe torique de type III dans la classe de liaison impaire de C . Or, π peut être choisi aussi grand que l'on veut. Donc il existe toujours une telle courbe C' dans la classe de liaison impaire de C .

Remarque 5.17 Nous avons choisi d'étudier la liaison des courbes toriques projectives, alors que les résultats existants concernaient essentiellement les courbes monomiales. Ce choix a été payant puisque nous pouvons, pour n'importe quelle courbe torique projective, trouver toutes les courbes toriques projectives qui sont dans sa classe de liaison paire (resp. impaire). Ceci nous permet de prouver la conjecture énoncée dans [BrH] qui concerne les courbes monomiales.

Théorème 5.18 *Soit C une courbe monomiale qui vérifie $\mu(I(C)) \geq 5$. Alors il n'existe pas de courbe monomiale dans la classe de liaison impaire de C .*

Démonstration: Si C est une courbe monomiale qui vérifie $\mu(I(C)) \geq 5$, alors C est de type II, III ou IV. Or le théorème 5.11 dit qu'il n'existe pas de courbe torique projective dans la classe de liaison impaire de C , si C est de type IV, ou de type II telle que $p_\nu \neq 0$ et $s_{\nu+2} \neq 0$. Si C est de type III ou de type II telle que $p_\nu = 0$ ou $s_{\nu+2} = 0$, les courbes toriques projectives dans la classe de liaison impaire de C ne sont pas monomiales au sens strict (même si tous les exposants $a', b', c', a' - b', a' - c'$ sont strictement positifs), mais sont les images de courbes monomiales par une permutation des coordonnées x, y, z, w . Le résultat est donc prouvé.

Remarque 5.19 Les résultats que nous avons démontrés jusqu'à présent nous permettent de remarquer que le corollaire III.1.23 de [SV] (page 168) est faux, ainsi que l'exemple III.1.27(ii) (page 171). Ce corollaire dit que, si une courbe monomiale C vérifie $\mu(I(C)) = 4$, alors $\mu(M(C)) = 1$, mais que la réciproque est fautive. En fait, avec notre terminologie, $\mu(I(C)) = 4$ signifie que C est une courbe de type I. Et nous avons prouvé que $\mu(M(C)) = 1$ lorsque C est de type I. Mais nous avons aussi démontré la réciproque. En effet, si C est une courbe monomiale de type II, III ou IV, on a $\mu(M(C)) \geq 2$.

L'exemple III.1.27(ii) étudie la courbe monomiale donnée par $x = s^8$, $y = s^7t$, $z = s^3t^5$, $w = t^8$. Le calcul des suites s_i, p_i, r_i, r'_i, q_i associées à cette courbe nous permet de dire que cette courbe est de type II, que $\mu(I(C)) = 5$ et que $\mu(M(C)) = 2$.

References

- [BE] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *What makes a complex exact?*, J. of Algebra **25** (1973), 259-268.
- [Br] H. Bresinsky, *Minimal free resolutions of monomial curves in \mathbb{P}^3* , Linear Algebra and its Applic. **59** (1984), 121-129.
- [BrH] H. Bresinsky and C. Huneke, *Liaison of monomial curves in \mathbb{P}^3* , J. Reine Angew. Math. **365** (1986), 33-66.
- [MP] M. Martin-Deschamps and D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque No 184-185 (1990).
- [M] M. Morales, *Equations des variétés monomiales en codimension deux*, J. of Algebra **175** (1995), 1082-1095.
- [PS] C. Peskine and L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques*, Invent. Math. **26** (1973), 271-302.
- [R] P. Rao, *Liaison among curves in \mathbb{P}_k^3* , Invent. Math. **50** (1979), 205-217.
- [SV] J. Stuckrad and W. Vogel, *Buchsbaum rings and applications*, Springer-Verlag, 1986.

Institut FOURIER
 BP 74
 38402 Saint Martin D'Hères Cedex
 FRANCE

adresses électroniques:
 Laurence.Coudurier@ujf-grenoble.fr
 Marcel.Morales@ujf-grenoble.fr