VALUATION q-ADIQUE ET RELATION DE DISTRIBUTION ADDITIVE POUR CERTAINES FONCTIONS q-PÉRIODIQUES

par Abdelmejid BAYAD

0. Introduction

On sait que pour tout corps local il existe une théorie analytique des fonctions périodiques, développée par Tate et Roquette analogue à la théorie des fonctions elliptiques pour un réseau complexe. C'est cela le cadre de notre travail ; la méthode est une illustration du principe de Lefschetz.

Nous nous sommes servi du cas complexe traité dans [BA-RO] comme d'un guide. Nous fixons K une extension finie d'un corps β-adique et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Nous désignons par q un élément de K^* de valuation strictement positive. Nous notons v la valuation discrète normalisée de K. En fait, ce travail s'inspire du schéma suivant :

Pour deux réseaux Ω, Λ de $\mathbf{C}$, $\Lambda \supset \Omega$ Tore complexe $\mathbf{C}/\Omega$ les fonctions de Siegel associées aux réseaux Ω et Λ entre ces deux fonctions il y a une formule de distribution dans le cas où $[\Lambda : \Omega]$ est fini	bijection $\longleftrightarrow$	Pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de K^*, Courbe de Tate $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ et pour ψ un point de torsion d'ordre fini de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Les analogues β-adiques des fonctions de Siegel associées aux sous-groupes discrets $q^{\mathbf{Z}}$ et $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de K^*.

Donc, nous définissons une fonction de Siegel β-adique associée au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de la façon la plus naturelle possible. Ensuite, pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de K^* nous donnons une formule pertinente qui définit la fonction de Siegel correspondante. Nous remarquons que cette dernière définition est l'analogue, sur une courbe de Tate $\overline{K}/q^{\mathbf{Z}}$, de la formule de distribution satisfaite par les fonctions de Siegel sur le Tore complexe, cf. [K], th. 2.3.

D'autre part, nous établissons l'analogue β-adique du résultat fondamental "Toute fonction elliptique non constante est de valence supérieure ou égale à 2".

Soient Λ et Γ deux sous-groupes discrets de $\overline{K}^*$, contenant chacun $q^{\mathbf{Z}}$, et supposons

i) $\Lambda \cap \Gamma = q^{\mathbf{Z}}$;

ii) $\Lambda/q^{\mathbf{Z}}$ et $\Gamma/q^{\mathbf{Z}}$ sont cycliques, d'ordres respectifs p et ℓ.

Nous supposerons de plus p et ℓ premiers entre eux, et noterons Σ le réseau somme $\Lambda + \Gamma$, de sorte que $\Sigma/\Lambda \approx \Gamma/q^{\mathbf{Z}}$ soit un groupe cyclique d'ordre ℓ et $\Sigma/\Gamma \approx \Lambda/q^{\mathbf{Z}}$ soit un groupe cyclique d'ordre p.

Pour chaque point de torsion (φ modulo Λ) non trivial dans $\overline{K}^*/\Lambda$ et d'ordre divisant p, nous construisons une fonction F_1 méromorphe de diviseur $(\varphi) - (0)$ relativement à Λ ainsi qu'une fonction F_2 méromorphe de diviseur $\left(\varphi^{[1/\ell]_p}\right) - (0)$ relativement à Σ, possédant toutes deux $q^{\mathbf{Z}}$ comme réseau de périodes. On note ici $[1/\ell]_p$ un inverse de ℓ modulo p.

La fonction F_1 possède pour multiplicateur sous l'action de $\Lambda/q^{\mathbf{Z}}$ les mêmes multiplicateurs que la fonction F_2 sous l'action de Σ/Γ, à savoir des racines de l'unité données par l'accouplement de Weil d'indice p (en fait, d'indice l'ordre de (φ modulo Λ)). Ainsi, la fonction F_2 qui est donc périodique pour Γ est égale à la somme des translatés de F_1 par les points de $\Gamma/q^{\mathbf{Z}}$.

Par ailleurs, en affectant ces translatés des racines ℓ-ièmes de l'unité convenables, on obtient plus généralement des fonctions méromorphes cf. th. 4.1 de diviseur $(z_0)-(0)$ relativement à Σ, pour les points z_0 de torsion dans $\overline{K}^*/\Sigma$, d'ordre divisant ℓp et tels que $z_0^\ell = \varphi$; comme F_1 ces fonctions possèdent $q^{\mathbf{Z}}$ comme réseau de périodes. Une écriture explicite pour z_0 est donnée, modulo $q^{\mathbf{Z}}$; le cas de F_2 correspond à $z_0 = \varphi^{[1/\ell]_p}$, cf. formule (3.3).

Enfin, une partie non moins importante de ce travail consiste à évaluer les valuations q-adiques de ces diverses fonctions, cf. prop. 2.9 et th. 3.11. L'appendice applique ces calculs à certains produits de ces fonctions, dont l'intérêt arithmétique est montré par [BA-B-CN] et [BA-RO].

AU LECTEUR.

Dans tout ce travail le corps K est supposé de caractéristique 0. Toutefois, *tous les théorèmes de ce travail restent encore vrais lorsque la caractéristique de K est finie*, disons égale à π premier, à condition de supposer l'ordre des points de torsion éventuels premier à π : en particulier, dans le cas évoqué où *caractéristique* $(K) = \pi$, on aura donc

$$(\pi, \ell) = 1 = (\pi, p) .$$

1. Préliminaires

Nos références pour ce paragraphe sont [BA], chap. III et [ROQ], § 2. Pour une série de Laurent $\sum_{n \geq n_0} a_n X^n$, avec $a_n \in K$, qui converge pour tout z de $\overline{K}^*$, nous associons la fonction

$$(z \mapsto f(z)) \text{ de } \overline{K}^* \text{ dans } \overline{K} .$$

Donc, toute fonction associée à une série de Laurent du type précédent est dite holomorphe sur $\overline{K}^*$. On confond souvent dans les notations la fonction et la série qui la définit.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\overline{K}^*$, est un anneau intègre pour les opération naturelles, tout élément de son corps de fractions est appelé méromorphe sur $\overline{K}^*$.

Définition 1.1. — *Une fonction méromorphe sur $\overline{K}^*$ est dite q-périodique lorsqu'elle satisfait :*

$$f(q^{-1}z) = f(z)$$

pour tout élément z de $\overline{K}^*$ où f est définie.

Soit f une fonction méromorphe sur $\overline{K}^*$, non nulle; on sait qu'il y a équivalence entre les deux faits suivants :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \sum_{\alpha\in\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_\alpha = 0 \\ \prod_{\alpha\in\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} \alpha^{m_\alpha} = 1 \end{cases}, \quad \text{où } m_\alpha = \begin{cases} \textit{l'ordre de } f \textit{ en } \alpha, \textit{ si } \alpha \textit{ zéro de } f \\ -\textit{l'ordre de } f \textit{ en } \alpha, \textit{ si } \alpha \textit{ pôle de } f \\ 0 \ \textit{sinon} \end{cases}$$

et

$$(1.3) \qquad \begin{cases} f \textit{ est } q\textit{-périodique unique à constante multiplicative près,} \\ \textit{telle que :} \\ (f) = \sum_{\alpha\in\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_\alpha(\alpha)\,. \end{cases}$$

Il s'agit là tout simplement du théorème d'Abel-Jacobi et de sa réciproque sur une courbe de Tate $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

DÉFINITION 1.4. — *Soit f une fonction q-périodique sur $\overline{K}^*$, non nulle, on appelle valence de f et on note $\mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f)$ l'entier*

$$\mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f) = \sum_{\alpha\in\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_\alpha, \ \textit{où } \alpha \textit{ parcourt les zéros de } f \textit{ dans } \overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}.$$

En outre, pour une fonction f méromorphe sur $\overline{K}^*$ et dont le groupe des périodes contient $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$, où β est un point d'ordre ℓ, la valence de f relativement à $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$ est donnée par la relation

$$\mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f) = \ell\, \mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}}(f)\,.$$

On déduit de (1.2) et (1.3) que, comme dans le cas des fonctions d'une variable complexe doublement périodiques, toute fonction q-périodique non constante est de valence supérieure ou égale à 2.

DÉFINITION 1.5. — *Pour tout entier n nous notons $E[n]$ le groupe des points de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ tels que : $x^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q^{\mathbf{Z}})$.*

PROPOSITION 1.6. — *Soit n un entier, $n \geq 1$, alors on a*

$$E[n] \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Si $q^{1/n}$ (resp. .ξ_n) désigne une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de q (resp. 1), l'ensemble $\{q^{a/n}\xi_n^b$, $0 \leq a \leq n-1,\ 0 \leq b \leq n-1\}$ est un système de représentants dans $\overline{K}^*$ des éléments de $E[n]$.

La démonstration est immédiate.

Pour x et y éléments de $E[n]$ respectivement représentées par $q^{a/n}\xi_n^b$, $q^{c/n}\xi_n^d$ on définit l'accouplement de Weil par

$$e_n(x,y) = \xi_n^{ad-bc}. \tag{1.7}$$

Cet accouplement ne dépend pas du choix du couple $(q^{1/n}, \xi_n)$. Il est à noter que l'accouplement e_n définit une forme bilinéaire et non dégénérée de $E[n] \times E[n]$ dans $\boldsymbol{\mu}_n$.

Maintenant, on définit la fonction fondamentale par l'égalité :

$$\theta_q(z) = (1-z)\prod_{n\geq 1}(1-q^n z)(1-q^n z^{-1}). \tag{1.8}$$

On vérifie que θ_q ou plus simplement θ est une fonction holomorphe sur $\overline{K}^*$ dont les zéros d'ordre 1 sont les éléments de $q^{\mathbf{Z}}$.

Proposition 1.9. — *Pour tout élément m de $\mathbf{Z}$, on a l'égalité :*

$$\theta_q(q^m z) = (-1)^m q^{\frac{-m(m-1)}{2}} z^{-m}\theta_q(z).$$

Démonstration. — D'après la définition de la fonction $\theta_q(z)$, (1.8) pour $m \geq 1$ (resp. $m < 0$) on a

$$\theta_q(q^m z)/\theta_q(z) = \prod_{n=0}^{m-1}(1-q^{-n}z^{-1})/(1-q^n z) \quad \left(\text{resp.} \prod_{n=1}^{-m}(1-q^{-n}z^{-1})/(1-q^n z)\right)$$

d'où l'on déduit la formule souhaitée dans les deux cas.

2. Fonctions de Siegel β-adiques

Pour n entier naturel non nul, on définit une fonction de Siegel fondamentale associée au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de K^* par

$$G^{(n)}(a;q) = q^{12n^2 B_2(a_1)}\theta_q(a)^{24n^2} \tag{2.1}$$

pour tout a dans $E[n]$, où $a_1 = v_q(a)$ et $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$. Pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de K^*, on définit la fonction discriminant fondamentale par le produit infini convergent

$$\Delta(q) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}. \tag{2.2}$$

La fonction de Siegel $G^{(n)}(\cdot;q)$ satisfait les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.3. — *Soit n un entier ≥ 1. Pour $\rho \in q^{\mathbf{Z}}$ et $a \in E[n]$, on a*

$$G^{(n)}(a\rho; q) = G^{(n)}(a; q)\,.$$

En outre, pour tout entier $m \geq 1$, on a : $G^{(nm)}(a; q) = G^{(n)}(a, q)^{m^2}$.

Démonstration. — D'après la proposition 1.9, on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(aq; q) &= q^{12n^2 B_2(a_1+1)} \theta_q(aq)^{24n^2} \\ &= q^{24n^2 a_1} a^{-24n^2} q^{12n^2 B_2(a_1)} \theta_q(a)^{24n^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} G^{(n)}(aq; q) &= q^{24n^2 a_1} a^{-24n^2} G(a; q) \\ &= G^{(n)}(a; q)\,. \end{aligned}$$

la deuxième propriété est une conséquence immédiate de la définition de $G^{(nm)}(\cdot; q)$ et $G^{(n)}(\cdot; q)$.

Maintenant, nous sommes en mesure de définir les fonctions de Siegel et discriminant β-adiques pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de K^*, où ψ est un point de torsion de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ d'ordre $p \geq 1$, et en donner quelques propriétés fondamentales.

DÉFINITION 2.4. — *Pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de K^* et pour tout entier $N = np$, $n \in \mathbf{N}^*$, on associe la fonction de Siegel définie par*

$$G^{(n)}(a; q, \psi) = \prod_{i=0}^{p-1} G^{(N)}(a\psi^i, q)$$

pour tout $a \in E[np]$.

Remarques 2.5. — On peut vérifier aisément que

1) Pour $p = 1$, on a : $G^{(n)}(a; q) = G^{(n)}(a; q, 1)$.

2) Pour $p \geq 2$, et lorsque ψ est représenté tout simplement par $q^{1/p}$. Alors pour tout point a dans $E[N]$ on obtient

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a; q, q^{\frac{1}{p}}) &= q^{12(np)^2 \sum_{i=0}^{p-1} B_2(a_1+\frac{i}{p})} \prod_{i=0}^{p-1} \theta_q(aq^{\frac{i}{p}})^{24(np)^2} \\ &= (q^{\frac{1}{p}})^{24(np)^2 B_2(pa_1)} \prod_{i=0}^{p-1} \theta_q(aq^{\frac{i}{p}})^{24(np)^2} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$G^{(n)}(a; q, q^{\frac{1}{p}}) = G^{(N)}(a; q^{\frac{1}{p}})\,.$$

On définit la fonction puissance $2p^2$ du discriminant β-adique associée à $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ par

$$\Delta^{(p)}(q,\psi) = \Delta(q)^{2p^2} \prod_{i=1}^{p-1} G^{(p)}(\psi^i;q) \tag{2.6}$$

où p est l'ordre de ψ dans $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

Remarque 2.7. — Cette définition est un analogue β-adique du théorème 2.4 dans [K], concernant la fonction eta de Dedekind.

Dans la suite de ce travail ce sont les fonctions $\Delta^{(p)}(q,\psi)$ et $G^{(n)}(\cdot;q,\psi)$, n entier ≥ 1 qui nous intéressent.

L'étude de leur racine $12p$-ième (resp. $12np$-ième) pourrait être faite ; mais je n'ai pas réussi à définir sans ambiguïté leur racine $24p^2$-ième (resp. $24(np)^2$-ième) : la définition la plus naturelle fait apparaître une ambiguïté tenant à une racine de l'unité élément de $\boldsymbol{\mu}_{2p}$ (resp. $\boldsymbol{\mu}_{2np}$).

Les fonctions de Siegel, ainsi définies, associées au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de K^* satisfont les propriétés suivantes :

Proposition 2.8. — *Pour tout $\rho \in q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$, pour tout entier naturel $N \geq 1$ divisible par p et posant $n = N/p$ on a*

$$G^{(n)}(a\rho;q,\psi) = G^{(n)}(a;q,\psi) \ \text{ pour tout } \ a \in E[N]\,.$$

En outre, pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$G^{(nm)}(a;q,\psi) = G^{(n)}(a;q,\psi)^{m^2} \quad \text{pour tout } \ a \in E[N]\,.$$

Démonstration. — Pour $\rho \in q^{\mathbf{Z}}$, on sait grâce à la proposition 2.3, que l'on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a\rho;q,\psi) &= \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(a\rho\psi^i;q) \\ &= \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^i;q) \\ &= G^{(n)}(a;q,\psi) \end{aligned}$$

et pour $\rho = \psi$, on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a\psi;q,\psi) &= \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^{i+1};q) \\ &= G^{(np)}(a\psi^p;q) \prod_{i=1}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^i;q) \end{aligned}$$

comme $\psi^p \in q^{\mathbb{Z}}$, alors on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a\psi; q, \psi) &= G^{(np)}(a; q) \prod_{i=1}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^i; q) \\ &= G^{(n)}(a; q, \psi) \end{aligned}$$

et la dernière propriété est immédiate, d'après la définition 2.4 et la proposition 2.3. ■

Nous nous intéressons, maintenant, aux valuations q-adiques de ces fonctions. Il vient alors

PROPOSITION 2.9. — *Posons $N = np$, n entier ≥ 1.*

1) Pour tout $z \in E[N]$ point de torsion de $\overline{K}^* / q^{\mathbb{Z}}$, on a

$$\frac{1}{12N^2} v_q \left(G^{(n)}(z; q, \psi) \right) = \frac{1}{p} d_{\langle \psi \rangle}^2 B_2 \left(\left\{ \frac{p}{d_{\langle \psi \rangle}} \cdot z_1 \right\} \right) .$$

2) On a aussi

$$\frac{1}{2p^2} v_q \left(\Delta^{(p)}(q, \psi) \right) = \frac{1}{p} d_{\langle \psi \rangle}^2$$

avec $\psi_1 = v_q(\psi)$, $z_1 = v_q(z)$, $p =$ l'ordre de ψ et l'entier positif

$$d_{\langle \psi \rangle} = \text{p.g.c.d.}(v_q(\psi^p) \mod p, p) .$$

La démonstration de cette proposition se base sur le lemme suivant :

LEMME 2.10 (relation de distribution du polynôme $B_2(X)$ de Bernoulli). — *Pour tout entier $N \geq 1$ et tout réel x, on a*

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_2 \left(\left\{ x + \frac{k}{N} \right\} \right) = \frac{1}{N} B_2(\{Nx\})$$

où comme de coutume $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire du réel y.

Pour la démonstration de ce lemme se reporter à [L], chap. XIII, p. 230, B8.

Démontrons maintenant la proposition 2.9.

Démonstration de 2.9. — En effet, grâce à la définition de la fonction $G^{(n)}(\cdot; q, \psi)$ on a

$$G^{(n)}(z; q, \psi) = \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(z\psi^i, q)$$

et donc

$$G^{(n)}(z; q, \psi) = \left[\prod_{i=0}^{p-1} q^{\frac{1}{2} B_2(z_1 + i\varphi_1)} \theta_q(z\psi^i) \right]^{24(np)^2}$$

d'où

$$\frac{1}{24N^2} v_q(G^{(n)}(z; q, \psi)) = \sum_{i=0}^{p-1} v_q \left(q^{\frac{1}{2} B_2(z_1 + i\varphi_1)} \theta_q(z\psi^i) \right)$$

grâce à [K-L], chap. 2, § 1, p. 3.1, on obtient

$$\frac{1}{12N^2} v_q(G^{(n)}(z; q, \psi)) = \sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{z_1 + i\varphi_1\}).$$

Pour conclure, soit k entier compris entre 0 et $p-1$ tel que : $i \cdot p\psi_1 \equiv k \bmod p$, donc : $\left\{z_1 + \frac{k}{p}\right\} = \{z_1 + i\psi_1\}$, comme $d_{\langle\psi\rangle} = \text{p.g.c.d.}(p\psi_1, p)$, alors k prend toutes les valeurs comprises entre 0 et $\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}} - 1$ quand i parcourt $\left\{0; 1; \cdots; \frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}} - 1\right\}$, on peut écrire alors

$$\sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{z_1 + i\psi_1\}) = d_{\langle\psi\rangle} \sum_{i=0}^{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}-1} B_2(\{z_1 + i\psi_1\})$$

qui est encore égale, grâce au lemme 2.10, à

$$\sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{z_1 + i\psi_1\}) = d_{\langle\psi\rangle} \frac{d_{\langle\psi\rangle}}{p} B_2(\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}} z_1\}) = \frac{1}{p} d_{\langle\psi\rangle}^2 B_2(\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}} z_1\})$$

on obtient 1).

La démonstration du point 2) se déduit facilement de la définition de $\Delta(q)$ et de celle de $G^{(n)}(\psi^i; q)$ respectivement en (2.2) et (2.1). Faisons-le,

$$\frac{1}{2p^2} v_q(\Delta^{(p)}(q, \psi)) = 1 + \frac{1}{2p^2} \sum_{i=1}^{p-1} v_q(G^{(p)}(\psi^i; q)) = 1 + 6 \sum_{i=1}^{p-1} B_2(\{i\psi_1\})$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p^2} v_q(\Delta^{(p)}(q, \psi)) &= 6 \sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{i\psi\}), \text{ comme dans 1)} \\ &= 6 d_{\langle\psi\rangle} \sum_{i=0}^{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}-1} B_2(\{i\psi\}) \end{aligned}$$

et grâce au lemme 2.10, on obtient

$$\frac{1}{2p^2} v_q(\Delta^{(p)}(q, \psi)) = \frac{6}{p} d_{\langle\psi\rangle}^2 B_2(0) = \frac{1}{p} d_{\langle\psi\rangle}^2 \qquad \blacksquare$$

Remarque 2.11. — L'entier $d_{\langle\psi\rangle}$ ne dépend que du sous-groupe cyclique $\langle\psi\rangle$ et non pas du choix du générateur ψ de $\langle\psi\rangle$ dans $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$, ni du représentant de celui-ci dans $\overline{K}^*$.

3. Les fonctions $D_{q^{\mathbf{Z}}}$ de poids p (resp. $p\ell$)

Les notations de ce paragraphe sont celles de l'introduction et des paragraphes précédents. Pour p entier ≥ 1, on note $\langle\psi\rangle \subset E[p]$ un sous-groupe cyclique d'ordre p du groupe $E[p]$ des points de p-torsion de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, de générateur fixé ψ. On désigne par φ un autre point de p-torsion de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, vérifiant $\varphi \notin \langle\psi\rangle$. On note encore ψ et φ des représentants dans $\overline{K}^*$ de ces points.

D'après (1.2), (1.3) et [Roq] la théorie des fonctions q-périodiques prouve alors l'existence d'une fonction non triviale $D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$, $z \in \overline{K}$, méromorphe sur $\overline{K}$ et admettant $q^{\mathbf{Z}}$ pour groupe des périodes et de diviseur

$$\sum_{\rho\in\langle\psi\rangle} (\varphi\rho) - (\rho)\,; \tag{3.1}$$

on normalise $D_{q^{\mathbf{Z}}}$ en exigeant que

$$\lim_{z\to 1}(z-1)D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;\varphi,\langle\psi\rangle) = 1 \tag{3.2}$$

ou bien sûr $z \to 1$ au sens de la topologie β-adique de $\overline{K}$.

Pour ℓ entier ≥ 1 tel que $(\ell,p)=1$, on note $\langle\alpha\rangle \subset E[\ell]$ un sous-groupe cyclique d'ordre ℓ du groupe $E[\ell]$, de générateur α. On désigne par γ un autre point de ℓ-torsion de $\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$; le choix $\gamma \equiv 1 \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$ est acceptable, cf. introduction. On note encore α et γ des représentants dans $\overline{K}^*$ de ces points.

Définissons les entiers s et ν par $\varphi^p = q^s$ et $\gamma^\ell = q^\nu$; soit $N_0 = \ell\left[\frac{1}{\ell}\right]_p s - r\left[\frac{1}{p}\right]_\ell \nu$, où $\left[\frac{1}{\ell}\right]_p$ (resp. $\left[\frac{1}{p}\right]_\ell$) est un élément de $\mathbf{Z}$ tel que $\ell\left[\frac{1}{\ell}\right]_p \equiv 1 \bmod p$ (resp. $r\left[\frac{1}{p}\right]_\ell \equiv 1 \bmod \ell$). Posons

$$z_0 = \varphi^{\left[\frac{1}{\ell}\right]_p}\gamma^{-\left[\frac{1}{p}\right]_\ell}\,; \tag{3.3}$$

on a donc $z_0^\ell = \varphi$ et $z_0^p = \gamma^{-1}$. En particulier comme $\varphi \notin \langle\psi\rangle$, on a $z_0^\ell \notin \langle\psi\rangle$ et donc

$$z_0 \notin \langle\psi\rangle E[\ell] \tag{3.4}$$

et a fortiori $z_0 \notin \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle$: de ce fait, la construction ci-dessous de $D_q^{\mathbf{Z}}(\cdot\,; z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ n'impose aucune condition sur le point γ de $E[\ell]$, pour lequel on a $z_0^p = \gamma^{-1}$.

Comme le groupe $\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle$ est cyclique, et comme $z_0 \notin \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle$, la construction faite au début du paragraphe (après remplacement de φ par z_0 et de p par ℓp) prouve aussi l'existence d'une fonction non triviale

$$D_q^{\mathbf{Z}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle),\ \ z\in\overline{K},$$

méromorphe sur $\overline{K}$ et admettant $q^{\mathbf{Z}}$ pour groupe des périodes ; son diviseur est

$$\sum_{\rho\in\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle} (z_0\rho) - (\rho) \tag{3.5}$$

relativement à q^Z ; la condition de normalisation (3.2) devient alors

$$\lim_{z\to 1}(z-1)D_{q^Z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=1\,. \tag{3.6}$$

Par ailleurs, introduisons les deux fonctions $f_s(\cdot;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et $f_{N_0}(\cdot;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ définies par

$$\begin{cases} f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)=z^s\prod_{i=0}^{p-1}\frac{\theta_q(z\psi^i)}{\theta_q(z\varphi^{-1}\psi^i)}\,,\\ \text{et}\\ f_{N_0}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=z^{N_0}\prod_{i=0}^{p-1}\prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{\theta_q(z\psi^i\alpha^j)}{\theta_q(zz_0^{-1}\psi^i\alpha^j)}\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Ces deux fonctions ont les propriétés intéressantes suivantes :

Proposition 3.8. — *Les fonctions $f_s(\cdot;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et $f_{N_0}(\cdot;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ sont q-périodiques. En outre, le diviseur de $f_s(\cdot;\varphi,\langle\psi\rangle)$.* (resp. $f_N(\cdot;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$) *est*

$$\sum_{\rho\in\langle\psi\rangle}(\rho)-(\varphi\rho)\qquad(\text{resp.}\sum_{\rho\in\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle}(\rho)-(z_0\rho))\,.$$

La démonstration est évidente par la proposition 1.9 concernant le diviseur de $f_s(\cdot;\varphi,\langle\psi\rangle)$, remarquons que

$$f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)=(-1)^sq^{\frac{s(s+1)}{2}}\frac{\theta_q(z\varphi^{-p})}{\theta_q(z\varphi^{-1})}\prod_{i=1}^{p-1}\frac{\theta_q(z\psi^i)}{\theta_q(z\varphi^{-1}\psi^i)}$$

donc les fonctions q-périodiques $z\mapsto f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et $z\mapsto\frac{\theta_q(z\varphi^{-p})}{\theta_q(z\varphi^{-1})}\prod_{i=1}^{p-1}\frac{\theta_q(z\psi^i)}{\theta_q(z\varphi^{-1}\psi^i)}$ sont proportionnelles, leur diviseur commun est donc $\sum_{\rho\in\langle\psi\rangle}(\rho)-(\varphi\rho)$. On raisonne de même pour $z\mapsto f_{N_0}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$.

Comme la fonction $z\mapsto D_{q^Z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$ (resp. $z\mapsto D_{q^Z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$) est normalisée, de diviseur opposé à celui de f_s (resp. f_{N_0}) on obtient en conclusion :

Proposition 3.9. — *La fonction $D_{q^Z}(\cdot;\varphi,\langle\psi\rangle)$* (resp. $D_{q^Z}(\cdot;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$) *s'exprime comme suit*

$$D_{q^Z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)^{-1}=\frac{f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)}{f_s'(1;\varphi,\langle\psi\rangle)}$$

et en particulier

$$D_{q^Z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)=-\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^2z^{-s}\prod_{i=0}^{p-1}\frac{\theta_q(\psi^i)\theta_q(z\varphi^{-1}\psi^i)}{\theta_q(\varphi^{-1}\psi^i)\theta_q(z\psi^i)}$$

où par convention dans le produit, on compte pour 1 le terme $\theta_q(\psi^0)$.

De même

$$D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;a_0,\langle\varphi\rangle\langle\psi\rangle)^{-1}=\frac{f_{N_0}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)}{f'_{N_0}(1;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)}$$

et en particulier

$$D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=-\prod_{n=1}(1-q^n)^2z^{-N_0}\prod_{i=0}^{p-1}\prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{\theta_q(\psi^i\alpha^j)\theta_q(zz_0^{-1}\psi^i\alpha^i)}{\theta_q(z_0^{-1}\psi^i\alpha^j)\theta_q(z\psi^i\alpha^j)}$$

où par convention dans le produit double on compte pour 1 le terme $\theta_q(\psi^0\alpha^0)$.

En outre, ces fonctions $D_{q^{\mathbf{Z}}}$ possèdent la propriété suivante :

PROPOSITION 3.10. — *Pour* $\rho\in q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ (resp. $\rho\in q^{\mathbf{Z}}\alpha^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$) *on a*

$$D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\rho;\varphi,\langle\psi\rangle)=e_p(\rho,\varphi)D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$$

(resp. $D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\rho;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=e_{\ell p}(\rho,z_0)D_q^{\mathbf{Z}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$).

Démonstration. — Les deux fonctions $D_{q^{\mathbf{Z}}}(\cdot;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et $D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ sont q-périodiques et en plus

$$D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\psi;\varphi,\langle\psi\rangle)=\psi^{-s}\varphi^tD_{q^{\mathbf{Z}}}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$$

et

$$D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\psi;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=\psi^{-s}\varphi^tD_{q^{\mathbf{Z}}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$$

$$D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\alpha;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=\gamma^{-m}\alpha^{+\nu}D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$$

où $\psi^p=q^t$, $\varphi^p=q^s$, $\alpha^\ell=q^m$ et $\gamma^\ell=q^\nu$. Or $\psi^{-s}\varphi^t=e_p(\psi,\varphi)e_{\ell r}(\psi,z_0)$, et

$$\gamma^{-m}\alpha^\nu=e_\ell(\gamma,\alpha)=e_{\ell p}(\alpha,z_0)\,.$$

Ces relations permettent de démontrer facilement cette proposition.

THÉORÈME 3.11. — *Pour tout entier* $N\geq 1$ *divisible par* p, *avec* $n=\frac{N}{p}$, *on a*

$$D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)^{24N^2}=\frac{G^{(n)}(z\varphi^{-1}:q,\psi)\Delta^{(p)}(q,\psi)^{n^2}}{G^{(n)}(z;q,\psi)G^{(n)}(\varphi^{-1};q,\psi)}$$

et tout $z\in E[N]$ *tel que, ni* z *ni* $z\varphi^{-1}$, *n'appartiennent à* $\langle\psi\rangle$.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 3.9 et des définitions des fonctions de Siegel et du discriminant β-adiques par rapport au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de K^*, cf. § 2.

THÉORÈME 3.12. — *Soit z un point de torsion de $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$ tel que, ni z ni $z\varphi^{-1}$, n'appartiennent à $\langle\psi\rangle$. Alors la valuation q-adique $D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$ est égale à*

$$v_q(D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)) = \frac{d^2_{\langle\psi\rangle}}{2p}\left[B_2\left(\left\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}(z_1-\varphi_1)\right\}\right) - B_2\left(\left\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}z_1\right\}\right)\right.$$
$$\left. -B_2\left(\left\{-\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}\varphi_1\right\}\right) + B_2(0)\right]$$

où $z_1 = v_q(z)$, $\varphi_1 = v_q(\varphi)$, $p =$ l'ordre de ψ, $d_{\langle\psi\rangle} = \text{p.g.c.d.}(v_q(\psi^p) \bmod p, p)$.

Ce résultat fondamental résulte d'un calcul immédiat à partir du théorème 3.11 et de la proposition 2.9.

4. Relation de distribution satisfaite par les fonctions $D_{q^{\mathbb{Z}}}$

Ce paragraphe contient l'énoncé de l'autre résultat principal de ce travail, ainsi que sa démonstration.

THÉORÈME 4.1. — *Soit p un entier ≥ 1. On note $\langle\psi\rangle \subset E[p]$ un sous-groupe cyclique d'ordre p de $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$, et $\varphi \in E[p]$ un point de p-torsion de $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$ tel que : $\varphi \notin \langle\psi\rangle$.*

Soit aussi ℓ un entier ≥ 1, premier à p. On note $\langle\alpha\rangle \subset E[\ell]$ un sous-groupe cyclique d'ordre ℓ de $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$.

Alors, pour tout point $\gamma \in E[\ell]$ de ℓ-torsion de $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$, on a

$$\sum_{u\in\langle\alpha\rangle} D_{q^{\mathbb{Z}}}(zu;\varphi,\langle\psi\rangle)e_\ell(\gamma,u)^{-1} = D_{q^{\mathbb{Z}}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$$

où $z_0 = \varphi^{\left[\frac{1}{\ell}\right]_p}\gamma^{-\left[\frac{1}{p}\right]_\ell}$ et $e_\ell : E[\ell]\times E[\ell] \to \boldsymbol{\mu}_\ell$ désigne l'accouplement de Weil (cf. § 1 formule (1.7)).

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de montrer le lemme suivant :

LEMME 4.2. — *Soit f une fonction méromorphe sur $\overline{K}^*$. On suppose que le groupe des périodes de f contient $q^{\mathbb{Z}}\beta^{\mathbb{Z}}$ où β définit un point d'ordre s de $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}$ et qu'en outre f, comme fonction de $\overline{K}^*/q^{\mathbb{Z}}\beta^{\mathbb{Z}}$, est de valence inférieure ou égale à 1. Alors, f est constante.*

La démonstration de ce lemme se fait en deux étapes :

Étape 1. — On se ramène au cas où β est racine de l'unité. Puisque β est d'ordre s, il existe alors un entier k tel que :

$$\beta^s = q^k . \tag{4.3}$$

Soit d le p.g.c.d. de k et s. On a donc

$$s = ds_1, \ \ k = dk_1, \ \ (s_1, k_1) = 1 .$$

On déduit de (4.3) l'existence d'une racine d-ième de l'unité ξ_d telle que :

$$\beta^{s_1} = q^{k_1}\xi_d .$$

Soient a, b éléments de $\mathbf{Z}$ tels que : $1 = ak_1 + bs_1$ on pose $q' = q^b\beta^a$. On vérifie facilement l'égalité de groupes :

$$q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}} = q'^{\mathbf{Z}}\xi_d^{\mathbf{Z}} .$$

Étape 2. — Soit maintenant $\beta = \xi_s$, où ξ_s est une racine primitive s-ième de 1. On désigne par σ le $\overline{K}$-automorphisme du corps des fonctions q-périodiques défini par :

$$(g : z \mapsto g(z)) \longmapsto (g^\sigma : z \mapsto g(\xi_s z)).$$

Son ordre est s.

Soit Φ l'application de $\overline{K}^* \ \mapsto \overline{K}^*$ définie par $\Phi(z) = z^s$. Alors Φ induit par passage au quotient un morphisme d'espace analytique rigide

$$\overline{K}^*/q^{\mathbf{Z}} \longmapsto \overline{K}^*/q^{s\mathbf{Z}} .$$

On déduit que Φ induit une injection du corps des fonctions q^s-périodiques dans le corps des fonctions q-périodiques défini par :

$$g \longmapsto \widetilde{g} = g \circ \Phi$$

l'image de cette injection est l'ensemble des fonctions q-périodiques invariantes par σ.

Nous pouvons maintenant conclure. Soit f une fonction méromorphe, de périodes $q^{\mathbf{Z}}\xi_s^{\mathbf{Z}}$, de valence $\leq\ 1$ (*i.e.* de valence $\leq\ s$ relativement à $q^{\mathbf{Z}}$). Puisque f est invariante par σ, il existe donc g fonction q^s-périodique telle que :

$$f(z) = \widetilde{g}(z) = g(z^s), \ \ \forall z .$$

Si de plus f est de valence $\leq\ 1$ relativement à $q^{\mathbf{Z}}\xi_s^{\mathbf{Z}}$, il est immédiat que g est une fonction q^s-périodique de valence entière, et $\leq\ 1$. On en déduit que g, et donc f, sont des constantes.

Démonstration du théorème 4.1. — La proposition 3.6 assure les identités

$$\begin{cases} D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\psi; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) = e_p(\psi,\varphi)D_{q^{\mathbf{Z}}}(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) \\ D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\alpha; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) = e_\ell(\gamma,\alpha)D_{q^{\mathbf{Z}}}(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) \\ D_{q^{\mathbf{Z}}}(z\psi; \varphi, \langle\psi\rangle) = e_p(\psi,\varphi)D_{q^{\mathbf{Z}}}(z; \varphi\langle\psi\rangle) \end{cases} \tag{4.4}$$

Il s'ensuit que la fonction $z \mapsto \sum_{u \in \langle\alpha\rangle} D_{q^{\mathbf{Z}}}(zu; \varphi, \langle\psi\rangle) e_\ell(\gamma, u)^{-1} / D_{q^{\mathbf{Z}}}(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ est une fonction périodique dont le groupe des périodes contient $q^{\mathbf{Z}}\alpha^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$. D'autre part, les deux fonctions $z \mapsto D_{q^{\mathbf{Z}}}(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ et $z \mapsto \sum_{u \in \langle\alpha\rangle} D_{q^{\mathbf{Z}}}(zu; \varphi, \langle\psi\rangle) e_\ell(\gamma, u)^{-1}$ ont le même diviseur polaire qui est :

$$\sum_{\rho \in \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle} (\rho) .$$

Donc, leur quotient est une fonction périodique dont le groupe des périodes contient $q^{\mathbf{Z}}\alpha^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$, et de valence ≤ 1 par rapport à ce sous-groupe discret de K^*. Ceci n'est possible que si elle est constante, cf. lemme 4.2. Or les deux membres de l'identité à prouver satisfont la normalisation des fonctions $D_{q^{\mathbf{Z}}}$ donnée par (3.2) et (3.6). On en déduit alors que les deux membres coïncident, et le théorème 4.1 est démontré.

Bibliographie

[BA] A. Bayad. — *Résolvantes elliptiques et éléments de Stickelberger*,Bordeaux I, Thèse (soutenue le 24 avril 1992).

[BA-B-CN] A. Bayad, W. Bley, Ph. Cassou-Noguès. — *Sommes arithmétiques et éléments de Stickelberger*,à paraître au J. of Algebra.

[BA-RO] A. Bayad, G. Robert. — *Une relation de distribution additive satisfaite par une famille de fonctions elliptiques*,soumis à Compositio Math..

[K] D. Kubert. — *Product formulae on elliptic curves*, Invent. Math. **117** (1994), 227–273.

[K-L] D. Kubert, S. Lang. — *Modular units*, (Grundlehren der Math. Wiss. 244), Springer-Verlag, 1981.

[L] S. Lang. — *Introduction to modular forms*, (Grundlehren der Math. Wiss. 222), Springer-Verlag, 1976.

[ROQ] P. Roquette. — *Analytic theory of elliptic function over local fields*, (Hamburger Mathematische Einzelschriften), Vandenhoeck et Ruprecht, 1970.

5. Appendice

Application au calcul de la valuation de produits de fonctions D_{q^z} de poids ℓp

Nous présentons là un moyen extrêmement rapide par rapport à certains calculs de [BA-B-CN], il nous permet de donner en même temps des formules plus générales que dans loc. cit. Les notations sont celles des paragraphes précédents. Pour tous entiers ℓ *et* p *premiers entre eux et* ≥ 1 et pour tout entier $N \geq 1$ divisible par $p\ell$, formons les quantités suivantes :

$$G^{(n)}(z;q;\psi,\alpha) \overset{\text{DFN}}{=} \prod_{u\in\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle} G^{(N)}(zu;q),\ \ z\in E[N],\ \text{ où }\ n=\frac{N}{\ell p},$$

$$\Delta^{(p\ell)}(q,\psi,\alpha) \overset{\text{DFN}}{=} \Delta(q)^{2p^2\ell^2} \prod_{\substack{u\in\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle\\ u\neq 1}} G^{(p\ell)}(u;q)\,,$$

et
$$A_p(z;\gamma;\langle\alpha\rangle) \overset{\text{DFN}}{=} \frac{1}{p} \prod_{\langle\psi\rangle\subset E[p]} \ \prod_{\varphi\in E[p]/\langle\psi\rangle} D_{q^z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$$

où φ parcourt les points non triviaux de $E[p]/\langle\psi\rangle$ tandis que $\langle\psi\rangle$ décrit les sous-groupes cycliques d'ordre p de $E[p]$ et où z_0 est défini à partir de γ et de φ par la formule (3.3). On pose aussi

$$A_p(\gamma,\langle\alpha\rangle) \overset{\text{DFN}}{=} A_p(\gamma;\gamma,\langle\alpha\rangle)\,.$$

Il vient alors, directement de ces définitions et de la proposition 3.9 (cf. preuve du théorème 3.11), le résultat suivant :

Proposition 5.1. — *Pour tout entier $N \geq 1$, divisible par $p\ell$, et pour tout $z \in E[N]$, $z \notin \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle$, on a*

$$D_{q^z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)^{24N^2} = \frac{G^{(n)}(zz_0^{-1};q,\psi,\alpha)\Delta^{(p\ell)}(q;\psi,\alpha)^{n^2}}{G^{(n)}(z;q,\psi,\alpha)G^{(n)}(z_0^{-1};q,\psi,\alpha)}\,,\ \ \text{où}\ \ n=\frac{N}{p\ell}\,.$$

Le but de cet appendice est d'expliciter, d'une façon simple, les valuations de $D_{q^z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ et $A_p(z;\gamma,\langle\alpha\rangle)$, lorsque z est un point de torsion convenable. Énonçons les résultats principaux de cet appendice :

Théorème 5.2. — *Pour tout $z \in E[N]$ et tout $z_0 \in E[\ell p]$, $z_0 \notin \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle$, posons $z_1 = v_q(z)$, $(z_0)_1 = v_q(z_0)$; supposant alors que ni z, ni zz_0^{-1} n'appartiennent à $\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle$,* *on a*

$$v_q(D_{q^Z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=\frac{1}{2\ell p}d^2_{\langle\alpha\rangle}d^2_{\langle\psi\rangle}\left[B_2\left(\left\{\frac{\ell p}{d_{\langle\alpha\rangle}d_{\langle\psi\rangle}}(z_1-(z_0)_1)\right\}\right)\right.$$
$$\left.-B_2\left(\left\{\frac{\ell p}{d_{\langle\alpha\rangle}d_{\langle\psi\rangle}}z_1\right\}\right)-B_2\left(\left\{\frac{-\ell p}{d_{\langle\alpha\rangle}d_{\langle\psi\rangle}}(z_0)_1\right\}\right)+B_2(0)\right]$$

avec $d_{\langle\psi\rangle}=\mathrm{p.g.c.d.}(v_q(\psi^p)\bmod p,p)$ *et* $d_{\langle\alpha\rangle}=\mathrm{p.g.c.d.}(v_q(\alpha^\ell)\bmod \ell,\ell)$.

Remarque 5.3. — Comme déjà noté dans la remarque 2.11 les entiers $d_{\langle\alpha\rangle}$ et $d_{\langle\psi\rangle}$ ne dépendent que des sous-groupes cycliques $\langle\alpha\rangle$ et $\langle\psi\rangle$ d'ordre respectif ℓ et p.

THÉORÈME 5.4. — *Soit p premier. Pour tout $z\in E[N]$ et tout $y\in E[\ell]$, posons $z_1=v_q(z)$, $y_1=v_q(y)$; supposant alors que ni z^p, ni z^py n'appartiennent à $\langle\alpha\rangle$, on a :*

$$v_q(A_p(z;y,\langle\alpha\rangle))=\frac{p}{2\ell}d^2_{\langle\alpha\rangle}\left[B_2\left(\left\{\frac{\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}}(pz_1+y_1)\right\}\right)-B_2\left(\left\{\frac{\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}}y_1\right\}\right)\right.$$
$$\left.-B_2\left(\left\{\frac{\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}}(z_1+\left[\frac{1}{p}\right]_\ell y_1\right\}\right)+B_2\left(\left\{\frac{\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}}\left[\frac{1}{p}\right]_\ell y_1\right\}\right)\right]$$
$$+\frac{p-1}{2\ell}d^2_{\langle\alpha\rangle}\left[(p+1)B_2(0)-B_2\left(\left\{\frac{\ell p}{d_{\langle\alpha\rangle}}z_1\right\}\right)-pB_2\left(\left\{\frac{\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}}z_1\right\}\right)\right].$$

Démonstration des théorèmes 5.2 et 5.4. — La preuve du théorème 5.2 est similaire à celle du théorème 3.12. En effet, grâce à la proposition 5.1, pour établir le théorème 5.2 il suffit de connaître les valuations des divers termes figurant dans le membre de droite dans l'égalité de la proposition 5.1. En appliquant directement le lemme 2.10, plusieurs fois, aux définitions de $\Delta^{(p\ell)}(q,\psi,\alpha)$ et $G^{(n)}(z;q,\psi,\alpha)$, on obtient :

$$v_q(\Delta^{(p\ell)}(q,\psi,\alpha))=2p\ell\cdot d^2_{\langle\alpha\rangle}d^2_{\langle\psi\rangle}\,. \tag{5.5}$$

D'autre part, remarquons que $G^{(n)}(z;q,\psi,\alpha)=\prod_{j=0}^{\ell-1}G^{(n\ell)}(z\alpha^j;q,\psi)$ donc d'après la proposition 2.9, on a :

$$\frac{1}{12N^2}v_q(G^{(n)}(z;q,\psi,\alpha))=\frac{d^2_{\langle\alpha\rangle}d^2_{\langle\psi\rangle}}{p\ell}B_2\left(\left\{\frac{p\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}d_{\langle\psi\rangle}}z_1\right\}\right)\,. \tag{5.6}$$

Les égalités (5.5) et (5.6) permettent aisément d'en déduire le théorème 5.2.

Démontrons le théorème 5.4. En effet, d'après la définition de $A_p(z;y,\langle\alpha\rangle)$ on a

$$v_p(A_p(z;y,\langle\alpha\rangle))=\sum_{\substack{\langle\psi\rangle\subset E[p]\\ \text{cyclique d'ordre}\,p}}\ \sum_{\varphi\in E[p]/\langle\psi\rangle}v_p(D_q^{\mathbf{Z}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)))\,.$$

Notons que pour ψ unité il y a un seul sous-groupe cyclique d'ordre p dans $E[p]$, car dans ce théorème p est supposé premier, c'est le groupe des racines p-ièmes de 1, et il y en a p possibles lorsque ψ n'est pas une unité. Donc

$$v_p(A_p(z;\gamma,\langle\alpha\rangle)) = \sum_{s=1}^{p-1} v_q(D_q^{\mathbf{Z}}(z,z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)) + p\sum_{s=1}^{p-1} v_q(D_q^{\mathbf{Z}}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle))$$

où pour déterminer z_0 à l'aide de la formule (3.3) on choisit dans la dernière somme (lorsque ψ n'est pas une unité)

$$\varphi = \xi_p^s\,,\ \ 1 \leq s \leq p-1\,,$$

et dans la première somme (lorsque ψ est une unité)

$$\varphi = q^{s/p},\ \ 1 \leq s \leq p-1\,.$$

Alors, à partir du théorème 5.2 et du lemme 2.10, on déduit le théorème 5.4.

Une application est la suivante : supposons l'entier ℓ impair. Soit m un entier compris entre 1 et $\ell-1$, premier avec ℓ. Alors, si (α,γ) forme une base de $E[\ell]$ et si $(\ell, pm+1) = 1$, la quantité

$$Z_p^{(m)} = \prod_{\substack{1\leq t\leq \ell-1 \\ t \text{ premier à } \ell}} A_p(\gamma^{mt};\gamma^t,\langle\alpha\rangle) \tag{5.7}$$

est bien définie.

Introduisons quelques notations.

Définition 5.8. — *Pour α et γ points de $E[\ell]$, on pose $d_{\langle\alpha\rangle} = \text{p.g.c.d.}(v_q(\alpha^\ell) \bmod \ell, \ell)$ et $d_{\langle\gamma\rangle} = \text{p.g.c.d.}(v_q(\gamma^\ell) \bmod \ell, \ell)$. Alors le dénominateur noté d du produit*

$$\frac{1}{d_{\langle\alpha\rangle}} v_q(\gamma^\ell) = \frac{\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}}\gamma_1 \in \frac{1}{d_{\langle\alpha\rangle}}\mathbf{Z},$$

avec $\gamma_1 = v_q(\gamma)$, s'écrit

$$d = \frac{d_{\langle\alpha\rangle}}{\text{p.g.c.d.}(d_{\langle\alpha\rangle}, d_{\langle\psi\rangle})}\,.$$

Pour prouver le corollaire 5.10 ci-dessous, on utilise le résultat suivant avec $N = d$.

Lemme 5.9. — *On a*

$$\sum_{k\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times} B_2\left(\left\{\frac{k}{N}\right\}\right) = \frac{1}{N}B_2(0)\prod_{\substack{\ell_i \text{ premier} \\ \ell_i | N}}(1-\ell_i)\,.$$

On déduit alors du théorème 5.4, pour $z = \gamma^m$:

Corollaire 5.10. — *Soit p premier. On suppose que (α, γ) est une base de $E[\ell]$; les entiers $d_{\langle\alpha\rangle}$ et d sont ceux de la définition 5.8 ci-dessus.*

Alors la valuation q-adique de $Z_p^{(m)}$ est indépendante de l'entier m premier à ℓ, tel que $(\ell, pm+1) = 1$, et est donnée par la formule suivante :

$$\frac{(p-1)(p+1)}{12} d_{\langle\alpha\rangle}^2 \left[1 - (-1)^{\operatorname{card} J} \frac{1}{d^2} \prod_{\ell_i \in J} \ell_i\right] \cdot \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{\ell_i}\right)$$

où I (resp. J) désigne l'ensemble des diviseurs premiers de ℓ (resp. d).

En particulier, soient ℓ et p premiers, tels que $(\ell, p(p+1)) = 1$ et $\ell \geq 3$. Alors, dans la situation régulière où α est une unité de sorte que

$$d_{\langle\gamma\rangle} = 1 \text{ et } d = d_{\langle\alpha\rangle} = \ell\,,$$

et compte tenu de la symétrie $B_2(x) = B_2(1-x)$, la formule du corollaire 5.10 donne

$$v_q\left(\prod_{t=1}^{(\ell-1)/2} A_p(\gamma^t, \langle\alpha\rangle)\right) = \frac{(p-1)(p+1)(\ell+1)(\ell-1)}{24}. \tag{5.11}$$

On retrouve là, pour $\ell \notin \{2,3\}$, l'exposant du "discriminant régulier" $D_{E/F,\mathrm{reg}}$, cf. [BA-RO], Appendice, th. 6.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(17 janvier 1996)