Une “formule de Tanaka” en analyse harmonique et quelques applications

Lucien Chevalier

Résumé : Au moyen d'une version appropriée de la densité de l'intégrale d'aire nous donnons, pour toute fonction f convenable, une écriture de $|f|$ inspirée de la formule de Tanaka de la théorie des martingales, ainsi que quelques exemples d'applications de cette écriture. Nous utilisons exclusivement des méthodes de variable réelle.

Mots-clés : Formule de Tanaka, Densité de l'intégrale d'aire, Opérateurs de Calderón-Zygmund.

Classification : 42B20, 42B25, 42B30.

1. — Introduction

Bien que les résultats exposés ici et les méthodes de démonstration utilisées relèvent uniquement de l'analyse réelle, le point de départ de cet article est une égalité remarquable de la théorie des martingales, connue sous le nom de *formule de Tanaka*.

Rappelons (sans entrer dans le détail des définitions et des hypothèses précises) que cette formule donne une expression explicite de $|M|$ lorsque M est une martingale, sous la forme

$$|M| = \tilde{M} + L,$$

où L est un processus croissant à valeurs ≥ 0, le “temps local (en 0) associé à M”, et $\tilde{M}$ est une nouvelle martingale. La représentation explicite de $\tilde{M}$ comme intégrale stochastique permet de voir que cette nouvelle martingale possède, d'un certain point de vue, les mêmes propriétés que la martingale initiale. En particulier, des résultats classiques de la théorie des martingales montrent que, si M appartient à l'un des espaces H^p ou à BMO, il en est de même pour $\tilde{M}$. D'un autre coté, un des rôles du temps local est de prendre en compte le “défaut de positivité” de la martingale M : Il est identiquement nul si M est positive, et plusieurs propriétés des martingales positives s'étendent aux martingales pour lesquelles on dispose d'un contrôle convenable du temps local (un exemple typique d'une telle extension se trouve dans [2] et [3]). La formule de Tanaka joue un rôle essentiel dans ces généralisations.

Il se trouve qu'il est possible d'obtenir une formule analogue en analyse harmonique, et qu'elle est susceptible d'avoir des applications semblables. Le but de cet article est de démontrer une telle formule, et de donner quelques exemples d'applications. L'étude de l'analogue de l'application (non linéaire !) $M \mapsto \tilde{M}$ fera appel de manière essentielle à la théorie des opérateurs de Calderón-Zygmund, et le rôle du temps local sera tenu par une version adéquate de la *densité de l'intégrale d'aire*. Cette notion a été introduite et étudiée par R. F. Gundy dans [8], puis par R. F. Gundy et M. L. Silverstein dans [9]. Elle constitue l'analogue en analyse du temps local en probabilités, comme le prouvent notamment les résultats de [8], [9] et [3], inspirés par des résultats probabilistes de même nature concernant le temps local. Il y a de nombreuses variantes possibles de cette notion (cf. [1]). Celle qui nous intéresse ici est associée à l' "intégrale d'aire complète", i.e. l'opérateur g_*^2 de Littlewood-Paley. Avant de la définir, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

On désigne par n un entier ≥ 1, fixé une fois pour toutes, et par R_+^{n+1} le demi-espace $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}_+$. Le point courant de R_+^{n+1} est systématiquement noté $z = (x, y)$. Pour tout point $\xi \in \mathrm{R}^n$, on note p_ξ le noyau de Poisson relatif au point ξ, défini dans R_+^{n+1} par

$$p_\xi(z) = \frac{c_n y}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{(n+1)/2}},$$

où c_n désigne la constante de normalisation habituelle.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathrm{R}^n} p_\xi(0,1)|f(\xi)|\, d\xi < +\infty.$$

A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on peut associer son intégrale de Poisson $P(f)$, définie dans R_+^{n+1} par

$$P(f)(z) = \int_{\mathrm{R}^n} p_\xi(z) f(\xi)\, d\xi.$$

A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on associe également la fonction de Littlewood-Paley $g_*^2(f)$, définie dans R^n par

$$g_*^2(f)(\xi) = \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2\, dz.$$

En outre, pour tout $r \in \mathrm{R}$, la fonction $|P(f) - r|$ est sous-harmonique, donc son laplacien au sens des distributions est une mesure positive. On peut donc définir, pour tout $\xi \in \mathrm{R}^n$,

$$D_*^r(f)(\xi) = \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y p_\xi(z) \Delta |P(f) - r|(dz).$$

On peut montrer que, pour toute fonction φ définie dans R, mesurable et à valeurs ≥ 0, on a, pour tout $\xi \in \mathrm{R}^n$,

$$\int_{\mathrm{R}} \varphi(r) D_*^r(f)(\xi) = \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} \varphi(P(f)(z)) y p_\xi(z) |\nabla P(f)(z)|^2 \, dz$$

(cf. [9], où le calcul est fait pour une autre variante de l'intégrale d'aire), ce qui justifie la terminologie employée.

Dans toute la suite, nous considérerons seulement la fonctionnelle D_*^0. On peut montrer que, si $f \in \bigcup_{1 \leq p < +\infty} L^p$, alors $D_*^0(f)$ est à valeurs finies. En revanche il arrive, même pour des fonctions bornées très ordinaires, que $f \in \mathcal{M}$ et que $D_*^0(f) \equiv +\infty$ (par exemple, si $n = 1$ et si f est l'application $x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$). Pour cette raison, nous aurons à considérer le sous-ensemble $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ constitué des fonctions f telles que $D_*^0(f) \not\equiv +\infty$.

A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on associe sa fonction maximale non tangentielle $N(f)$, définie dans R^n par

$$N(f)(\xi) = \sup_{|\xi - x| < y} |P(f)(x, y)|.$$

Les espaces L^p considérés sont relatifs à la mesure de Lebesgue dans R^n, et la norme usuelle dans L^p est notée $\|\cdot\|_p$. Enfin, l'espace H^1 est défini comme l'ensemble des fonctions $f \in L^1$ telles que $\|f\|_{H^1} = \|N(f)\|_1 < +\infty$

2. — Le résultat principal

Le résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_0$, la fonction $D_*^0(f) \in \mathcal{M}$ et la fonction $\tilde{f}$ définie par la "formule de Tanaka"*

$$|f| = \tilde{f} + D_*^0(f) \tag{1}$$

possède les propriétés suivantes :

(i) *Si $f \in L^1$, alors $\tilde{f} \in L^1$.*

(ii) *Si $f \in L^p$, avec $1 < p < +\infty$, alors $\tilde{f} \in L^p$.*

(iii) *Si $f \in H^1$, alors $\tilde{f} \in H^1$.*

(iv) *Si $f \in \mathrm{BMO} \bigcap \mathcal{M}_0$, alors $\tilde{f} \in \mathrm{BMO}$.*

(v) *Si $f \in L^1$, alors, pour tout couple (B_1, B_2) de boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$, l'intégrabilité de $N(f)$ sur B_2 implique l'intégrabilité de $N(\tilde{f})$ sur B_1.*

De plus, si $f \in \bigcup_{1 \leq p < +\infty} L^p$, la fonction $\tilde{f}$ s'obtient explicitement comme image de f par un opérateur de Calderón-Zygmund (dépendant de f, mais dont la norme est contrôlée par une constante dépendant uniquement de la dimension n), dont la nature exacte est décrite dans les propositions 3 et 4 qui suivent.

Démonstration :

La règle du jeu que nous nous imposons est de n'utiliser que des arguments d'analyse réelle; d'autres voies sont possibles (cf. [4]). Le schéma de notre démonstration est le suivant : Nous commencerons par établir la

PROPOSITION 1. — *Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_0$, $D^0_*(f) \in \mathcal{M}$.*

Ensuite, pour prouver que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ effectivement définie par l'égalité (1) possède les propriétés (i) à (v), nous établirons les propositions suivantes :

PROPOSITION 2. — *Pour toute fonction $f \in L^1$, $D^0_*(f) \in L^1$ et $||f||_1 = ||D^0_*(f)||_1$.*

PROPOSITION 3. — *Soit b une application borélienne bornée de R^{n+1}_+ dans R. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathrm{R}^n)$,*

$$\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} y\, |b(z)\nabla p_\xi(z) \nabla P(f)(z)|\; dz < +\infty$$

pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, et si on pose

$$T_b(f)(\xi) = 2\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} y\, b(z)\nabla p_\xi(z)\nabla P(f)(z)\, dz, \tag{2}$$

on définit une application linéaire $T_b : \mathcal{C}^\infty_0(\mathrm{R}^n) \longrightarrow L^1_{loc}$ qui est un opérateur de Calderón-Zygmund. Cet opérateur est associé au noyau symétrique K_b défini dans $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \setminus D$, où D désigne la diagonale de $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$, par

$$K_b(\xi, \xi') = 2\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} y\, b(z)\nabla p_\xi(z)\nabla p_{\xi'}(z)\, dz. \tag{3}$$

De façon plus précise, le noyau K_b vérifie les estimations suivantes :

$$|K_b(\xi,\xi')| \le 2||b||_\infty \int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} y\, |\nabla p_\xi(z)||\nabla p_{\xi'}(z)|\, dz \le \frac{C||b||_\infty}{|\xi - \xi'|^n} \tag{4}$$

et, pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} &|K_b(\xi,\xi') - K_b(\xi,\xi'')| \\ &\quad \le \int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} y\, |\nabla p_\xi(z)||\nabla (p_{\xi'}(z) - p_{\xi''}(z))|\, dz \le \frac{C||b||_\infty |\xi' - \xi''|^\alpha}{(1-\alpha)|\xi - \xi'|^{n+\alpha}}, \end{aligned} \tag{5}$$

si $|\xi' - \xi''| < \frac{1}{2}|\xi - \xi'|$, *où* C *est un nombre qui ne dépend que de la dimension* n.

Enfin, on a $T_b(\mathbf{1}) = T_b^*(\mathbf{1}) = 0$.

PROPOSITION 4. — *Pour toute fonction* $f \in \bigcup_{1\le p<+\infty} L^p$ *on a, avec les notations précédemment introduites,*

$$T_{\mathrm{sgn}(P(f))}\,(f) = \tilde{f}.$$

PROPOSITION 5. — *Soit* T *un opérateur de Calderón-Zygmund vérifiant la condition* $T^*(\mathbf{1}) = 0$, *et soit* $f \in L^1$ *telle que* $T(f) \in L^1$. *Pour tout couple* (B_1, B_2) *de boules ouvertes de* R^n *telles que* $\overline{B_1} \subset B_2$, *l'intégrabilité de* $N(f)$ *sur* B_2 *implique l'intégrabilité de* $N(T(f))$ *sur* B_1.

A partir de ces quatre derniers résultats, la démonstration des assertions (i) à (v) du Théorème 1 est immédiate : La propriété (i) est une conséquence triviale de l'égalité (1) et de la proposition 2; les propriétés (ii), (iii) et (iv) résultent des propositions 3 et 4, grâce aux généralisations des méthodes classiques d'analyse réelle de A.P. Calderón et A. Zygmund (cf. [10]) (l'assertion concernant BMO est aussi une conséquence du théorème 4 de [1]). Enfin, la propriété (v) découle des quatre propositions précédentes, qu'il nous suffit donc de démontrer.

Démonstration de la Proposition 1 :

Soient $f \in \mathcal{M}_0$ et $u = P(f)$. En utilisant le théorème de Fubini et les propriétés de convolution du noyau de Poisson, on obtient facilement l'égalité $||D_*^0(f)||_{\mathcal{M}} = I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \int_{y\ge 1} y p_0(x, 1+y)\Delta|u|(dz)$$

et

$$I_2 = \int_{y<1} y p_0(x, 1+y)\Delta|u|(dz).$$

Soit ξ_0 un point tel que $D_*^0(f)(\xi_0)$ soit fini. Si $y \ge 1$, le quotient $p_0(x, 1+y)/p_{\xi_0}(x,y)$ reste majoré par un nombre C indépendant de (x,y), et par suite $I_1 \le C D_*^0(f)(\xi_0) < +\infty$. Pour montrer que $I_2 < +\infty$, il suffit de prouver l'existence d'un nombre C tel que, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et tout $\delta \in]0,1]$, on ait

$$\int_{y\ge\varepsilon} y p_0(x, 1+y)\Delta u_\delta \, dz \le C,$$

où $u_\delta(z) = \sqrt{u^2(z) + \delta^2}$. Pour cela, on fixe un nombre $R > 0$; on désigne par B_R la boule de R^n centrée en 0 et de rayon R, et par $D_{R,\varepsilon}$ le produit $B_R \times [\varepsilon, 1]$, puis on calcule l'intégrale sur $D_{R,\varepsilon}$ au moyen du théorème de Green. On obtient ainsi

$$\int_{D_{R,\varepsilon}} yp_0(x,1+y)\Delta u_\delta(z)\,dz = J_1 + J_2 + J_3,$$

où

$$J_1 = \int_{D_{R,\varepsilon}} u_\delta(z)\frac{\partial}{\partial y}p_0(x,1+y)\,dz,$$

$$\begin{aligned} J_2 = &\int_{B_R\times\{\varepsilon\}} \left(yp_0(x,1+y)\frac{\partial}{\partial y}u_\delta(z) - u_\delta(z)\frac{\partial}{\partial y}(yp_0(x,1+y))\right)\,dx \\ &+ \int_{B_R\times\{1\}} \left(yp_0(x,1+y)\frac{\partial}{\partial y}u_\delta(z) - u_\delta(z)\frac{\partial}{\partial y}(yp_0(x,1+y))\right)\,dx \end{aligned}$$

et

$$J_3 = \int_{\partial B_R\times[\varepsilon,1]} \left(yp_0(x,1+y)\frac{\partial}{\partial y}u_\delta(z) - u_\delta(z)\frac{\partial}{\partial y}(yp_0(x,1+y))\right)\,\sigma_R(dx)dy,$$

où σ_R désigne la mesure de surface sur la sphère ∂B_R.

Nous posons $v = P(|f|)$, et nous désignerons par C un nombre variable, dépendant uniquement de la dimension n. En utilisant les inégalités bien connues $|y\nabla p_\xi(z)| \leq (n+1)p_\xi(z)$ et $|y\nabla u(z)| \leq (n+1)v(z)$, on obtient facilement les estimations

$$|J_1| \leq \int_{D_{R,\varepsilon}} \left|u_\delta(z)\frac{\partial}{\partial y}p_0(x,1+y)\right|\,dz \leq C(1+v(0,1))$$

et

$$\begin{aligned} |J_2| \leq &\int_{B_R\times\{a\}} \left|yp_0(x,1+y)\frac{\partial}{\partial y}u_\delta(z)\right| + \left|u_\delta(z)\frac{\partial}{\partial y}(yp_0(x,1+y))\right|\,dx \\ &\leq C(1+v(0,1)), \end{aligned}$$

pour tout $a \in [\varepsilon,1]$. Par conséquent J_1 et J_2 ont une limite quand R tend vers l'infini, dont la valeur absolue est majorée par $C(1+\|f\|_{\mathcal{M}})$ (car $\|f\|_{\mathcal{M}} = v(0,1)$). Donc J_3 a aussi une limite quand R tend vers l'infini; mais on a

$$|J_3| \leq \frac{C}{R^{n+1}}\int_{\partial B_R} (v(x,\varepsilon)+\delta)\,\sigma_R(dx),$$

et (parce que $f \in \mathcal{M}$) $\liminf_{R\to+\infty} R^{-n-1}\int_{\partial B_R} v(x,\varepsilon)\,\sigma_R(dx) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent J_3 tend vers 0 quand R tend vers l'infini, ce qui achève la preuve de la propriété voulue.

Démonstration de la Proposition 2 :

En utilisant la définition de $D^0_*(f)$ et le théorème de Fubini, on est ramené à prouver l'égalité

$$\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} y\Delta|P(f)|(dz) = \int_{\mathrm{R}^n} |f(x)|\,dx,$$

qui est essentiellement connue; on peut par exemple, au moyen d'arguments standards d'approximation, se ramener à une application classique du théorème de Green (cf. [12], p. 87)

Démonstration de la Proposition 3 :

Pour démontrer que l'intégrale

$$\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} y|b(z)\nabla p_\xi(z)\nabla P(f)(z)|\,dz$$

est finie pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, il suffit de montrer que, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathrm{R}^n)$, à valeurs ≥ 0, on a

$$\iint_{\mathrm{R}^{n+1}_+\times\mathrm{R}^n} y|\nabla p_\xi(z)\nabla P(f)(z)|h(\xi)\,dzd\xi < +\infty. \tag{6}$$

En utilisant la majoration standard $y|\nabla p_\xi(z)| \leq (n+1)p_\xi(z)$ et le théorème de Fubini, on voit qu'il suffit de prouver que

$$\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} |\nabla P(f)(z)|P(h)(z)\,dz < +\infty.$$

Or, puisque $f \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathrm{R}^n)$, on a $|\nabla P(f)(z)| \leq C\min(1, y^{-n-1})$ pour tout $z \in \mathrm{R}^{n+1}_+$, où C est un nombre indépendant de z. Par suite

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} |\nabla P(f)(z)|P(h)(z)\,dz\\ &\qquad \leq C\left(\int_0^{+\infty}\min(1, y^{-n-1})\,dy\right)\left(\int_{\mathrm{R}^n} P(h)(z)\,dx\right) \leq 2C\|h\|_1 < +\infty,\end{aligned}$$

ce qui prouve (6).

L'égalité (2) définit donc bien une application linéaire $T_b : \mathcal{C}^\infty_0(\mathrm{R}^n) \longrightarrow L^1_{loc}$. Nous allons maintenant montrer que cet opérateur se prolonge continuement à L^2. Quelles que soient les fonctions f et $h \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathrm{R}^n)$, la propriété de finitude (6) permet d'utiliser le théorème de Fubini pour obtenir l'égalité

$$\int_{\mathrm{R}^n} T_b(f)(\xi)h(\xi)\,d\xi = 2\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} yb(z)\nabla P(f)(z)\nabla P(h)(z)\,dz.$$

Par suite,

$$\left|\int_{\mathrm{R}^n} T_b(f)(\xi)h(\xi)\,d\xi\right| \le 2\|b\|_\infty \left(\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y|\nabla P(f)(z)|^2\,dz\right)^{1/2} \left(\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y|\nabla P(h)(z)|^2\,dz\right)^{1/2}$$

$$= 2\|b\|_\infty \|g(f)\|_2 \|g(h)\|_2,$$

où $g(k)$ désigne la fonction g de Littlewood-Paley associée à la fonction k. Il en résulte qu'on a, en vertu d'inégalités bien connues (cf. [12], p. 83),

$$\|T_b(f)\|_2 \le \|b\|_\infty \|f\|_2$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, d'où le résultat.

Remarques. — L'inégalité que nous venons de prouver est la meilleure possible, car si $b = \mathbf{1}$, alors $T_b(f) = f$ (c'est une conséquence de nos résultats).

D'autre part, on peut également obtenir, en procédant de la même manière, le fait que, pour tout $p \in]1, +\infty[$,

$$\|T_b(f)\|_p \le C_p \|b\|_\infty \|f\|_p$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, où C_p ne dépend que de n et p. Ceci permet évidemment de prolonger T_b à L^p sans utiliser (apparemment) la théorie de Calderón-Zygmund. Néanmoins, nous aurons besoin de cette théorie pour étudier l'action de T_b sur L^1 et sur H^1. D'autre part l'inégalité ci-dessus repose sur les estimations L^p concernant la fonction g de Littlewood-Paley, qui sont elles-mêmes basées sur la théorie des intégrales singulières à valeurs vectorielles.

Nous allons maintenant montrer que le noyau K_b défini par l'égalité (3) vérifie les estimations (4) et (5).

Preuve de l'estimation (4) *:*

Soit $(\xi, \xi') \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \setminus D$. En utilisant l'inégalité évidente $y|\nabla p_\xi(z)| \le (n + 1)p_\xi(z)$, le théorème de Fubini et les propriétés du noyau de Poisson relativement à la convolution, on obtient l'inégalité

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y|\nabla p_\xi(z)\nabla p_{\xi'}(z)|dz \le 2c_n(n+1)^2 \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(|\xi-\xi'|^2+4y^2)^{(n+1)/2}} = \frac{C}{|\xi'-\xi|^n},$$

où C est une constante qui ne dépend que de n. Ceci prouve donc l'inégalité (4).

Preuve de l'estimation (5) *:*

Cette estimation est une conséquence immédiate du fait que, si $|\xi' - \xi''| < \frac{1}{2}|\xi - \xi'|$, on a les deux inégalités

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y\,|\nabla_x p_\xi(z)||\nabla_x(p_{\xi'}(z) - p_{\xi''}(z))|\,dz \leq C\frac{|\xi' - \xi''|}{|\xi - \xi'|^{n+1}} \tag{7}$$

et

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y\left|\frac{\partial}{\partial y}p_\xi(z)\right|\left|\frac{\partial}{\partial y}(p_{\xi'}(z) - p_{\xi''}(z))\right|dz \leq C\frac{|\xi' - \xi''|}{|\xi - \xi'|^{n+1}}\left(1 + \ln\left(\frac{|\xi - \xi'|}{|\xi' - \xi''|}\right)\right), \tag{8}$$

(où C ne dépend que de n) que nous allons démontrer.

Commençons par prouver (7). Pour alléger les notations nous posons, pour tout $y > 0$ et tout $u \geq 0$,

$$\varphi_y(u) = \frac{1}{(u^2 + y^2)^{(n+3)/2}}.$$

Nous avons alors, pour tout $z = (x, y) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$,

$$|\nabla_x p_\xi(z)| = (n+1)c_n y|x - \xi|\varphi_y(|x - \xi|) \tag{9}$$

et

$$\begin{aligned} |\nabla_x(p_{\xi'}(z) - p_{\xi''}(z))| &\leq (n+1)c_n y|\xi' - \xi''|\varphi_y(|x - \xi'|) \\ &+(n+1)|x - \xi'||(\varphi_y(|x - \xi'|) - \varphi_y(|x - \xi''|))|. \end{aligned} \tag{10}$$

D'autre part on a, si $0 \leq u \leq v$,

$$\begin{aligned} \varphi_y(u) - \varphi_y(v) &= \frac{(v^2 + y^2)^{(n+3)/2} - (u^2 + y^2)^{(n+3)/2}}{(u^2 + y^2)^{(n+3)/2}(v^2 + y^2)^{(n+3)/2}} \\ &\leq (n+3)\frac{(v - u)v}{(u^2 + y^2)^{(n+3)/2}(v^2 + y^2)}, \end{aligned} \tag{11}$$

et par suite

$$v(\varphi_y(u) - \varphi_y(v)) \leq (n+3)\frac{(v - u)}{(u^2 + y^2)^{(n+3)/2}}$$

On a donc, dans tous les cas,

$$\begin{aligned} &|(x - \xi')(\varphi_y(|x - \xi'|) - \varphi_y(|x - \xi''|))| \\ &\quad\leq (n+3)|\xi' - \xi''|(\varphi_y(|x - \xi'|) + \varphi_y(|x - \xi''|) \end{aligned} \tag{12}$$

Par suite, il résulte de (9), (10) et (12) qu'il existe un nombre C, dépendant uniquement de la dimension n, tel que

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y\,|\nabla_x p_\xi(z)\nabla_x(p_{\xi'}(z) - p_{\xi''}(z))|\,dz \leq C|\xi' - \xi''|(I(\xi, \xi') + I(\xi, \xi'')), \tag{13}$$

où
$$I(\xi,\xi') = \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y^3|x-\xi|\varphi_y(|x-\xi|)\varphi_y(|x-\xi'|)v\,dz.$$
Pour évaluer $I(\xi,\xi')$, nous écrivons $I(\xi,\xi') = I_1(\xi,\xi') + I_2(\xi,\xi')$, où
$$I_1(\xi,\xi') = \int_{\{|x-\xi'|<\frac{1}{2}|\xi-\xi'|\}} y^3|x-\xi|\varphi_y(|x-\xi|)\varphi_y(|x-\xi'|)\,dz$$
et
$$I_2(\xi,\xi') = \int_{\{|x-\xi'|\geq\frac{1}{2}|\xi-\xi'|\}} y^3|x-\xi|\varphi_y(|x-\xi|)\varphi_y(|x-\xi'|)\,dz.$$
Si $|x-\xi'| < \frac{1}{2}|\xi-\xi'|$, on a $|x-\xi| \geq \frac{1}{2}|\xi-\xi'|$, et par conséquent $\varphi_y(|x-\xi|) \leq 2^{n+3}\varphi_y(|\xi-\xi'|)$. Par suite
$$I_1(\xi,\xi') \leq 2^{n+3}\int_0^{+\infty} y^3 J_y(\xi,\xi')\varphi_y(|\xi-\xi'|)\,dy,$$
où
$$J_y(\xi,\xi') = \int_{\mathrm{R}^n} |x-\xi|\varphi_y(|x-\xi'|)\,dx.$$
Trivialement,
$$J_y(\xi,\xi') \leq \int_{\mathrm{R}^n} |u|\varphi_y(|u|)\,du + |\xi'-\xi''|\int_{\mathrm{R}^n}\varphi_y(|u|)\,du \leq C\left(\frac{1}{y^2}+\frac{|\xi-\xi'|}{y^3}\right),$$
où C ne dépend que de la dimension n. On en déduit facilement que
$$I_1(\xi,\xi') \leq \frac{C}{|\xi-\xi'|^{(n+1)}},$$
où C ne dépend que de n.

Passons à l'intégrale $I_2(\xi,\xi')$. Si $|x-\xi'| \geq \frac{1}{2}|\xi-\xi'|$, on a $\varphi_y(|x-\xi'|) \leq 2^{n+3}\varphi_y(|\xi-\xi'|)$. Par conséquent, en reprenant les calculs effectués précédemment, on obtient pour $I_2(\xi,\xi')$ une estimation du même type que celle obtenue pour $I_1(\xi,\xi')$. Les mêmes estimations étant vraies aussi si on remplace ξ' par ξ'', on a donc montré que
$$I(\xi,\xi') + I(\xi,\xi'') \leq C\left(\frac{1}{|\xi-\xi'|^{(n+1)}}+\frac{1}{|\xi-\xi''|^{(n+1)}}\right), \tag{14}$$
où C ne dépend que de n. Enfin, comme les quantités $|\xi-\xi'|$ et $|\xi-\xi''|$ sont du même ordre de grandeur en vertu de la condition $|\xi'-\xi''| < \frac{1}{2}|\xi-\xi'|$, on voit que les inégalités (13) et (14) donnent l'estimation (7).

Passons à la preuve de l'estimation (8). Nous fixons ξ, ξ' et $\xi'' \in \mathrm{R}^n$ vérifiant $0 < |\xi'-\xi''| < |\xi-\xi'|/2$ et nous posons, pour tout $z = (x,y) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$, $d(z) =$

$(|x-\xi|^2+y^2)^{1/2}$, $d'(z)=(|x-\xi'|^2+y^2)^{1/2}$ et $d''(z)=(|x-\xi''|^2+y^2)^{1/2}$. Nous avons alors, pour tout $z\in \mathrm{R}_+^{n+1}$,

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_{\xi'}(z)-p_{\xi''}(z)) = c_n(d'(z)^{-n-1}-d''(z)^{-n-1}-(n+1)y^2(d'(z)^{-n-3}-d''(z)^{-n-3})).$$

En utilisant l'inégalité (11) (avec $n-2$ au lieu de n), on voit que, pour tout $z\in \mathrm{R}_+^{n+1}$,

$$\begin{aligned}&|d'(z)^{-n-1}-d''(z)^{-n-1}|\\ &\quad\le (n+1)|\xi'-\xi''|(|x-\xi''|d'(z)^{-n-1}d''(z)^{-2}+|x-\xi'|d''(z)^{-n-1}d'(z)^{-2}).\end{aligned}$$

En raisonnant de la même manière et en utilisant l'inégalité triviale $y^2\le \min(d'(z)^2,d''(z)^2)$, on obtient également

$$\begin{aligned}&y^2|d'(z)^{-n-3}-d''(z)^{-n-3}|\\ &\quad\le (n+3)|\xi'-\xi''|(|x-\xi''|d'(z)^{-n-1}d''(z)^{-2}+|x-\xi'|d''(z)^{-n-1}d'(z)^{-2}).\end{aligned}$$

Par suite, il existe un nombre C, dépendant uniquement de la dimension n, tel que, pour tout $z\in \mathrm{R}_+^{n+1}$,

$$y\left|\frac{\partial}{\partial y}p_\xi(z)\right|\left|\frac{\partial}{\partial y}(p_{\xi'}(z)-p_{\xi''}(z))\right|\le C|\xi'-\xi''|A(z,\xi,\xi',\xi''), \tag{15}$$

où

$$A(z,\xi,\xi',\xi'')=yd(z)^{-n-1}(|x-\xi''|d'(z)^{-n-1}d''(z)^{-2}+|x-\xi'|d''(z)^{-n-1}d'(z)^{-2}).$$

Pour tout $z\in \mathrm{R}_+^{n+1}$ et tout $r>0$, nous désignerons par $B_+(z,r)$ l'intersection avec R_+^{n+1} de la boule de R^{n+1} centrée en z et de rayon r. En vue de majorer l'intégrale $\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}}A(z,\xi,\xi',\xi'')\,dz$, nous introduisons les ensembles suivants :

$$E_1=\mathrm{R}_+^{n+1}\setminus B_+((\xi,0),2|\xi-\xi'|)$$

$$E_2=B_+((\xi,0),|\xi-\xi'|/3)$$
$$E_3=B_+((\xi',0),4|\xi'-\xi''|/5)$$
$$E_4=B_+((\xi'',0),4|\xi'-\xi''|/5)$$
$$E_5=(B_+(((\xi'+\xi'')/2,0),4|\xi'-\xi|)\setminus B_+(((\xi'+\xi'')/2,0),3|\xi'-\xi''|/5))\setminus E_2.$$

On vérifie facilement que $\mathrm{R}_+^{n+1}=\bigcup_{i=1}^{i=5}E_i$, et par suite il suffit de majorer convenablement les cinq intégrales $\int_{E_i}A(z,\xi,\xi',\xi'')\,dz$. Nous désignerons par C un nombre dépendant uniquement de la dimension n, dont la valeur peut changer de place en place.

Pour tout $z \in E_1$, on a $d'(z) \geq d(z)/2$, $d''(z) \geq d(z)/4$, $|x-\xi'| \leq 3d(z)/4$ et $|x-\xi''| \leq 7d(z)/4$. Par suite, $A(z,\xi,\xi',\xi'') \leq Cyd(z)^{-2n-3}$; on obtient donc facilement

$$\int_{E_1} A(z,\xi,\xi',\xi'')\,dz \leq \frac{C}{|\xi-\xi'|^{n+1}}. \tag{16}$$

Pour tout $z \in E_2$, on a $d'(z) \geq 2|\xi-\xi'|/3$, $d''(z) \geq |\xi-\xi'|/6$, $|x-\xi'| \leq 4|\xi-\xi'|/3$ et $|x-\xi''| \leq 11|\xi-\xi'|/6$. Par conséquent $A(z,\xi,\xi',\xi'') \leq C|\xi-\xi'|^{-n-2}yd(z)^{-n-1}$, d'où on déduit facilement

$$\int_{E_2} A(z,\xi,\xi',\xi'')\,dz \leq \frac{C}{|\xi-\xi'|^{n+1}}. \tag{17}$$

Pour tout $z \in E_3$, on a $d(z) \geq 2|\xi-\xi'|/5$, $d''(z) \geq |\xi'-\xi''|/5$, $|x-\xi'| \leq 4|\xi'-\xi''|/5$ et $|x-\xi''| \leq 9|\xi'-\xi''|/5$. Par suite $A(z,\xi,\xi',\xi'') \leq C|\xi-\xi'|^{-n-1}y(|\xi'-\xi''|^{-1}d'(z)^{-n-1}v + |\xi'-\xi''|^{-n}d'(z)^{-2})$, et donc

$$\int_{E_3} A(z,\xi,\xi',\xi'')\,dz \leq \frac{C}{|\xi-\xi'|^{n+1}}. \tag{18}$$

Un calcul similaire montre que

$$\int_{E_4} A(z,\xi,\xi',\xi'')\,dz \leq \frac{C}{|\xi-\xi'|^{n+1}}. \tag{19}$$

Enfin, pour tout $z \in E_5$, on a $d(z) \geq |\xi-\xi'|/3$. D'autre part, si on pose $\zeta = (\xi'+\xi'')/2$, on a $|z-\zeta|/6 \leq d'(z) \leq 11|z-\zeta|/6$ et $|x-\xi'| \leq 11|z-\zeta|/6$, ainsi que les inégalités obtenues en remplaçant dans les précédentes d' par d'' et ξ' par ξ''. Par suite $A(z,\xi,\xi',\xi'') \leq C|\xi-\xi'|^{-n-1}y|z-\zeta|^{-n-2}$, et par conséquent

$$\int_{E_5} A(z,\xi,\xi',\xi'')\,dz \leq \frac{C}{|\xi-\xi'|^{n+1}}\left(1+\ln\left(\frac{|\xi-\xi'|}{|\xi'-\xi''|}\right)\right). \tag{20}$$

Il est clair que l'estimation (8) résulte de l'inégalité (15) et des inégalités (16) à (20). Par conséquent, la preuve de la condition de Lipschitz (5) est achevée.

Montrons maintenant que l'opérateur T_b est associé au noyau K_b défini par (5). Soient $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, S le support de f, $\xi \in \mathrm{R}^n \setminus S$ et δ la distance de ξ à S. En utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité (4), on obtient facilement

$$\iint_{\mathrm{R}_+^{n+1}\times\mathrm{R}^n} y\,|f(\xi')||b(z)||\nabla p_\xi(z)||\nabla p_{\xi'}(z)|\,dzd\xi' \leq C\|b\|_\infty\|f\|_1\delta^{-n} < +\infty.$$

On peut donc écrire, pour tout $\xi \in \mathrm{R}^n \setminus S$,

$$T_b(\xi) = \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} yb(z)\nabla p_\xi(z)\left(\int_{\mathrm{R}^n} f(\xi')\nabla p_{\xi'}(z)\,d\xi'\right)dz$$

$$= \int_{\mathrm{R}^n} f(\xi') \left(\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} yb(z) \nabla p_\xi(z) \nabla p_{\xi'}(z)\, dz \right) d\xi' = \int_{\mathrm{R}^n} f(\xi') K_b(\xi, \xi')\, d\xi',$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il nous reste à montrer que $T_b^*(\mathbf{1}) = 0$, ce qui signifie que $\int_{\mathrm{R}^n} T_b(a)(\xi)\, d\xi = 0$ pour tout atome a. Soit $k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, telle que $\int_{\mathrm{R}^n} k(x)\, dx = 1$; posons, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, $k_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n} k(\xi/\varepsilon)$ et $a_\varepsilon = k_\varepsilon * a$. Il est clair que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ et $\int_{\mathrm{R}^n} a_\varepsilon(\xi)\, d\xi = 0$; il est également clair que $a_\varepsilon \to a$ dans L^2 quand $\varepsilon \to 0$. Par suite, l'opérateur T_b étant continu dans L^2, on voit qu'il suffit de prouver que $\int_{\mathrm{R}^n} T_b(a)(\xi)\, d\xi = 0$ pour toute fonction $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ d'intégrale nulle.

Soient donc a une telle fonction et B une boule de R^n contenant le support de a; nous écrivons $\int_{\mathrm{R}^n} T_b(a)(\xi)\, d\xi = I_1 + I_2$, où $I_1 = \int_{2B} T_b(a)(\xi)\, d\xi$ et $I_2 = \int_{(2B)^c} T_b(a)(\xi)\, d\xi$. Comme $\int_{\mathrm{R}^n} \nabla p_\xi(z)\, d\xi = 0$, la propriété à établir résulte des deux égalités

$$I_1 = \int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} yb(z) \nabla P(a)(z) \left(\int_{2B} \nabla p_\xi(z)\, d\xi \right) dz \tag{21}$$

et

$$I_2 = \int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} yb(z) \nabla P(a)(z) \left(\int_{(2B)^c} \nabla p_\xi(z)\, d\xi \right) dz, \tag{22}$$

que nous allons démontrer.

Pour l'intégrale I_1, nous utilisons la définition de l'opérateur T_b au moyen de l'égalité (2); la propriété de finitude (6), utilisée avec $f = a$ et $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ telle que $h \geq \chi_{2B}$, permet d'appliquer le théorème de Fubini, qui donne immédiatement le résultat voulu.

Pour la seconde intégrale, nous utilisons la représentation au moyen du noyau K_b, puis le fait que la fonction a est d'intégrale nulle. En désignant par ξ'' le centre de la boule B, on obtient ainsi

$$I_2 = \int_{(2B)^c} \left(\int_{\mathrm{R}^n} a(\xi')(K_b(\xi, \xi') - K_b(\xi, \xi''))\, d\xi' \right) d\xi.$$

En utilisant la condition de Lipschitz (5), on justifie aisément l'utilisation du théorème de Fubini et on obtient

$$I_2 = \int_B a(\xi') \left(\int_{(2B)^c} (K_b(\xi, \xi') - K_b(\xi, \xi''))\, d\xi \right) d\xi'$$

$$= \int_B a(\xi') \left(\int_{(2B)^c} \left(\int_{\mathrm{R}^{n+1}_+} yb(z) \nabla p_\xi(z) (\nabla p_{\xi'}(z) - \nabla p_{\xi''}(z))\, dz \right) d\xi \right) d\xi'.$$

En utilisant les estimations (7) et (8), on obtient facilement le fait que

$$\iiint_{(2B)^c\times B\times \mathrm{R}_+^{n+1}} vy\, |b(z)\nabla p_\xi(z)(\nabla p_{\xi'}(z)-\nabla p_{\xi''}(z))|\; d\xi\, d\xi'\, dz < +\infty.$$

On peut donc, en appliquant une nouvelle fois le théorème de Fubini, obtenir l'égalité

$$I_2 = \int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} \left(\int_{(2B)^c} \nabla p_\xi(z)\, d\xi\right)\left(\int_B (\nabla p_{\xi'}(z)-\nabla p_{\xi''}(z))a(\xi')\, d\xi'\right)\, dz.$$

Comme enfin

$$\int_B (\nabla p_{\xi'}(z)-\nabla p_{\xi''}(z))a(\xi')\, d\xi' = \int_B \nabla p_{\xi'}(z)a(\xi')\, d\xi' = \nabla P(a)(z)$$

pour tout $z\in \mathrm{R}_+^{n+1}$, l'égalité (22) est établie.

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.

Remarque. — Le noyau K_b ne vérifie pas la condition de Lipschitz plus forte

$$|K_b(\xi,\xi')-K_b(\xi,\xi'')| \le \frac{C\|b\|_\infty|\xi'-\xi''|}{|\xi-\xi'|^{n+1}},$$

si $|\xi'-\xi''| < \frac{1}{2}|\xi-\xi'|$, C désignant un nombre dépendant uniquement de la dimension n. En effet un argument de dualité montre que cette propriété est équivalente à

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y\, |\nabla p_\xi(z)\nabla(p_{\xi'}(z)-p_{\xi''}(z))|\; dz \le C\frac{|\xi'-\xi''|}{|\xi-\xi'|^{n+1}}$$

si $|\xi'-\xi''| < \frac{1}{2}|\xi-\xi'|$, ce qui implique

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y\, \left|\frac{\partial}{\partial y}p_\xi(z)\frac{\partial}{\partial y}(p_{\xi'}(z)-p_{\xi''}(z))\right|\; dz \le C\frac{|\xi'-\xi''|}{|\xi-\xi'|^{n+1}}$$

si $|\xi'-\xi''| < \frac{1}{2}|\xi-\xi'|$. De cette propriété on déduit, en utilisant le lemme de Fatou, que

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y\, \left|\frac{\partial}{\partial y}p_\xi(z)\frac{\partial}{\partial \xi_i'}\frac{\partial}{\partial y}(p_{\xi'}(z)-p_{\xi''}(z))\right|\; dz \le C\frac{1}{|\xi-\xi'|^{n+1}} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

pour tout $(\xi,\xi')\in \mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n\setminus D$. Or ceci est absurde, car il est facile de vérifier que

$$\int_{\mathrm{R}_+^{n+1}} y\, \left|\frac{\partial}{\partial y}p_\xi(z)\frac{\partial}{\partial \xi_i'}\frac{\partial}{\partial y}(p_{\xi'}(z)-p_{\xi''}(z))\right|\; dz = +\infty \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

pour tout $(\xi, \xi') \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \setminus D$.

Le facteur logarithmique qui apparait dans l'estimation (8) ne peut donc pas être supprimé.

Démonstration de la proposition 4:

Soient p un nombre réel ≥ 1, $f \in L^p$ et $u = P(f)$. L'idée de base est d'utiliser le théorème de Green; mais il n'est pas, pour plusieurs raisons évidentes, directement applicable à notre situation, et c'est pourquoi un peu de travail est nécessaire. Nous suivrons le schéma suivant:

Nous fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et nous désignons par $\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}$ l'ensemble des points $(x, y) \in \mathrm{R}_+^{n+1}$ tels que $y > \varepsilon$. La première étape de notre démonstration consiste à prouver que, un point $\xi \in \mathrm{R}^n$ étant fixé, on a l'égalité

$$\int_{\mathrm{R}^n} p_\xi(x,\varepsilon)|u(x,\varepsilon)|\,dx = 2\int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon)\mathrm{sgn}(u(z))\nabla p_\xi(z)\nabla u(z)\,dz + \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon)p_\xi(z)\Delta|u|(dz). \tag{23}$$

Pour démontrer l'égalité (23), nous commencerons par prouver un résultat similaire concernant une version régularisée de $|u|$. Ceci nécessite l'introduction de quelques notations. Nous considérons une fonction k de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur R^{n+1}, à valeurs ≥ 0, à support inclus dans la boule unité et telle que $\int_{\mathrm{R}^{n+1}} k(z)dz = 1$. Pour tout $\delta \in]0, \varepsilon/2]$, et tout $z \in \mathrm{R}^{n+1}$, nous posons $k_\delta(z) = \delta^{-n}k(z/\delta)$. Nous définissons ensuite les fonctions u_δ dans $\mathrm{R}_{\varepsilon/2}^{n+1}$ en posant $u_\delta(z) = k_\delta * |u|(z)$. Les fonctions u_δ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathrm{R}_{\varepsilon/2}^{n+1}$ et sous-harmoniques, puisque $\Delta u_\delta = k_\delta * \Delta|u|$ sur cet ensemble. Nous avons besoin de quelques estimations simples concernant ces fonctions et leurs gradients. Nous posons $v = P(|f|)$, et nous désignons par C un réel variable, dépendant uniquement de n, p, f, ε et ξ. On a évidemment $u_\delta \leq k_\delta * v$. Si on convient que $\mathrm{sgn}(0) = 0$, le gradient au sens des distributions de $|u|$ s'identifie à la fonction $\mathrm{sgn}(u)\nabla u$, et par suite $|\nabla u_\delta| \leq k_\delta * |\nabla u|$. De plus, en majorant $|\nabla u|$ de manière standard et en utilisant l'inégalité $v(z) \leq Cy^{-n/p}$, on voit que $|\nabla u(z)| \leq Cy^{-1-n/p}$ pour tout $z \in \mathrm{R}_+^{n+1}$. D'autre part, si g est une fonction positive dans R_+^{n+1} telle que $g(z') \leq Cg(z)$ pour tout $z \in \mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}$ et tout z' vérifiant $|z-z'| \leq \varepsilon/2$, on a évidemment $k_\delta * g(z) \leq Cg(z)$ pour tout $z \in \mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}$ puisque $\delta \leq \varepsilon/2$. Ceci s'applique en particulier aux fonctions $y \mapsto y^\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{R}$), p_ξ et v, ainsi qu'aux produits de ces fonctions.

De toutes ces remarques on déduit qu'on a, pour tout $z \in \mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}$ et tout $\delta \in]0, \varepsilon/2]$,

$$p_\xi(z)u_\delta(z) \leq C|z|^{-n-1}y^{1-n/p} \quad \text{et} \quad |\nabla(p_\xi u_\delta)|(z) \leq C|z|^{-n-1}y^{-n/p}.$$

Comme $y|\nabla p_\xi(z)\nabla u_\delta(z)| \leq Cp_\xi(z)y^{-1-n/p}$ et que $\int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} p_\xi(z)y^{-1-n/p} < +\infty$, l'intégrale $\int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}}(y-\varepsilon)\Delta(p_\xi u_\delta)(z)dz$ (finie ou non) a un sens. Nous la calculons en appliquant, pour tout $R > 0$, le théorème de Green au domaine $D_R = B_R \times [\varepsilon, R]$, où B_R désigne la boule de centre 0 et de rayon R dans R^n, puis en faisant tendre R vers l'infini. On obtient ainsi, en utilisant les estimations précédentes (c'est une très légère variante du lemme 2 de [12], p. 87), l'égalité

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{R}^n} p_\xi(x,\varepsilon) u_\delta(x,\varepsilon)\, dx \\
&\quad = \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z) dz + 2 \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) \nabla p_\xi(z) \nabla u_\delta(z) dz.
\end{aligned}$$

Nous allons prouver, en utilisant trois fois le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que tous les termes de l'égalité précédente tendent vers la limite attendue lorsque δ tend vers 0. L'estimation $u_\delta(x,\varepsilon) \leq C v(x,\varepsilon)$ permet d'obtenir facilement la finitude du premier membre de l'égalité précédente et le fait qu'il converge vers

$$\int_{\mathrm{R}^n} p_\xi(x,\varepsilon) |u|(x,\varepsilon)\, dx$$

quand δ tend vers 0. De la même manière, l'estimation

$$y |\nabla p_\xi(z) \nabla u_\delta(z)| \leq C p_\xi(z) y^{-1-n/p}$$

permet d'obtenir la convergence de la seconde intégrale du second membre vers

$$2 \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) \operatorname{sgn}(u(z)) \nabla p_\xi(z) \nabla u(z) dz.$$

Par suite, pour démontrer l'égalité (23), il suffit de vérifier que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z) dz = \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) p_\xi(z) \Delta |u|(dz). \tag{24}$$

En utilisant uniquement le fait que $\Delta u_\delta \to \Delta |u|$ au sens des distributions quand $\delta \to 0$ et la positivité de ces mesures, on voit que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z) dz \geq \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) p_\xi(z) \Delta |u|(dz),$$

ce qui prouve la finitude de cette dernière intégrale. On écrit enfin (en notant Y_ε l'application $(x,y) \mapsto y-\varepsilon$)

$$\int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) p_\xi(z) \Delta u_\delta(z) dz = \int_{\mathrm{R}_{\varepsilon/2}^{n+1}} (Y_\varepsilon p_\xi \chi_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}}) * k_\delta(z) \Delta |u|(dz).$$

L'estimation $(Y_\varepsilon p_\xi \chi_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}}) * k_\delta(z) \leq C y p_\xi(z) \chi_{\mathrm{R}_{\varepsilon/2}^{n+1}}(z)$ pour tout $z \in \mathrm{R}_+^{n+1}$ et la finitude de l'intégrale $\int_{\mathrm{R}_{\varepsilon/2}^{n+1}} y p_\xi(z) \Delta |u|(dz)$ permettent d'obtenir l'égalité (24), et donc l'égalité (23).

La deuxième étape de notre démonstration consiste à faire tendre ε vers 0 dans l'égalité précédente et à identifier la limite des différents termes. Pour toute fonction $g \in \mathcal{M}$ et tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, nous posons

$$D_*^{0,\varepsilon}(g)(\xi) = \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) p_\xi(z) \Delta |P(g)|(dz).$$

Etant donné une fonction bornée b définie dans R_+^{n+1} nous posons, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ et tout $\xi \in \mathrm{R}^n$,

$$T_b^\varepsilon(g)(\xi) = \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) b(z) \nabla p_\xi(z) \nabla P(g)(z)\, dz,$$

et, pour tout $(\xi, \xi') \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \setminus D$

$$K_b^\varepsilon(\xi, \xi') = \int_{\mathrm{R}_\varepsilon^{n+1}} (y-\varepsilon) b(z) \nabla p_\xi(z) \nabla p_{\xi'}(z)\, dz.$$

Les arguments utilisés dans la démonstration de la proposition 4 montrent que les opérateurs T_b^ε sont des opérateurs de Calderón-Zygmund associés aux noyaux K_b^ε, et qu'ils vérifient les mêmes estimations que T_b, avec notamment des constantes indépendantes de ε. Nous posons d'autre part, pour tout $\xi \in \mathrm{R}^n$,

$$g_\varepsilon(\xi) = \int_{\mathrm{R}^n} p_\xi(x,\varepsilon)(|u(x,\varepsilon)| - |f(x)|)\, dx.$$

Avec ces nouvelles notations, l'égalité (23) permet d'écrire (rappelons que $u = P(f)$ et $v = P(|f|)$)

$$v(\xi,\varepsilon) = T_{\mathrm{sgn}(u)}^\varepsilon(f)(\xi) + D_*^{0,\varepsilon}(f)(\xi) + g_\varepsilon(\xi) \tag{25}$$

pour tout $\xi \in \mathrm{R}^n$ (l'intégrale qui définit $T_{\mathrm{sgn}(u)}^\varepsilon(f)(\xi)$ est en effet absolument convergente pour tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, comme nous l'avons vu dans la première partie de la démonstration).

Comme $f \in L^p$, $u(\cdot,\varepsilon)$ et $v(\cdot,\varepsilon)$ tendent vers f et $|f|$ respectivement dans L^p, lorsque ε tend vers 0. Par suite, comme $g_\varepsilon \leq p_0(\cdot,\varepsilon) * |u(\cdot,\varepsilon) - f|$, on voit que g_ε tend vers 0 dans L^p lorsque ε tend vers 0.

Montrons maintenant que $D_*^{0,\varepsilon}(f)$ converge vers $D_*^0(f)$ dans L^p lorsque ε tend vers 0. D'après le théorème de convergence monotone, ceci a lieu si et seulement si les fonctions $D_*^{0,\varepsilon}(f)$ constituent une partie bornée de L^p. Si $p = 1$, ceci résulte de la proposition 2. Si $p > 1$, ceci résulte de la bornitude dans L^p des deux termes précédemment étudiés de l'égalité (25) , et de la bornitude dans L^p des fonctions $T_{\mathrm{sgn}(u)}^\varepsilon(f)$, qui est elle-même conséquence des inégalités L^p de la théorie de Calderón-Zygmund.

A ce stade, on sait donc que $T_{\mathrm{sgn}(u)}^\varepsilon$ converge dans L^p vers une certaine limite $U(f)$ lorsque ε tend vers 0, et il reste à identifier $U(f)$ à $T_{\mathrm{sgn}(u)}(f)$ pour terminer la démonstration.

Si $p > 1$, on montre que $T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f)$ converge faiblement dans L^p vers $T_{\mathrm{sgn}(u)}(f)$. Pour cela, il suffit de prouver que, si f_1 et f_2 sont deux éléments de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, alors

$$\int_{\mathrm{R}^n} \left(T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f_1)(x) - T_{\mathrm{sgn}(u)}(f_1)(x)\right) f_2(x) dx$$

tend vers 0 quand ε tend vers 0. On observe que $y-(y-\varepsilon)\chi_{\mathrm{R}^{n+1}_{\varepsilon}}(z) = \min(\varepsilon, y)$ et on adapte la preuve de la continuité L^2 des opérateurs T_b donnée dans la proposition 3 pour obtenir l'inégalité

$$\left|\int_{\mathrm{R}^n} \left(T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f_1)(x) - T_{\mathrm{sgn}(u)}(f_1)(x)\right) f_2(x)\, dx\right| \leq 2\|g^{\varepsilon}(f_1)\|_p \|g^{\varepsilon}(f_2)\|_q,$$

où $1/p + 1/q = 1$ et vv

$$g^{\varepsilon}(f_i)(x) = \left(\int_0^{+\infty} \min(y, \varepsilon)|\nabla P(f_i)|^2(x,y)\, dy\right)^{1/2} \quad (i = 1, 2),$$

pour tout $x \in \mathrm{R}^n$. Le résultat voulu en découle aussitôt.

Si $p = 1$, on montre que $T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f)$ converge vers $T_{\mathrm{sgn}(u)}(f)$ dans l'espace L^1 faible. Ce fait est évident si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, puisqu'il y a dans ce cas convergence dans L^2 en vertu de ce qui précède. Dans le cas général, on approche f dans L^1 au moyen d'une suite (f_k) d'éléments de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ et on écrit, pour tout entier k et tout $\varepsilon > 0$,

$$\left|T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f) - T_{\mathrm{sgn}(u)}(f)\right| \leq$$

$$\left|T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f) - T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f_k)\right| + \left|T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f_k) - T_{\mathrm{sgn}(u)}(f_k)\right| + \left|T_{\mathrm{sgn}(u)}(f_k) - T_{\mathrm{sgn}(u)}(f)\right|.$$

Le premier et le troisième terme du second membre de cette inégalité tendent vers 0 dans L^1 faible lorsque k tend vers l'infini en vertu du théorème de Calderón-Zygmund, uniformément par rapport à ε; quant au terme central du second membre, il tend vers 0 dans L^2 quand ε tend vers 0, pour toute valeur de l'entier k.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.

Remarque. — Notre démonstration prouve aussi que la fonction $\tilde{f} = T_{\mathrm{sgn}(u)}(f)$ est limite, presque partout et dans L^p, de l'intégrale absolument convergente $T^{\varepsilon}_{\mathrm{sgn}(u)}(f)$ lorsque ε tend vers 0.

Nous étudierons ultérieurement (sous des hypothèses convenables portant sur la fonction b) l'existence de

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |\xi - \xi'| < 1} K_b(\xi, \xi')\, d\xi'$$

pour presque tout $\xi \in \mathrm{R}^n$ et, en relation avec la proposition précédente, quelques conséquences concernant l'expression de $\tilde{f}$ et $D^0_*(f)$.

Démonstration de la Proposition 5:

Soit B une boule ouverte auxiliaire, telle que $\overline{B_1} \subset B$ et $\overline{B} \subset B_2$. Sous les hypothèses de la proposition (et en fait, sous des hypothèses plus générales) on a le "lemme de localisation" suivant (cf. [5]) : Il existe une fonction $h \in H^1$ telle que la fonction $g = f - h$ soit bornée dans B. On écrit ensuite

$$T(f) = T(h) + T(g\chi_B) + T(g\chi_{B^c}).$$

Clairement, les propriétés de l'opérateur T impliquent que $N(T(h)) \in L^1$ et $N(T(g\chi_B)) \in L^2$. D'autre part, on voit facilement (en utilisant la représentation de T au moyen du noyau associé) que la fonction $k = T(g\chi_{B^c})$ est bornée dans un voisinage de la boule $\overline{B_1}$, ce qui implique (puisque $k \in L^1 + L^2$) que sa fonction maximale de Hardy-Littlewood $M(k)$ est elle-même bornée dans B_1. D'où le résultat.

Le point crucial est donc le résultat de localisation. Sa démonstration passe par une version locale convenable de la variante de la décomposition de Calderón-Zygmund exposée par E. M. Stein dans [13], pp. 101-104. Cette version locale utilise elle même une variante locale appropriée d'un résultat classique de Ch. Fefferman et E. M. Stein, suivant lequel l'espace H^1 peut être défini à partir de n'importe quelle approximation de l'unité suffisamment régulière (cf. [6], ou [13], pp. 91-99). Pour plus de détails, nous renvoyons à notre article [5], qui contient une démonstration complète de ces résultats, ainsi que d'autres applications.

3. — Application aux espaces H^1 et $L \log L$

J. Brossard et l'auteur ont obtenu (cf. [3]) des résultats décrivant les relations entre les espaces H^1 et $L \log L$, au moyen de la densité de l'intégrale d'aire. Ces résultats étendent aux fonctions de signe variable des résultats antérieurs de A. Zygmund (cf. [14]) et E.M. Stein (cf. [11]) concernant les fonctions à valeurs ≥ 0. La démonstration que nous en avons donnée utilise simultanément des méthodes qui relèvent des probabilités, de la théorie du potentiel et de l'analyse réelle.

Les résultats de [3] ont été suggérés par un résultat probabiliste de même nature, obtenu auparavant (cf. [2]) par les mêmes auteurs. Une des démonstrations de ce résultat est basée sur l'observation suivante : Un usage convenable de la formule de Tanaka permet de déduire facilement le nouveau théorème concernant les martingales de signe variable du résultat connu de R. F. Gundy (cf. [7]) relatif aux martingales à valeurs ≥ 0.

Notre principale motivation pour énoncer et démontrer le théorème 1 est la recherche d'un outil d'analyse analogue à la formule de Tanaka, qui permette également d'obtenir, de manière simple et directe, les résultats d'analyse de [3] (ou de légères variantes) concernant les fonctions de signe variable à partir de ceux relatifs aux fonctions à valeurs ≥ 0.

Nous commençons par établir la caractérisation globale suivante des fonctions de H^1 qui appartiennent à la classe $L \log L$ (cf. [3], théorème 2) :

THÉORÈME 2. — *Pour toute fonction $f \in H^1$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $f \in L \log L$;
(ii) $D_*^0(f) \in L \log L$.

Démonstration :

Soit $f \in H^1$. D'après les assertions (i) et (iv) du théorème 1, $|f| - D_*^0(f) \in H^1$. Par conséquent, le théorème 2 est une conséquence immédiate du résultat suivant, qui ne semble pas avoir été formulé auparavant (bien qu'il soit plus ou moins implicite dans [3]).

LEMME 1. — *Soient g et h deux fonctions définies dans R^n et à valeurs ≥ 0, telles que $g - h \in H^1$. Alors $g \in L \log L$ si et seulement si $h \in L \log L$.*

Démonstration :

Les deux fonctions jouant le même rôle, il suffit de montrer que, si $g \in L \log L$, alors $h \in L \log L$. Cette assertion résulte des deux propriétés suivantes :

La première est le fait que, pour tout $c > 0$, on a

$$\int_{\{N(h) \geq c\}} N(h)(x)dx \leq 2||g - h||_{H^1} + \int_{\{N(g) \geq c/2\}} N(g)(x)dx.$$

La seconde est le fait que, si k est une fonction à valeurs ≥ 0, $k \in L \log L$ si et seulement si, pour tout $c > 0$,

$$\int_{\{N(k) \geq c\}} N(k)(x)dx < +\infty.$$

Pour démontrer la première, il suffit d'observer que, pour tout $c > 0$

$$\int_{\{N(h) \geq c\}} N(h)(x)dx \leq ||g - h||_{H^1} + \int_{\{N(h) \geq c; N(g) \leq c/2\}} N(g)(x)dx + \int_{\{N(g) \geq c/2\}} N(g)(x)dx,$$

et que, sur l'ensemble $\{N(h) \geq c; N(g) \leq c/2\}$, on a $N(g) \leq N(g-h)$ en vertu de l'inégalité triangulaire. Quant à la seconde propriété, elle s'obtient facilement, à partir de résultats connus, de la manière suivante : on commence par observer que, la fonction k étant à valeurs ≥ 0, on peut remplacer, dans la propriété à établir, la fonction maximale non tangentielle $N(k)$ par la fonction maximale de Hardy-Littlewood $M(k)$. Ceci étant fait, la propriété à établir résulte immédiatement, par intégration, de la double inégalité

$$\frac{1}{C\lambda}\int_{\{k>\lambda\}} k(x)dx \leq |\{M(k) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\{k>\lambda\}} k(x)dx,$$

où C désigne un nombre > 0 dépendant uniquement de la dimension n, λ est un nombre > 0 arbitraire et $|B|$ est la mesure de Lebesgue du borélien B. La majoration de $|\{M(k) > \lambda\}|$ n'est autre que (l'extension à R^n de) l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood, et l'inégalité inverse est également connue (cf. [11], inégalité (6)).

Le résultat suivant est un critère de comparaison entre l'appartenance locale à l'espace H^1 et l'appartenance locale à la classe $L\log L$ (cf. [3], théorème 3).

THÉORÈME 3. — *Soient B_1 et B_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{B_1} \subset B_2$. Pour toute fonction $f \in L^1$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *Si $\int_{B_2} N(f)(x)dx < +\infty$ et $\int_{B_2} D_*^0(f)(x)\ln^+(D_*^0(f)(x))dx < +\infty$, alors $\int_{B_1} |(f)(x)|\ln^+(|f(x)|)dx < +\infty$.*

(ii) *Si $\int_{B_2} |(f)(x)|\ln^+(|f(x)|)dx < +\infty$, alors $\int_{B_1} N(f)(x)dx < +\infty$ et $\int_{B_1} D_*^0(f)(x)\ln^+(D_*^0(f)(x))dx < +\infty$.*

Démonstration :

Nous commencerons par établir le résultat auxiliaire suivant qui, comme le précédent, s'obtient à partir des résultats de E. M. Stein déjà cités.

LEMME 2. — *Soient g et h deux fonctions définies dans R^n, intégrables et à valeurs ≥ 0, et soient C_1 et C_2 deux boules ouvertes de R^n telles que $\overline{C_1} \subset C_2$. On a alors les propriétés suivantes :*

(1) *Si $\int_{C_2} g(x)\ln^+(g(x))dx < +\infty$, alors $\int_{C_1} N(g)(x)dx < +\infty$.*

(2) *Si $\int_{C_2} N(g)(x)dx < +\infty$, alors $\int_{C_2} g(x)\ln^+(g(x))dx < +\infty$.*

(3) *Si $\int_{C_1} N(g-h)(x)dx < +\infty$, et si $\int_{C_2} g(x)\ln^+(g(x))dx < +\infty$, alors $\int_{C_1} h(x)\ln^+(h(x))dx < +\infty$.*

Démonstration :

Les assertions (1) et (2) sont une légère variante du théorème 1 de [11]; elles s'en déduisent aisément et nous pouvons passer à l'assertion (3). Pour montrer que $\int_{C_1} h(x) \ln^+(h(x))dx < +\infty$, il suffit d'après (2) de montrer que $\int_{C_1} N(h)(x)dx < +\infty$. Pour cela, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire, car d'une part $\int_{C_1} N(g-h)(x)dx < +\infty$ par hypothèse, et d'autre part $\int_{C_1} N(g)(x)dx < +\infty$, en vertu de la finitude de $\int_{C_2} g(x) \ln^+(g(x))dx$ et de l'assertion (1).

Revenons à la démonstration du théorème 2. Pour prouver l'assertion (i), nous appliquons l'assertion (v) du théorème 1 à la fonction f et au couple de boules (B_1, B_2). On obtient ainsi l'intégrabilité de $N(\tilde{f})$ sur B_1. Ceci nous permet d'appliquer l'assertion (3) du lemme 2 avec $h = |f|$, $g = D_*^0(f)$, $C_1 = B_1$ et $C_2 = B_2$, ce qui fournit exactement le résultat voulu.

Pour établir l'assertion (ii), nous introduisons une boule intermédiaire B telle que $\overline{B_1} \subset B$ et $\overline{B} \subset B_2$. Nous commençons par utiliser l'assertion (1) du lemme 2 avec $g = |f|$, $C_1 = B$ et $C_2 = B_2$, pour obtenir l'intégrabilité de $N(|f|)$ sur B, et a fortiori celle de $N(f)$ sur B (donc aussi sur B_1, ce qui démontre la première partie de l'assertion (ii)). Nous appliquons ensuite l'assertion (v) du théorème 1 à la fonction f et au couple de boules (B_1, B), ce qui nous donne l'intégrabilité de $N(\tilde{f})$ sur B_1. Ceci nous permet d'utiliser l'assertion (3) du lemme 2 avec $g = |f|$, $h = D_*^0(f)$, $C_1 = B_1$ et $C_2 = B$, ce qui, cette fois encore, fournit exactement le résultat voulu.

Références

[1] R. Bañuelos and J. Brossard. — *The area integral and its density for BMO and VMO functions.* Ark. Mat. **31** (1993), 175-196.

[2] J. Brossard et L. Chevalier. — *Classe L log L et temps local.* C. R. Acad. Sci. Sér. 1 Math. **305** (1987), 135-137.

[3] J. Brossard et L. Chevalier. — *Classe L log L et densité de l'intégrale d'aire dans* R_+^{n+1}. Ann. of Math. **128** (1988), 603-618.

[4] L. Chevalier. — *Mouvement brownien et formule de Tanaka en analyse.* A paraître.

[5] L. Chevalier. — *Localisations de l'espace de Hardy* H^1 *et opérateurs de Calderón-Zygmund.* A paraître.

[6] Ch. Fefferman and E. M. Stein . — H^p *spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[7] R. F. Gundy. — *On the class L log L, martingales, and singular integrals.* Studia Math. **33** (1969), 109-118.

[8] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983) 138-149.

[9] R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *The density of the area integral in* R_+^{n+1}. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 215-224.

[10] Y. Meyer. — *Opérateurs de Calderón-Zygmund.* Hermann, Paris, 1990.

[11] E. M. Stein. — *Note on the class L log L.* Studia Math. **32** (1969), 315-310.

[12] E. M. Stein. — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1970.

[13] E. M. Stein. — *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1993.

[14] A. Zygmund. — *Sur les fonctions conjuguées.* Fund. Math. **113** (1929), 284-303.

Institut Fourier
U.R.A. 188 du C.N.R.S.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
e-mail: lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr