

Une nouvelle propriété de stabilité du pléthysme

P.L. MONTAGARD

Introduction

On peut définir brièvement le pléthysme comme la composition de deux représentations irréductibles du groupe linéaire (voir la section *Rappels* pour une définition plus précise). La décomposition du pléthysme en représentations irréductibles est encore largement inconnue en général.

En 1992, M.Brion [2] a démontré certaines propriétés de croissance et de stabilité du pléthysme, généralisant des résultats partiels de S.H.Weintraub [16], de C.Carre et J.Y.Thibon [4]. Certaines de ces propriétés ont été également obtenues de manière indépendante par L.Manivel dans [13]. Ces propriétés ont des conséquences intéressantes sur le pléthysme et sur la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe des permutations ; elles permettent d'exprimer des conditions nécessaires pour qu'une composante simple apparaisse dans un pléthysme.

Une des propriétés montrées par M.Brion peut s'énoncer ainsi (nous renvoyons le lecteur à la section suivante pour les notations) : pour tout couple (ν, μ) de poids dominant d'un groupe algébrique réductif connexe G , pour toute partition π d'un entier p quelconque, la multiplicité du G -module simple de poids dominant $\mu + n\nu$ dans le G -module $S_{\pi+n}V_\nu$ est une fonction croissante de l'entier positif n , où $\pi + n$ désigne la partition $(\pi_1 + n, \pi_2, \pi_3, \dots)$. De plus cette fonction est constante dès que n est plus grand qu'une fonction explicite de π et de $p\nu - \mu$. Enfin, la valeur asymptotique peut s'exprimer en terme de multiplicité dans un L -module, où L est un groupe réductif de dimension inférieure à la dimension de G . Nous allons ici étendre ces résultats en étudiant la multiplicité du G -module simple de poids dominant $\mu + n\lambda$ dans $S_{\pi+n\theta}V_\nu$ lorsque n croît vers l'infini, avec λ un poids dominant de G fixé et θ une partition quelconque. Il apparaît dans cette généralisation un phénomène nouveau : la multiplicité est toujours croissante mais ne se stabilise pas toujours. Nous donnerons cependant un critère combinatoire de stabilité.

Le principal résultat de ce travail est l'obtention, lorsque ce critère de stabilité est vérifié, de conditions nécessaires pour qu'une représentation irréductible apparaisse dans un pléthysme (voir le corollaire 3.2 et les propositions 4.1, 4.2 et 4.4). Ces conditions nécessaires sont sous la forme d'inégalités linéaires dans les parts des partitions définissant le pléthysme. De plus si l'égalité est vérifiée, nous donnons une expression de la multiplicité.

L.Manivel, dans un travail parallèle et indépendant voir [14] a montré des résultats similaires. On indiquera tout le long de cette étude les interactions entre ces deux approches. Je remercie Hanspeter Kraft pour ces judicieux commentaires sur la rédaction de ma thèse [15] qui est à l'origine de cet article ; je le remercie, en particulier, pour m'avoir indiqué que la preuve originale du lemme 1.1 était incomplète pour le point *i*) et trop longue pour le point *ii*) et pour m'avoir communiqué la preuve actuelle.

Ce travail est la majeure partie d'une thèse dirigé par Michel Brion. Qu'il soit ici remercié pour tous ses précieux conseils et encouragements.

Notations

Le corps de base des variétés et des espaces vectoriels sera toujours \mathbf{C} , le corps des nombres complexes. Si V est un espace vectoriel nous noterons V^\vee son dual et $P(V)$ l'espace projectif associé. Si $v \in V$, nous noterons \bar{v} sa classe dans $P(V)$. Dans un groupe algébrique réductif connexe G d'élément neutre e , nous noterons B un sous-groupe de Borel et T un tore maximal de B . Nous noterons $\Xi(T)$ le groupe des caractères de T et $\Xi_{\mathbf{R}}(T) = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} \Xi(T)$ où \mathbf{R} est le corps des nombres réels. Dans $\Xi(T)$ on a le semi-groupe des poids dominants de G . Pour un tel poids λ nous noterons V_λ un G -module simple de plus grand poids λ et $v_\lambda \in V_\lambda$ un vecteur de poids λ . Le sous-groupe d'isotropie de la droite $l_\lambda = \mathbf{C}.v_\lambda$ est alors un sous-groupe parabolique P de G . Rappelons qu'il existe un unique sous-groupe parabolique P_- opposé à P et contenant T . Alors $L = P \cap P_-$ est un sous-groupe de Lévi de P et P_- . Enfin nous noterons P^u (resp. P_-^u) le radical unipotent de P (resp. de P_-), de sorte que l'on a : $P \simeq P^u \rtimes L$ et $P_- \simeq P_-^u \rtimes L$. Si $G = Gl(V)$ nous choisirons pour T le sous-groupe des matrices diagonales inversibles. Nous appellerons ε_i l'élément de $\Xi(T)$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i : \quad T &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_d) &\longmapsto a_i . \end{aligned}$$

Sauf mention expresse du contraire, nous choisirons pour sous-groupe de Borel de $Gl(V)$ le groupe des matrices triangulaires supérieures. Le point final d'une démonstration s'il ne coïncide pas avec le début d'une nouvelle section, sera noté : \diamond .

Rappels

Nous allons ici rappeler quelques notions sur les représentations du groupe Σ_r (les permutations d'un ensemble à r éléments) et du groupe linéaire $Gl(V)$.

Définition 0.1 *On appellera partition de r , une suite décroissante finie d'entiers positifs : $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots)$ telle que $\sum_i \pi_i = r$. On notera $|\pi| = r$ le poids de π et $l(\pi)$ sa longueur c'est à dire le plus grand i tel que π_i soit non nul.*

Ces partitions de r permettent de décrire toutes les représentations irréductibles de Σ_r : on construit une correspondance bijective entre les partitions de r et les classes

d'isomorphisme des représentations irréductibles du groupe Σ_r (Voir [7] Chap. 4). Nous noterons $[\pi]$ la représentation associée à la partition π .

Exemple 0.1 *Si π est la partition formée d'une seule part égale à r , la représentation associée est la représentation triviale. Si π est la partition formée de r parts égales à un, que nous noterons $\pi = (1)^r$, la représentation associée est la représentation alternée.*

Nous allons maintenant définir pour toute partition π un foncteur covariant sur la catégorie des espaces vectoriels complexes : le foncteur de Schur.

Définition 0.2 *Soit V un espace vectoriel, π une partition de r , nous noterons $V^{\otimes r}$ le produit tensoriel de r copies de V . Le groupe Σ_r agit sur $V^{\otimes r}$ par permutation des facteurs. Le foncteur de Schur est défini sur les objets par : $V \rightsquigarrow S_\pi V \simeq (V^{\otimes r} \otimes [\pi])^{\Sigma_r}$.*

Remarque 0.1 *La définition de ce foncteur sur les flèches se déduit directement de sa définition sur les objets. En effet, soit U et W , deux espaces vectoriels et f une application linéaire de U dans W . On en déduit une application linéaire Σ_r -équivariante $f^{\otimes r}$ de $U^{\otimes r}$ dans $W^{\otimes r}$ et donc une application linéaire de $S_\pi U$ dans $S_\pi W$. On vérifie facilement que toutes les propriétés d'un foncteur sont réalisées.*

On déduit de cette remarque que le groupe $Gl(V)$ agit linéairement sur $S_\pi V$. Le théorème suivant, dû à Schur, précise la nature du G -module $S_\pi V$.

Théorème 0.1 *i) L'espace vectoriel $S_\pi V$ est nul si, et seulement si, la longueur de π est strictement supérieure à $d = \dim V$.*

ii) L'ensemble $\{\pi \mid l(\pi) \leq \dim V\}$ est en bijection avec les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles, polynômiales, de dimension finie, de $Gl(V)$.

iii) Le $Gl(V)$ -module simple $S_\pi V$, s'il est non nul, est de poids dominant :

$$\pi = \pi_1 \varepsilon_1 + \pi_2 \varepsilon_2 + \dots + \pi_d \varepsilon_d .$$

Pour la preuve voir par exemple [7] Chap. 6. Nous identifierons, grâce au point *iii*), les poids dominants des représentations polynômiales de $Gl(V)$ avec les partitions.

Exemple 0.2 *Reprenons les représentations explicitées précédemment, i.e. la représentation triviale, notée $[(r)]$ et la représentation alternée, notée $[(1)^r]$. Les foncteurs associés sont bien connus : $S_{(r)} V$ est isomorphe à la r -ième puissance symétrique de V , que nous noterons plus simplement $S_r V$ et $S_{(1)^r}$ est isomorphe à $\wedge^r V$ la r -ième puissance extérieure de V .*

Le pléthysme est défini par la composition de deux foncteurs de Schur. Si π et ν sont deux partitions, alors $S_\pi(S_\nu V)$ est un $Gl(V)$ -module qui n'est pas irréductible en général. Le problème du pléthysme est donc de décomposer ce module. On peut généraliser cette définition : soit G un groupe algébrique réductif connexe, soit V_ν un G -module simple, on cherche à décomposer le G -module $S_\pi V_\nu$.

1 Résultats préliminaires

1.1 Filtrations

Nous commencerons par énoncer le théorème de Borel-Weil qui identifie les représentations irréductibles de G et les espaces de sections globales de fibrés en droites sur la variété des drapeaux.

Théorème 1.1 *Soit G un groupe algébrique réductif connexe. Pour tout caractère χ de T , notons \mathcal{L}_χ (resp. \mathcal{L}_χ^-) le fibré en droites associé sur l'espace homogène G/B (resp. G/B_-). Le G -module $\Gamma(G/B, \mathcal{L}_\chi)$ (resp. $\Gamma(G/B_-, \mathcal{L}_\chi^-)$) est isomorphe à $V_{-\chi}^\vee$ si $-\chi$ est dominant, (resp. à V_χ si χ est dominant). Sinon les deux fibrés considérés n'ont pas de section globale non nulle.*

preuve : Voir par exemple [1] chap. 5 ou [7] chap 23.

Proposition 1.1 *Soit λ, μ deux poids dominants de G , soit P le sous-groupe parabolique de G associé à λ , P_- le sous-groupe opposé, soit $L = P \cap P_-$, le sous-groupe de Lévi commun à P et P_- , soit $X = PP_-/P_-$ la cellule ouverte de l'espace homogène G/P_- et soit W_μ un L -module simple de poids dominant μ . On considère W_μ comme un P -module par l'action triviale de P^u sur W_μ . Soit $l_{n\lambda}^\vee$ la représentation de dimension un de P et de poids $-n\lambda$, alors les P -modules $l_{n\lambda}^\vee \otimes V_{n\lambda+\mu}$, pour n entier positif ou nul, forment une filtration croissante du P -module $\mathbf{C}[X] \otimes W_\mu$. Ce que nous noterons :*

$$\bigcup_{n \geq 0} l_{n\lambda}^\vee \otimes V_{n\lambda+\mu} \simeq \mathbf{C}[X] \otimes W_\mu .$$

Avant de démontrer cette proposition nous allons énoncer deux lemmes. Précisons que par la suite nous identifierons les fibrés sur une variété avec les faisceaux localement libres sur cette même variété.

Lemme 1.1 *Soit φ l'application naturelle de G/B_- dans G/P_- , soit \mathcal{M}_μ^- le fibré homogène sur G/P_- défini par : $\mathcal{M}_\mu^- = G *__{P_-} W_\mu$, on a les assertions suivantes :*

- i) *On a un isomorphisme de P -modules : $\Gamma(X, \mathcal{M}_\mu^-) \simeq \mathbf{C}[X] \otimes W_\mu$.*
- ii) *On a un isomorphisme de fibrés sur G/P_- : $\varphi_*(\mathcal{L}_\mu^-) \simeq \mathcal{M}_\mu^-$.*

preuve du lemme 1.1 : La variété X est P -isomorphe à la variété $PP_-/P_- = P/L$. Le fibré \mathcal{M}_μ^- restreint à X est donc isomorphe à $P *_L W_\mu$. Comme la représentation W_μ de L s'étend à une représentation de P , on a un P -isomorphisme : $P *_L W_\mu \simeq P/L \times W_\mu$, voir [11], ce qui implique le point i).

Pour le point ii), remarquons d'abord que l'application φ est lisse et propre, donc $\varphi_*(\mathcal{L}_\mu^-)$ est un G -fibré vectoriel. Nous allons montrer que les deux fibrés $\varphi_*(\mathcal{L}_\mu^-)$ et

\mathcal{M}_μ^- ont même fibre au point eP_- . Par définition, on a l'égalité: $\varphi_*(\mathcal{L}_\mu^-)(eP_-) = \Gamma(\varphi^{-1}(eP_-), \mathcal{L}_\mu^-)$. D'autre part $\varphi^{-1}(eP_-)$ est égale à $P_-/B_- = L/(L \cap B_-)$ et donc :

$$\mathcal{L}_\mu^-|_{\varphi^{-1}(eP_-)} = L *_{L \cap B_-} \mathbf{C}_\mu .$$

On en déduit : $\varphi_*(\mathcal{L}_\mu^-)(eP_-) = \Gamma(\varphi^{-1}(eP_-), \mathcal{L}_\mu^-) = \Gamma(L/(L \cap B_-), L *_{L \cap B_-} \mathbf{C}_\mu) = W_\mu$, ce qui conclut la preuve du lemme 1. \diamond

Le théorème de Borel-Weil implique que $\Gamma(G/P_-, \mathcal{L}_\lambda^-) \simeq V_\lambda$. Donc il existe une section globale $s \in \Gamma(G/P_-, \mathcal{L}_\lambda^-)$ semi-invariante par P et s est unique à un scalaire près. On note $Z(s) \subset G/P_-$ le schéma des zéros de s .

Lemme 1.2 *On a l'égalité: $G/P_- \setminus Z(s) = X$.*

preuve du lemme 1.2: Soit $v_{-\lambda}^\vee \in V_\lambda^\vee$ un vecteur propre de P_- tel que: $\langle v_\lambda, v_{-\lambda}^\vee \rangle \neq 0$. Celui-ci nous permet de définir un plongement fermé:

$$\begin{aligned} G/P_- &\longrightarrow \mathbf{P}(V_\lambda^\vee) \\ gP_- &\longmapsto \overline{gv_{-\lambda}^\vee} . \end{aligned}$$

Si $x \in \mathbf{P}(V_\lambda^\vee) \setminus Z(s)$, alors $x = \overline{v_{-\lambda}^\vee + w}$, pour un $w \in V_\lambda^\vee$. Décomposons w en vecteurs propres du tore: $w = \sum_{i \in I} w_{\lambda - \sigma_i}$, où les σ_i sont des sommes non nulles de racines simples. L'ensemble $\{\sigma_i | i \in I\}$ est dans un demi-espace ouvert de $\Xi_{\mathbf{R}}(T)$, il existe donc un sous-groupe à un paramètre: $\mu : \mathbf{C}^* \rightarrow T$ tel que pour tout $x \in \mathbf{P}(V_\lambda^\vee) \setminus Z(s)$, on a: $\lim_{t \rightarrow 0} \mu(t).x = \overline{v_{-\lambda}^\vee}$. Donc $G/P_- \setminus Z(s)$ contient une unique orbite fermée de T : le point fixe eP_- .

D'autre part X est égale à l'orbite de P passant par le point eP_- . Comme $G/P_- \setminus Z(s)$ contient eP_- et est stable par P , on a: $X \subset G/P_- \setminus Z(s)$ comme ouvert. Supposons que cette inclusion soit stricte, alors le fermé $(G/P_- \setminus Z(s)) \setminus X$ contient une orbite fermée de T qui ne peut être que le point eP_- , mais celui-ci appartient à X . \diamond

preuve de la proposition 1.1: D'après le théorème de Borel-Weil et le point *ii*) du lemme 1.1, on a les G -isomorphismes suivants :

$$V_{n\lambda+\mu} \simeq \Gamma(G/B_-, \mathcal{L}_{n\lambda+\mu}^-) \simeq \Gamma(G/P_-, \varphi_*(\mathcal{L}_{n\lambda+\mu}^-)) \simeq \Gamma(G/P_-, \mathcal{M}_{n\lambda+\mu}^-) .$$

Rappelons que $\mathcal{M}_{n\lambda+\mu}^-$ est le faisceau des sections de $G *_{P_-} W_{n\lambda+\mu}$. Puisque λ est un caractère de P_- , on a un isomorphisme de P_- -modules: $W_{n\lambda+\mu} \simeq l_{n\lambda} \otimes W_\mu$. On en déduit l'isomorphisme: $\mathcal{M}_{n\lambda+\mu}^- \simeq \mathcal{L}_{n\lambda}^- \otimes \mathcal{M}_\mu^-$. D'après [9], lemme 5.14, l'ensemble $\Gamma(G/P_- \setminus Z(s), \mathcal{M}_\mu^-)$ est filtré par les espaces vectoriels: $\mathbf{C}.s^{-n} \otimes \Gamma(G/P_-, \mathcal{L}_{n\lambda}^- \otimes \mathcal{M}_\mu^-)$ et cette filtration est compatible avec l'action de P . On a donc les P -isomorphismes suivants :

$$\Gamma(G/P_- \setminus Z(s), \mathcal{M}_\mu^-) \simeq \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{C}.s^{-n} \otimes \Gamma(G/P_-, \mathcal{L}_{n\lambda}^- \otimes \mathcal{M}_\mu^-) \simeq \bigoplus_{n \geq 0} l_{n\lambda}^\vee \otimes V_{n\lambda+\mu} .$$

Pour finir, remarquons que $\Gamma(G/P_- \setminus Z(s), \mathcal{M}_\mu^-) = \Gamma(X, \mathcal{M}_\mu^-)$ d'après le lemme 1.2 et que $\Gamma(X, \mathcal{M}_\mu^-) \simeq \mathbf{C}[X] \otimes W_\mu$ d'après le point *i*) du lemme 1.1.

1.2 Sous-espaces stables par B , sous-groupes paraboliques associés

Soit $\rho : G \rightarrow \hat{G} = Gl(V_\nu)$ une représentation irréductible de G de poids dominant ν et soit θ une partition. A partir d'un drapeau de V_ν stable par B , nous allons construire des vecteurs de plus haut poids dans $S_\theta V_\nu$. Nous noterons θ sous la forme $\theta = l_1^{a_1} l_2^{a_2} \dots l_k^{a_k}$ avec $l_i > l_{i+1} > 0$, $b_j = \sum_{i=1}^j a_i$ pour $1 \leq j \leq k$, $b_0 = 0$, $b_{k+1} = d = \dim(V_\nu)$. Soit \mathcal{F} un drapeau de V_ν stable par B :

$$\mathcal{F} : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset V_{k+1} = V_\nu$$

tel que $\dim V_i = b_i$. Remarquons que si $\theta \neq 0$, un tel drapeau existe toujours à cause du théorème de Lie, mais qu'en général il n'est pas unique. Soit e_1, \dots, e_d une base de V_ν , formée de vecteurs propres du tore maximal T de G et telle que pour tout i les vecteurs e_1, \dots, e_{b_i} forment une base de V_i . Pour i tel que $1 \leq i \leq k+1$, soit W_i le sous-espace vectoriel de V_ν de base $(e_j)_{b_{i-1} < j \leq b_i}$. Nous identifierons chaque W_i avec le quotient V_{i+1}/V_i . Soit $v_{\mathcal{F}} \in S_{l_1-l_2}(\wedge^{b_1} V_\nu) \otimes S_{l_2-l_3}(\wedge^{b_2} V_\nu) \otimes \dots \otimes S_{l_k}(\wedge^{b_k} V_\nu)$ le vecteur défini par :

$$v_{\mathcal{F}} = (e_1 \wedge \dots \wedge e_{b_1})^{l_1-l_2} \otimes (e_1 \wedge \dots \wedge e_{b_2})^{l_2-l_3} \dots \otimes (e_1 \wedge \dots \wedge e_{b_k})^{l_k} .$$

Remarquons que $v_{\mathcal{F}}$ ne dépend que de \mathcal{F} et non de la base (e_i) . Le drapeau \mathcal{F} étant stable par B , il en est de même de la droite $\mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}$ qui définit donc un certain poids dominant λ de G . Choisissons pour sous-groupe de Borel \hat{B} de \hat{G} le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures relativement à la base $(e_j)_{1 \leq j \leq d}$. Alors \hat{B} laisse stable le drapeau \mathcal{F} et la droite $\mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}$ est l'unique droite stable par \hat{B} dans $S_\theta V_\nu$. On a donc construit un vecteur $v_{\mathcal{F}}$ dans $S_\theta V_\nu$ de plus haut poids λ pour G et de plus haut poids θ pour \hat{G} .

Remarque 1.1 *Les composantes du pléthysme $S_\theta V_\nu$ obtenues de cette façon seront appelées des composantes principales, en suivant la terminologie introduite par L. Manivel [14]. On ne peut pas obtenir de cette manière toutes les composantes d'un pléthysme. Par exemple dans $S_n V_\nu$, la seule composante principale est celle de poids dominant $n\nu$.*

Soit P (resp. \hat{P}) le sous-groupe parabolique de G (resp. de \hat{G}) associé au poids dominant λ de G (resp. θ de \hat{G}). Comme $v_{\mathcal{F}} \in S_\theta V_\nu$ est à la fois vecteur propre pour B et \hat{B} , le morphisme ρ envoie P dans \hat{P} . Le groupe \hat{P} agit dans la grosse cellule \hat{X} de \hat{G}/\hat{P}_- . Comme ρ envoie P dans \hat{P} , on a une action de P dans \hat{X} . Nous allons calculer l'algèbre des invariants : $\mathbf{C}[\hat{X}]^{P^u}$. Nous noterons L un sous-groupe de Levi de P et \mathcal{U} l'algèbre de Lie de \hat{P}^u .

Proposition 1.2 *On a un L -isomorphisme : $\mathbf{C}[\hat{X}]^{P^u} \simeq \mathbf{C}[\mathcal{U}/\text{Lie } P^u]$.*

Avant de démontrer cette proposition, nous allons énoncer deux lemmes préliminaires.

Lemme 1.3 *Le morphisme ρ envoie injectivement P^u dans \hat{P}^u .*

preuve du lemme 1.3 : Pour montrer que $\rho(P^u) \subset \hat{P}^u$ il suffit de montrer que :

$$(d\rho)_e(\text{Lie } P^u) \subset \text{Lie } \hat{P}^u = \mathcal{U} .$$

Rappelons que W_i est le sous-espace de V_ν de base $(e_j)_{b_{i-1} < j \leq b_i}$. On a les \hat{L} -isomorphismes suivants :

$$\mathcal{U} \simeq \bigoplus_{1 \leq i < j \leq k+1} \text{hom}(W_j, W_i) \simeq \bigoplus_{j=1}^k \text{hom}(W_{j+1}, V_\nu / (W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_{k+1})) .$$

D'autre part on a une application :

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \text{Lie } G & \longrightarrow & \mathcal{U} = \bigoplus_{j=1}^k \text{hom}(W_{j+1}, V_\nu / (W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_{k+1})) \\ Y & \longmapsto & \bigoplus_{j=1}^k \psi_j \end{array}$$

où les ψ_j sont définis par :

$$\begin{array}{ccc} \psi_j : W_{j+1} & \longrightarrow & V_\nu / (W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_{k+1}) \\ w & \longmapsto & \overline{(d\rho)_e(Y)w} . \end{array}$$

Le noyau de Ψ est égal à :

$$\ker \Psi = \{Y \in \text{Lie } G, (d\rho)_e(Y)W_j \subset W_j \oplus \cdots \oplus W_{k+1}\}, \text{ pour } j = 2, 3, \dots, k+1\} .$$

On en déduit que les éléments de $\ker \Psi$ laissent stable le drapeau :

$$0 = V_0^\vee \subset V_1^\vee \subset \cdots \subset V_{k+1}^\vee = V_\nu^\vee .$$

On a donc l'égalité : $\ker \Psi = \text{Lie } P_-$. L'application induite par Ψ sur $\text{Lie } G / \text{Lie } P_- = \text{Lie } P^u$ est injective et est égale à $(d\rho_e)|_{\text{Lie } P^u}$, donc $\rho(P)^u \subset \hat{P}^u$. De plus l'application $\rho|_{P^u}$ est injective, car son noyau est un sous-groupe fini, mais P^u est un groupe unipotent. \diamond

Pour tout groupe algébrique G , nous noterons G^u son radical unipotent.

Lemme 1.4 *Soit Q un groupe algébrique affine et P un sous-groupe fermé de Q tel que : $P^u \subset Q^u$, il existe alors un isomorphisme : $\text{Lie } Q^u / \text{Lie } P^u \simeq Q^u / P^u$ équivariant pour l'action de tout sous-groupe de Lévi de P .*

preuve du lemme 1.4 : Soit $P = P^u L$, une décomposition de Lévi de P et $Q = Q^u M$ une décomposition de Lévi de Q telle que $L \subset M$. On définit une suite croissante de sous-groupes de Q^u par : $U_1 = P^u$ et $U_i = N_{Q^u}(U_{i-1})$. Comme Q^u est un groupe unipotent, il existe un n tel que $U_n = Q^u$. D'autre part chaque U_i est normalisé par L .

Il existe donc des sous-espaces S_i de $\text{Lie } Q^u$ stables pour l'action adjointe de L et tels que :

$$\text{Lie } P^u = S_1 \text{ et } \text{Lie } U_i = \bigoplus_{j=1}^i S_j .$$

On définit alors l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : S_2 \times \cdots \times S_n &\rightarrow Q^u/P^u \\ (x_2, \cdots, x_n) &\mapsto \exp(x_n) \cdots \exp(x_2) P^u . \end{aligned}$$

Il est clair que φ est L -équivariante. Puisque $S_2 \times \cdots \times S_n \simeq \text{Lie } Q^u / \text{Lie } P^u$, il suffit de montrer que φ est un isomorphisme. Mais comme Q^u/P^u est un espace affine, il suffit de vérifier que φ est injective.

Soient (x_2, \cdots, x_n) et (y_2, \cdots, y_n) dans $S_2 \times \cdots \times S_n$ tels que $\varphi(x_2, \cdots, x_n) = \varphi(y_2, \cdots, y_n)$, *i.e.* $\exp(x_n) \cdots \exp(x_2) P^u = \exp(y_n) \cdots \exp(y_2) P^u$. Alors, comme x_2, \cdots, x_{n-1} et y_2, \cdots, y_{n-1} sont dans $\text{Lie } U_{n-1}$, on a : $\exp(x_n) = \exp(y_n) U_{n-1}$. Comme U_{n-1} est normal dans Q^u , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } Q^u & \xrightarrow{\quad} & \text{Lie } Q^u / \text{Lie } U_{n-1} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ Q^u & \xrightarrow{\quad} & Q^u / U_{n-1} \end{array}$$

Ce diagramme étant commutatif, on a : $\exp(y_n) U_{n-1} = \exp(y_n + \text{Lie } U_{n-1})$, donc $x_n \in y_n + \text{Lie } U_{n-1}$. Mais x_n et y_n sont dans S_n et donc $x_n = y_n$. On termine la preuve par récurrence descendante sur n . \diamond

preuve de la proposition 1.2 : Le sous-groupe de Lévi L de P étant fixé, on peut choisir \hat{L} tel que $\rho(L) \subset \hat{L}$. On a un \hat{L} -isomorphisme (et donc un L -isomorphisme) : $\hat{X} \simeq \hat{P}^u$, où \hat{L} agit dans \hat{P}^u par conjugaison. Donc $\mathbf{C}[\hat{X}]^{P^u}$ est L -isomorphe à $\mathbf{C}[\hat{P}^u]^{P^u}$. Mais d'après le lemme 1.3, ρ envoie injectivement P^u dans \hat{P}^u , on a donc un L -isomorphisme :

$$\mathbf{C}[\hat{P}^u]^{P^u} \simeq \mathbf{C}[\hat{P}^u/P^u] .$$

Enfin \hat{P}^u/P^u est L -isomorphe à $\text{Lie } \hat{P}^u / \text{Lie } P^u$ d'après le lemme 1.4. \diamond

2 Une propriété de stabilité du pléthysme

2.1 L'énoncé du théorème

Rappelons les notations de la section précédente. Nous avons appelé \mathcal{F} un drapeau de V_ν stable par B :

$$\mathcal{F} : 0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k \subset V_{k+1} = V_\nu .$$

Ce drapeau induit un vecteur $v_{\mathcal{F}}$ de poids dominant θ pour $\hat{G} = Gl(V)$, et de poids dominant λ pour G . Nous avons posé $W_i = V_i/V_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq k+1$, de sorte que la grosse cellule \mathcal{U} de l'espace homogène \hat{G}/\hat{P}_- est isomorphe à :

$$\mathcal{U} \simeq \bigoplus_{1 \leq i < j \leq k+1} \text{hom}(W_j, W_i).$$

Nous noterons \mathcal{U}_- la grosse cellule de l'espace homogène \hat{G}/\hat{P} . On a :

$$\mathcal{U}_- \simeq \bigoplus_{1 \leq i < j \leq k+1} \text{hom}(W_i, W_j) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \text{hom}(W_i, V_\nu/V_i).$$

Soit r un entier supérieur ou égal à $b_k + 1$, nous subdiviserons l'intervalle des entiers compris entre 1 et r par les intervalles $J_i = [b_{i-1}, \dots, b_i]$ ($1 \leq i \leq k$) et $J_{k+1} = [b_k + 1, \dots, r]$. Pour π une partition nous noterons π_{J_i} la partition formée des parts de π , d'indice appartenant à J_i . Si l est un entier quelconque, nous noterons $\pi_{\leq l}$ la partition (π_1, \dots, π_l) et $\pi_{> l}$ la partition $(\pi_{l+1}, \pi_{l+2}, \dots)$. Par exemple, pour $k = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ et $\pi = (6, 5, 3, 3, 2, 1)$ on a : $\pi_{\leq 2} = \pi_{I_1} = (6, 5)$, $\pi_{I_2} = (3, 3)$, $\pi_{> 4} = \pi_{I_3} = (2, 1)$.

Théorème 2.1 *Pour tout poids dominant μ de G on a :*

- i) *La multiplicité de $V_{\mu+n\lambda}$ dans $S_{\pi+n\theta} V_\nu$ est une fonction croissante de n .*
- ii) *La limite quand n tend vers l'infini de cette multiplicité est égale à la multiplicité du L -module simple de poids μ dans :*

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{k+1} S_{\pi_{J_i}} W_i \right) \otimes S_\bullet(\mathcal{U}_-/\text{Lie } P_-^u)$$

où L est le sous-groupe de Lévi du groupe parabolique associé à λ et où S_\bullet désigne l'algèbre symétrique.

- iii) *Si toute fonction régulière sur $\mathcal{U}_-/\text{Lie } P_-^u$ invariante par L est constante, alors cette limite est finie.*
- iv) *Réciproquement s'il existe des fonctions régulières et non constantes sur $\mathcal{U}_-/\text{Lie } P_-^u$ invariantes par L alors, ou bien la multiplicité est toujours égale à zéro, ou bien la limite est infinie.*
- v) *Si il existe une forme linéaire f sur $\Xi_{\mathbf{R}}(T)$ strictement positive sur les poids de \mathcal{U} , alors cette multiplicité se stabilise dès que :*

$$n \geq \sup_{1 \leq q \leq k} \left\{ (l_q - l_{q+1})^{-1} D_q^{-1} (f(|\pi|_\nu - \mu) - \sum_{i=1}^k D_i |\pi_{> b_i}|) - D_0 |\pi| \right\}$$

où $l_{k+1} = 0$, $D_0 = f(\nu) - \sup\{f(\chi) \mid \chi \text{ poids de } W_1\}$ et où les $(D_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont des constantes positives définies par :

$$D_i = \inf\{f(\chi) \mid \chi \text{ poids de } \text{hom}(W_{i+1}, W_i)\}.$$

Nous démontrerons ce théorème dans la section suivante. Nous allons d'abord faire quelques remarques. L'existence d'une forme linéaire strictement positive peut s'énoncer sous différentes formes. On a, en effet, la proposition suivante qui est bien connue :

Proposition 2.1 *Soient T un tore et N un T -module rationnel de dimension finie, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Il existe une forme linéaire f sur $\Xi_{\mathbf{R}}(T)$ strictement positive sur les poids de N .*
- ii) *Les poids de N sont dans un demi-espace ouvert de $\Xi_{\mathbf{R}}(T)$.*
- iii) *Il n'existe pas de combinaison linéaire à coefficients strictement positifs entre les poids de N .*
- iv) *L'algèbre des fonctions régulières et T -invariantes sur N est réduite aux constantes.*

Remarque 2.1 *Grâce à cette proposition, on voit que la condition v) du théorème 2.1 est une condition suffisante de stabilité de la multiplicité énoncée au point i) du théorème. En effet on a les implications suivantes :*

$$\mathbf{C}[\mathcal{U}]^T = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{U}/\text{Lie } P^u]^T = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C}[\mathcal{U}/\text{Lie } P^u]^L = \mathbf{C}.$$

A priori cette condition n'est pas nécessaire mais on peut remarquer que si λ est un poids dominant régulier alors :

$$\mathbf{C}[\mathcal{U}/\text{Lie } P^u]^T = \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{C}[\mathcal{U}/\text{Lie } P^u]^L = \mathbf{C}$$

puisque dans ce cas $L = T$.

Remarque 2.2 *Bien que la condition du point v) ne soit pas équivalente à la condition de stabilité, dans les applications des sections suivantes, c'est celle-ci que nous utiliserons car son expression combinatoire la rend plus maniable.*

Remarque 2.3 *Il est facile de montrer que si W est un sous-espace stable par B de dimension au plus trois, alors on a toujours stabilité. Pour ce résultat nous renvoyons le lecteur à [15]. Par contre, si W est de dimension 4, il n'y a pas toujours stabilité. Par exemple, soit $G = Sl(3, \mathbf{C})$, on considère la représentation adjointe \mathcal{G} qui se décompose : $\mathcal{G} = \mathcal{T} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathcal{G}_{\alpha}$. Soit $H \in \mathcal{T}$ et α, β les deux racines simples de G . Alors le sous-espace : $W = \mathbf{C}.H \oplus \mathcal{G}_{\alpha} \oplus \mathcal{G}_{\beta} \oplus \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$ est stable par B . Le poids dominant λ associé à W est égal à $2(\alpha + \beta)$ qui est régulier, donc $L = T$ et $P^u = B^u$. Alors les poids du T -module :*

$$(\text{hom}(W, \mathcal{G}/W))/\text{Lie } B_-^u$$

ne sont pas dans un demi-espace ouvert puisque ce module est non nul en poids zéro, ceci entraîne la non stabilité puisque $L = T$ (voir remarque 2.1).

2.2 Preuve du théorème 2.1

2.2.1 Preuve des points *i*), *ii*), *iii*) et *iv*)

Nous reprenons les notations des sections précédentes. On veut appliquer la proposition 1.1 à $\hat{G} = Gl(V_\nu)$. Alors $S_\pi V_\nu$ et $S_\theta V_\nu$ sont des \hat{G} -modules simples de poids dominants π et θ . Le sous-groupe parabolique $\hat{P} \subset \hat{G}$ associé au poids θ se décompose en :

$$\hat{L} \simeq \prod_{i=1}^{k+1} Gl(W_i) \quad \text{et} \quad \text{Lie } \hat{P}^u = \mathcal{U} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq k+1} \text{hom}(W_j, W_i) .$$

Le \hat{L} -module simple de poids π est isomorphe à : $\bigotimes_{i=1}^{k+1} S_{\pi_{J_i}} W_i$. D'après la proposition 1.1 on a un \hat{P} -isomorphisme :

$$\Phi : \left[\biguparrow_{n \geq 0} (\mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}^\vee)^n \otimes S_{\pi+n\theta} V_\nu \right] \simeq \mathbf{C}[X] \otimes \bigotimes_{i=1}^{k+1} S_{\pi_{J_i}} W_i .$$

Rappelons que X est la grosse cellule de \hat{G}/\hat{P}_- , que $v_{\mathcal{F}}$ est un vecteur de poids dominant θ pour \hat{G} et de poids dominant λ pour G et que P est le sous-groupe parabolique de G qui fixe la droite $\mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}$. On a vu à la section 1.2 que l'image de P par l'application $\rho : G \rightarrow \hat{G}$ est incluse dans \hat{P} , donc Φ est un P -morphisme. La multiplicité de $V_{\mu+n\lambda}$ dans $S_{\pi+n\theta} V_\nu$ est égale à la dimension du sous-espace vectoriel de $(\mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}^\vee)^n \otimes S_{\pi+n\theta} V_\nu$ composé des vecteurs propres de B de poids μ , sous-espace noté :

$$[(\mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}^\vee)^n \otimes S_{\pi+n\theta} V_\nu]_\mu^{(B)} .$$

La construction par union croissante de P -modules, donc de B -modules, démontre le point *i*).

Pour le point *ii*) remarquons que Φ induit un isomorphisme :

$$\bar{\Phi} : \left[\biguparrow_{n \geq 0} [(\mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}^\vee)^n \otimes S_{\pi+n\theta} V_\nu]_\mu^{(B)} \right] \simeq [\mathbf{C}[X] \otimes \bigotimes_{i=1}^{k+1} S_{\pi_{J_i}} W_i]_\mu^{(B)} .$$

Nous allons maintenant calculer l'espace vectoriel de droite. Le sous-groupe de Borel de G se décompose en $B \simeq P^u \rtimes (B \cap L)$. Comme P^u agit trivialement sur $\bigotimes_{i=1}^{k+1} S_{\pi_{J_i}} W_i$, on a un isomorphisme :

$$[\mathbf{C}[X] \otimes \bigotimes_{i=1}^{k+1} S_{\pi_{J_i}} W_i]_\mu^{(B)} \simeq [\mathbf{C}[X]^{P^u} \otimes \bigotimes_{i=1}^{k+1} S_{\pi_{J_i}} W_i]_\mu^{(B \cap L)} .$$

D'après la proposition 1.2, $\mathbf{C}[X]^{P^u}$ est L -isomorphe à $\mathbf{C}[\mathcal{U}/\text{Lie } P^u]$, donc isomorphe par dualité à $S_\bullet(\mathcal{U}_-/\text{Lie } P^u_-)$, ce qui démontre le point *ii*).

Pour les points *iii*) et *iv*), il suffit de remarquer que les composantes isotypiques de la L -algèbre $\mathbf{C}[X]^{P^u}$ sont des modules de type fini et sans torsion sur l'algèbre des

invariants de L , voir par exemple [10] p 95. Si cette algèbre est réduite aux constantes, les composantes isotypiques sont alors des espaces vectoriels de dimension finie et toute multiplicité est finie. Réciproquement s'il existe des invariants non constants, alors les multiplicités sont nulles ou infinies.

2.2.2 Preuve du point v)

Nous commencerons par énoncer un lemme montré par M. Brion [2].

Lemme 2.1 *Soit V_λ et V_μ deux G -modules simples de poids dominants λ et μ , soit P le stabilisateur de la droite l_λ . Il existe un P -module Q et une suite exacte de P -modules :*

$$0 \rightarrow l_\lambda \otimes V_\mu \rightarrow V_{\lambda+\mu} \rightarrow Q \rightarrow 0 .$$

De plus tout poids de Q est inférieur ou égal à un poids de la forme : $\lambda + s_\alpha(\mu) - \alpha$ pour une racine simple α non orthogonale à λ .

preuve du point v) : Nous allons démontrer le point v) uniquement dans le cas où $\theta = 1^a$. La preuve dans le cas général s'inspire de la même idée mais elle contient beaucoup plus de calculs. Nous renvoyons le lecteur à [15] pour une preuve complète.

Nous allons appliquer le lemme 2.1 à $\hat{G} = Gl(V_\nu)$ et aux représentations irréductibles $S_\theta V_\nu = \Lambda^a V_\nu$ et $S_{\pi+n^a} V_\nu$. Nous avons défini dans la section 3.2 un vecteur $v_{\mathcal{F}} \in \Lambda^a V_\nu$ de poids dominant 1^a pour \hat{G} et de poids dominant λ pour G . Soit \hat{P} (resp. P), le sous-groupe parabolique de \hat{G} , (resp. de G) qui stabilise la droite $l_{\mathcal{F}} = \mathbf{C}.v_{\mathcal{F}}$. D'après le lemme 2.1, on a une suite exacte de \hat{P} -modules :

$$0 \rightarrow l_{\mathcal{F}} \otimes S_{\pi+n^a} V_\nu \rightarrow S_{\pi+(n+1)^a} V_\nu \rightarrow Q \rightarrow 0 .$$

Comme $\rho(P) \subset \hat{P}$, la suite exacte ci-dessus est compatible avec l'action de P . Supposons maintenant que la multiplicité de $V_{\mu+(n+1)\lambda}$ dans $S_{\pi+(n+1)^a} V_\nu$ soit strictement supérieure à la multiplicité de $V_{\mu+n\lambda}$ dans $S_{\pi+n^a} V_\nu$. Il existe alors un vecteur $w \in Q$ de poids $\mu + (n+1)\lambda$. Rappelons que e_1, \dots, e_d est une base de V_ν formée de vecteurs propres du tore maximal T de G . De plus le sous-groupe de Borel \hat{B} de \hat{G} est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles par rapport à la base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$. Si on choisit comme tore maximal \hat{T} de \hat{G} les matrices diagonales inversibles par rapport à cette base, alors l'image de T est dans \hat{T} et le vecteur $w \in Q$ est un vecteur propre pour \hat{T} d'un certain poids χ . En identifiant Q à un sous-espace vectoriel de $S_{\pi+(n+1)^a} V_\nu$, on peut écrire $\chi = \sum_{i=1}^d x_i \varepsilon_i$ où les x_i sont des entiers positifs ou nuls et les ε_i sont les poids de la représentation standard de $\hat{G} = Gl(V_\nu)$. Comme $w \in Q$, d'après le lemme 2.1, χ est inférieur ou égal à un poids de la forme $\theta + s_\alpha(\pi + n\theta) - \alpha$ où α est une racine simple non orthogonale à θ . Comme $\theta = 1^a$ la seule racine non orthogonale à θ est : $\alpha_a = \varepsilon_a - \varepsilon_{a+1}$. Ce qui permet d'écrire :

$$\theta + s_{\alpha_a}(\pi + n\theta) - \alpha_a = (\pi_1 + n + 1, \dots, \pi_{a-1} + n + 1, \pi_{a+1}, \pi_a + n + 1, \pi_{a+2}, \dots) .$$

Rappelons que si $I = (I_1, I_2, \dots, I_d)$ et $I' = (I'_1, I'_2, \dots, I'_d)$ sont deux poids de $Gl(\mathbf{C}^d)$, alors I est supérieur ou égal à I' si et seulement si : $|I| = |I'|$ et $|I_{\leq i}| \geq |I'_{\leq i}|$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq d$. Le fait que χ soit un poids de Q implique donc :

$$\text{pour tout } r < a : \quad \sum_{j=1}^r x_j \leq |\pi_{\leq r}| + (n+1)r \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^a x_j \leq |\pi_{\leq a-1}| + \pi_{a+1} + (a-1)(n+1) \quad (2)$$

$$\text{pour tout } r > a : \quad \sum_{j=1}^r x_j \leq |\pi_{\leq r}| + (n+1)|\theta| \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^d x_j = |\pi| + (n+1)|\theta|. \quad (4)$$

Rappelons que w est un vecteur propre de \hat{T} de poids $\chi = \sum_{i=1}^d x_i \varepsilon_i$. Comme les e_i sont des vecteurs propres de T de poids inférieurs ou égaux à ν , les e_i sont de poids $\nu - \sigma_i$ où les σ_i sont des sommes de racines simples de G . Le poids de w par rapport à T peut donc s'écrire :

$$\mu + (n+1)\lambda = \sum_{j=1}^d x_j (\nu - \sigma_j) = (|\pi| + (n+1)|\theta|)\nu - \sum_{j=1}^d x_j \sigma_j$$

d'après l'équation (4). Comme $\theta = 1^a$, on a : $\nu_{\mathcal{F}} = e_1 \wedge \dots \wedge e_a$. Le poids de $\nu_{\mathcal{F}}$ par rapport à T est donc égal à : $\lambda = |\theta|\nu - \sum_{j=1}^a \sigma_j$. On en déduit :

$$\mu + (n+1)\lambda = \mu + (n+1)(|\theta|\nu - \sum_{j=1}^a \sigma_j).$$

En comparant les deux expressions de $\mu + (n+1)\lambda$ on obtient l'égalité :

$$|\pi|\nu - \mu = \sum_{j=1}^a (x_j - (n+1))\sigma_j + \sum_{j=a+1}^d x_j \sigma_j. \quad (5)$$

Nous allons maintenant exprimer l'existence d'une forme linéaire strictement positive sur les poids de : $\mathcal{U} \simeq \text{hom}(V_{\nu}/W, W)$. Pour cela nous poserons :

$$m_1 = \min\{f(\sigma_j) \mid 1 \leq j \leq a\}, \quad M_1 = \max\{f(\sigma_j) \mid 1 \leq j \leq a\}, \quad m_2 = \min\{f(\sigma_j) \mid a < j \leq d\}.$$

On a évidemment $M_1 \geq m_1$ et l'hypothèse de positivité de f est équivalente à l'inégalité : $m_2 > M_1$. En ordonnant correctement les vecteurs de base du sous-espace W , on peut supposer qu'il existe un entier c compris entre 1 et a de sorte que :

$$\begin{aligned} x_j - (n+1) &\geq 0 \text{ pour } 1 < j \leq c \\ x_j - (n+1) &< 0 \text{ pour } c < j \leq a. \end{aligned}$$

On peut donc minorer $f(|\pi|\nu - \mu)$:

$$f(|\pi|\nu - \mu) \geq \left(\sum_{j=1}^c x_j - c(n+1) \right) m_1 + \left(\sum_{j=c+1}^a x_j - (a-c)(n+1) \right) M_1 + \left(\sum_{j=a+1}^d x_j \right) m_2 . \quad (6)$$

D'autre part, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{j=c+1}^a x_j - (a-c)(n+1) &= |\pi| + a(n+1) - \sum_{j=1}^d x_j - \sum_{j=a+1}^c x_j - (a-c)(n+1) \\ &= |\pi| + c(n+1) - \sum_{j=a+1}^d x_j - \sum_{j=1}^c x_j . \end{aligned} \quad (7)$$

D'après l'inéquation (1) on a :

$$c(n+1) - \sum_{j=1}^c x_j \geq -|\pi_{\leq c}| \geq -|\pi_{\leq a}| = |\pi_{>a}| - |\pi| \quad (8)$$

et d'après l'inéquation (3) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=a+1}^d x_j &= |\pi| + a(n+1) - \sum_{j=1}^a x_j \\ &\geq |\pi| + a(n+1) - |\pi_{\leq a-1}| - \pi_{a+1} - (a-1)(n+1) \\ &\geq |\pi_{>a}| + \pi_a - \pi_{a+1} + n+1 \\ &\geq |\pi_{>a}| + n+1 . \end{aligned} \quad (9)$$

Finalement, en reprenant l'inégalité (6), et en tenant compte de (7), (8) et (9) on obtient :

$$\begin{aligned} f(|\pi|\nu - \mu) &\geq \left(c(n+1) - \sum_{j=1}^c x_j \right) (M_1 - m_1) + |\pi| M_1 + \left(\sum_{j=a+1}^d x_j \right) (m_2 - M_1) \\ &\geq (|\pi_{>a}| - |\pi|) (M_1 - m_1) + |\pi| M_1 + (|\pi_{>a}| + n+1) (m_2 - M_1) \\ &\geq |\pi_{>a}| (M_1 - m_1) + |\pi| m_1 + (|\pi_{>a}| + n+1) (m_2 - M_1) \\ &\geq |\pi| m_1 + (|\pi_{>a}| + n+1) (m_2 - M_1) . \end{aligned}$$

La dernière inégalité est équivalente à :

$$n+1 \leq (f(|\pi|\nu - \mu) - |\pi_{>a}| (m_2 - M_1) - |\pi| m_1) (m_2 - M_1)^{-1} .$$

D'où l'inégalité du point v) du théorème dans le cas où $k = 1$ et $l_1 = 1$, en remarquant que :

$$\begin{aligned} m_2 &= \min\{f(\chi) \mid \chi \text{ poids de } V_\nu/W\} - f(\nu) \\ M_1 &= \max\{f(\chi) \mid \chi \text{ poids de } W\} - f(\nu) \end{aligned}$$

d'où $m_2 - M_1 = \min\{f(\chi) \mid \chi \text{ poids de } \text{hom}(V_\nu/W, W)\} = D_1$. De plus $D_0 = m_1 = f(\nu) - \max\{f(\chi) \mid \chi \text{ poids de } W_1\}$. \diamond

3 Application à $S_\pi(S_2V)$

Nous allons dans cette partie appliquer le théorème 2.1 à la représentation S_2V du groupe $Gl(V)$. Nous commencerons par classifier tous les sous- B -modules de S_2V , en reprenant des travaux de L.Manivel [14]. Ensuite nous montrerons quelques propriétés de croissance et de stabilité. L'intérêt de ces propriétés se situe surtout dans leurs conséquences : le corollaire 3.1 qui est énoncé de manière plus générale dans l'article cité de L.Manivel et surtout le corollaire 3.2 qui explicite des conditions nécessaires pour qu'une composante simple apparaisse dans le pléthysme $S_\pi(S_2V)$. C'est pourquoi nous laisserons de côté certains calculs qui ne sont pas nécessaires à l'obtention de ces corollaires.

3.1 Sous-espaces B -stables de S_2V

Si λ est une partition, nous noterons s_λ la longueur de la diagonale principale du diagramme de Ferrers associé à λ , i.e. s_λ est l'unique entier positif tel que $\lambda_{s_\lambda} \geq s_\lambda$ et $\lambda_{s_\lambda+1} < s_\lambda + 1$. Par exemple $s_{(3,2,1)} = 2$. Nous noterons $\mathcal{P}ar(d)$ l'ensemble des partitions symétriques contenues dans le carré de côté $d = \dim V$. La proposition suivante (dont nous laissons la preuve à titre d'exercice) décrit de manière très précise les sous- B -modules de S_2V .

Proposition 3.1 *i) On a une bijection :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}ar(d) &\longrightarrow \{W \subset S_2V \mid W \text{ stable par } B\} \\ \lambda &\longmapsto W_{\lambda(s)} = \bigoplus_{i=1}^{s_\lambda} \bigoplus_{j=i}^{\lambda_i} \mathbf{C}e_i \cdot e_j . \end{aligned}$$

ii) Soit λ une partition symétrique, alors le poids dominant $\lambda(s)$ induit par le sous-espace $W_{\lambda(s)}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \lambda(s)_i &= \lambda_i + 1 \quad \text{si } i \leq s_\lambda \\ &= \lambda_i \quad \text{si } i > s_\lambda . \end{aligned}$$

iii) De plus la dimension de $W_{\lambda(s)}$ que nous noterons $d(\lambda)$ est égale à : $d(\lambda) = \frac{|\lambda| + s_\lambda}{2}$.

Exemple 3.1 *Soit $\lambda = (4, 3, 2, 1)$, alors $W_{\lambda(s)} \subset S_2V$ a pour base les vecteurs : $e_1^2, e_1 \cdot e_2, e_1 \cdot e_3, e_1 \cdot e_4, e_2^2, e_2 \cdot e_3$ et le poids dominant associé est égal à $(5, 4, 2, 1)$.*

Remarque 3.1 *Comme l'a remarqué L.Manivel, [14] on obtient de cette manière toutes les composantes du pléthysme $\wedge^k(S_2V)$, voir [12], page 47, exercice 10.*

3.2 Croissance et stabilité dans le cas symétrique

Nous allons appliquer le théorème 2.1 à $G = Gl(V)$ et à la représentation irréductible S_2V . Nous allons commencer par le cas où $\theta = 1^a$. Dans la section précédente on a vu que les sous-espaces stables par B de S_2V sont en bijection avec les partitions symétriques contenues dans le carré de côté d . Soit λ une telle partition, il est facile de voir que λ peut s'écrire: $\lambda = f_p^{a_1} f_{p-1}^{a_2} \cdots f_1^{a_p}$ avec $f_j = \sum_{i=1}^j a_i$. Soit $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_p \subset V_{p+1} = V$ le drapeau de V , stable par B , associé aux sauts de λ , i.e. $\dim V_i = f_i$. On posera $f_{p+1} = d = \dim V$. Pour tout entier i compris entre 1 et $p+1$ posons: $I_i = \{n \in \mathbb{N} \mid f_{i-1} < n \leq f_i\}$.

Pour i compris entre 1 et $p+1$, nous noterons $W_i = V_i/V_{i-1}$ les quotients successifs du drapeau ci-dessus. On a $\dim W_i = a_i$ pour $1 \leq i \leq p+1$ en posant $a_{p+1} = d - f_p$. Nous identifierons W_i au sous-espace vectoriel de V de base les vecteurs $(e_j)_{j \in I_i}$. Pour décrire le sous-espace $W_{\lambda(s)}$ stable par B et associé à λ , nous allons introduire la notation suivante:

$$\begin{aligned} W_i \cdot W_j &= W_i \otimes W_j \quad \text{si } i \neq j \\ &= S_2 W_i \quad \text{si } i = j. \end{aligned}$$

Alors on a:

$$W_\lambda \simeq \bigoplus_{\substack{l+m \leq p+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} W_l \cdot W_m \quad \text{et} \quad (S_2V)/W_{\lambda(s)} \simeq \bigoplus_{\substack{l+m \geq p+2 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} W_l \cdot W_m.$$

Nous noterons $\mathcal{U}_- = \text{hom}(W_{\lambda(s)}, S_2V/W_{\lambda(s)})$ la grosse cellule associée au groupe $\hat{G} = Gl(S_2V)$ et au poids dominant $(1)^{d(\lambda)}$ induit par $W_{\lambda(s)}$. Rappelons que $d(\lambda) = (|\lambda| + s_\lambda)/2$. On a: $s_\lambda = f_c$ où c est égal à la partie entière de $(p+1)/2$. On en déduit: $d(\lambda) = (|\lambda| + f_c)/2$. Le sous-espace $W_{\lambda(s)}$ induit un poids dominant $\lambda(s)$ de $Gl(V)$. On déduit de 3.1 que, si p est impair: $\lambda(s) = (f_p + 1)^{a_1} \cdots (f_c + 1)^{a_c} f_{c-1}^{a_{c+1}} \cdots f_1^{a_p}$, et si p est pair: $\lambda(s) = (f_p + 1)^{a_1} \cdots (f_{c+1} + 1)^{a_c} f_c^{a_{c+1}} \cdots f_1^{a_p}$. Les sauts de $\lambda(s)$ sont placés aux mêmes endroits que les sauts de la partition λ . On en déduit que le sous-groupe parabolique associé à $\lambda(s)$ est donné par:

$$L \simeq \prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i) \quad \text{et} \quad \text{Lie } P_-^u \simeq \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p+1} \text{hom}(W_i, W_j).$$

En conservant ces notations nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante:

Proposition 3.2 *Soit μ et π deux partitions, λ une partition symétrique, on a les assertions suivantes:*

- i) *La multiplicité de $S_{\mu+n\lambda(s)}V$ dans $S_{\pi+(n)d(\lambda)}(S_2V)$ est une fonction croissante de n .*
- ii) *Cette multiplicité se stabilise dès que: $n \geq \sum_{i=1}^p |\mu_{>f_i}| - |\pi_{>d(\lambda)}|$.*

iii) La valeur asymptotique est égale à la multiplicité du $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i)$ -module simple $\otimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{I_i}} W_i$ dans :

$$S_{\pi_{\leq d_\lambda(s)}} W_{\lambda(s)} \otimes S_{\pi_{> d_\lambda(s)}} (S_2 V / W_{\lambda(s)}) \otimes S_\bullet [(\text{hom}(W_{\lambda(s)}, S_2 V / W_{\lambda(s)})) / \text{Lie } P_-^u] .$$

preuve : Vérifions que les poids de $\mathcal{U}_- = \text{hom}(W_{\lambda(s)}, S_2 V / W_{\lambda(s)})$ sont dans un demi-espace ouvert. Pour cela définissons une forme linéaire f par $f(\varepsilon_l) = l - 1$ si $l \in I_i$. Soit χ un poids de $W_{\lambda(s)}$, alors χ peut s'écrire : $\chi = \varepsilon_p + \varepsilon_q$. Rappelons que

$$W_{\lambda(a)} \simeq \bigoplus_{\substack{l+m \leq p+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} W_l \cdot W_m .$$

Donc si $p \in I_l$ et $q \in I_m$, on a : $f(\chi) = f(\varepsilon_p + \varepsilon_q) = l - 1 + m - 1 \leq p - 1$. Si $\chi = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ est un poids de $S_2 V / W_{\lambda(s)}$ alors comme

$$S_2 V / W_{\lambda(s)} \simeq \bigoplus_{\substack{l+m \geq p+2 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} W_l \cdot W_m$$

on a, en supposant que $p \in I_l$ et $q \in I_m$: $f(\chi) = f(\varepsilon_p + \varepsilon_q) = l - 1 + m - 1 \geq p$. Les poids de \mathcal{U}_- sont donc dans un demi-espace ouvert. Pour calculer la borne de stabilité, nous utiliserons la forme linéaire $-f$ qui est strictement positive sur les poids de \mathcal{U} . On a :

$$-f(2|\pi|\varepsilon_1 - (\mu_1\varepsilon_1 + \cdots + \mu_d\varepsilon_d)) = |\mu_{I_2}| + 2|\mu_{I_3}| + \cdots + (p-1)|\mu_{I_p}| = \sum_{i=1}^p |\mu_{>f_i}| .$$

Il nous suffit maintenant de calculer la borne de stabilité dans le cas où $k = q = 1$, $b_1 = d_\lambda(s)$ et $D_1 = 1$. Pour finir, il nous reste à remarquer que le $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i)$ -module simple de poids dominant μ est isomorphe à : $\otimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{I_i}}(W_i)$. \diamond

Nous allons énoncer maintenant un corollaire direct de cette proposition.

Corollaire 3.1 Soit λ une partition symétrique, $\lambda(s)$ le poids dominant associé, alors pour tout n la multiplicité de $S_{n\lambda(s)} V$ dans $S_{(n)d_\lambda(s)}(S_2 V)$ est égale à un.

preuve : C'est une conséquence directe de la proposition 3.2 pour $\mu = \pi = 0$. Dans ce cas la multiplicité est constante et est égale à la multiplicité du $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i)$ -module trivial dans l'espace :

$$S_\bullet [\text{hom}(W_{\lambda(s)}, S_2 V / W_{\lambda(s)}) / \text{Lie } P_-^u] .$$

Mais les poids de $\text{hom}(W_{\lambda(s)}, S_2 V / W_{\lambda(s)})$ sont dans un demi-espace ouvert, d'où la conclusion. \diamond

Nous allons maintenant appliquer le théorème 2.1 dans un cadre plus général. D'après la section 3.1, un drapeau de S_2V stable par B est donné par une suite de partitions symétriques $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^p$ telle que $\lambda^i \subset \lambda^{i+1}$: $\lambda_j^i \leq \lambda_j^{i+1}$ pour tout j tel que $1 \leq j \leq d = \dim V$. Les calculs devenant très difficiles à mener dans le cas général, nous allons nous limiter à une famille particulière de drapeaux de S_2V . Pour cela nous poserons pour tout i tel que $1 \leq i \leq p$: $\lambda^i = f_i^{a_1} f_{i-1}^{a_2} \dots f_1^{a_i}$ avec $f_j = \sum_{i=1}^j a_i$ et $f_p \leq d = \dim V$.

Nous définirons I_i et W_i comme précédemment : $I_i = \{n \in \mathbf{N} \mid f_{i-1} < n \leq f_i\}$ et W_i est égal au sous-espace vectoriel de V de base $(e_j)_{j \in I_i}$. Soit Z_i le sous-espace stable par B associé à λ^i . On a :

$$Z_i = \bigoplus_{\substack{l+m \leq i+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq i+1}} W_l \cdot W_m .$$

Soit \mathcal{F} le drapeau de S_2V induit par la suite des λ^i :

$$0 = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_p \subset Z_{p+1} = S_2V .$$

Nous noterons $U_i = Z_i/Z_{i-1}$, pour $i = 1, 2, \dots, p+1$, les quotients successifs du drapeau \mathcal{F} , on a alors :

$$U_i = \bigoplus_{\substack{l+m=i+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq i+1}} W_l \cdot W_m \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p \quad \text{et} \quad U_{p+1} = \bigoplus_{\substack{l+m \geq p+2 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} W_l \cdot W_m .$$

Nous noterons $a_i \circ a_j = \dim W_i \cdot W_j$ de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} a_i \circ a_j &= a_i \cdot a_j && \text{si } i \neq j \\ &= a_i(a_i + 1)/2 && \text{si } i = j . \end{aligned}$$

Nous poserons pour $i = 1, \dots, p$:

$$c_i = \dim Z_i = \sum_{\substack{l+m \leq i+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} a_l \circ a_m \quad \text{et} \quad c_{p+1} = \dim S_2V .$$

Enfin nous définirons les intervalles d'entiers : $J_i = \{n \in \mathbf{N} \mid c_{i-1} < n \leq c_i\}$. Le drapeau \mathcal{F} induit un poids dominant Θ de $Gl(S_2V)$. On a :

$$\Theta = p^{\dim U_1} (p-1)^{\dim U_2} \dots 1^{\dim U_p} .$$

Soit \hat{P} le sous-groupe parabolique de $Gl(S_2V)$ associé au poids Θ . La grosse cellule \mathcal{U}_- de $Gl(S_2V)/\hat{P}$ sera isomorphe à :

$$\mathcal{U}_- \simeq \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p+1} \text{hom}(U_i, U_j) .$$

Le drapeau \mathcal{F} induit un poids dominant de $Gl(V)$, que nous noterons $\Lambda(s) = \sum \lambda^i(s)$. Nous n'allons pas calculer explicitement $\Lambda(s)$ mais nous contenter de remarquer que les sauts de $\Lambda(s)$ sont placés aux mêmes endroits que les sauts de la partition λ^p . On en déduit que le sous-groupe parabolique associé à Λ est le même que celui associé au poids λ^p , on a donc :

$$L \simeq \prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i) \text{ et } Lie P_-^u \simeq \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p+1} \text{hom}(W_i, W_j) .$$

Si μ est une partition quelconque, le L -module simple de poids μ sera isomorphe à : $\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{I_i}} W_i$.

Nous reprenons les notations introduites précédemment pour énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.3 *Soit μ, π deux partitions, $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^p$ p partitions comme ci-dessus. On a les assertions suivantes :*

- i) *La multiplicité de $S_{\mu+n\Lambda(s)}V$ dans $S_{\pi+n\Theta}(S_2V)$ est une fonction croissante de n .*
- ii) *Cette multiplicité se stabilise dès que : $n \geq \sum_{i=1}^p (|\mu_{>f_i}| - |\pi_{>c_i}|)$.*
- iii) *La valeur asymptotique est égale à la multiplicité du $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i)$ -module simple $\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{I_i}} W_i$ dans :*

$$\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} U_i \otimes S_{\bullet} \left[\left(\bigoplus_{1 \leq i < j \leq p+1} \text{hom}(U_i, U_j) \right) / Lie P_-^u \right] .$$

preuve : Il reste à montrer que les poids de \mathcal{U}_- sont dans un demi-espace ouvert et à calculer la borne de stabilité. Soit f la forme linéaire définie par : $f(\varepsilon_l) = i - 1$ si $l \in I_i$. Si $\varepsilon_l + \varepsilon_m$ est un poids de :

$$U_i = \bigoplus_{l+m=i+1} W_l \cdot W_m$$

avec $1 \leq i \leq p$ alors $f(\varepsilon_l + \varepsilon_m) = i - 1$. Si $\varepsilon_l + \varepsilon_m$ est un poids de

$$U_{p+1} = \bigoplus_{l+m \geq p+2} W_l \cdot W_m ,$$

alors $f(\varepsilon_l + \varepsilon_m) \geq p$. Comme \mathcal{U}_- est isomorphe à $\bigoplus_{1 \leq i < j \leq p+1} \text{hom}(U_i, U_j)$, f est strictement positive sur \mathcal{U}_- . Pour calculer la borne de stabilité, nous utiliserons la forme linéaire $-f$ strictement positive sur \mathcal{U} :

$$-f(2|\pi|\varepsilon_1 - (\mu_1\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2 + \dots + \mu_d\varepsilon_d)) = |\mu_{J_2}| + 2|\mu_{J_3}| + \dots + (p-1)|\mu_{J_{p+1}}| = \sum_{i=1}^p |\mu_{>f_i}| .$$

Les hauteurs des sauts de θ sont toutes égales à un ainsi que les constantes :

$$D_i = \inf\{-f(\chi) \mid \chi \text{ poids de } \text{hom}(U_{i+1}, U_i)\}.$$

D'après le théorème 2.1, la multiplicité se stabilise dès que : $n \geq \sum_{i=1}^p (|\mu_{>f_i}| - |\pi_{>c_i}|)$.
Ce qui termine la preuve de la proposition 3.3. \diamond

Nous allons maintenant énoncer un corollaire de cette proposition.

Corollaire 3.2 *Si le module simple $S_\mu V$ apparaît dans $S_\pi(S_2V)$ alors pour tout p et pour toute suite d'entiers positifs a_1, a_2, \dots, a_p l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{i=1}^p |\mu_{>a_1+\dots+a_i}| \geq \sum_{i=1}^p |\pi_{>c_i}| \quad (*)$$

où c_i est défini par :

$$c_i = \sum_{\substack{l+m \leq i+1 \\ l \leq m}} a_l \circ a_m$$

avec $a_l \circ a_m = a_l a_m$ si $l \neq m$ et $a_l \circ a_l = a_l(a_l + 1)/2$.

De plus en cas d'égalité la multiplicité de $S_\mu V$ dans $S_\pi(S_2V)$ est égale à la multiplicité du $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i)$ -module simple $\otimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{I_i}} W_i$ dans :

$$\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} \left(\bigoplus_{\substack{l+m=i+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} W_l \cdot W_m \right)$$

où (I_i) et (J_i) sont les intervalles d'entiers définis par :

$$\begin{aligned} I_i &= \{n \in \mathbf{N} \mid a_1 + \dots + a_{i-1} < n \leq a_1 + \dots + a_i\} \\ J_i &= \{n \in \mathbf{N} \mid c_{i-1} \leq n \leq c_i\} \end{aligned}$$

où $a_{p+1} = d - (a_1 + \dots + a_p)$ et où les W_i sont des espaces vectoriels de dimension a_i .

preuve : Si $S_\mu V$ apparaît dans $S_\pi(S_2V)$ alors d'après la proposition précédente le $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i)$ -module simple $\otimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{J_i}} W_i$ apparaît dans :

$$\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} U_i \otimes S_\bullet[\mathcal{U}_- / \text{Lie } P_-^u].$$

Soit f la forme linéaire définie précédemment, elle est constante et égale à $i - 1$ sur les poids de W_i . Donc f est égale à : $\sum_{i=1}^{p+1} |\mu_{>a_1+\dots+a_i}|$ sur les poids de $\otimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{J_i}} W_i$. Sur les poids de U_i , ($1 \leq i \leq p$), f est égale à $i - 1$ et sur les poids de U_{p+1} , f est supérieure ou égale à p . Comme f est strictement positive sur les poids de \mathcal{U}_- , f est

supérieure ou égale à $\sum_{i=1}^p |\pi_{>c_i}|$ sur les poids de : $\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} U_i \otimes S_{\bullet}[\mathcal{U}_-/\text{Lie } P_-^u]$. Ceci montre l'inégalité (*).

En cas d'égalité la multiplicité de $S_{\mu}V$ dans $S_{\pi}(S_2V)$ est égale à la multiplicité de $\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{J_i}} W_i$ dans :

$$\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} U_i \otimes S_{\bullet}[\mathcal{U}_-/\text{Lie } P_-^u].$$

car la borne de stabilité du point ii) de la proposition 2.1 est nulle. On conclut en remarquant que le $Gl(V)$ -module :

$$\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} \left(\bigoplus_{\substack{l+m=i+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq p+1}} W_l \cdot W_m \right)$$

est égal au sous-module de :

$$\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} U_i \otimes S_{\bullet}[\mathcal{U}_-/\text{Lie } P_-^u]$$

dont les poids appartiennent à l'hyperplan : $f = \sum_{i=1}^p |\pi_{>c_i}| \cdot \diamond$

Exemple 3.2 Si $p = 1$ on obtient l'inégalité : $|\mu_{>a}| \geq |\pi_{>\frac{a(a+1)}{2}}|$. Remarquons que M.Brion avait déjà obtenu cette inégalité pour $a = 1$, voir [2]. A l'aide de cette inégalité on voit par exemple que $S_{(19,1)}V$ n'apparaît pas dans $S_{(4,2^3)}(S_2V)$. Si l'égalité est vérifiée i.e. $|\mu_{>1}| = |\pi_{>1}|$ alors M.Brion a montré que la multiplicité de $S_{\mu}V$ dans $S_{\pi}(S_2V)$ est égale à un si $\mu_{>1} = \pi_{>1}$ et à zéro sinon.

Si $p = 2$ on obtient l'inégalité : $|\mu_{>a_1}| + |\mu_{>a_1+a_2}| \geq |\pi_{>\frac{a_1(a_1+1)}{2}}| + |\pi_{>\frac{a_1(a_1+1)}{2}+a_1a_2}|$. On en déduit par exemple que la composante $S_{(15,3,1^2)}V$ n'apparaît pas dans $S_{(5,2^2,1)}(S_2V)$, en effet on a :

$$|(5, 2^2, 1)_{>1}| + |(5, 2^2, 1)_{>2}| = 8 \quad \text{et} \quad |(15, 3, 1^2)_{>1}| + |(15, 3, 1^2)_{>2}| = 7.$$

Ce qui contredit l'inégalité ci-dessus avec $a_1 = a_2 = 1$. Remarquons cependant que les partitions $\mu = (15, 3, 1^2)$ et $\pi = (4, 2^3)$ vérifient toutes les inéquations $|\mu_{>a}| \geq |\pi_{>\frac{a(a+1)}{2}}|$ pour tout a .

Exemple 3.3 Si μ et π vérifient l'équation : $|\mu_{>1}| + |\mu_{>2}| = |\pi_{>1}| + |\pi_{>2}|$, alors la multiplicité de $S_{\mu}V$ dans $S_{\pi}(S_2V)$ est égale au coefficient de Littlewood-Richardson : $C_{|\pi_{>2}|-|\mu_{>2}|, \mu_{>2}}^{\pi_{>2}}$.

En effet d'après le corollaire cette multiplicité est égale à la multiplicité du $Gl(W_1) \times Gl(W_2) \times Gl(W_3)$ -module simple $S_{\mu_1}W_1 \otimes S_{\mu_2}W_2 \otimes S_{\mu_{>2}}W_3$ dans

$$M = S_{\pi_1}(S_2W_1) \otimes S_{\pi_2}(W_1 \otimes W_2) \otimes S_{\pi_{>2}}(W_1 \otimes W_3 \oplus S_2W_2).$$

où W_1 et W_2 sont deux espaces vectoriels de dimension un et W_3 un espace vectoriel de dimension $\dim V - 2$. Par la formule de Littlewood-Richardson on sait que :

$$S_{\pi_{>2}}(W_1 \otimes W_3 \oplus S_2 W_2) \simeq \bigoplus_{\alpha, \beta} C_{\alpha, \beta}^{\pi_{>2}} S_{\alpha}(S_2 W_2) \otimes S_{\beta}(W_1 \otimes W_3),$$

la somme étant effectuée sur toutes les partitions α et β telles que $|\alpha| + |\beta| = |\pi_{>2}|$. De plus on peut supposer que α a une seule part, car sinon $S_{\alpha}(S_2 W_2)$ est nul. On en déduit que :

$$M = \bigoplus_{\alpha, \beta} C_{\alpha, \beta}^{\pi_{>2}} S_{2\pi_1 + \pi_2 + |\beta|} W_1 \otimes S_{\pi_2 + 2\alpha} W_2 \otimes S_{\beta} W_3.$$

Si la multiplicité est non nulle, alors on a le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \beta &= \mu_{>2} \\ \pi_2 + 2\alpha &= \mu_2 \\ 2\pi_1 + \pi_2 + |\beta| &= \mu_1 \\ \alpha + |\beta| &= \pi_{>2}. \end{aligned}$$

De la première et quatrième équations, on obtient que $\beta = \mu_{>2}$ et que $\alpha = |\pi_{>2}| - |\mu_{>2}|$. On vérifie facilement que dans ce cas, la deuxième et la troisième équations sont toujours vraies, d'où l'assertion.

4 Autres applications

Les calculs présentés dans la section précédentes s'effectuent de manière très similaire pour le pléthysme $S_{\pi}(\Lambda^2 V)$ ainsi que pour la décomposition en $Gl(E) \times Gl(F)$ -modules simples de $S_{\gamma}(E \otimes F)$ (décomposition équivalente à la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles du groupe symétrique). On a dans ces deux cas une description très précise des sous- B -modules ce qui permet d'obtenir des propriétés de stabilité similaires au cas traité précédemment. A cause de cette similarité, nous ne donnerons ici que les résultats que nous estimons être les plus significatifs, c'est à dire des conditions nécessaires d'apparition d'une composante simple dans ces pléthysmes. Nous renvoyons le lecteur à [15] pour une présentation plus détaillée.

4.1 Le cas antisymétrique

Proposition 4.1 *Soit p un entier positif, soit a_1, a_2, \dots, a_p une suite d'entiers positifs telle que $a_1 \geq 2$, alors si le module simple $S_{\mu} V$ apparaît dans $S_{\pi}(\Lambda^2 V)$ on a l'inégalité :*

$$\sum_{i=1}^p |\mu_{>a_1 + \dots + a_i}| - \sum_{i=1}^p |\pi_{>c_i}| \geq 0$$

avec $c_i = \sum_{\substack{l+m \leq i+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq i+1}} a_l \wedge a_m$ et $a_l \wedge a_m = lm$ si $l \neq m$ et $a_l \wedge a_l = a_l(a_l - 1)/2$.

De plus, en cas d'égalité, la multiplicité de $S_\mu V$ dans $S_\pi(\wedge^2 V)$ est égale à la multiplicité du $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i)$ -module simple $\otimes_{i=1}^{p+1} S_{\mu_{I_i}} W_i$ dans :

$$\bigotimes_{i=1}^{p+1} S_{\pi_{J_i}} \left(\bigoplus_{\substack{l+m \leq i+1 \\ 1 \leq l \leq m \leq i+1}} W_l \wedge W_m \right)$$

où (I_i) et (J_i) sont les intervalles d'entiers définis par :

$$\begin{aligned} I_i &= \{n \in \mathbf{N} \mid a_1 + \dots + a_{i-1} < n \leq a_1 + \dots + a_i\} \\ J_i &= \{n \in \mathbf{N} \mid c_{i-1} < n \leq c_i\} \end{aligned}$$

avec $a_{p+1} = \dim \wedge^2 V - (a_1 + \dots + a_p)$, et où W_i un espace vectoriel de dimension a_i .

Exemple 4.1 Si $p = 1$ on obtient l'inégalité: $|\mu_{>a}| \geq |\pi_{>\frac{a(a-1)}{2}}|$ pour $a \geq 2$. Ceci permet de montrer, par exemple, que $S_{(8,7,5)} V$ n'apparaît pas dans $S_{(4,2^3)}(\wedge^2 V)$.

Si $p = 2$, on obtient l'inégalité: $|\mu_{>a_1}| + |\mu_{a_1+a_2}| \geq |\pi_{\frac{a_1(a_1-1)}{2}}| + |\pi_{\frac{a_1(a_1-1)}{2} + a_1 a_2}|$. Ceci permet de montrer, par exemple, que $S_{(13,12,9,5,1)} V$ n'apparaît pas dans le pléthysme $S_{(5^2,4,2^3)}(\wedge^2 V)$ car :

$$|(13, 12, 9, 5, 1)_{>2}| + |(13, 12, 9, 5, 1)_{>4}| = 16 \text{ et } |(5^2, 4, 2^3)_{>1}| + |(5^2, 4, 2^3)_{>5}| = 17$$

ce qui contredit l'inéquation ci-dessus pour $a_1 = a_2 = 2$.

4.2 Application à $S_\gamma(E \otimes F)$

En appliquant le théorème 2.1 au pléthysme $S_\gamma(E \otimes F)$, nous retrouvons des inégalités explicitées par L.Manivel dans [14].

Proposition 4.2 Si le module simple $S_\alpha E \otimes S_\beta F$ apparaît dans $S_\gamma(E \otimes F)$ alors pour tout entier p et pour toutes suites d'entiers a_1, \dots, a_p et b_1, \dots, b_p l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^p (|\alpha_{>a_1+\dots+a_i}| + |\beta_{>b_1+\dots+b_i}|) \geq \sum_{i=1}^p |\gamma_{>c_i}|$$

où c_i est défini par :

$$c_i = \sum_{l+m \leq i+1} a_l b_m .$$

De plus, en cas d'égalité, la multiplicité de $S_\alpha E \otimes S_\beta F$ dans $S_\gamma(E \otimes F)$ est égale à la multiplicité du $\prod_{i=1}^{p+1} Gl(W_i) \times Gl(W'_i)$ -module simple $\otimes_{i=1}^{p+1} S_{\alpha_{I_i}} W_i \otimes S_{\beta_{I'_i}} W'_i$ dans :

$$\bigotimes_{i=1}^p S_{\gamma_{J_i}} \left(\bigoplus_{l+m=i+1} W_l \otimes W_m \right)$$

où $(I_i), (I'_i)$ et (J_i) sont les intervalles d'entiers suivants :

$$\begin{aligned} I_i &= \{j \in \mathbf{N} \mid a_1 + \cdots + a_{i-1} < j \leq a_1 + \cdots + a_i\} \\ I'_i &= \{j \in \mathbf{N} \mid b_1 + \cdots + b_{i-1} < j \leq b_1 + \cdots + b_i\} \\ J_i &= \{n \in \mathbf{N} \mid c_{i-1} < n \leq c_i\} \end{aligned}$$

avec $a_{p+1} = \dim E - (a_1 + \cdots + a_p)$, $b_{p+1} = \dim F - (b_1 + \cdots + b_p)$ et W_i (resp. W'_i) des espaces vectoriels de dimension a_i (resp. de dimension b_i).

Exemple 4.2 Pour $p = 1$ on obtient l'inégalité: $|\alpha_{>a}| + |\beta_{>b}| \geq |\gamma_{>ab}|$ pour tous entiers positifs a et b . Si $a = b = 1$ on retrouve l'inégalité exprimée dans [8] (corollary 2.9.20). On voit aussi dans ce cas que si l'égalité est vérifiée, alors la multiplicité de $S_\alpha E \otimes S_\beta F$ dans $S_\gamma(E \otimes F)$ (qui est égale à la multiplicité de $[\gamma]$ dans $[\alpha] \otimes [\beta]$) est égale à la multiplicité du $Gl(W) \times Gl(W')$ -module simple $S_{\alpha_{>1}} W \otimes S_{\beta_{>1}} W'$ dans $S_{\gamma_{>1}}(W \oplus W')$ où W et W' sont deux espaces vectoriels de dimension assez grande. Cette multiplicité est égale au coefficient de Littlewood-Richardson $C_{\alpha_{>1}, \beta_{>1}}^{\gamma_{>1}}$. Ce résultat est montré par J.Dvir dans [5] et M.Brion dans [2]. L'inégalité pour a et b quelconques a été également montrée par J. Dvir dans [6], mais sans expression de la multiplicité en cas d'égalité.

Si $p = 2$ on obtient l'inégalité suivante :

$$|\alpha_{>a_1}| + |\alpha_{>a_1+a_2}| + |\beta_{>b_1}| + |\beta_{>b_1+b_2}| \geq |\gamma_{>a_1.b_1}| + |\gamma_{>a_1.b_1+a_1.b_2+a_2.b_1}|.$$

Cette inéquation permet de montrer, par exemple, que $[(6, 5, 4^2)]$ n'apparaît pas dans $[(12, 6, 1)] \otimes [(12, 6, 1)]$. En effet on a :

$$2((12, 6, 1)_{>1} + (12, 6, 1)_{>2}) = 16 \quad \text{et} \quad (6, 5, 4^2)_{>1} + (6, 5, 4^2)_{>3} = 17$$

ce qui contredit l'inégalité ci-dessus avec $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$. D'autre part, on peut vérifier que les partitions α, β, γ satisfont à toutes les inéquations possibles avec $p = 1$.

4.3 Le cas d'un pléthysme quelconque de $Gl(V)$

Si nous considérons une représentation quelconque de $G = Gl(V)$, nous n'avons plus de description aussi précise de ses sous- B -modules. Nous allons nous servir d'une famille particulière de sous-espaces B -stables de $S_\nu V$. Pour toute partition ν et pour tout entier b , nous noterons $b_\nu = \dim S_\nu \mathbf{C}^b$.

Proposition 4.3 Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V de dimension b et stable par B . Alors on a les assertions suivantes :

i) Le sous-espace $Z = S_\nu W$ est inclus dans $S_\nu V$ et est stable par B .

ii) Le poids λ de la droite $\wedge^{b_\nu} S_\nu W$ est égal à : $\lambda = \frac{|\nu|b_\nu}{b}(1^b)$.

Ceci va nous permettre de retrouver un résultat démontré par L.Manivel dans [14] :

Proposition 4.4 Soit μ, ν, π trois partitions telles que le $Gl(V)$ -module $S_\mu V$ apparaît dans le pléthysme $S_\pi(S_\nu V)$, alors pour tout entier b tel que $l(\nu) \leq b \leq \dim V$, on a :

$$|\mu_{>b}| \geq |\pi_{>b_\nu}|.$$

De plus, en cas d'égalité la multiplicité de $S_\mu V$ dans $S_\pi(S_\nu V)$ est égale à la multiplicité du $Gl(W_1) \times Gl(W_2)$ -module simple $S_{\mu_{\leq b}} W_1 \otimes S_{\mu_{>b}} W_2$ dans :

$$S_{\pi_{\leq b_\nu}}(S_\nu W_1) \otimes S_{\pi_{>b_\nu}}(W_2 \otimes \bigoplus_{\alpha, |\alpha|=|\nu|-1} C_{\alpha,1}^\nu S_\alpha W_1)$$

où W_1 est un espace vectoriel de dimension b et W_2 un espace vectoriel de dimension $\dim V - b$.

Exemple 4.3 Pour illustrer cette expression de la multiplicité, regardons de plus près le cas suivant : Soit μ, π, ν telles que $\nu = (n)$ et $|\mu_{>2}| = |\pi_{>k}|$ où $k = \dim S_n \mathbf{C}^2 = n+1$, alors une simple application de la proposition ci-dessus montre que la multiplicité de $S_\mu V$ dans $S_\pi(S_n V)$ est égale à la multiplicité du $Gl(W_1) \times Gl(W_2)$ -module simple : $S_{(\mu_1, \mu_2)} W_1 \otimes S_{\mu_{>2}} W_2$ dans :

$$S_{\pi_{\leq k}}(S_n W_1) \otimes S_{\pi_{>k}}(W_1 \otimes W_2)$$

avec $\dim W_1 = 2$. Cette condition nous permet de décomposer le pléthysme $S_{\pi_{\leq k}}(S_n W_1)$ (voir [3] et ses références). Il reste donc à décomposer $S_{\pi_{>k}}(W_1 \otimes W_2)$. On voit ici apparaître le problème étudié à la section 4.2.

Références

- [1] D.M. AKHIEZER, *Lie Group Actions in Complex Analysis*, Vieweg, 1995.
- [2] M.BRION, *Stable Properties of plethysm: on two conjectures of Foulkes*, Manuscripta Math., **80**, 1993, 347-371.
- [3] M. BRION, *On the representation theory of $Sl(2)$* , Indag. Mathem. N.S., **5**(1), 1994.
- [4] C. CARRE, J.Y. THIBON, *Plethysm and vertex operators*, Adv. in Appl. Math., **13**, 1992, 390-403.
- [5] J. DVIR, *On the Kronecker product of S_n characters*, J. Algebra, **154**(1), 1993, 125-140.
- [6] J. DVIR, *A Family of \mathbf{Z} -Bases for the Ring of S_n and Applications to the Decomposition of Kronecker Products*, Europ. J. Combinatorics, **15**, 1994, 449-457.
- [7] W. FULTON, J. HARRIS, *Representation Theory*, Springer-Verlag, 1989.

- [8] G. JAMES and A. KERBER, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Springer-Verlag, 1978.
- [9] R. HARSTHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [10] H. KRAFT, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg, 1985.
- [11] H. KRAFT, *G-vector bundles and the linearization problem* in Group Actions and Invariant Theory, Proceeding of the 1988 Montreal Conference held August 1–6, 1988, CMS Conference proceeding, Vol 10.
- [12] I.G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Clarendon Press, 1979.
- [13] L. MANIVEL, *Gaussian map and Plethysm*, à paraître dans les proceedings de la conférence annuelle Europroj, Catania, Sicile, 1993.
- [14] L. MANIVEL, *Application de Gauss et pléthysme 2*, preprint Institut Fourier, 1994.
- [15] P.L. MONTAGARD, *Une propriété de stabilité du pléthysme et quelques conséquences*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1995, disponible sur <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/IF.html>.
- [16] S.H. WEINTRAUB, *Some observations on plethysms*, J. of Algebra, **129**, 1990, 103–114.

Université Joseph Fourier
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques associés au CNRS
B.P. 74 - F-38402 St-Martin d'hères
et
Ecole Normale Supérieure de Lyon
UMPA, Unité Mixte de Recherche du CNRS
46, allée d'Italie
F-69463 Lyon
e-mail : pmontaga@umpa.ens-lyon.fr