# CLASSES DE RÉSONANCE DE QUASIMESURES ET ESPACES DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

*par Christian DUPUIS*

RÉSUMÉ. — Les classes de résonance de fonctions donnent des caractérisations d'espaces de transformées de Fourier de mesures non bornées, définies sur un groupe abélien localement compact. Elles se définissent par une dualité avec des espaces de fonctions test, formés de fonctions continues à support compact dont la transformée de Fourier appartient à un espace $L^p$. L'accouplement de dualité entre les fonctions de ces deux espaces est l'intégrale du produit et on utilise une propriété de continuité pour une norme portant sur les transformées de Fourier des éléments de l'espace de fonctions test. Nous montrons que les classes de résonance peuvent se définir à l'aide d'un espace universel $\Phi$ de fonctions test. Comme l'espace $\Phi$ intervient dans la définition des quasimesures et dans celle de la transformation de Fourier sur des espaces de quasimesures, on peut définir des classes de résonance de quasimesures, qui apparaissent comme des espaces de transformées de Fourier de fonctions, de mesures ou de quasimesures. Les premiers résultats sur le caractère universel de l'espace $\Phi$ et les classes de résonance de quasimesures sont donnés dans la prépublication de l'Institut Fourier n° 234 (1993). La définition d'une nouvelle famille de classes de résonance complète ce travail et permet d'obtenir des caractérisations des espaces de transformées de Fourier des espaces $\ell(L)$ et $\ell(\hat{\ell})$, ainsi que des inclusions entre ces différents espaces.

L'espace $\ell^p(L^{p'})$ de la droite réelle est formé des fonctions qui appartiennent localement à l'espace $L^{p'}$ et dont la suite des normes $L^{p'}$ sur les intervalles $[n, n+1]$ appartient à l'espace $\ell^p$. L'idée de séparer le comportement local d'une fonction du comportement global revient à N. Wiener, qui a introduit les espaces $\ell^2(L^1)$, $\ell^\infty(L^2)$, $\ell^1(L^\infty)$, $\ell^\infty(L^1)$ et le sous-espace des fonctions continues de $\ell^1(L^\infty)$, noté $\ell^1(\mathcal{C})$, que l'on appelle maintenant l'algèbre de Wiener [29], [30].

Dans le cas d'un groupe abélien localement compact $G$, les espaces $\ell^p(L^{p'})$ peuvent se définir de plusieurs façons équivalentes :

J. Stewart [24], [25] et P. Szeptycki [26] utilisent le théorème de structure du groupe pour définir des ensembles qui sont les équivalents des intervalles $[n, n+1]$.

T. S. Liu, A. van Rooij et J. K. Wang [23], dans le cas de $\ell^1(\mathcal{C})$ et H. G. Feichtinger [15] dans le cas général, considèrent un ensemble compact $K$ d'intérieur non vide ; l'espace $\ell^p(L^{p'})$ est alors formé des fonctions $f$ qui appartiennent localement à $L^{p'}$ et telles que la fonction $x \to ||f\chi_{x+K}||_{p'}$ soit un élément de l'espace $L^p$ ($\chi_E$ désignant la fonction caractéristique de l'ensemble $E$). H. G. Feichtinger définit une plus grande classe d'espaces, en remplaçant les espaces $L^p$ et $L^{p'}$ par des espaces de Banach ayant certaines propriétés.

Dans [14] H. G. Feichtinger donne aussi une définition de l'espace $\ell^1(\mathcal{C})$ à l'aide d'une majoration : soit $g$ une fonction positive continue à support compact, l'espace $\ell^1(\mathcal{C})$ est formé des fonctions continues $f$ qui vérifient l'inégalité $|f(x)| \leq \sum_n a_n g(x - y_n)$ où $y_n$ est une suite convenable d'éléments de $G$ et où $a_n$ est une suite de $\ell^1$. Cette définition ne dépend pas du choix de la fonction $g$.

J. P. Bertrandias et l'auteur donnent une définition constructive des espaces $\ell^p(L^{p'})$ et étudient la transformation de Fourier sur ces espaces [7]. Etant donné un voisinage compact $E$ de l'origine, on appelle pavage toute famille disjointe $x_i + E$ de translatés de $E$. Les éléments de $\ell^p(L^{p'})$ sont alors les fonctions $f$ qui appartiennent localement à $L^{p'}$ et qui vérifient $\sup\limits_P \big(\sum\limits_i ||f\chi_{x_i+E}||_{p'}^p\big)^{\frac{1}{p}} < \infty$, la borne supérieure étant prise sur tous les pavages. Cette expression définit une norme.

On obtient ainsi différentes constructions de l'espace $\ell^p(L^{p'})$ avec des normes équivalentes. De façon analogue, on définit des espaces de mesures $\ell^p(\mathcal{M})$, en remplaçant l'espace $L^{p'}$ par l'espace $M$ des mesures de Radon bornées.

Ces espaces ont été définis et étudiés de façon systématique par F. Holland [21] dans le cas de la droite réelle ainsi que dans [6] et [7] pour un groupe quelconque. Ils interviennent dans des domaines variés de l'analyse harmonique commutative ; dans un article très complet, J. J. F. Fournier et J. Stewart en donnent les différents résultats connus [18] : ainsi l'espace $\ell^2(L^1)$ apparaît comme le domaine d'extension maximal de la transformation de Fourier [2], [7], [26] ; il intervient aussi de façon centrale dans des problèmes de multiplicateurs (théorème d'Orlicz-Paley- Sidon) [4], [12] ; pour $p$ fini, les espaces $\ell^1(L^p)$ sont des algèbres de Segal et $\ell^1(\mathcal{C})$, dont le dual est $\ell^\infty(\mathcal{M})$ [20], est l'élément minimal d'une famille d'algèbres de Segal [14].

Lorsqu'une fonction est de type positif, cette propriété entraîne que la fonction est la transformée de Fourier d'une mesure définie sur le groupe dual. Ainsi S. Bochner a montré qu'une fonction continue est de type positif si et seulement si elle est la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure positive bornée. Par suite l'espace $B$ des transformées de Fourier des mesures bornées est l'espace des combinaisons linéaires des fonctions continues de type positif [8]. Le critère de Schoenberg-Eberlein [13] donne une autre caractérisation de l'espace $B$ : une fonction $f$ est transformée de Fourier d'une mesure bornée si et seulement si il existe une constante $C$ telle que pour toute fonction $\varphi$ de $L^1$ on ait $|\int f\varphi| \leq C||\hat{\varphi}||_\infty$. Puis, J. L. B. Cooper [9] dans le cas de la droite réelle et J. Stewart [24] pour un groupe quelconque, ont utilisé l'espace $\ell^1(L^2)$ pour montrer que toute fonction de type positif est la transformée de Fourier d'une mesure positive (en général non bornée). Pour préciser les résultats de J. L. B. Cooper sur les fonctions de type positif et obtenir une caractérisation de l'espace des transformées de Fourier des mesures de $\ell^p(\mathcal{M})$, F. Holland définit des espaces qu'il appelle classes de résonance de fonctions [22]. Une classe de résonance se définit en remplaçant dans l'inégalité de Schoenberg-Eberlein l'espace $L^1$ par un espace $\Phi_q$ de fonctions test ; elle forme l'espace dual de l'espace $\Phi_q$ muni d'une norme d'espace $\ell^q(L^\infty)$. Pour $q \geq 2$, elle apparaît comme l'espace de transformées de Fourier des mesures de $\ell^p(\mathcal{M})$.

Pour définir la transformation de Fourier des mesures non bornées, L. Argabright et J. Gil de Lamadrid [1] ont introduit l'espace $\mathcal{M}_T(G)$ des mesures transformables sur $G$. Ces mesures ont une transformée de Fourier dans l'espace $\ell^\infty(\mathcal{M})$ sur le groupe dual $\Gamma$. Les mesures de type positif appartiennent à l'espace $\mathcal{M}_T$ et une des questions posées est de connaître le rapport entre $\mathcal{M}_T$ et l'espace vectoriel engendré par les mesures de type positif. En utilisant cet espace $\mathcal{M}_T$, J. Stewart retrouve les résultats de Holland [25]. M. Torres de Squire étudie des classes de résonance de mesures relatives à un espace $\Phi_{p,p'}$ de fonctions test. Elle montre que l'espace $\mathcal{M}_T$ est la plus grande classe de résonance de mesures et que l'espace vectoriel engendré par les mesures de type positif est dense dans $\mathcal{M}_T$ pour la topologie vague [27].

Deux autres familles d'espaces, qui peuvent se définir comme les espaces $\ell(L)$, jouent un rôle important pour obtenir une définition étendue de la transformation de Fourier. Les premiers espaces, notés $\ell^p(\mathcal{A})$, sont formés de fonctions qui appartiennent localement à l'algèbre de Fourier $A$ du groupe ; pour définir les fonctions $f$ de ces espaces, on remplace la norme locale dans $L^{p'}$ par une norme $||\hat{f}||_1$ avec une condition locale sur $f$. L'espace des fonctions de $A$ à support compact, muni d'une topologie de limite inductive, ayant pour dual l'espace des quasimesures, les espaces $\ell^p(\mathcal{A})$ ont pour dual des espaces de quasimesures. J. P. Bertrandias [5] et H. G. Feichtinger [16], [17] montrent que le dual de $\ell^1(\mathcal{A})$ est l'espace $\ell^\infty(\mathcal{Q})$ des quasimesures à translatées bornées, qui peut aussi se définir d'une façon semblable aux espaces précédents. Ils montrent que la transformation de Fourier est un isomorphisme continu de $\ell^1(\mathcal{A})$ et donc, par dualité, un isomorphisme de $\ell^\infty(\mathcal{Q})$. Comme tous les espaces cités sont contenus dans $\ell^\infty(\mathcal{Q})$ leurs élément ont pour transformée de Fourier une quasimesure. En particulier l'auteur utilise ces résultats pour étudier les quasimesures de type positif, qui apparaissent comme les transformées de Fourier de toutes les mesures positives de $\ell^\infty(\mathcal{M})$ [11]. On montre ainsi que pour une fonction ayant une transformée de Fourier positive, une propriété locale de la fonction entraîne l'appartenance de sa transformée de Fourier à un espace $\ell(L)$.

Le travail qui suit s'inscrit dans le prolongement des articles [6], [7] et [11], en utilisant les mêmes méthodes. Nous montrons que toutes les classes de résonance de mesures peuvent se définir à l'aide de la dualité avec l'espace universel $A_c = \Phi_1$ des fonctions de $A$ portées par un compact ; cet espace $\Phi_1$ est dense dans tous les espaces de fonctions test. Puis, en nous servant de l'espace $\Phi_1$, nous donnons la définition plus générale des classes de résonance de quasimesures. Comme l'historique le montre, les caractérisations de fonctions de type positif et celles des transformées de Fourier de fonctions appartenant à certains espaces fonctionnels sont des problèmes liés. L'espace $\Phi_1$

étant utilisé pour définir la transformation de Fourier et intervenant aussi dans la définition des quasimesures de type positif, nous obtenons ainsi un bon cadre. Nous montrons que les classes de résonance de quasimesures sont les tranformées de Fourier d'espaces $\ell(L)$. Puis, avec les mêmes idées, nous définissons d'autres classes de résonance de quasimesures qui apparaissent comme les espaces de transformées de Fourier des espaces $\ell(\hat{\ell})$ de quasimesures. Enfin nous donnons des résultats sur les quasimesures des classes de résonance, portant sur les aspects suivants : décomposition à l'aide de quasimesures de type positif, problèmes de multiplicateurs, inclusions avec des espaces $\ell(\hat{\ell})$ pour les classes de résonance qui ne sont pas des espaces de mesures.

**1. Notations, rappels.**

Les notations et les résultats qui sont rappelés proviennent de [3], [5], [6], [7] et [11].

A) NOTATIONS.

Soit $G$ un groupe abélien localement compact de dual $\Gamma$. En général, le contexte étant clair, on ne précisera pas le groupe de définition des éléments (fonctions, mesures ou quasimesures) et de leur transformée de Fourier. On note $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions continues à support compact, $\mathcal{M}$ l'espace des mesures de Radon et $M$ le sous-espace des mesures bornées. Soit $f$ une fonction, on note $f\check{}(t) = f(-t)$. On désigne par $A$ l'espace des transformées de Fourier des fonctions de $L^1$ et par $A_c$ l'espace des fonctions de $A$ de support compact ; la norme sur $A$ est $||f||_A = ||\hat{f}||_1$. Soit $F$ une partie d'un espace vectoriel, on notera $\langle F \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par $F$.

B) ESPACES $\ell(L)$, $\ell^1(A)$ ET ESPACES DE QUASIMESURES.

Les espaces $\ell^p(L^{p'})$, $\ell^p(\mathcal{M})$ et $\ell^p(\mathcal{C})$ sont définis dans [6]. Nous utiliserons leurs propriétés naturelles de dualité de convolution et de produit ponctuel. On notera $|| \ ||_{p,p'}$, $|| \ ||_{p,M}$, $|| \ ||_{p,\infty}$ la norme dans ces espaces et $\langle \ , \ \rangle$ les accouplements de dualité.

L'espace $\ell^1(A)$ est défini dans [3] de la façon suivante : soit $E$ un voisinage de l'origine de $G$, symétrique, compact et adhérence de son intérieur. Soit $f$ une fonction qui appartient localement à $A$ (c'est-à-dire qui coïncide avec une fonction de $A$ sur tout translaté $x + E$ de $E$), on note $||f||_x = \inf ||f'||_A$, la borne inférieure étant prise sur les fonctions $f'$ de $A$ qui coïncident avec $f$ sur $x + E$. L'espace $\ell^1(A)$ est alors formé par les fonctions $f$ qui appartiennent localement à $A$ et telles que $||f||_{1,A} = \sup\limits_P (\sum\limits_i ||f||_{x_i}) < \infty$, la borne supérieure étant prise sur tous les pavages $\{x_i + E\}$ de $G$. L'espace $\ell^1(A)$ est un espace de Banach pour la norme $|| \ ||_{1,A}$ ; il est contenu dans tous les espaces $\ell^p(L^{p'})$ et $\ell^p(\mathcal{M})$ et l'injection est continue.

Soit $K$ un compact de $G$ et soit $A(K)$ l'espace des fonctions de $A$ dont le support est contenu dans $K$. L'espace $A_c$, muni de la topologie de limite inductive définie par les espaces $A(K)$ pour la norme $||f||_A$, a pour dual l'espace $Q = Q(G)$ des quasimesures [10], [19]. Soit $\sigma$ une quasimesure, on définit ${}_x||\sigma|| = \sup_{f \in A(x+E)} \frac{|\langle \sigma, f \rangle|}{||f||_A}$ et pour $1 \leq p < \infty$ on note $\ell^p(Q)$ (resp. $\ell^\infty(Q)$) l'espace des quasimesures telles que $||\sigma||_{p,Q} = \sup_P (\sum_i {}_{x_i}||\sigma||^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ (resp. $||\sigma||_{\infty,Q} = \sup_x {}_x||\sigma|| < \infty$). L' espace $\ell^\infty(Q)$ muni de cette norme est le dual de l'espace $\ell^1(A)$. Tous les espaces $\ell^p(L^{p'})$, $\ell^p(\mathcal{M})$ et $\ell^p(Q)$ sont contenus dans l'espace $\ell^\infty(Q)$ et les injections sont continues.

c) Transformation de Fourier.

La transformation de Fourier se définit sur l'espace $\ell^1(A)$ à l'aide de l'accouplement de dualité avec les fonctions $\varphi$ de l'espace $A_c$ et de leurs transformées $\hat{\varphi}$. Une fonction $f$ de $\ell^1(A)$ a une transformée de Fourier $\hat{f}$ si pour tout $\varphi$ de $A_c$ on a $\langle f, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{f}, \varphi \rangle$. La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\ell^1(A)$ sur $\ell^1(A)$ et, par dualité, de $\ell^\infty(Q)$ sur $\ell^\infty(Q)$ [5], [16]. Dans la suite l'espace $A_c$ est noté $\Phi$. Comme $\Phi$ et $\widehat{\Phi}$ sont denses dans $\ell^1(A)$, une quasimesure $\sigma$ de $\ell^\infty(Q)$ a pour transformée de Fourier une quasimesure $\hat{\sigma}$ de $\ell^\infty(Q)$ si pour tout $\varphi$ de $A_c = \Phi$ on a $\langle \sigma, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{\sigma}, \varphi \rangle$. Alors $\hat{\sigma}$ a pour transformée de Fourier la quasimesure $\sigma\check{}$ définie par $\langle \sigma\check{}, f \rangle = \langle \sigma, f\check{} \rangle$ pour tout $f$ de $\Phi$.

Cette transformation sur $\ell^\infty(Q)$ généralise la transformation de Fourier dans les cas habituels ; elle montre que tout élément d'un espace $\ell^p(L^{p'})$ ou $\ell^p(\mathcal{M})$ a une transformée de Fourier dans $\ell^\infty(Q)$.

Nous utiliserons aussi l'espace $(\widehat{L^p})_{loc}$ des quasimesures qui coïncident localement sur $G$ avec une quasimesure de $\widehat{L^p}$ ainsi que les espaces $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ [5], dont les éléments sont des quasimesures $\sigma$ de $(\widehat{L^{p'}})_{loc}$. Ces espaces se définissent comme les espaces $\ell^p(Q)$, en remplaçant ${}_x||\sigma||$ par ${}_x||\sigma||_{\widehat{p'}} = \sup_{f \in A(x+E)} \frac{|\langle \sigma, f \rangle|}{||\hat{f}||_{q'}}$. On a $\ell^1(\widehat{\ell^1}) = \ell^1(A)$. Pour $p < \infty$ et $p' < \infty$ l'espace $\Phi$ est dense dans l'espace $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$. On a les inclusions suivantes, qui correspondent à des injections continues : $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}}) \subset \ell^p(\widehat{\ell^\infty}) = \ell^p(Q)$ ; si $p'$ et $q'$ sont des exposants conjugués, pour $p' \leq 2$ on a $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}}) \subset \ell^p(L^{q'})$ et pour $2 \leq p'$ on a $\ell^p(L^{q'}) \subset \ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$. Comme les espaces $\ell(\hat{\ell})$ sont des sous-espaces de $\ell^\infty(Q)$, la transformation de Fourier est définie sur tous ces espaces ; pour $p \leq p'$ c'est une application linéaire continue de $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ dans $\ell^{p'}(\widehat{\ell^p})$ et pour $p = p'$ c'est un isomorphisme.

Le schéma suivant, qui est dû à J. P. Bertrandias [5], résume les propriétés des espaces $\ell(L)$ et $\ell(\hat{\ell})$, en particulier les injections continues d'un espace $\ell(L)$ dans un espace $\ell(\hat{\ell})$ ou inversement. Chaque point du carré représente un espace $\ell^p(L^{p'})$ ou $\ell^p(\widehat{\ell^{q'}})$.

Pour chaque famille d'espaces, les flèches vers le haut ou vers la gauche représentent des injections continues, la symétrie par rapport au centre du carré correspond à la dualité. Dans le triangle hachuré des espaces $\ell(\hat{\ell})$, la transformation de Fourier se représente par la symétrie par rapport à la diagonale du carré.

### d) Espaces de fonctions test.

Ces espaces ont été introduits par F. Holland [22]. On note $\Phi_p$ l'espace des fonctions $\varphi$ continues à support compact dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ appartient à l'un des espaces $\ell^p(L^{p'})$ pour $1 \leq p' \leq \infty$, et donc à tous ces espaces ([3], lemme II). L'espace $\Phi_1 = \Phi = A_c$ est le plus petit des espaces $\Phi_p$. Pour $p \geq 2$ on a $\Phi_p = \mathcal{K}$.

L'espace $\Phi_p$ peut être muni de la norme $||\hat{\varphi}||_{p,p'}$, les fonctions $\varphi$ décrivant l'espace $\Phi_p$. Par référence à cette norme on notera cet espace $\Phi_{p,p'}$.

Pour $1 \leq p, p' < \infty$, l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact est dense dans l'espace $\ell^p(L^{p'})$. On montre, en utilisant des fonctions de bases de filtre d'unités approchées de Cesàro, que toute fonction de $\mathcal{K}$ est limite dans $\ell^p(L^{p'})$ d'éléments de $\widehat{\Phi}$, c'est-à-dire que l'espace $\widehat{\Phi}$ est dense dans l'espace $\ell^p(L^{p'})$ ([7], 2.c).De même pour $p < \infty$ et $p' = \infty$ l'espace $\widehat{\Phi}$ est dense dans $\ell^p(\mathcal{C})$, pour $p = \infty$ et $p' < \infty$ l'espace $\widehat{\Phi}$ est dense dans $c_0(L^{p'})$ et pour $p = p' = \infty$ l'espace $\widehat{\Phi}$ est dense dans $\mathcal{C}_0$. En notant $q$ et $q'$ les exposants conjugués de $p$ et $p'$, le dual de l'espace $\widehat{\Phi}$, muni de la norme $||\hat{\varphi}||_{p,p'}$, est donc dans les différents cas précédents, l'espace $\ell^q(L^{q'})$, $\ell^q(\mathcal{M})$, $\ell^1(L^{q'})$ ou $M$.

e) Quasimesures de type positif.

Une fonction complexe $f$, définie sur $G$ et localement intégrable est de type positif si, pour toute fonction $k$ de $\mathcal{K}$, elle vérifie l'inégalité $\int f(x-y)k(x)\bar{k}(y)dxdy \geq 0$. On montre qu'il existe une mesure de Radon positive $\mu$ telle que $\hat{\mu} = f$ et on obtient la propriété équivalente : pour tout élément $\varphi$ de $\Phi$ dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est positive, on a $\langle f, \varphi\rangle = \langle \mu, \hat{\varphi}\rangle \geq 0$.

Ceci conduit à définir les quasimesures $\sigma$ de type positif par la propriété : $\langle \sigma, \varphi\rangle \geq 0$ pour toute fonction $\varphi$ de $\Phi$ dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est positive. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des quasimesures de type positif. Les fonctions, ou les mesures de type positif classiques, sont alors les fonctions localement intégrables ou les mesures de Radon qui appartiennent à $\mathcal{P}$. Toute quasimesure $\sigma$ de $\mathcal{P}$ a une transformée de Fourier $\hat{\sigma}$ qui appartient à $\ell^\infty(\mathcal{M})$ et $\mathcal{P}$ est l'ensemble des transformées de Fourier de toutes les mesures positives de $\ell^\infty(\mathcal{M})$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc contenu dans $\ell^\infty(Q)$.

## 2. Classes de résonance.

a) Classes de résonance de mesures.

Nous rappelons ici la définition de M. Torres de Squire [27]. Soient $1 \leq p, p' \leq \infty$ des exposants, on dit qu'une mesure de Radon $\mu$ est en résonance avec l'espace $\Phi_{p,p'}$ si l'application $\varphi \longrightarrow \langle \mu, \varphi\rangle$ de $\Phi_p$ dans **C** est continue pour la norme $||\hat{\varphi}||_{p,p'}$ ou encore, de façon équivalente, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varphi$ de $\Phi_p$ on ait $|\langle \mu, \varphi\rangle| \leq C||\hat{\varphi}||_{p,p'}$.

On note $\mathcal{R}(\Phi_{p,p'})$ la classe de résonance relative à l'espace $\Phi_{p,p'}$ ; elle est formée des mesures $\mu$ en résonance avec l'espace $\Phi_{p,p'}$. Cette définition généralise celle de F. Holland [22], qui étudiait les classes $\mathcal{R}(\Phi_{p,\infty})$.

On vérifie facilement, à l'aide des propriétés d'injections continues entre les espaces $\ell(L)$, que pour $p_2 \leq p_1$ et $p_1' \leq p_2'$, la classe $\mathcal{R}(\Phi_{p_1,p_1'})$ est contenue dans la classe $\mathcal{R}(\Phi_{p_2,p_2'})$. Ainsi $\mathcal{R}(\Phi_{1,\infty})$ est la plus grande classe de résonance.

L'espace $\mathcal{M}_T$ des mesures transformables, introduit par L. Argabright et J. Gil de Lamadrid [1], est formé des mesures de Radon $\mu$ telles qu'il existe une mesure, notée $\hat{\mu}$, qui vérifie la propriété :

pour toute fonction $k$ de $\mathcal{K}$ on a $\langle \mu, k * \overline{k\check{}}\rangle = \langle \hat{\mu}\check{}, |\hat{k}|^2\rangle$.

La mesure $\hat{\mu}$ appartient à l'espace $\ell^\infty(\mathcal{M})$ et c'est la transformée de Fourier de $\mu$. Inversement, si une mesure $\mu$ a une transformée de Fourier $\hat{\mu}$ dans l'espace $\ell^\infty(\mathcal{M})$, alors $\mu$ appartient à $\mathcal{M}_T$ car les fonctions $k * \overline{\check{k}}$ appartiennent à $\Phi$ et donc $\mathcal{M}_T = \mathcal{M} \cap \widehat{\ell^\infty(\mathcal{M})}$. Les mesures de type positif appartiennent à $\mathcal{M}_T$ et une des questions posées est de connaître le rapport entre l'espace $\mathcal{M}_T$ et l'espace vectoriel engendré par les mesures de type positif. M. Torres de Squire a montré l'égalité $\mathcal{M}_T = \mathcal{R}(\Phi_{1,\infty})$ et a montré que l'espace engendré par les mesures de type positif était dense dans $\mathcal{R}(\Phi_{1,\infty})$ pour la topologie vague $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$.

B) Classes de résonance de quasimesures.

Soient $p$ et $p'$ des exposants et soient $q$ et $q'$ les exposants conjugués.

Lemme 1. — *Soit $\mu$ une mesure possédant une transformée de Fourier $\hat{\mu}$ dans l'espace $\ell^q(L^{q'})$ (resp. $\ell^q(\mathcal{M})$). Pour toute fonction $f$ de $\mathcal{K}$ dont la transformée de Fourier appartient à l'espace $\ell^p(L^{p'})$ (resp. $\ell^p(\mathcal{C})$), on a l'égalité : $\langle \mu, f\rangle = \langle \hat{\mu}\check{}, \hat{f}\rangle$.*

*Démonstration.* — Ce lemme se démontre comme la relation de Parseval ([7], th.V), à l'aide de bases de filtres d'unités approchées.

Comme dans [7], on note $\omega$ les fonctions de $\mathcal{K}$ d'une base de filtre d'unités approchées classique de $L^1$. Les fonctions $\omega$ sont positives, intégrables avec $||\omega||_1 = 1$ et sont portées par un compact fixe. Leurs transformées de Fourier $\hat{\omega}$ sont intégrables, positives et vérifient $\lim \hat{\omega} = 1$ uniformément sur tout compact. On note $\zeta$ les fonctions de $\mathcal{K}$ d'une base de filtre de Cesàro. Elles sont positives, vérifient $\lim \zeta = 1$ uniformément sur tout compact et $\hat{\zeta}$ est une fonction positive, intégrable et d'intégrale égale à 1. Les fonctions $\hat{\zeta}$ sont les éléments d'une base de filtre d'unités approchées de $L^1$.

Soient $\omega$ et $\zeta$ des fonctions appartenant à deux bases d'unités approchées décrites ci-dessus. La fonction $\zeta(\omega * f)$ appartient à $\Phi$ et $\mu$ a une transformée de Fourier, donc on a $\langle \zeta\mu, \omega * f\rangle = \langle \mu, \zeta(\omega * f)\rangle = \langle \hat{\mu}\check{}, \hat{\zeta} * \hat{\omega}\hat{f}\rangle = \langle \hat{\mu}\check{} * \hat{\zeta}, \hat{\omega}\hat{f}\rangle$. Comme $\lim_\omega \omega * f = f$ dans $\mathcal{K}$, on a $\lim_\omega \langle \zeta\mu, \omega * f\rangle = \langle \zeta\mu, f\rangle$. L'accouplement de dualité $\langle \hat{\mu}\check{} * \hat{\zeta}, \hat{f}\rangle$ existe d'après les hypothèses et $\hat{\omega}$ tend vers 1 uniformément sur tout compact, d'où $\lim_\omega \langle \hat{\mu}\check{} * \hat{\zeta}, \hat{\omega}\hat{f}\rangle = \langle \hat{\mu}\check{} * \hat{\zeta}, \hat{f}\rangle$. Par suite $\langle \zeta\mu, f\rangle = \langle \hat{\mu}\check{} * \hat{\zeta}, \hat{f}\rangle$. Enfin $\langle \zeta\mu, f\rangle = \langle \mu, \zeta f\rangle$ donc $\lim_\zeta \langle \zeta\mu, f\rangle = \langle \mu, f\rangle$ et $\lim_\zeta \langle \hat{\mu}\check{} * \hat{\zeta}, \hat{f}\rangle = \langle \hat{\mu}\check{}, \hat{f}\rangle$, ce qui montre l'égalité annoncée.

Proposition 1. — *Soit $\mu$ un élément de $\mathcal{M}$. les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) L'application $\varphi \longrightarrow \langle \mu, \varphi\rangle$ de $\Phi_p$ dans $\mathbf{C}$ est continue pour la norme $||\hat{\varphi}||_{p,p'}$.*

*(ii) L'application $\varphi \longrightarrow \langle \mu, \varphi\rangle$ de $\Phi$ dans $\mathbf{C}$ est continue pour la norme $||\hat{\varphi}||_{p,p'}$.*

*(iii) La mesure $\mu$ a une transformée de Fourier dans l'espace $\ell^q(L^{q'})$ (resp. $\ell^q(\mathcal{M})$ ou M).*

*Démonstration.* — $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte de l'inclusion de $\Phi$ dans $\Phi_p$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ : comme $\widehat{\Phi}$ est dense dans l'espace $\ell^p(L^{p'})$ (resp. $\ell^p(\mathcal{C})$, $c_o(L^{p'})$ ou $\mathcal{C}_0$), l'application se prolonge de façon continue à l'espace $\ell^p(L^{p'})$ (resp. les autres espaces). Par dualité il existe donc un élément $g$ dans $\ell^q(L^{q'})$ (resp. $\ell^q(\mathcal{M})$, $\ell^1(L^{q'})$ ou $M$) tel que pour tout $\varphi$ de $\Phi$ on ait l'égalité : $\langle \mu, \varphi \rangle = \langle g, \hat{\varphi} \rangle$. Par suite $\mu$ a pour transformée de Fourier $g^{\check{}}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ : d'après le lemme 1, pour tout élément $\varphi$ de $\Phi_p$ on a $\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \hat{\mu}^{\check{}}, \hat{\varphi} \rangle$ d'où $|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq ||\hat{\mu}||_{q,q'} ||\hat{\varphi}||_{p,p'}$ et on en déduit $(i)$.

Ce résultat montre que l'espace $\Phi$ suffit à définir les classes de résonance de mesures. Les quasimesures se définissant par dualité avec $\Phi$, il conduit à la définition plus générale des classes de résonance de quasimesures.

On note $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ la classe de résonance des quasimesures $\sigma$, telles que l'application $\varphi \longrightarrow \langle \sigma, \varphi \rangle$ de $\Phi$ dans $\mathbf{C}$ soit continue pour la norme $||\hat{\varphi}||_{p,p'}$. Ces classes de résonance de quasimesures vérifient les mêmes relations d'inclusion que les classes de résonance de mesures. On a $\mathcal{R}(\Phi_{p,p'}) = \mathcal{M} \cap \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$.

Ces espaces fournissent un bon cadre pour la transformation de Fourier sur les espaces $\ell(L)$. En effet, les assertions $(ii)$ et $(iii)$ étant bien sûr équivalentes lorsque $\mu$ est une quasimesure, on a :

THÉORÈME 1. — *La transformation de Fourier est un isomorphisme entre les espaces $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ et $\ell^q(L^{q'})$ pour $p' < \infty$, entre les espaces $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\infty})$ et $\ell^q(\mathcal{M})$ et entre les espaces $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\infty,\infty})$ et $M$.*

On retrouve ainsi un résultat de M. Torres de Squire puisque $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,\infty}) = \widehat{\ell^\infty(\mathcal{M})}$ et que l'espace des mesures transformables vérifie $\mathcal{M}_T = \widehat{\ell^\infty(\mathcal{M})} \cap \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{R}(\Phi_{1,\infty}) = \mathcal{M} \cap \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,\infty}) = \mathcal{M}_T$.

Dans la définition de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ si on remplace la norme dans $\ell^p(L^{p'})$ par la norme dans $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ on peut définir de nouvelles classes de résonance: on note $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$ la classe de résonance des quasimesures $\sigma$ telles que l'application $\varphi \longrightarrow \langle \sigma, \varphi \rangle$ de $\Phi$ dans $\mathbf{C}$ soit continue pour la norme $||\hat{\varphi}||_{p,\widehat{p'}}$. Les résultats suivants montrent l'intérêt de ces nouvelles classes de résonance.

LEMME 2. — *Pour $p < \infty$ et $p' < \infty$ l'espace $\widehat{\Phi}$ est dense dans l'espace $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$.*

*Démonstration.* — Comme l'espace $\Phi = A_c$ est dense dans $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ [5], il suffit de montrer que toute fonction $\varphi$ de $\Phi$ peut être approchée dans $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ par des fonctions $\hat{\psi}$ de $\widehat{\Phi}$. L'injection de $\ell^p(\widehat{\ell^1})$ dans $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ étant continue, il suffit de montrer cette propriété dans l'espace $\ell^p(\widehat{\ell^1})$.

Soit $\varphi$ une fonction de $\Phi$, sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ appartient à $\ell^1(A)$ donc à $\ell^1(\widehat{\ell^p})$. Considérons une décomposition de l'unité $\sum_k \zeta_k$ formée de fonctions de $A_c = \Phi$ [3] ; les sommes finies de fonctions $\zeta_k \hat{\varphi}\check{}$ sont dans $\Phi$ et la somme $\sum_k \zeta_k \hat{\varphi}\check{}$ converge vers $\hat{\varphi}\check{}$ dans $\ell^1(\widehat{\ell^p})$. En utilisant la continuité de la transformation de Fourier de $\ell^1(\widehat{\ell^p})$ dans $\ell^p(\widehat{\ell^1})$ on en déduit alors que $\sum_k \hat{\zeta}_k * \varphi$ converge vers $\varphi$ dans $\ell^p(\widehat{\ell^1})$.

Comme le dual de l'espace $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ est l'espace $\ell^q(\widehat{\ell^{q'}})$, on en déduit de même que précédemment :

Théorème 2. — *Pour $p < \infty$ et $p' < \infty$, la transformation de Fourier est un isomorphisme entre les espaces $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$ et $\ell^q(\widehat{\ell^{q'}})$.*

Les relations d'inclusion entre les espaces $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ montrent que pour $p_2 \leq p_1$ et $p'_2 \leq p'_1$, l'injection de $\ell^{q_1}(\widehat{\ell^{q'_1}})$ dans $\ell^{q_2}(\widehat{\ell^{q'_2}})$ est continue donc on a $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p_1,\widehat{p'_1}}) \subset \widehat{\mathcal{R}}(\Phi_{p_2,\widehat{p'_2}})$.

Les relations d'inclusion entre les espaces $\ell^q(L^{q'})$ et $\ell^q(\widehat{\ell^{p'}})$ puis la transformation de Fourier sur ces espaces, permettent d'obtenir les inclusions suivantes :

pour $p' \leq 2$ on a $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ ;

pour $2 \leq p'$ on a $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}})$.

On remarque alors que pour $2 \leq p$ les espaces $\widehat{\ell^q(L^{q'})}$ et $\widehat{\ell^q(\mathcal{M})}$ donc $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ sont des espaces de fonctions [7] ; si on a de plus $2 \leq p'$ c'est aussi vrai pour la classe $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$ d'après une des inclusions précédentes. Dans la suite, un seul au plus des indices $p$ ou $p'$ de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ pourra être infini et les deux indices $p$ et $p'$ de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$ seront finis.

### 3. Propriétés des quasimesures d'une classe de résonance.

a) Décomposition à l'aide des quasimesures de type positif.

L'espace $\Phi$ servant aussi à définir les quasimesures de type positif, on a :

Théorème 3. — *La classe de résonance $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,\infty})$ est l'espace vectoriel $\langle\mathcal{P}\rangle$ engendré par les quasimesures de type positif.*

*Démonstration.* — Soit $\sigma$ un élément de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,\infty})$ ; d'après le résultat précédent, sa transformée de Fourier $\hat{\sigma}$ appartient à $\ell^\infty(\mathcal{M})$. En écrivant alors $\hat{\sigma}\check{} = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$, où les $\nu_j$ sont des mesures positives de $\ell^\infty(\mathcal{M})$, on définit des éléments

$\hat{\nu}_j$ de $\mathcal{P}$. Pour tout $\varphi$ de $\Phi$ on a $\langle \nu_j, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{\nu}_j, \varphi \rangle$ d'où $\sigma = \hat{\nu}_1 - \hat{\nu}_2 + i\hat{\nu}_3 - i\hat{\nu}_4$ et $\sigma$ appartient à $\langle \mathcal{P} \rangle$.

Inversement si $\sigma = \sum \lambda_j \sigma_j$ avec les $\lambda_j$ dans **C** et les $\sigma_j$ dans $\mathcal{P}$, comme les $\hat{\sigma}_j$ sont dans $\ell^\infty(\mathcal{M})$, alors $\hat{\sigma} = \sum \lambda_j \hat{\sigma}_j$ appartient à $\ell^\infty(\mathcal{M})$. Par suite $\sigma$ est dans $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,\infty})$, d'après le théorème 1.

Corollaire . — *Toute quasimesure $\sigma$ de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,\infty})$ se décompose de façon unique en $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 + i\sigma_3 - i\sigma_4$ où les $\sigma_j$ sont dans $\mathcal{P}$.*

La décomposition résulte de la démonstration précédente, l'unicité provient de l'unicité de la décomposition correspondante pour une mesure et de l'injectivité de la transformation de Fourier.

La transformation de Fourier réalise un isomorphisme entre l'ensemble $\mathcal{P} \cap (\widehat{L^q})_{loc}$ et l'ensemble $\ell^q(\mathcal{M})_+$ des mesures positives de $\ell^q(\mathcal{M})$ [5] (ce résultat contient en particulier l'isomorphisme entre $\mathcal{P} \cap L^2_{loc}$ et $\ell^2(\mathcal{M})_+$ de [11]). On en déduit une caractérisation pour d'autres classes de résonance :

Proposition 2. — *Pour $p < \infty$ on a $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\infty}) = \langle \mathcal{P} \cap (\widehat{L^q})_{loc} \rangle$.*

*Démonstration.* — Comme dans la démonstration précédente, si $\sigma$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\infty})$ alors $\hat{\sigma}$ appartient à $\ell^q(\mathcal{M})$ (théorème 1) et on écrit $\check{\hat{\sigma}} = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$, les $\nu_j$ étant dans $\ell^q(\mathcal{M})_+$. On en déduit que les $\hat{\nu}_j$ sont dans $\mathcal{P} \cap (\widehat{L^q})_{loc}$ puis que $\sigma$ est dans $\langle \mathcal{P} \cap (\widehat{L^q})_{loc} \rangle$.

Inversement, si $\sigma = \sum \lambda_j \sigma_j$, les $\sigma_j$ étant dans $\mathcal{P} \cap (\widehat{L^q})_{loc}$, alors les $\hat{\sigma}_j$ sont dans $\ell^q(\mathcal{M})_+$ et $\hat{\sigma}$ appartient à $\ell^q(\mathcal{M})$. Par suite $\sigma$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\infty})$, d'après le théorème 1.

L'égalité $\mathcal{R}(\Phi_{p,p'}) = \mathcal{M} \cap \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ permet d'obtenir les résultats suivants sur les classes de résonances de mesures, en particulier pour celles étudiées par F. Holland.

Proposition 3. — *On a les égalités suivantes :*

$\mathcal{R}(\Phi_{p,p'}) = \mathcal{M} \cap \widehat{\ell^q(L^{q'})}$, *pour* $p' < \infty$ ; $\mathcal{R}(\Phi_{p,\infty}) = \mathcal{M} \cap \widehat{\ell^q(\mathcal{M})}$, *pour* $p < \infty$ ;

$\mathcal{R}(\Phi_{1,\infty}) = \mathcal{M} \cap \langle \mathcal{P} \rangle$ ; $\quad \mathcal{R}(\Phi_{p,\infty}) = \mathcal{M} \cap \langle \mathcal{P} \cap (\widehat{L^q})_{loc} \rangle$, *pour* $p < \infty$ ;

$\mathcal{R}(\Phi_{2,\infty}) = \langle \mathcal{P} \cap L^2_{loc} \rangle$.

*Remarque.* — Pour $q \leq 2$ les espaces $(\widehat{L^q})_{loc}$, $\widehat{\ell^q(L^{q'})}$ et $\widehat{\ell^q(\mathcal{M})}$ sont des espaces de fonctions et l'intersection avec $\mathcal{M}$ est superflue. Pour la dernière égalité, comme $\widehat{\ell^2(\mathcal{M})}$ est contenu dans $\ell^\infty(L^2)$, on a $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{2,\infty}) = \mathcal{R}(\Phi_{2,\infty})$ et bien sûr $(\widehat{L^2})_{loc} = L^2_{loc}$.

b) Résultats sur le produit.

Les deux résultats suivants portent sur le produit de convolution et le produit dans les classes de résonance. En plus des couples $(p, q)$ et $(p', q')$ on considérera les quatre couples d'exposants conjugués $(r, s)$, $(r', s')$, $(t, u)$ et $(t', u')$.

Proposition 4. — $\alpha$) *Pour* $1 \leq 1 + \frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ *et* $1 \leq 1 + \frac{1}{u'} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}$ *avec* $p' < \infty$ *et* $r' < \infty$ *on a* $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) * \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{r,r'}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{u,u'})$ *;*

$\beta$) *pour* $0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 = \frac{1}{u}$ *et* $\frac{1}{u'} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}$ *on a*

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}}) * \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{r,\widehat{r'}}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{u,\widehat{u'}}).$$

*Démonstration.* — $\alpha$) Considérons des quasimesures $\sigma$ et $\tau$ qui appartiennent respectivement à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ et $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{r,r'})$. Leurs transformées de Fourier $\hat{\sigma}$ et $\hat{\tau}$ appartiennent respectivement à $\ell^q(L^{q'})$ et $\ell^s(L^{s'})$. Les hypothèses sur les indices entraînent $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t} \leq 1$ et $\frac{1}{q'} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{t'} < 1$. Donc le produit $\hat{\sigma}\hat{\tau}$ appartient à $\ell^t(L^{t'})$ [6]. La transformation de Fourier permet alors de définir le produit de convolution $\sigma * \tau$ dans $\ell^\infty(Q)$ par l'égalité $\langle \sigma * \tau, \varphi \rangle = \langle \hat{\sigma}\hat{\tau}, \hat{\varphi}\check{}\, \rangle$ pour tout élément $\varphi$ de $\Phi$. Par suite $\sigma * \tau$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{u,u'})$ d'après le théorème 1.

$\beta$) La démonstration est analogue à l'aide du produit ponctuel dans les espaces $\ell(\hat{\ell})$ [5].

Proposition 5. — $\alpha$) *Pour* $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{u} \leq 1$ *et* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{u'} \leq 1$ *avec* $p' < \infty$ *et* $r' < \infty$ *on a* $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}).\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{r,r'}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{u,u'})$ *et avec* $p' = r' = \infty$ *on a* $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\infty}).\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{r,\infty}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{u,\infty})$ *;*

$\beta$) *pour* $\frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ *et* $0 < \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'} - 1 = \frac{1}{u'}$ *on a*

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}}).\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{r,\widehat{r'}}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{u,\widehat{u'}}).$$

*Démonstration.* — $\alpha$) Si $p' < \infty$ et $r' < \infty$ les hypothèses sur les indices entraînent $1 \leq 1 + \frac{1}{t} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$ et $1 \leq 1 + \frac{1}{t'} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{s'}$ donc, avec les mêmes notations que dans la démonstration précédente, le produit de convolution $\hat{\sigma} * \hat{\tau}$ appartient à l'espace $\ell^t(L^{t'})$ [6] avec $1 < t'$. On définit de même le produit $\sigma\tau$ par $\langle \sigma\tau, \varphi \rangle = \langle \hat{\sigma} * \hat{\tau}, \hat{\varphi}\check{}\, \rangle$ et on en déduit que $\sigma\tau$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{u,u'})$. Si $p' = r' = \infty$ la démonstration est identique car $\hat{\sigma}$ et $\hat{\tau}$ appartiennent respectivement à $\ell^q(\mathcal{M})$ et $\ell^s(\mathcal{M})$ donc $\hat{\sigma} * \hat{\tau}$ appartient à $\ell^t(\mathcal{M})$ [6].

$\beta$) La démonstration est identique en utilisant le produit de convolution dans les espaces $\ell(\hat{\ell})$ [5].

Soient $\sigma$ une quasimesure et $f$ une fonction de $A$, le produit $\sigma f$ est une quasimesure. C'est vérifié en particulier pour $f$ dans $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\infty,p'})$ car $\hat{f}$ appartient à $\ell^1(L^{q'}) \subset L^1$.

D'après la proposition 5 on voit que si $\sigma$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,q'})$ et si $f$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\infty,p'})$, le produit $\sigma f$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,1})$. Le résultat suivant caractérise les quasimesures de $\ell^\infty(Q)$ qui sont des multiplicateurs ponctuels de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\infty,p'})$ dans $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,1})$.

THÉORÈME 4. — *Soit $\sigma$ une quasimesure de $\ell^\infty(Q)$ telle que pour tout élément $f$ de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\infty,p'})$ le produit $\sigma f$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,1})$ ; alors $\sigma$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,q'})$.*

*Démonstration.* — D'après le théorème 1 on sait que $\hat{f}$ décrit l'espace $\ell^1(L^{q'})$ et que $\widehat{\sigma f}$ appartient à $L^\infty$. Comme $\hat{\sigma}$ appartient à $\ell^\infty(Q)$ on a $\widehat{\sigma f} = \hat{\sigma} * \hat{f}$. L'application linéaire $T$ de $\ell^1(L^{q'})$ dans $L^\infty$ définie par $T(g) = \hat{\sigma}^{\check{}} * g$ vérifie $\widehat{T(g)} = \sigma \hat{g}$ avec $\sigma$ dans $\ell^\infty(Q)$. Donc d'après [28], th 6.1, $\sigma$ est la transformée de Fourier d'une fonction $h$ de $\ell^\infty(L^{p'})$, espace dual de $\ell^1(L^{q'})$. Par suite $\sigma$ appartient à la classe $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{1,q'})$.

Le résultat suivant généralise les théorèmes 4 et 5 de F. Holland [22] sur les multiplicateurs ponctuels de $A$ dans $\mathcal{R}(\Phi_{p,\infty})$.

THÉORÈME 5. — *Soit $\sigma$ une quasimesure de $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$, pour toute fonction $f$ de $A$ le produit $\sigma f$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$. Inversement soit $\sigma$ une quasimesure de $\ell^\infty(Q)$ telle que pour toute fonction $f$ de $A$ le produit $\sigma f$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$, alors $\sigma$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$.*

*Démonstration.* — Dans un sens si $\sigma$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ et si $f$ est dans $A$, pour tout élément $\varphi$ de $\Phi$ le produit $f\varphi$ est dans $\Phi$ donc on a

$$|\langle \sigma f, \varphi\rangle| = |\langle \sigma, f\varphi\rangle| \leq C\|\widehat{f\varphi}\|_{p,p'} = C\|\hat{f} * \hat{\varphi}\|_{p,p'} \leq C\|\hat{f}\|_1\|\hat{\varphi}\|_{p,p'}$$

donc $\sigma f$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$.

Inversement soit $\sigma$ une quasimesure de $\ell^\infty(Q)$ telle que pour toute fonction $f$ de $A$ le produit $\sigma f$ soit dans $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$. Le produit de convolution $\hat{\sigma} * \hat{f}$ appartient à $\ell^q(L^{q'})$ (ou à $\ell^q(\mathcal{M})$). L'application $T$ de $L^1$ dans $\ell^q(L^{q'})$ ( ou $\ell^q(\mathcal{M})$) définie par $T(g) = \hat{\sigma}^{\check{}} * g$ vérifie $\widehat{T(g)} = \sigma\hat{g}$ avec $\sigma$ dans $\ell^\infty(Q)$. Donc d'après [28], th 5.1 et th 5.2, $\sigma$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\ell^q(L^{q'})$ (ou d'une mesure de $\ell^q(\mathcal{M})$). Donc $\sigma$ appartient à $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ d'après le théorème 1.

### c) RELATIONS AVEC LES ESPACES $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$.

En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier sur les espaces $\ell^p(\widehat{\ell^{p'}})$ on obtient des résultats pour certaines classes de résonances de quasimesures qui ne sont pas formées uniquement de fonctions.

PROPOSITION 6. — *Pour $p' \leq p < \infty$ on a l'inclusion $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}}) \subset \ell^{q'}(\widehat{\ell^q})$. Pour $p \leq p' < \infty$ on a l'inclusion $\ell^{q'}(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$.*

*Démonstration.* — La transformation de Fourier est un isomorphisme entre les espaces $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$ et $\ell^q(\widehat{\ell^{q'}})$. En supposant $p' \leq p$ on a $q \leq q'$ et la transformation de Fourier est une application de $\ell^q(\widehat{\ell^{q'}})$ dans $\ell^{q'}(\widehat{\ell^q})$. Si on suppose $p \leq p'$ donc $q' \leq q$, la transformation de Fourier est une application de $\ell^{q'}(\widehat{\ell^q})$ dans $\ell^q(\widehat{\ell^{q'}})$. Les deux inclusions en résultent.

Pour $2 \leq p$ on a $\ell^{q'}(\widehat{\ell^q}) \subset \ell^{q'}(L^p)$ donc pour $p' \leq p$ et $2 \leq p$ la classe $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$ est un espace de fonctions. C'est aussi un espace de fonctions pour $2 \leq p$ et $2 \leq p'$ ; donc pour $2 \leq p$ la classe $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}})$ est un espace de fonctions.

Les résultats qui suivent donnent des inclusions entre les différentes classes de résonance, dans les cas où ce ne sont pas des espaces de fonctions, et les espaces $\ell(\hat{\ell})$. On supposera donc $p < 2$.

Proposition 7. — *Pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \leq 1$ on a les inclusions $\ell^2(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) \subset \ell^{p'}(\widehat{\ell^q})$, pour $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ et $2 \leq p'$ on a $\ell^2(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) \subset \ell^q(\widehat{\ell^q})$, pour $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ et $p' < 2$ on a $\ell^{p'}(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) \subset \ell^q(\widehat{\ell^q})$.*

*Démonstration.* — Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \leq 1$, comme $2 \leq p'$ on a $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}})$ et comme $q' \leq p$ on a $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}}) \subset \ell^{p'}(\widehat{\ell^q})$. Si $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, on a $p' < q$ d'où $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,q})$ et on vient de montrer l'inclusion $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,q}) \subset \ell^q(\widehat{\ell^q})$.

Pour $2 \leq p'$, c'est-à-dire dans les deux premiers cas, on a $\ell^2(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\hat{2}})$ car $p < 2$ et $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\hat{2}}) = \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,2}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$. Enfin si $p' < 2$ avec $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, on a $p' < q$ donc $\widehat{\ell^{p'}(\widehat{\ell^q})} \subset \ell^q(\widehat{\ell^{p'}}) \subset \ell^q(L^{q'})$ ; comme la transformation de Fourier est un isomorphisme entre les espaces $\ell^q(L^{q'})$ et $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$, on en déduit l'inclusion $\ell^{p'}(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$.

Proposition 8. — *Pour $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ on a les inclusions $\ell^{p'}(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}}) \subset \ell^q(\widehat{\ell^q})$, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} < 1$ on a $\ell^q(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}}) \subset \ell^{p'}(\widehat{\ell^q})$.*

*Démonstration.* — Pour $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, comme $p \leq q'$ on a $\ell^{p'}(\widehat{\ell^q}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\hat{p}}) = \ell^q(\widehat{\ell^q})$. Pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} < 1$, comme $q' < p$ on a $\ell^q(\widehat{\ell^q}) = \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\hat{p}}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}}) \subset \ell^{p'}(\widehat{\ell^q})$.

Le schéma suivant, dans lequel chaque point du carré représente un espace $\ell^{\frac{1}{x}}(L^{\frac{1}{y}})$, $\ell^{\frac{1}{x}}(\widehat{\ell^{\frac{1}{1-y}}})$, $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\frac{1}{y},\frac{1}{x}})$, ou $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\frac{1}{y},\widehat{\frac{1}{1-x}}})$, résume différents résultats :

Pour chaque famille d'espaces, les flèches vers le haut ou vers la gauche correspondent à des injections. Les transformations de Fourier $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'}) \longleftrightarrow \ell^q(L^{q'})$ et $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}}) \longleftrightarrow \ell^q(\widehat{\ell^{q'}})$ correspondent à la symétrie par rapport à la diagonale du carré. Dans le rectangle hachuré on a les inclusions $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{q'}}) \subset \widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,p'})$ et on a les inclusions contraires dans l'autre rectangle. Au dessous de la diagonale du carré on a les inclusions $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi_{p,\widehat{p'}}) \subset \ell^{q'}(\widehat{\ell^q})$ et on a les inclusions contraires au dessus de la diagonale.

## Bibliographie


[1] Argabright L. N and Gil de Lamadrid J. — *Fourier analysis of unbounded measures on locally compact abelian groups*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. n°145, 1974.

[2] Aronszajn N and Szeptycki P. — *On general integral transformation*, Math. Ann. **163** (1966), 127–154.

[3] Bertrandias J. P. — *Espaces $\ell^p(A)$ et $\ell^p(Q)$*, Groupe de Travail d'Analyse Harmonique, fascicule 1, Grenoble, 1982.

[4] Bertrandias J. P. — *Sur les théorèmes de Littlewood et d'Orlicz-Paley-Sidon*, Groupe de Travail d'Analyse Harmonique, fascicule 2, Grenoble, 1984.

[5] Bertrandias J. P. — *Espaces $\ell^p(\widehat{l^\alpha})$*, Groupe de Travail d'Analyse Harmonique, fascicule 2, Grenoble, 1984.

[6] Bertrandias J. P, Datry C, Dupuis C. — *Unions et intersections d'espaces $L^p$ invariantes par translation ou convolution*, Ann. Inst. Fourier **28, 2** (1978), 53–84.

[7] Bertrandias J. P, Dupuis C. — *Transformation de Fourier sur les espaces $\ell^p(L^{p'})$*, Ann. Inst. Fourier **29, 1** (1979), 189–206.

[8] Bochner S. — *Monotone funktionen, Stieltjessche integrale, und harmonische analyse*, Math. Ann. **108** (1933), 378–410.

[9] Cooper J. L. B. — *Positive definite functions of a real variable*, Proc. London Math. Soc. **(3) 10** (1960), 53–66.

[10] Cowling M. — *Some applications of Grothendieck's theory of topological tensor products in Harmonic Analysis*, Math. Ann **232** (1978), 273–285.

[11] Dupuis C. — *Quasimesures de type positif*, Bull. Sc. math, 2° série **105** (1981), 169–180.

[12] Dupuis C. — *Un exemple d'utilisation du théorème d'Orlicz-Paley-Sidon*, Groupe de Travail d'Analyse Harmonique, fascicule 1, Grenoble, 1982.

[13] Eberlin W. F. — *Characterizations of Fourier-Stietjes transforms*, Duke Math. J. **22** (1955), 465–468.

[14] Feichtinger H. G. — *A characterisation of Wiener's algebra on locally compact groups*, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), 136–140.

[15] Feichtinger H. G. — *Banach convolution algebras of Wiener's type*, Proc. Conf. Functions, Series, Operators, Budapest, 1980. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, North-Holland, 1983.

[16] Feichtinger H. G. — *Banach spaces of distributions of Wiener type and interpolation*, Proc. conf. Oberwolfach. Fonctional Analysis and approximation. Int. Ser. Num. Math **60** (1981), 153–165.

[17] Feichtinger H. G. — *On a new Segal algebra*, Monatshefte f. Math. **92** (1981), 269–289.

[18] Fournier J. F and Stewart J. — *Amalgams of $L^p$ and $\ell^q$*, Bull. Amer. Math. Soc. **13, 1** (1985), 1–21.

[19] Gaudry G. I. — *Quasimeasures and operators commuting with convolution*, Pacific J. Math **18 (3)** ( 1966), 461–476.

[20] Goldberg R. R. — *On a space of functions of Wiener*, Duke Math. J. **34** (1967), 683–691.

[21] Holland F. — *Harmonic analysis on amalgams of $L^p$ and $\ell^q$*, London Math. Soc. **(2) 10** (1975), 295–305.

[22] Holland F. — *On the representation of functions as Fourier transforms of unbounded measures*, Proc. London Math. Soc **(3) 30** (1975), 347–365.

[23] Lui T. S, van Rooij A and Wang J. K. — *On some group algebra; modules related to Wiener's algebra $M_1$*, Pacific J. Math. **55** (1974), 507–520.

[24] Stewart J. — *Unbounded positive definite functions*, Canad. J. Math. **21** (1969), 1309–1318.

[25] Stewart J. — *Fourier transforms of unbounded measures*, Canad. J. Math. **31** (1979), 1281–1292.

[26] Szeptycki P. — *On functions and measures whose Fourier transforms are functions*, Math. Ann **179** (1968), 31–41.

[27] Torres de Squire M. — *Resonance classes of measures*, Internat. J. Math. & Math. Sci **10 (3)** (1987), 461–472.

[28] Torres de Squire M. — *Multipliers for amalgams and the algebra $S_0(G)$*, Can.J.Math **39 (1)** (1987), 123–148.

[29] Wiener N. — *On the representation of functions by trigonometrical integrals*, Math. Z **24** (1926), 575–616.

[30] Wiener N. — *Tauberian theorems*, Ann. of Math. **33** (1932), 1–100.

– ◊ –

Université de Grenoble I
**Institut Fourier**
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(14 décembre 1995)