SUR UN PROBLEME D'UNICITE POUR LES POLYNOMES

Pakovitch Fedor

1. Introduction et résultats. - Dans [1] C.C. Yang a posé le problème d'unicité suivant : *soient $P(z)$ et $Q(z)$ des polynômes complexes de même degré. Est-il vrai que $P(z)(P(z)-1)=0 \iff Q(z)(Q(z)-1)=0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, implique que, soit $P=Q$, soit $P+Q=1$?* Autrement dit, *un polynôme complexe de degré n est-il défini, à symétrie près, par la préimage géométrique d'un couple de points de $\mathbb{C}$?* La discussion de ce problème dans le cadre de la théorie des fonctions méromorphes et sa résolution dans quelques cas particuliers peuvent être retrouvées dans [2]-[4]. Dans cette note, on montre (corollaire 2), en utilisant quelques idées de théorie d'approximation, que la réponse à la question de C.C. Yang est toujours affirmative et on donne quelques généralisations. Le résultat principal est:

Théorème 1. *Soient $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $P(z)$ un polynôme complexe unitaire de degré n, $d=\max_{z\in K}|P(z)|$, $d>0$. Supposons qu'il existe un nombre complexe α tel que:*

1) $|\alpha|=d$,

2) toutes les racines du polynôme $P^2(z)-\alpha^2=0$ appartiennent à K.

Alors le polynôme $P(z)$ est l'unique polynôme qui s'écarte le moins possible de zéro sur le compact K parmi tous les polynômes complexes unitaires de degré n. C'est-à-dire, pour tout polynôme complexe unitaire $\tilde{P}(z)$ de degré n distinct de $P(z)$, on a $\max_{z\in K}|\tilde{P}(z)|>d$.

Corollaire 1. *Soit $T \subset \mathbb{C}$ un compact contenu dans le disque D de centre l'origine, de rayon d. Supposons que T contienne au moins deux points symétriques $\pm\alpha$ qui sont sur le bord du disque D. Alors, si $P(z), Q(z)$ sont deux polynômes complexes non constants de même degré dont les préimages de T coïncident, il existe $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon|=1$, tel que $P=\varepsilon Q$.*

Démonstration du corollaire 1. Soient $P(z)=p_nz^n+\ldots+p_0$, $Q(z)=q_nz^n+\ldots+q_0$. Considérons le compact $K=Q^{-1}\{T\}=P^{-1}\{T\}$ et les polynômes $\tilde{P}(z)=P(z)/p_n$, $\tilde{Q}(z)=Q(z)/q_n$. En appliquant le théorème 1, on conclut que $|p_n|=|q_n|$, $\tilde{Q}(z)=\tilde{P}(z)$. Donc, $P(z)=\varepsilon Q(z)$, $|\varepsilon|=1$.

Corollaire 2. *Soient k un corps,* $\operatorname{char} k=0$, *$P(z),Q(z)\in k[z]$,* $\deg P=\deg Q>0$, *$a,b\in k$, $a\neq b$. Supposons que pour les idéaux principaux J_P, J_Q de l'anneau $k[z]$, respectivement engendrés par les polynômes $(P(z)-a)(P(z)-b)$ et $(Q(z)-a)(Q(z)-b)$, on ait l'égalité:* $\operatorname{rad} J_P=\operatorname{rad} J_Q$. *Alors $P=Q$ ou $P+Q=a+b$.*

Démonstration du corollaire 2. Soit $\tilde{k}$ un corps engendré sur $\mathbb{Q}$ par toutes les racines contenues dans la clôture algébrique de k, des polynômes $(P(z)-a)(P(z)-b)$ et $(Q(z)-a)(Q(z)-b)$. Puisque l'égalité $\operatorname{rad} J_P=\operatorname{rad} J_Q$ est encore vraie dans $\tilde{k}[z]$ et que $\tilde{k}$ est engendré par un nombre fini de générateurs sur $\mathbb{Q}$, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $k=\mathbb{C}$, et $a=1$, $b=-1$. En utilisant le corollaire 1, on conclut que $P(z)=\varepsilon Q(z)$, $|\varepsilon|=1$. Or $P(x)=\pm1$ implique $Q(x)=\pm1$. Donc $\varepsilon=\pm1$.

2. Démonstration du théorème 1. Soient

$$P(z)-\alpha=(z-x_1)^{a_1}(z-x_2)^{a_2}\dots(z-x_k)^{a_k},$$

$$P(z)+\alpha=(z-y_1)^{b_1}(z-y_2)^{b_2}\dots(z-y_l)^{b_l}.$$

On a

$$(z-y_1)^{b_1}(z-y_2)^{b_2}\dots(z-y_l)^{b_l}-(z-x_1)^{a_1}(z-x_2)^{a_2}\dots(z-x_k)^{a_k}=2\alpha. \tag{1}$$

Notons $Q_r(t_1,t_2,...,t_n)=t_1^r+\dots+t_n^r$, $r=1,...,n$ la r-ième somme de Newton, $S_r(t_1,...,t_n)$, $r=1,...,n$ le r-ième polynôme élémentaire symétrique. Désignons par $u_1,...,u_n$ et $v_1,...,v_n$ les racines des polynômes $P(z)-\alpha$ et $P(z)+\alpha$ respectivement, en écrivant m fois chaque racine multiple d'ordre m. Il est clair que l'équation (1) est équivalente au système:

$$\begin{gathered}S_r(u_1,...,u_n)-S_r(v_1,...,v_n)=0,\ r=1,...,n-1,\\ S_n(u_1,...,u_n)-S_n(v_1,...,v_n)=(-1)^{n+1}2\alpha.\end{gathered} \tag{2}$$

Par ailleurs, en utilisant les formules [5]

$$Q_r=\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 2S_2 & S_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 3S_3 & S_2 & S_1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (r-1)S_{r-1} & S_{r-2} & S_{r-3} & S_{r-4} & \dots & 1\\ rS_r & S_{r-1} & S_{r-2} & S_{r-3} & \dots & S_1 \end{vmatrix} \quad 1\le r\le n,$$

il est facile de vérifier que le système (2) est équivalent au système:

$$\begin{gathered}Q_r(u_1,...,u_n)-Q_r(v_1,...,v_n)=0,\ r=1,...,n-1,\\ Q_n(u_1,...,u_n)-Q_n(v_1,...,v_n)=2\alpha n.\end{gathered}$$

Donc, avec les notations précédentes, nous obtenons le système:

$$\begin{gathered}a_1+a_2+\dots+a_k-b_1-b_2-\dots-b_l=0\\ a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_kx_k-b_1y_1-b_2y_2-\dots-b_ly_l=0\\ a_1x_1^2+a_2x_2^2+\dots+a_kx_k^2-b_1y_1^2-b_2y_2^2-\dots-b_ly_l^2=0\\ \dots\\ a_1x_1^n+a_2x_2^n+\dots+a_kx_k^n-b_1y_1^n-b_2y_2^n-\dots-b_ly_l^n=2\alpha n.\end{gathered} \tag{3}$$

Maintenant, soit $\tilde{P}(z) = z^n + \tilde{p}_{n-1}z^{n-1} + ... + \tilde{p}_0$ un polynôme complexe unitaire de degré n. En multipliant la r-ième équation du système (3) par $\tilde{p}_{r-1}$, $r = 1, ..., n$ et en ajoutant toutes les équations obtenues, il résulte:

$$2\alpha n = \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{P}(x_i) - \sum_{j=1}^{l} b_j \tilde{P}(y_j).$$

Donc, on a

$$2n|\alpha| \leq \max_{z \in K} |\tilde{P}(z)| \left(\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{j=1}^{l} b_j \right) = 2n \max_{z \in K} |\tilde{P}(z)|.$$

D'où $\max\limits_{z \in K} |\tilde{P}(z)| \geq d$.

On a ainsi prouvé, que $P(z)$ est un polynôme qui s'écarte le moins possible de zéro sur le compact K parmi tous les polynômes complexes unitaires de degré n. Le théorème de Kolmogorov [6] garantit l'unicité de ce polynôme si le compact contient au moins n points. On sait que le compact K contient les points $x_1, x_2, ...x_k$ et $y_1, y_2, ...y_l$. Comme x_i (respectivement y_j) est une racine de $P'(z)$ de multiplicité $a_i - 1$ (respectivement $b_j - 1$), on a

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i - 1) + \sum_{j=1}^{l}(b_j - 1) \leq n - 1.$$

Mais

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i - 1) + \sum_{j=1}^{l}(b_j - 1) = 2n - (k + l),$$

d'où $k + l \geq n + 1$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarques. 1) L'hypothèse d'égalité des degrés dans le corollaire 2 est essentielle. Par exemple pour les polynômes $P(z) = 8z^2 - 5$, $Q(z) = 12z^3 - 9z$, on a $P^{-1}\{-3, 3\} = \{-1, -1/2, 1/2, 1\} = Q^{-1}\{-3, 3\}$.

2) Le corollaire 2 ne s'étend pas aux fonctions rationnelles, comme on le voit dans [7] avec l'exemple des fonctions $f_1 = -4z^3(z-1)^{-3}(z+1)^{-1}$, $f_2 = -4z(z-1)^{-1}(z+1)^{-3}$ pour lesquelles $f_1^{-1}\{0\} = f_2^{-1}\{0\}$, $f_1^{-1}\{1\} = f_2^{-1}\{1\}$, $f_1^{-1}\{\infty\} = f_2^{-1}\{\infty\}$.

3) Le théorème 1 implique quelques résultats bien connus de théorie d'approximation. Par exemple, le résultat classique suivant est une application immédiate du théorème 1: *le polynôme de Chebyshev $T_n(y)$ est celui qui s'écarte le moins possible de zéro sur le segment $[-1, 1]$ parmi tous les polynômes complexes unitaires de degré n.* En effet, à partir de la définition $T_n(\cos z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos nz$, il est facile de vérifier que $\max\limits_{y \in [-1,1]} |T_n(y)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et que la préimage de $\left\{-\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ est incluse dans le segment $[-1, 1]$.

Références bibliographiques

[1] C. C. Yang, *Complex analysis*, Proc. of the SUNY Brockport Conf., Dekker, New York and Basel, 1978, p.169.

[2] M.G. Zaidenberg, V.Ya. Lin, Finiteness theorems for holomorphic mappings. Encyclopadia of Math. Sci. Vol. 9. Several Complex Variables 3. Berlin Heidelberg New York e.a.: Springer Verlag, 1989, p. 113-172.

[3] T. T. Moh, On certain group structure for polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., 82, n 2, 1981, p.183-187.

[4] H. Dobbertin und G. Schmieder, Zur Charakterisierung von Polynomen durch ihre Null- und Einsstellen, Arch. Math., 48, 1987, p.337-342.

[5] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford, Claredon Press, 1979, p.20.

[6] M. G. Krein, A. A. Nudelman, *The Markov moment problem and extremal problems*, Providence, American Mathematical Society, 1977, p.358

[7] A. K. Pizer, A problem on rational functions, Amer. Math. Mon., 80, 1973, n 5, p.552-553.