LE POINT D'UN FERMÉ LE PLUS VISITÉ PAR LE MOUVEMENT BROWNIEN

par Christophe LEURIDAN

Résumé

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$, issu de 0. Soit $(L_t^x)_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$ une version continue de ses temps locaux. F étant un fermé de $\mathbb{R}$, contenant 0, on s'intéresse au processus càdlàg $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}^+}$, où A_t^F est "le" point de F le plus visité à l'instant t, c'est-à-dire "le" point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$, en notant $L_t^F = \max_{x\in F} L_t^x$.

On démontre que le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à variation localement bornée, et que le processus croissant $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ majore le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $(B_t - A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Lorsque $F = \mathbb{R}$, on montre que cette majoration est en fait une égalité, que le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est purement de sauts, et que ses sauts ne sont ni isolés, ni "obligés".

Introduction

On considère dans cet article un mouvement brownien $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ dans $\mathbb{R}$, issu de 0, à trajectoires continues, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $(L_t^x)_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$ désigne une version presque sûrement continue du temps local associé à B.

F étant un fermé non vide de $\mathbb{R}$, on note pour $t \in \mathbb{R}_+$: $L_t^F = \sup_{x\in F} L_t^x$. Comme presque sûrement, pour $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto L_t^x$ est continue à support compact, L_t^F est en fait un maximum de temps locaux. On s'intéresse aux points $a \in F$ réalisant ce maximum, c'est-à-dire tels que $L_t^a = L_t^F$: ce sont les points de F les plus visités par le mouvement brownien B à l'instant t. En fait, il y a en général un seul point réalisant le maximum à un instant donné (voir théorème 1).

Des résultats sur le point le plus visité ont déjà été obtenus par R.F. Bass, P..S. Griffin et N. Eisenbaum dans les cas particuliers où $F = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$.

R.F. Bass et P.S. Griffin ont publié en 1985 [2] des résultats remarquables décrivant le comportement asymptotique du plus petit point de $\mathbb{R}_+$ le plus visité, défini à tout instant

$t \geq 0$ par la formule :

$$\underline{A}_t^{\mathbb{R}_+} = \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid L_t^x = L_t^{\mathbb{R}_+}\}.$$

Leur résultat le plus surprenant est le suivant :

$$\text{pour tout } \gamma > 11, \quad \underline{A}_t^{\mathbb{R}_+} t^{-1/2} (ln\ t)^\gamma \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui entraîne en particulier que $\underline{A}_t^{\mathbb{R}_+}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, ce qui est loin d'être évident. Ils ont également montré que :

$$\text{pour tout } \gamma < 2, \quad \liminf_{t \to +\infty} \underline{A}_t^{\mathbb{R}_+} t^{-1/2} (ln\ t)^\gamma = 0,$$

et :

$$\limsup_{t \to +\infty} \underline{A}_t^{\mathbb{R}_+} \big(2tln(ln\ t)\big)^{-1/2} = 1,$$

et ils ont transposé tous ces résultats à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Dans sa thèse de doctorat [5], soutenue en 1989, N. Eisenbaum a prouvé un théorème d'unicité : presque sûrement, à tout instant $t > 0$, il y a un seul point de $\mathbb{R}$ le plus visité, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'instants où il y a exactement deux points, B_t étant l'un deux.

N. Eisenbaum a également obtenu plusieurs lois explicites concernant le point le plus visité par une excursion, ou par le mouvement brownien au premier instant où le temps local en 0 atteint une valeur $r > 0$, ainsi qu'un théorème de type "Ray-Knight" donnant la loi des temps locaux à l'instant où leur maximum sur $\mathbb{R}_+$ atteint la valeur 1.

L'objet de ce travail est de décrire le comportement trajectoriel du processus du point de F le plus visité, F étant un fermé de $\mathbb{R}$ fixé.

On supposera toujours que le fermé F contient le point 0, ce qui nous évitera le problème de définir le processus du point de F le plus visité avant le premier instant d'atteinte de F par le mouvement brownien, et ce qui simplifie certaines formules. Cette restriction ne constitue pas vraiment une perte de généralité puisqu'on peut toujours se ramener à ce cas en ne regardant le mouvement brownien B qu'à partir de son premier instant d'atteinte de F.

Nous commençons dans la première partie, par démontrer un théorème d'unicité généralisant celui de N. Eisenbaum : nous prouvons que presque sûrement, à tout instant $t > 0$, il existe un seul point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'instants où il y a exactement deux points. Cet ensemble d'instants est inclus dans l'ensemble des extrémités droites des intervalles de constance du processus $(L_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

De façon imagée, nous étudions une "course de temps locaux" à laquelle ne participent que les temps locaux indexés par les points de F. À tout instant, il y a un seul temps local en tête de la course, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'instants où un temps local en double un autre.

N. Eisenbaum a prouvé ce résultat dans le cas où $F = \mathbb{R}$ en utilisant le théorème de D.B. Ray [10] donnant la loi du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ pour un temps T exponentiel indépendant du mouvement brownien. La démonstration que nous donnons ici a l'avantage d'être valable pour n'importe quel fermé F et de n'utiliser que des propriétés élémentaires du mouvement brownien : propriété de Markov, continuité des temps locaux, constance du temps local en x sur tout intervalle de temps où le mouvement brownien ne passe pas en x.

Ce théorème nous permet de définir un processus càdlàg $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans F et vérifiant à tout instant $t \in \mathbb{R}_+$ l'égalité $L_t^{A_t^F} = L_t^F$. Il montre que ce processus est constant sur les intervalles ouverts de constance de $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et ne peut sauter qu'aux extrémités droites de ces intervalles.

Nous prouvons également que l'ensemble des zéros du processus $(B_t - A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est égal au support de la mesure de Stieltjes associée au processus croissant $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$, et qu'il est de mesure nulle.

Cela nous amène à nous poser les questions suivantes, qui font l'objet des parties 2, 3 et 4 :

– le processus $(B_t - A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est-il une semi-martingale ?

– si oui, y-a-t-il un lien entre ses temps locaux en 0+, en $0-$, et le processus $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$?

Nous pouvons préciser la première question :

– le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est-il à variation localement bornée ?

– a-t-il une partie continue ?

– si F n'a pas de point isolé, $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ peut-il avoir des sauts isolés ?

Hormis dans le cas simple où le fermé F est discret, nous ne répondrons complètement à ces questions que dans le cas où $F = \mathbb{R}$, en prouvant que le processus $(A_t^{\mathbb{R}})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de sauts, et que $L_t^* = \sup_{x\in\mathbb{R}} L_t^x$ représente le temps local en 0 (les temps locaux sont continus dans ce cas) de la semi-martingale $B - A^{\mathbb{R}}$ à l'instant t.

Il est raisonnable de penser que ces résultats restent vrais pour un fermé F quelconque, mais le calcul qui achève la démonstration lorsque $F = \mathbb{R}$ se heurte à des difficultés techniques importantes dans le cas général. Nous obtenons toutefois les résultats partiels suivants : le processus A^F est à variation localement bornée et le processus croissant L^F *majore* le temps local symétrique de la semi-martingale $B - A^F$, c'est-à-dire la demi-somme des temps locaux en 0+ et en $0-$.

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, nous prouvons en outre que les sauts du processus A^F ne sont pas isolés, et qu'ils ne sont pas "obligés" en un sens que nous explicitons dans la cinquième partie.

Venons-en maintenant à la méthode employée pour obtenir ces résultats :

Nous commençons par étudier le cas où le fermé F est discret, ce qui ne pose pas de problème particulier puisqu'alors le processus A^F est en escalier. Nous démontrons en particulier la "formule de Tanaka" suivante :

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F) dB_s - V_t^F + L_t^F,$$

où V_t^F est la variation totale du processus A^F sur l'intervalle $[0, t]$. Cela fait l'objet de la deuxième partie.

Dans la troisième partie, nous cherchons à étendre ces résultats au cas général en approchant le fermé F par une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés discrets. En notant $V_t^{F_n}$ la variation totale du processus A^{F_n} sur l'intervalle $[0, t]$, nous montrons la convergence de $(A_t^{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers A_t^F, puis celle de $(V_t^{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers V_t^F, où V^F est un processus croissant càdlàg. Nous prouvons de cette manière que le processus A^F est à variation bornée.

Malheureusement, cela ne garantit pas que V_t^F soit la variation du processus A^F sur l'intervalle $[0, t]$. Nous pouvons simplement dire que cette variation est *inférieure ou égale* à V_t^F.

En notant $\Delta A_s^F = A_s^F - A_{s-}^F$, on a à plus forte raison :

$$\sum_{s\leq t} |\Delta A_s^F| \leq V_t^F.$$

En transformant cette inégalité, nous obtenons l'inégalité $\lambda_t^0 \leq L_t^F$, où λ_t^0 est le temps local symétrique de la semi-martingale $B - A^F$ au point 0 et à l'instant t. Ces deux inégalités sont en fait équivalentes et prouver l'égalité dans l'une équivaut à la prouver dans l'autre.

Dans la quatrième partie, nous démontrons l'égalité :

$$\sum_{s\leq t} |\Delta A_s| = V_t,$$

où l'on note simplement A_t et V_t au lieu de $A_t^{\mathbb{R}}$ et $V_t^{\mathbb{R}}$, ce qui prouve à la fois que le processus A est un processus de sauts et que V_t représente sa variation totale sur l'intervalle $[0, t]$.

Nous procédons de manière indirecte en montrant par un calcul explicite l'égalité $\mathbb{E}\lambda_T^0 = \mathbb{E}L_T^*$, où T est un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien B et $L_T^* = L_T^{\mathbb{R}}$. La formule de A.N. Borodin [4] nous fournit une expression du second membre $\mathbb{E}L_T^*$. Pour le premier, on ramène son calcul à celui de la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T$, ou encore de la variable aléatoire A_T. Le calcul de cette dernière est assez technique et repose sur le théorème de D.B. Ray (voir [3] ou [10]) donnant la loi du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$.

Dans la cinquième partie, nous établissons deux propriétés concernant les sauts du processus A. Nous prouvons que les sauts ne sont pas isolés (chaque saut est immédiatement suivi d'autres sauts) et qu'ils ne sont pas "obligés" : aux extrémités droites des intervalles de constance de L^* (qui sont les seuls instants ou le processus A peut sauter), il peut ne pas y avoir de saut. Autrement dit, le mouvement brownien peut revenir à son point le plus visité sans que le temps local en ce point se fasse doubler par d'autres temps locaux.

Pour démontrer ces deux propriétés, nous établissons des résultats assez précis concernant l'allure des temps locaux au voisinage de leur maximum, grâce au théorème de N. Eisenbaum (voir [5] ou [6]) donnant la loi du processus des temps locaux au premier instant où leur maximum sur $\mathbb{R}_+$ atteint une valeur $r > 0$, et au théorème de D.B. Ray (voir [3] ou [10]).

Enfin, dans la sixième et dernière partie, nous soulevons quelques questions ouvertes.

1. Le théorème d'unicité et la définition du processus du point de F le plus visité

Commençons par poser quelques notations qui serviront dans toute la suite.

Le processus $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ étant presque sûrement continu et croissant, on introduit les instants τ_r^F et τ_{r+}^F définis pour $r \in \mathbb{R}_+$ par :

$$\tau_r^F = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid L_t^F \geq r\}$$

et

$$\tau_{r+}^F = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid L_t^F > r\} = \lim_{s\to r+} \tau_s^F .$$

Le segment $[\tau_r^F, \tau_{r+}^F]$ est ainsi égal à l'ensemble des instants t tels que $L_t^F = r$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note $g^F(t) = \tau_r^F$ et $d^F(t) = \tau_{r+}^F$ où $r = L_t^F$, ce qui entraîne que $g^F(t) \leq t \leq d^F(t)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fermé F, nous omettrons l'indice F dans les notations ci-dessus. Nous pouvons maintenant énoncer les principaux résultats de cette partie.

1.1. Le théorème d'unicité.

THÉORÈME 1. — *Il existe un événement presque sûr Ω_2 sur lequel on a pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$:*

- *pour tout instant $t \in [\tau_r, \tau_{r+}[$, B_{τ_r} est le seul point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$.*

• *B_{τ_r} et $B_{\tau_{r^+}}$ sont les seuls points $a \in F$ tels que $L^a_{\tau_{r^+}} = L^F_{\tau_{r^+}}$*

COROLLAIRE 1. — *Sur l'événement presque sûr $\Omega_3 = \Omega_2 \cap \{\tau_{0+} = 0\}$, on a à tout instant $t > 0$ unicité du point $a \in F$ tel que $L^a_t = L^F_t$ sauf pour un ensemble d'instants de la forme τ_{r+} avec $r \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $\tau_r < \tau_{r+}$.*

Démonstration du théorème. — On introduit l'événement presque sûr Ω_1 formé des éventualités $\omega \in \Omega$ pour lesquelles :

• la famille des temps locaux $(L^x_t(\omega))^{x \in \mathbb{R}}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continue,

• pour tout $x \in \mathbb{R}$, le processus $(L^x_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est croissant, et ne croît pas hors du fermé :

$$\{t \in \mathbb{R}_+ \mid B_t(\omega) = x\}.$$

La démonstration s'effectue alors en trois étapes, grâce à deux lemmes :

LEMME 1. — *Sur l'événement Ω_1 et pour tout $r \in \mathbb{R}^*_+$, les affirmations suivantes sont vérifiées :*

(i) B_{τ_r} *est le seul point* $a \in F$ *tel que* $L^a_{\tau_r} = r$,

(ii) *pour* $t \in [\tau_r, \tau_{r+}]$, $L^{B_{\tau_r}}_t = r$,

(iii) $B_{\tau_{r^+}} \in F$ *et* $L^{B_{\tau_{r^+}}}_{\tau_{r^+}} = r$.

Le lemme 1 nous dit donc que pour $r \in \mathbb{R}^*_+$, il y a unicité du point de F le plus visité à l'instant τ_r, ce point étant B_{τ_r}. Ce point B_{τ_r} reste l'un des points de F les plus visités pendant l'intervalle de temps $[\tau_r, \tau_{r+}]$. À l'instant τ_{r+}, il apparaît un deuxième point parmi les points de F les plus visités : $B_{\tau_{r^+}}$ qui est peut-être égal à B_{τ_r}.

Démonstration du lemme 1.

– Comme il existe au moins un point $a \in F$ tel que $L^a_{\tau_r} = L^F_{\tau_r} = r$, il suffit pour démontrer *(i)* de prouver que pour $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}\}$, on a $L^x_{\tau_r} < r$. Or si $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}\}$, par continuité du mouvement brownien, il existe $\delta > 0$ tel que $B_t \neq x$ pour tout $t \in [\tau_r - \delta, \tau_r]$, ce qui entraîne :

$$L^x_{\tau_r} = L^x_{\tau_r - \delta} \leq L^F_{\tau_r - \delta} < r,$$

par définition de τ_r.

– *(ii)* se démontre en écrivant, pour $t \in [\tau_r, \tau_{r+}]$, que :

$$r = L^{B_{\tau_r}}_{\tau_r} \leq L^{B_{\tau_r}}_t \leq L^{B_{\tau_r}}_{\tau_{r^+}} \leq L^F_{\tau_{r^+}} = r.$$

– D'après *(i)*, on a pour tout $s > r$, $B_s \in F$ et $L_{\tau_s}^{B_{\tau_s}} = s$. Par continuité de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et de $(L_t^{B_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$, on obtient *(iii)* en passant à la limite quand $s \to r+$.

Nous allons maintenant énoncer le lemme clé de la démonstration :

LEMME 2. — *Il existe un événement presque sûr Ω_2 sur lequel on a $d(t_0) = \tilde{d}(t_0)$ pour tout instant $t_0 \in \mathbb{R}_+$, avec :*

$$\begin{aligned}\tilde{d}(t_0) &= \inf\{t > t_0 \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} \geq L_t^F\}\\ &= \inf\{t > t_0 \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.\end{aligned}$$

En prenant $t_0 = \tau_r$ pour $r \in \mathbb{R}_+$, on obtient une formulation équivalente du lemme 2 :

COROLLAIRE 2. — *Sur l'événement Ω_2, on a pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:*

$$\begin{aligned}\tau_{r+} &= \inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} \geq L_t^F\}\\ &= \inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.\end{aligned}$$

Dans ce corollaire, l'inégalité $\tau_{r+} \geq \inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$ ne nous apprend pas grand chose : c'est une simple conséquence du point *(i)* du lemme 1 : pour tout $s > r$, on a en effet :

$$\tau_s > \tau_r \text{ et } B_{\tau_s} \in F \text{ et } L_{\tau_s}^{B_{\tau_s}} = L_{\tau_s}^F,$$

d'où :

$$\tau_s \geq \inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.$$

En passant à la limite quand $s \to r+$, on obtient l'inégalité :

$$\tau_{r+} \geq \inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.$$

C'est l'inégalité $\tau_{r+} \leq \inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$ qui est fondamentale pour la suite. De façon imagée, cette inégalité (ou plutôt sa démonstration) signifie qu'un temps local en un point de F ne peut rattraper le gagnant de la course de temps locaux sans le dépasser aussitôt après. En effet, lorsque $\tau_r < \tau_{r+}$, $\inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$ représente le premier instant strictement après τ_r où un temps local en un point de F rattrape L^F. Le fait que cet instant soit inférieur ou égal à τ_{r+} signifie qu'à cet instant, L^F vaut encore r. Le fait que cet instant soit supérieur ou égal à τ_{r+} signifie qu'immédiatement après, L^F dépasse r. Lorsque $B_{\tau_r} \neq B_{\tau_{r+}}$, le temps local au point B_{τ_r} se fait donc doubler par celui en $B_{\tau_{r+}}$ ou en l'un de ses voisins immédiats. La démonstration prouvera en fait que le temps local en $B_{\tau_{r+}}$ double effectivement le temps local en B_{τ_r}.

Dans ce corollaire, toute la difficulté est d'obtenir une égalité presque sûre pour tout les $r \in \mathbb{R}_+$ à la fois. À r fixé, on voit facilement en appliquant la propriété de Markov à l'instant τ_r que l'on a l'inégalité presque sûre :

$$\tau_r = \tau_{r+} = \inf\{t > \tau_r \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.$$

Cette égalité a alors peu de signification. L'intérêt de démontrer d'abord le lemme 2 est qu'en prenant $t_0 \in \mathbb{R}_+$ puis $r = L^*_{t_0}$, on est “presque sûr” d'être dans un cas où $\tau_r < \tau_{r+}$.

Démonstration du lemme 2.

• *Démonstration de l'inégalité* $\tilde{d}(t_0) \leq d(t_0)$ *sur l'événement* Ω_1 :

Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $r = L^*_{t_0}$. Pour tout $s > r$, on a d'après le lemme 1, point *(i)* :

$$t_0 \leq \tau_{r+} < \tau_s \quad \text{et} \quad B_{\tau_s} \in F \quad \text{et} \quad L^{B_{\tau_s}}_{\tau_s} = L^F_{\tau_s}.$$

D'où, par définition de $\tilde{d}(t_0)$:

$$\tilde{d}(t_0) \leq \tau_s.$$

En passant à la limite quand $s \to r+$:

$$\tilde{d}(t_0) \leq \tau_{r+} = d(t_0).$$

• *Démonstration de l'inégalité* $d(t_0) \leq \tilde{d}(t_0)$:

On commence par remarquer que les processus d et $\tilde{d}$ sont croissants et continus à droite. Cela se voit en écrivant que d est la composée du processus croissant continu à droite $(\tau_{r+})_{r \in \mathbb{R}_+}$ et du processus croissant continu $(L^F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, et en écrivant pour $t_0 \in \mathbb{R}_+$:

$$\tilde{d}(t_0) = \inf(Z^F \cap \,]t_0, +\infty[)$$

avec :

$$Z^F = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid B_t \in F \text{ et } L^{B_t}_t = L^F_t\}.$$

Par conséquent, il suffit de prouver l'inégalité presque sûre $d(t_0) \leq \tilde{d}(t_0)$ à t_0 fixé et de prendre $\Omega_2 = \{\omega \in \Omega_1 \mid \forall t \in \mathbb{Q}_+ \, d(t, \omega) \leq \tilde{d}(t, \omega)\}$.

À t_0 fixé, l'inégalité presque sûre $d(t_0) \leq \tilde{d}(t_0)$ vient de ce que $\tilde{d}(t_0)$ est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle associée au mouvement brownien B. Par conséquent, presque sûrement le temps local en $B_{\tilde{d}(t_0)}$ augmente aussitôt après $\tilde{d}(t_0)$. Or par définition de $\tilde{d}(t_0)$ et par continuité de B, de $(L^{B_t}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et de $(L^F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, on a :

$$B_{\tilde{d}(t_0)} \in F \quad \text{et} \quad L^{B_{\tilde{d}(t_0)}}_{\tilde{d}(t_0)} = L^F_{\tilde{d}(t_0)}.$$

Donc presque sûrement, pour tout $t > \tilde{d}(t_0)$:

$$L^F_t \geq L^{B_{\tilde{d}(t_0)}}_t > L^{B_{\tilde{d}(t_0)}}_{\tilde{d}(t_0)} = L^F_{\tilde{d}(t_0)} \geq L^F_{t_0},$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{d}(t_0) \geq d(t_0).$$

Fin de la démonstration du théorème 1.

Nous allons démontrer que sur l'événement Ω_2, on a pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$:

(iv) Pour $t \in]\tau_r, \tau_{r+}[$, $B_t \notin F$ ou $L_t^{B_t} < r$. *A fortiori*, $B_t \neq B_{\tau_r}$.

(v) Pour $t \in]\tau_r, \tau_{r+}[$, B_{τ_r} est le seul point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$.

(vi) B_{τ_r} et $B_{\tau_{r+}}$ sont les seuls points $a \in F$ tels que $L_{\tau_{r+}}^a = L_{\tau_{r+}}^F$,

ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Lorsque $\tau_r = \tau_{r+}$, il n'y a rien à prouver dans les points *(iv)* et *(v)*, et le point *(vi)* est déjà prouvé par le point *(i)* du lemme 1. Soit donc $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\tau_r < \tau_{r+}$:

– Le point *(iv)* n'est qu'une autre formulation du corollaire 2.

– S'il existait un instant $t \in]\tau_r, \tau_{r+}[$ et un point $a \in F \setminus \{B_{\tau_r}\}$ tel que $L_t^a = L_t^F$, on aurait d'après le lemme 1 point *(i)* :

$$L_{\tau_r}^a < r = L_t^F = L_t^a.$$

Le mouvement brownien serait passé en a entre les instants τ_r et t, et à son dernier instant de passage s avant t, on aurait :

$$B_s = a \in F \quad \text{et} \quad L_s^{B_s} = L_s^a = L_t^a = L_t^F = L_s^F,$$

ce qui contredirait le point *(iv)*. Cela prouve le point *(v)*.

– Soit $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}, B_{\tau_{r+}}\}$. Par continuité du mouvement brownien, comme $B_{\tau_{r+}} \neq x$, il existe $\delta \in]0, \tau_{r+} - \tau_r[$ tel que $B_t \neq x$ pour tout $t \in [\tau_{r+} - \delta, \tau_{r+}]$. On a donc :

$$L_{\tau_{r+}}^x = L_{\tau_{r+}-\delta}^x < r,$$

d'après le point *(v)*, puisque $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}\}$. Avec les points *(ii)* et *(iii)* du lemme 1, cela prouve le point *(vi)*.

Nous pouvons maintenant définir le processus du point de F le plus visité.

1.2. Définition et propriétés immédiates du processus $(A_t^F)_{t \geq 0}$.

D'après le théorème, lorsque t se trouve dans un intervalle $[\tau_r, \tau_{r+}[$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, B_{τ_r} est le seul point de F le plus visité à l'instant t. On pose alors $A_t^F = B_{\tau_r}$.

Il peut y avoir un problème de choix aux points de la forme τ_{r+} où $r \in \mathbb{R}_+^*$ est tel que $\tau_r < \tau_{r+}$, puisqu'alors l'ensemble des points de F les plus visités est $\{B_{\tau_r}, B_{\tau_{r+}}\}$. Nous choisirons de poser $A_{\tau_{r+}}^F = B_{\tau_{r+}}$. L'intérêt de ce choix sera justifié à la fin de ce paragraphe. Nous posons donc la :

DÉFINITION. — On appelera processus du point de F le plus visité le processus $(A_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par la formule :

$$A_t^F = B_{g(t+)}.$$

Autrement dit :

$$A_t^F = \begin{cases} B_{\tau_r} \text{ si } t \in [\tau_r, \tau_{r+}[\text{ avec } r \in \mathbb{R}_+ \\ B_{\tau_{r+}} \text{ si } t = \tau_{r+}. \end{cases}$$

De tout ce qui précède, on déduit immédiatement les propriétés suivantes, qui joueront un rôle important dans la suite :

COROLLAIRE 3. — *Sur l'événement presque sûr Ω_3, le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(a) Le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est càdlàg. Il est constant sur les intervalles $[\tau_r, \tau_{r+}[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et ne saute qu'à des instants de la forme τ_{r+}, où $r \in \mathbb{R}_+^*$ est tel que $\tau_r < \tau_{r+}$.

(b) À tout instant $t \geq 0$, $A_t^F \in F$ et $L_t^{A_t^F} = L_t^F$.

(c) À tout instant $t > 0$, les seuls points de F les plus visités sont $A_t^F = B_{g(t+)}$ et $A_{t-}^F = B_{g(t)}$.

(d) Si t est un instant de saut de A^F, alors $B_t = A_t^F$.

(e) À tout instant $t \geq 0$, on a l'équivalence :

$$B_t = A_t^F \Leftrightarrow B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F \Leftrightarrow t \textit{ est un instant de la forme } \tau_r \textit{ ou } \tau_{r+}.$$

.

Remarque 1. — La propriété *(e)* signifie qu'il y a égalité entre :

- l'ensemble des zéros du processus $B - A^F$;
- l'ensemble $Z^F = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$;
- le support de la mesure de Stieltjes associée au processus croissant L^F.

Cela implique en particulier que l'ensemble des zéros du processus $B - A^F$ est fermé, bien que le processus $B - A^F$ ne soit pas continu (excepté dans le cas où $F = \{0\}$). Nous verrons au § 1.3. que ce fermé est presque sûrement de mesure nulle.

Nous pouvons maintenant justifier l'intérêt d'avoir posé $A_{\tau_{r+}}^F = B_{\tau_{r+}}$ (ce qui rend le processus A^F càdlàg) : si nous choisissions de poser $A_{\tau_{r+}}^F = B_{\tau_r}$ (ce qui rendrait le processus A^F càglàd), la propriété *(e)* ne serait pas vraie.

1.3. L'ensemble des zéros de $B - A^F$ est de mesure nulle.

Nous allons démontrer ici la :

PROPOSITION 1. — *Pour tout instant $t > 0$, on a $P[B_t = A_t^F] = 0$.*

Par intégration vis-à-vis de t sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit le :

COROLLAIRE 4. — *Presque sûrement, l'ensemble Z^F des zéros de $B - A^F$ est de mesure nulle.*

La démonstration de la proposition repose sur le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a presque sûrement :*

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \mathbb{1}_{\{L_t^{B_t+y} \leq L_t^{B_t}\}} dy < 1.$$

Autrement dit, presque sûrement B_t n'est pas un point de densité de l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid L_t^x \leq L_t^{B_t}\}.$$

Démonstration du lemme 3. — Par changement d'échelle, la probabilité :

$$P\Big[\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \mathbb{1}_{\{L_t^{B_t+y} \leq L_t^{B_t}\}} dy < 1\Big]$$

est indépendante de $t \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est donc égale à :

$$P\Big[\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \mathbb{1}_{\{L_T^{B_t+y} \leq L_T^{B_T}\}} dy < 1\Big],$$

où T est un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien B. Choisissons T exponentiel d'espérance égale à 2. D'après le théorème de D.B. Ray (voir [3] ou [10]), le processus $(L_T^{B_T+\varepsilon y})_{y\in\mathbb{R}_+}$, où $\varepsilon = \mathrm{sgn}(B_T)$, est une diffusion sur $\mathbb{R}_+$, de générateur infinitésimal $2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$. Comme on a :

$$\Big(2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}\Big)(e^x) = 0 \quad \text{et} \quad \Big(2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}\Big)(e^{2x}) = 4xe^{2x},$$

on en déduit que les processus :

$$(M_y)_{y\in\mathbb{R}_+} \quad \text{et} \quad \Big(M_y^2 - \int_0^y 4(ln M_z)M_z^2 dz\Big)_{y\in\mathbb{R}_+}, \quad \text{où} \quad M_y = \exp(L_T^{B_T+\varepsilon y}),$$

sont des martingales locales. Et comme :

$$4(ln M_y)M_y^2 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 4L_T^{B_T} \exp(2L_T^{B_T}) > 0$$

presque sûrement, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_0^h \mathbb{1}_{\{L_T^{B_T+\varepsilon y} \leq L_T^{B_T}\}} dy &= \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \mathbb{1}_{\{M_y \leq M_0\}} dy \\
&= \liminf_{h\to 0} \frac{\int_0^h \mathbb{1}_{\{M_y \leq M_0\}} 4(ln M_y)M_y^2 dy}{\int_0^h 4(ln M_y)M_y^2 dy} \\
&= \liminf_{h\to 0} \frac{\int_0^h \mathbb{1}_{\{M_y \leq M_0\}} d\langle M, M\rangle_y}{\langle M, M\rangle_h} \\
&= \liminf_{u\to 0} \frac{1}{u} \int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v \leq 0\}} dv,
\end{aligned}$$

où $(\beta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le mouvement brownien obtenu à partir de la martingale locale $(M_y - M_0)_{y\in\mathbb{R}_+}$ par changement de temps (et éventuellement augmentation de l'espace probabilisé).

Montrons que l'on a presque sûrement :

$$\liminf_{u\to 0} \frac{1}{u}\int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v\le 0\}}\,dv = 0.$$

D'après la loi du $0-1$ de Blumenthal-Getoor, il suffit de prouver que pour $x\in]0,1[$, on a :

$$P\Big[\liminf_{u\to 0}\frac{1}{u}\int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v\le 0\}}\,dv \le x\Big] > 0.$$

Or :

$$\begin{aligned}
P\Big[\liminf_{u\to 0}\frac{1}{u}\int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v\le 0\}}\,dv \le x\Big] &\ge P\Big[\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\ge N}\{2^n\int_0^{2^{-n}} \mathbb{1}_{\{\beta_v\le 0\}}\,dv \le x\}\Big]\\
&\ge \limsup_{n\to+\infty} P\Big[2^n\int_0^{2^{-n}} \mathbb{1}_{\{\beta_v\le 0\}}\,dv\le x\Big],\\
&\qquad\qquad \text{d'après le lemme de Fatou},\\
&= P\Big[\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\beta_s\le 0\}}\,ds \le x\Big],\\
&\qquad\qquad \text{par changement d'échelle},\\
&= \frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\sqrt{x} > 0,
\end{aligned}$$

car la variable aléatoire $\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\beta_v>0\}}\,dv$ suit la loi arcsinus sur l'intervalle $[0,1]$ (voir [11] au chapitre VI, théorème 2.7).

Cela montre que l'on a presque sûrement :

$$\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{1}_{\{L_T^{B_T+\varepsilon y}\le L_T^{B_T}\}}\,dy = 0,$$

d'où :

$$\liminf_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^h \mathbb{1}_{\{L_T^{B_T+y}\le L_T^{B_T}\}}\,dy \le \frac{1}{2} < 1,$$

ce qui prouve le lemme 3. On pourrait prouver par des méthodes semblables que cette dernière limite inférieure vaut 0.

Démonstration de la proposition 1. — Soit E l'ensemble des points de densité de F :

$$E = \Big\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{2h}\int_{-h}^h \mathbb{1}_F(x+y)\,dy \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1\Big\}.$$

On a $E \subset F$ car F est fermé, et $F \setminus E$ est de mesure nulle. Écrivons pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}\{B_t = A_t^F\} &= \{B_t \in F\,;\, L_t^{B_t} = L_t^F\} \\ &= \{B_t \in F \setminus E; L_t^{B_t} = L_t^F\} \cup \{B_t \in E; L_t^{B_t} = L_t^F\}.\end{aligned}$$

Le premier de ces deux derniers événements est de probabilité nulle car $F \setminus E$ est de mesure nulle. Le deuxième s'écrit : "B_t est un point de densité de F et F est inclus dans $\{x \in \mathbb{R} \mid L_t^x \leq L_t^{B_t}\}$". Il est donc de probabilité nulle d'après le lemme 3.

2. Le cas où F est discret

2.1. Comportement du processus $(A_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer la

PROPOSITION 2. — *Si F est discret, le processus $(A_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est en escalier.*

Démonstration. — Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des instants où le point de F le plus visité change : $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de temps d'arrêt définie par $T_0 = 0$ et $T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n \mid A_t^F \neq A_{T_n}^F\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

D'après le corollaire 3, le processus $(A_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est càdlàg. Comme F est discret, on en déduit immédiatement que pour $n \in \mathbb{N}$:

- $T_{n+1} > T_n$;
- le processus $(A_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est constant sur l'intervalle $[T_n, T_{n+1}[$;
- $A_{T_{n+1}} \neq A_{T_n}$;
- $B_{T_{n+1}} = A_{T_{n+1}}$ (car T_{n+1} est un instant de saut du processus $(A_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$).

Enfin, on a $T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Sinon, par croissance stricte de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on aurait $T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} T_\infty$ avec $T_\infty \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_{T_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A_{T_\infty -}$. Comme F est un fermé discret, on aurait donc $A_{T_n} = A_{T_\infty -}$ pour n assez grand, ce qui contredirait le fait que $A_{T_{n+1}} \neq A_{T_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Tout cela montre que le processus $(A_t^F)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est en escalier.

2.2. Une formule de Tanaka et sa signification.

Dans tout ce qui suit, nous noterons pour tout x réel :

$$\operatorname{sgn}(x) = \left| \begin{array}{l} -1 \text{ si } x < 0 \\ \ \ 0 \text{ si } x = 0 \\ \ \ 1 \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$$

À l'aide de la proposition 1, nous allons prouver l'identité suivante :

PROPOSITION 2. — *Si F est discret, on a presque sûrement :*

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s - V_t^F + L_t^F \textit{ pour } t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$V_t^F = \sum_{n \in \mathbb{N}^*/T_n \leq t} |A_{T_n}^F - A_{T_{n-1}}^F| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*/T_n \leq t} |B_{T_n} - B_{T_{n-1}}|$$

représente la variation totale du processus A^F sur l'intervalle $[0, t]$.

Démonstration. — Par continuité à droite des processus, il suffit de prouver l'égalité presque sûre à t fixé. Sur l'événement $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$, on a presque sûrement :

$$\begin{aligned}\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} \operatorname{sgn}(B_s - B_{T_k})dB_s + \int_{T_n}^t \operatorname{sgn}(B_s - B_{T_n})dB_s \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[|B_{T_{k+1}} - B_{T_k}| - L_{T_{k+1}}^{B_{T_k}} + L_{T_k}^{B_{T_k}} \right] \\ &\quad + |B_t - B_{T_n}| - L_t^{B_{T_n}} + L_{T_n}^{B_{T_n}},\end{aligned}$$

d'après la formule de Tanaka habituelle. En utilisant les égalités $L_{T_k}^{B_{T_k}} = L_{T_k}^F$ et $L_{T_{k+1}}^{B_{T_k}} = L_{T_{k+1}}^F$ pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s &= V_t^F - L_t^{B_{T_n}} + |B_t - B_{T_n}| \\ &= V_t^F - L_t^F + |B_t - A_t^F|,\end{aligned}$$

qui est l'égalité voulue.

Nous allons maintenant interpréter cette inégalité en termes de temps locaux. Le lecteur pourra trouver dans [15] les définitions et les premières propriétés relatives aux temps locaux de semi-martingales discontinues.

Rappelons que si $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une semi-martingale càdlàg vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < +\infty$, où $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ désigne le saut de X à l'instant s, alors

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ possède une famille de temps locaux continue vis-à-vis de la variable de temps et càdlàg vis-à-vis de la variable d'espace. Le temps local *symétrique* en a, $(\lambda_t^a(X))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donné par la formule :

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_{s-} - a)dX_s + \lambda_t^a(X) \\ + \sum_{s\leq t} \big(\Delta|X-a|_s - \operatorname{sgn}(X_{s-} - a)\Delta X_s\big),$$

où l'on continue de poser $\operatorname{sgn}(0) = 0$ et où le symbole $\int_0^t$ désigne l'intégrale sur le segment $[0,t]$. Par rapport aux cas des semi-martingales continues, la seule différence est le terme correctif $\sum_{s\leq t}(\Delta|X-a|_s - \operatorname{sgn}(X_{s-} - a)\Delta X_s)$ qui vient compenser les différences de sauts des processus $|X-a|$ et $\int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(X_{s-} - a)dX_s$. Ce terme, toujours positif, ne prend en compte que les sauts de X enjambant le point a.

Comme le processus A^F est en escalier, on peut appliquer ce qui vient d'être dit à la semi-martingale $B - A^F$. Notons $(\lambda_t^x)_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$ la famille de ses temps locaux symétriques. On a donc :

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s - \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dA_s \\ + \lambda_t^0 + \sum_{s\leq t}\big[\Delta|B-A^F|_s - \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\Delta(B-A^F)_s\big].$$

À cause de la propriété (d) du processus A^F, tous les sauts de la semi-martingale $B - A^F$ sont en fait des retours en 0. On voit donc que, dans ce cas, le terme correctif $\sum_{s\leq t}[\Delta|B-A^F|_s - \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\Delta(B-A^F)_s]$ est nul et que, comme A^F est en escalier :

$$\begin{aligned}\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dA_s^F &= \sum_{s\leq t}\operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\Delta A_s^F \\ &= \sum_{s\leq t}|\Delta A_s^F| \\ &= V_t^F,\end{aligned}$$

car $B_s = A_s^F$ lorsque s est un instant de saut du processus A^F. Ainsi :

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s - V_t^F + \lambda_t^0.$$

En comparant cette formule et celle de la proposition 2, on en déduit le :

COROLLAIRE 5. — *Lorsque le fermé F est discret, le processus L^F représente le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $B - A^F$.*

3. Le passage du cas discret au cas général

Dans cette partie, nous cherchons à étendre au cas général les résultats de la deuxième partie. Pour cela, nous allons obtenir une formule analogue à la formule "de Tanaka" du § 2.2, et valable pour tout fermé F.

3.1. La formule générale pour la semi-martingale $B - A^F$.

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir le

THÉORÈME 2. — *On a presque sûrement, pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F) dB_s - V_t^F + L_t^F,$$

où V^F est un processus croissant càdlàg. De plus, le processus A^F est à variation localement bornée et sa variation totale sur l'intervalle $[0, t]$ est inférieure ou égale à V_t^F.

Démonstration. — Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés discrets contenant 0, inclus dans F, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distance de tout point de F au fermé F_n soit majorée par 2^{-n}.

D'après la proposition 2, au § 2.2, on a presque sûrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|B_t - A_t^{F_n}| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^{F_n}) dB_s - V_t^{F_n} + L_t^{F_n},$$

où $V_t^{F_n}$ est la variation totale du processus A^{F_n} sur l'intervalle $[0, t]$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, étudions le comportement de chaque terme de cette égalité, quand $n \to +\infty$:

• on a $L_t^{F_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L_t^F$ presque sûrement, par continuité de $x \mapsto L_t^x$. Il y a aussi convergence dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à cause des inégalités $0 \leq L_t^{F_n} \leq L_t^*$, où $L_t^* = \sup_{x \in \mathbb{R}} L_t^x$.

• Sur l'événement "A_t^F est le seul point de F le plus visité à l'instant t" (et donc presque sûrement), on a : $A_t^{F_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A_t^F$. En effet, pour $\alpha > 0$, on a sur cet événement :

$$L_t^{F \setminus]A_t^F - \alpha, A_t^F + \alpha[} < L_t^F,$$

donc, à partir d'un certain rang :

$$L_t^{F \setminus]A_t^F - \alpha, A_t^F + \alpha[} < L_t^{F_n},$$

d'où, comme $F_n \subset F$:

$$A_t^{F_n} \in]A_t^F - \alpha, A_t^F + \alpha[.$$

Cela montre la convergence presque sûre de la suite $(A_t^{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers A_t^F. On en déduit la convergence presque sûre et dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de $(|B_t - A_t^{F_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $|B_t - A_t^F|$, en vertu des inégalités $|B_t - A_t^{F_n}| \leq 2B_t^*$, où $B_t^* = \sup\limits_{s\in[0,t]} |B_s|$.

• On a : $\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^{F_n})d\ B_s \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. En effet :

$$\mathbb{E}[(\int_0^t [\mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^{F_n}) - \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)]dB_s)^2] = \mathbb{E}\int_0^t [\mathrm{sgn}(B_s - A_s^{F_n}) - \mathrm{sgn}(B_s - A_s^F)]^2 ds$$

$$\underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0,$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue puisqu'on a pour tout instant $s > 0$: $A_s^{F_n} \rightarrow A_s^F$ presque sûrement et $B_s \neq A_s^F$ presque sûrement, d'après le § 1.3.

• Par convergence des trois autres termes de l'égalité, on a $V_t^{F_n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} V_t^F$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, où :

$$V_t^F = -|B_t - A_t^F| + \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s + L_t^F.$$

Il reste à établir les propriétés du processus V^F défini par cette égalité. On voit immédiatement que le processus V^F est càdlàg. Par ailleurs les processus $V^{F_n} + A^{F_n}$ et $V^{F_n} - A^{F_n}$ étant croissants, on en déduit facilement que les processus $(V_t^F + A_t^F)_{t\in\mathbb{Q}_+}$ et $(V_t^F - A_t^F)_{t\in\mathbb{Q}_+}$ sont presque sûrement croissants, et donc que les processus $V^F + A^F$ et $V^F - A^F$ sont presque sûrement croissants, par continuité à droite. Cela prouve à la fois que V^F est croissant, que A^F est à variation localement bornée et que V^F majore la variation totale de A^F. Le théorème est donc démontré.

Grâce au théorème, nous allons montrer un résultat qui est l'analogue de la formule classique :

$$L_t^0 = \max_{s\in[0,t]}(-\widehat{B}_s) \text{ où } \widehat{B}_\cdot = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(B_s)dB_s.$$

COROLLAIRE 6. — *Presque sûrement, pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$L_t^F = \sup_{s\in[0,t]}(V_s^F - \widehat{B}_s^F) \text{ où } \widehat{B}_\cdot^F = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)dB_s.$$

Démonstration.

• L'inégalité $L_t^F \geq \sup\limits_{s\in[0,t]}(V_s^F - \widehat{B}_s^F)$ vient de ce que l'on a, pour $s \in [0, t]$:

$$V_s^F - \widehat{B}_s^F = L_s^F - |B_s - A_s^F| \leq L_s^F \leq L_t^F.$$

• Par ailleurs, l'instant $g(t)$ appartient à l'intervalle $[0,t]$ et :

$$V^F_{g(t)} - \widehat{B}^F_{g(t)} = L^F_{g(t)} - |B_{g(t)} - A^F_{g(t)}| = L^F_{g(t)} = L^F_t ,$$

ce qui prouve que la borne supérieure est atteinte et qu'elle vaut L^F_t.

Remarque 2. — Dans l'égalité de processus :

$$|B - A^F| = \int_0^\cdot \mathrm{sgn}(B_s - A^F_{s-})dB_s - V^F + L^F,$$

écrivons que les deux membres ont le même saut à l'instant t. Par continuité de l'intégrale stochastique et de L^F, nous obtenons :

$$\Delta|B - A^F|_t = -\Delta V^F_t .$$

Or à cause de la propriété *(d)* du processus A^F, on montre comme au paragraphe 2.2 que :

$$\Delta|B - A^F|_t = -|\Delta A^F|_t .$$

Ainsi :

$$\Delta V^F_t = |\Delta A^F_t|.$$

Cela montre que le processus V^F et la variation totale de A^F ont les mêmes sauts. Ces deux processus croissants ne peuvent donc différer que par leurs parties continues.

3.2. La formulation en termes de temps locaux.

Pour la même raison qu'au paragraphe 2.2, à savoir la propriété *(d)* du processus A^F (voir au § 1.2, corollaire 3), et grâce à la convention sgn(0) = 0, la formule de Tanaka donnant le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $B - A^F$ s'écrit :

$$|B_t - A^F_t| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A^F_{s-})dB_s - \sum_{s\le t} |\Delta A^F_s| + \lambda^0_t .$$

En comparant cette égalité avec celle du théorème précédent, on obtient :

$$L^F_t = \lambda^0_t + V^F_t - \sum_{s\le t} |\Delta A^F_s|,$$

soit à cause de la remarque précédente :

$$L^F_t = \lambda^0_t + V^F_t - \sum_{s\le t} \Delta V^F_s ,$$

ce qui prouve le :

COROLLAIRE 7. — *Presque sûrement, le processus croissant L^F majore le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $B - A^F$, et il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(1) L^F *est égal au temps local symétrique en 0 de la semi-martingale* $B - A^F$.

(2) V^F *est un processus de sauts.*

(3) *Pour* $t \in \mathbb{R}_+$, $V_t^F = \sum_{s \leq t} |\Delta A_s^F|$.

Nous allons maintenant étudier le lien entre ces assertions et la continuité des temps locaux de la semi-martingale $B - A^F$.

Rappelons que pour une semi-martingale càdlàg $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant presque sûrement, pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$: $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < +\infty$, la différence entre ses temps locaux en $x+$ et en $x-$ est donnée par la formule :

$$L_t^{x+}(X) - L_t^{x-}(X) = 2 \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = x\}} \, dY_s,$$

où $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la partie à variation bornée de la semi-martingale continue $(X_t - \sum_{s \leq t} \Delta X_s)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Dans le cas qui nous intéresse, on a $X = B - A^F$ et $Y = -A^F + \sum_{s \leq \cdot} \Delta A_s^F$. Or, d'après les propriétés *(a)* et *(e)* du processus A^F (voir le corollaire 3 au § 1.2), le support de la mesure de Stieltjes associée au processus A^F est inclus dans l'ensemble des zéros de la semi-martingale $B - A^F$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_t^{x+} - \lambda_t^{x-}) &= -\int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s - A_s^F = x\}} \, dA_s^F + \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{B_s - A_s^F = x\}} \Delta A_s^F \\ &= \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ -A_t^F + \sum_{s \leq t} \Delta A_s^F \text{ sinon,} \end{array} \right. \end{aligned}$$

ce qui permet d'énoncer la :

PROPOSITION 3. — *Les temps locaux de la semi-martingale* $B - A^F$ *sont continus vis-à-vis de la variable d'espace sauf peut-être au point* 0.

Ils sont continus au point 0 *si et seulement si le processus* A^F *est un processus de sauts.*

Considérons les nouvelles assertions suivantes :

(4) V^F est la variation totale du processus A^F.

(5) A^F est un processus de sauts.

(6) Les temps locaux de la semi-martingale $B - A^F$ en 0+ et en 0− sont égaux.

Nous pouvons résumer les équivalences énoncées dans le corollaire 7 et la proposition 3 par le diagramme suivant :

$$(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4) \text{ et } (5)$$
$$(5) \iff (6)$$

Nous terminons cette partie par la :

CONJECTURE. — *Les assertions (1), (2), (3), (4), (5) et (6) sont vraies.*

Nous allons démontrer cette conjecture dans le cas où $F = \mathbb{R}$, en prouvant l'assertion *(1).*

4. L'égalité $\lambda_t^0 = L_t^F$ dans le cas où $F = \mathbb{R}$

Dans cette partie et dans les suivantes, nous nous intéressons au cas où $F = \mathbb{R}$. Nous noterons, suivant l'usage, $L_t^* = \sup_{x\in\mathbb{R}} L_t^x$ au lieu de $L_t^{\mathbb{R}}$. Les processus $A^{\mathbb{R}}$ et $V^{\mathbb{R}}$, définis aux paragraphes 1.2 et 3.1, seront notés plus simplement A et V.

4.1. Explication de la démarche suivie.

L'objet de cette partie est de prouver le :

THÉORÈME 3.

- *Le processus* (L_t^*) *représente le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale* $(B_t - A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
- $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de sauts.*
- $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est la variation totale du processus* $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
- *Les temps locaux de la semi-martingale* $(B_t - A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *sont continus au point 0.*

D'après le paragraphe précédent, il suffit de prouver le premier point de ce théorème puisque les trois autres en découlent. Comme nous savons déjà que, presque sûrement pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$, $L_t^* \geq \lambda_t^0$, il suffit de montrer l'inégalité $\mathbb{E}\lambda_T^0 \geq \mathbb{E}L_T^*$ pour un temps T exponentiel d'espérance 2 indépendant du mouvement brownien B.

L'intérêt de considérer un tel temps T est que l'on connaît la loi conjointe de B_T et du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ grâce au théorème de D.B. Ray ([3] ou [10]), ainsi que la loi de L_T^*

grâce à la formule de A.N. Borodin [4] (qui est d'ailleurs une conséquence du théorème de Ray) :

$$P[L_T^* \geq \ell] = \frac{4\ell e^\ell}{(e^\ell - 1)^2} \frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)} \text{ pour } \ell \in \mathbb{R}_+$$

où I_0 et I_1 sont les fonctions de Bessel modifiées d'indice 0 et 1.

La formule de A.N. Borodin nous fournit une expression du deuxième membre de l'inégalité à démontrer :

$$\mathbb{E}L_T^* = \int_0^{+\infty} \frac{4\ell e^\ell}{(e^\ell - 1)^2} \frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)} d\ell.$$

Pour le premier membre $\mathbb{E}\lambda_T^0$, nous remarquerons au § 4.2 qu'il est égal au double de la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T$, ou encore de la variable aléatoire A_T.

Pour estimer cette densité, nous exprimons, au § 4.3, $P[|A_T| \leq \varepsilon; |B_T| > \varepsilon]$ à l'aide de la loi conditionnelle du quadruplet $(L_T^{-\varepsilon}, L_T^{[-\varepsilon,0]}, L_T^\varepsilon, L_T^{[0,\varepsilon]})$ sachant L_T^0. Puis, au § 4.4, nous minorons la quantité $\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} P[|A_T| \leq \varepsilon]$ à l'aide de l'expression précédente, en montrant la convergence en loi du quadruplet $(L_T^{-\varepsilon}, L_T^{[-\varepsilon,0]}, L_T^\varepsilon, L_T^{[0,\varepsilon]})$ convenablement normalisé. Nous obtenons de cette manière l'inégalité voulue $\mathbb{E}\lambda_T^0 \geq \mathbb{E}L_T^*$ (qui est en fait une égalité).

4.2. Le passage de $\mathbb{E}\lambda_T^0$ à la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T$.

D'après la formule de densité d'occupation :

$$\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s - A_s| \leq \varepsilon\}} ds.$$

En admettant provisoirement l'uniforme intégrabilité de la famille de variables aléatoires $(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s - A_s| \leq \varepsilon\}} ds)_{\varepsilon > 0}$, on a donc :

$$\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E} \int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s - A_s| \leq \varepsilon\}} ds.$$

Or, comme T est indépendant du mouvement brownien B et de loi exponentielle d'espérance 2, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s - A_s| \leq \varepsilon\}} ds &= \mathbb{E} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s - A_s| \leq \varepsilon\}} ds \right) \frac{e^{-t/2}}{2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} P[(|B_s - A_s| \leq \varepsilon] \Big(\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{2} dt \Big) ds \\
&= 2P\big[(|B_T - A_T| \leq \varepsilon\big].
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\big[|B_T - A_T| \leq \varepsilon\big].$$

Montrons maintenant l'uniforme intégrabilité des variables $(\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}ds)_{\varepsilon>0}$. Nous allons prouver qu'elles forment une partie bornée de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Pour cela, on introduit les applications f_ε et F_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_\varepsilon(x) = \left| \begin{array}{c} x/\varepsilon \text{ si } |x|<\varepsilon \\ \operatorname{sgn}(x) \text{ si } |x|\ge\varepsilon \end{array} \right. \quad \text{et} \quad F_\varepsilon(x) = \int_0^x f_\varepsilon(y)dy \quad \text{pour} \quad x\in\mathbb{R}.$$

D'après la formule d'Itô, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}ds = F_\varepsilon(B_T-A_T) &- \int_0^T f_\varepsilon(B_s-A_{s-})dB_s \\ &+ \int_0^T f_\varepsilon(B_s-A_{s-})dA_s \\ &- \sum_{s\le T}\left[\Delta(F_\varepsilon(B_\cdot-A_\cdot))_s - f_\varepsilon(B_s-A_{s-})\Delta(B-A)_s\right].\end{aligned}$$

Or, comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_\varepsilon(x)|\le 1$ et $|F_\varepsilon(x)|\le|x|$, on a :

- $F_\varepsilon(B_T-A_T)\le|B_T-A_T|$.
- $\int_0^T f_\varepsilon(B_s-A_{s-})dA_s + \sum_{s\le T} f_\varepsilon(B_s-A_{s-})\Delta(B-A)_s = \int_0^T f_\varepsilon(B_s-A_{s-})dA_s^c \le V_T^c$,

où $A^c = A - \sum_{s\le\cdot}\Delta A_s$ et $V^c = V - \sum_{s\le\cdot}\Delta V_s$ désignent les parties continues des processus A et V.

- $$\begin{aligned}-\sum_{s\le T}\Delta(F_\varepsilon(B-A))_s &\le \sum_{s\le T}|\Delta(B-A)_s|, \text{ car } F_\varepsilon \text{ est 1-lipschitzienne,} \\ &= \sum_{s\le T}|\Delta A_s| \\ &\le \sum_{s\le T}\Delta V_s.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule du théorème 2, au § 3.1 :

$$\begin{aligned}0 \le \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}ds \le |B_T-A_T| + V_T - \int_0^T f_\varepsilon(B_s-A_{s-})dB_s \\ = L_T^* + \int_0^T g_\varepsilon(B_s-A_{s-})dB_s\end{aligned}$$

avec $g_\varepsilon(x) = \operatorname{sgn} x - f_\varepsilon(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$. Comme $|g_\varepsilon(x)|\le 1$, la famille de variables aléatoires $(\int_0^T g_\varepsilon(B_s-A_{s-})dB_s)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\Omega,F,P)$. Comme par changement d'échelle :

$$\mathbb{E}[L_T^{*2}] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[L_1^{*2}] < +\infty,$$

on a le résultat souhaité.

Remarque. — Marc Yor m'a fait remarquer qu'on peut simplifier cette démonstration en reprenant des majorations faites dans [15] et la formule du théorème 2 au § 3.1. On a en effet :

$$\Big(\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\leq\varepsilon\}}ds\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\lambda_T^x dx\Big)^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\lambda_T^x)^2 dx.$$

Or :

$$\begin{aligned}\lambda_T^x &\leq |B_T - A_T - x| - |x| - \int_0^T \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-} - x)d(B_s - A_s)\\ &\leq |B_T - A_T| - \int_0^T \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-} - x)dB_s + V_T\\ &= L_T^* + \int_0^T (\operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}) - \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-} - x))dB_s,\end{aligned}$$

car V majore la variation totale de A, et d'après la formule du théorème 2 au § 3.1. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\lambda_T^{x\,2}] &\leq 2\Big(\mathbb{E}[L_T^{*\,2}] + \mathbb{E}[\int_0^T (\operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}) - \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-} - x))^2 ds]\Big)\\ &\leq 4(\mathbb{E}[L_1^{*\,2}] + 4),\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}T = 2$. Ainsi :

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\leq\varepsilon\}}ds\Big)^2\Big] \leq 4(\mathbb{E}[L_1^{*\,2}] + 4) < +\infty.$$

Remarque 3. — Comme le temps T est indépendant du mouvement brownien B, le processus $(B_T - B_{T-t})_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien issu de 0 et tronqué à l'instant T, et presque sûrement, $B_T - A_T$ est son seul point le plus visité à l'instant T. Il y a donc identité en loi entre $B_T - A_T$ et A_T, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|B_T - A_T| \leq \varepsilon\big] = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|A_T| \leq \varepsilon\big].$$

Cette dernière égalité sera plus commode à utiliser pour minorer $\mathbb{E}\lambda_T^0$.

4.3. Calcul de $P\big[|A_T| \leq \varepsilon; |B_T| > \varepsilon\big]$.

Le calcul repose sur le théorème de D.B. Ray [10]. Nous rappelons ici la formulation donnée par P. Biane et M. Yor [3], qui sera plus commode pour nous :

THÉORÈME (D.B. Ray). — *Soit T un temps exponentiel d'espérance 2, indépendant du mouvement brownien B. Alors :*

- *Les variables aléatoires L_T^0 et B_T sont indépendantes et leur loi est donnée par :*

$$P[L_T^0 \in d\ell] = \mathbb{1}_{\{\ell>0\}}e^{-\ell}d\ell \quad \textit{et} \quad P[B_T \in db] = \frac{1}{2}e^{-|b|}db.$$

• *Sachant* $(L_T^0, B_T) = (\ell, b)$ *avec* $(\ell, b) \in \mathbb{R}_+^{*\,2}$, *le processus* $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ *suit la loi* $Q_{\ell,b}$ *définie comme suit :*

$(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ *est markovien inhomogène.*

$(L_T^{-x})_{x\in\mathbb{R}_+}$ *et* $(L_T^x)_{x\geq b}$ *sont des diffusions de générateur infinitésimal* $2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$.

$(L_T^x)_{x\in[0,b]}$ *est une diffusion de générateur infinitésimal* $2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2\frac{d}{dx}$.

Dans ce qui suit, nous noterons Q_ℓ et Q'_ℓ la loi des diffusions issues de ℓ, de générateur $2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$ et $2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2\frac{d}{dx}$. X désignera le processus canonique sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ suivant les cas. Ces notations étant fixées, nous pouvons commencer le calcul. Par symétrie, on a :

$$P\big[|A_T| \leq \varepsilon; |B_T| > \varepsilon\big] = 2P\big[|A_T| \leq \varepsilon; B_T > \varepsilon\big]$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\ell} d\ell \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-b} db\, Q_{\ell,b}\Big[\sup_{|x|\geq\varepsilon} X_x \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} X_x\Big],$$

d'après le théorème de Ray. Or en utilisant le caractère markovien du processus $(X_x)_{x\in\mathbb{R}}$ sous la loi $Q_{\ell,b}$, on a pour $m_1 \geq \ell_1 \geq 0$, $m_2 \geq \ell_2 \geq 0$ et $m = m_1 \vee m_2$:

$$Q_{\ell,b}\Big[\sup_{|x|\geq\varepsilon} X_x \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} X_x \mid (X_{-\varepsilon}, \sup_{-\varepsilon\leq x\leq 0} X_x, X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x) = (\ell_1, m_1, \ell_2, m_2)\Big]$$

$$= Q_{\ell_1}[\sup_{t\geq 0} X_t \leq m]\, Q'_{\ell_1}\Big[\sup_{0\leq t\leq b-\varepsilon} X_t \leq m; Q_{X_{b-\varepsilon}}[\sup_{t\geq 0} X_t \leq m]\Big]$$

$$= \frac{e^m - e^{\ell_1}}{e^m - 1}\, Q'_{\ell_2}\Big[\sup_{0\leq t\leq b-\varepsilon} X_t \leq m; \frac{e^m - e^{X_{b-\varepsilon}}}{e^m - 1}\Big].$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que sous la loi Q_ℓ, le processus $(e^{X_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale locale issue de e^ℓ et piégée lorsqu'elle atteint 1. Ainsi, pour $m > \ell$ l'événement $\{\sup_{t\geq 0} X_t < m\}$ est presque sûrement égal à l'événement :

" le processus$(e^{X_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ atteint 1 avant d'atteindre e^m ",

et a donc pour probabilité $\frac{e^m - e^\ell}{e^m - 1}$.

On vérifie assez facilement que sous la loi Q'_{ℓ_2}, le processus $(X_t, \sup_{s\leq t} X_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Feller issu de (ℓ_2, ℓ_2), à valeurs dans l'ensemble :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}.$$

Soit $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ son semi-groupe. En notant f_m l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_m(x, y) = \frac{e^m - e^x}{e^m - 1} \mathbb{1}_{\{y\leq m\}},$$

nous avons ainsi :

$$Q_{\ell,b}[\sup_{|x|\geq\varepsilon} X_x \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} X_x \mid (X_{-\varepsilon}, \sup_{-\varepsilon\leq x\leq 0} X_x, X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x) = (\ell_1, m_1, \ell_2, m_2)]$$

$$= \frac{e^m - e^{\ell_1}}{e^m - 1} P_{b-\varepsilon} f_m(\ell_2, \ell_2).$$

Notons $\mu_{\ell,\varepsilon}$ et $\mu'_{\ell,\varepsilon}$ la loi du couple $(X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x)$ sous Q_ℓ et Q'_ℓ. Pour $\ell \geq 0$ et $b \geq \varepsilon$, la loi du quadruplet $(X_{-\varepsilon}, \sup_{-\varepsilon\leq x\leq 0} X_x, X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x)$ est donc $\mu_{\ell,\varepsilon} \otimes \mu'_{\ell,\varepsilon}$. En notant toujours $m = m_1 \vee m_2$ pour alléger les expressions, on a ainsi :

$$
\begin{aligned}
&P[|A_T| \leq \varepsilon; |B_T| > \varepsilon] \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\ell} d\ell \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-b} db \int_E \int_E \mu_{\ell,\varepsilon}(d\ell_1 \times dm_1)\, \mu'_{\ell,\varepsilon}(d\ell_2 \times dm_2)\, \frac{e^m - e^{\ell_1}}{e^m - 1} P_{b-\varepsilon} f_m(\ell_2, \ell_2) \\
&= e^{-\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-\ell} d\ell \int_E \int_E \mu_{\ell,\varepsilon}(d\ell_1 \times dm_1)\, \mu'_{\ell,\varepsilon}(d\ell_2 \times dm_2)\, \frac{e^m - e^{\ell_1}}{e^m - 1} g_m(\ell_2, \ell_2)
\end{aligned}
$$

où g_m est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g_m(x, y) = \int_0^{+\infty} P_t f_m(x, y) e^{-t} dt \quad \text{pour} \quad y \geq x \geq 0.$$

Le calcul de g_m fait intervenir la résolvante du semi-groupe $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Nous le détaillerons au § 4.5. Pour ne pas perdre le fil conducteur de la démonstration, nous admettons pour l'instant la formule :

$$g_m(\ell, \ell) = \frac{1}{e^m - 1}\left(e^\ell + e^m - 2e^m \frac{S(\ell)}{S(m)}\right) \quad \text{pour} \quad m \geq \ell \geq 0,$$

où $S(z) = \exp(z/2) I_0(z/2)$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a ainsi :

$$
\begin{aligned}
&P[|A_T| \leq \varepsilon; |B_T| > \varepsilon] \\
&\qquad = e^{-\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-\ell} d\ell \int_E \int_E \mu_{\ell,\varepsilon}(d\ell_1 \times dm_1)\, \mu'_{\ell,\varepsilon}(d\ell_2 \times dm_2)\, F(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2)
\end{aligned}
$$

avec pour $m_1 \geq \ell_1 \geq 0$ et $m_2 \geq \ell_2 \geq 0$:

$$F(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2) = \frac{S(\ell_2)}{(e^m - 1)^2}(e^m - e^{\ell_1})\left(\frac{e^{\ell_2} + e^m}{S(\ell_2)} - \frac{2e^m}{S(m)}\right),$$

où $m = m_1 \vee m_2$.

4.4. Application à la minoration de $\mathbb{E}\lambda_T^0$.

Comme les calculs sont assez techniques, nous reportons dans les paragraphes suivants ceux qui ne sont pas indispensables pour comprendre l'idée de la démonstration.

D'après les paragraphes précédents, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\lambda_T^0 &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|A_T| \leq \varepsilon] \\
&\geq \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|A_T| \leq \varepsilon; |B_T| > \varepsilon] \\
&= \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-\ell} d\ell \int_E \int_E \mu_{\ell,\varepsilon}(d\ell_1 \times dm_1)\, \mu'_{\ell,\varepsilon}(d\ell_2 \times dm_2)\, F(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2).
\end{aligned}
$$

Écrivons pour $m_1 \geq \ell_1 \geq 0$ et $m_2 \geq \ell_2 \geq 0$:

$$\frac{1}{\varepsilon}F(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2)=\frac{S(\ell_2)}{(e^m-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\ell_1}^{m} e^r\, dr \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\ell_2}^{m}\Big(\frac{e^r(S'(r)-S(r))}{S(r)^2}+\frac{e^m S'(r)}{S(r)^2}\Big)dr$$

avec $m = m_1 \vee m_2$, et effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} \ell_1 - \ell &= 2\sqrt{\ell\varepsilon}x_1 \\ m_1 - \ell &= 2\sqrt{\ell\varepsilon}y_1 \\ \ell_2 - \ell &= 2\sqrt{\ell\varepsilon}x_2 \\ m_2 - \ell &= 2\sqrt{\ell\varepsilon}y_2. \end{cases}$$

En notant $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et $\nu_{\ell,\varepsilon}, \nu'_{\ell,\varepsilon}$ la loi de $\frac{1}{2\sqrt{\ell\varepsilon}}(X_\varepsilon - \ell, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x - \ell)$ sous Q_ℓ, Q'_ℓ, on a donc :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} e^{-\ell}d\ell \int_E\int_E \mu_{\ell,\varepsilon}(d\ell_1 \times dm_1)\, \mu'_{\ell,\varepsilon}(d\ell_2 \times dm_2)\, F(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\ell}d\ell \int_D\int_D \nu_{\ell,\varepsilon}(dx_1 \times dy_1)\, \nu'_{\ell,\varepsilon}(dx_2 \times dy_2)\, G_{\ell,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

avec pour $\ell > 0, \varepsilon > 0, (x_1, y_1) \in D$ et $(x_2, y_2) \in D$:

$$G_{\ell,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{\varepsilon}F(\ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}x_1, \ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}y_1, \ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}x_2, \ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}y_2).$$

En utilisant l'expression de $\frac{1}{\varepsilon}F(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2)$ ci-dessus, on voit que :

$$G_{\ell,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} G_{\ell,0}(x_1, y_1, x_2, y_2),$$

où, en notant $y = y_1 \vee y_2$:

$$G_{\ell,0}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{S(\ell)}{(e^\ell-1)^2} \times \sqrt{2\ell}(y-x_1)e^\ell \times \sqrt{2\ell}(y-x_2)\frac{e^\ell(2S'(\ell)-S(\ell))}{S(\ell)^2}$$

$$= \frac{4\ell e^{2\ell}}{(e^\ell-1)^2}\Big(\frac{2S'(\ell)}{S(\ell)}-1\Big)(y-x_1)(y-x_2)$$

$$= \frac{4\ell e^{2\ell}}{(e^\ell-1)^2}\frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)}(y-x_1)(y-x_2),$$

car, pour tout $z \in C$, $S(z)^2 = e^z I_0(z/2)^2$ et $I'_0(z) = I_1(z)$.

Or, nous avons (cela sera prouvé au § 4.6) $\nu_{\ell,\varepsilon} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \nu$ et $\nu'_{\ell,\varepsilon} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \nu$, où ν désigne la loi de $(B_1, \sup_{s\in[0,1]} B_s)$. Par positivité des applications $G_{\ell,\varepsilon}$, cela entraîne (nous le justifierons précisément au § 4.6) que :

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{+\infty} e^{-\ell}d\ell \int_D\int_D \nu_{\ell,\varepsilon}(dx_1 \times dy_1)\, \nu'_{\ell,\varepsilon}(dx_2 \times dy_2)\, G_{\ell,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$$\geq \int_0^{+\infty} e^{-\ell}d\ell \int_D\int_D \nu(dx_1 \times dy_1)\, \nu(dx_2 \times dy_2)\, G_{\ell,0}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$$= C\int_0^{+\infty} \frac{4\ell e^\ell}{(e^\ell-1)^2}\frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)}d\ell,$$

où $C = \int_D \int_D \nu(dx_1 \times dy_1)\, \nu(dx_2 \times dy_2)\, (y_1 \vee y_2 - x_1)(y_1 \vee y_2 - x_2)$.

Nous prouverons au § 4.7 que $C = 1$. Ainsi, on a la chaîne d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\lambda_T^0 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|A_T| \leq \varepsilon] \\
&\geq \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|A_T| \leq \varepsilon ; |B_T| > \varepsilon] \\
&= \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\ell} d\ell \int_D \int_D \nu_{\ell,\varepsilon}(dx_1 \times dy_1)\, \nu'_{\ell,\varepsilon}(dx_2 \times dy_2)\, G_{\ell,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2) \\
&\geq \int_0^{+\infty} \frac{4\ell e^\ell}{(e^\ell - 1)^2} \frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)} d\ell \\
&= \mathbb{E}L_T^* ,
\end{aligned}$$

d'après le § 4.1. On a obtenu l'inégalité voulue, ce qui prouve le théorème moyennant les justifications et les calculs qui ont été reportés aux paragraphes suivants.

Remarque 4. — Comme $\lambda_T^0 \leq L_T^*$ presque sûrement, toutes les inégalités que nous venons d'écrire sont en fait des égalités. En particulier, on voit que

$$\frac{1}{\varepsilon} P[|A_T| \leq \varepsilon ; |B_T| \leq \varepsilon] \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre *a posteriori* que la minoration de $P[|A_T| \leq \varepsilon]$ par $P[|A_T| \leq \varepsilon ; |B_T| > \varepsilon]$ était fine.

4.5. Calcul de $g_m(x, y) = \int_0^{+\infty} P_t f_m(x, y) e^{-t}\, dt$.

Comme nous l'avons signalé au § 4.2, le calcul de g_m fait intervenir la résolvante du semi-groupe $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ associé au processus $(X_t, \sup_{s \leq t} X_s)$ sous la loi Q'_x.

Pour établir que ce processus est markovien homogène on écrit que sachant $(X_{t_0}, \sup_{s \leq t_0} X_s) = (x, y)$ où $(x, y) \in E$, le processus $(X_{t_0+t}, \sup_{s \leq t} X_{t_0+s})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est indépendant du processus $(X_t, \sup_{s \leq t} X_s)_{t \in [0, t_0]}$ et suit la loi $P^{(x,y)}$ du processus $(X_t, y \vee \sup_{s \leq t} X_s)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sous Q'_x.

On vérifie enfin que le semi-groupe $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est de Feller, ce qui permet d'utiliser son générateur infinitésimal pour le calcul de g_m. Son générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ est donné par le :

LEMME 4. — *Le domaine $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ du générateur infinitésimal contient les applications $g : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, à support compact, telles que $\frac{\partial g}{\partial y}(x, x) = 0$ pour tout*

$x \in \mathbb{R}_+$. *Pour ces applications* g, $\mathcal{A}g$ *est donné par la formule :*

$$\mathcal{A}g(x,y) = 2x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - 2x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \text{ pour } (x,y) \in E.$$

Démonstration. — Soit g vérifiant les conditions du lemme et soit f l'application définie par :

$$f(x,y) = 2x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - 2x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

En notant $(X_t, Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus canonique de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$, il s'agit de montrer que le processus

$$\big(g(X_t,Y_t) - g(X_0,Y_0) - \int_0^t f(X_s,Y_s)ds\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

est une martingale sous les lois $P^{(x,y)}$.

Comme presque sûrement $Y_\cdot = Y_0 \vee \sup_{s\leq \cdot} X_s$, le processus Y est croissant et n'augmente pas hors du fermé : $\{t \in \mathbb{R}_+ / X_t = Y_t\}$. À cause de la condition $\frac{\partial g}{\partial y}(x,x) = 0$, la formule d'Itô s'écrit ici :

$$g(X_t,Y_t) = g(X_0,Y_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(X_s,Y_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X_s,Y_s)d\langle X,X\rangle_s.$$

Et comme le processus X admet pour générateur infinitésimal $2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2\frac{d}{dx}$, on a :

$$g(X_t,Y_t) - g(X_0,Y_0) - \int_0^t f(X_s,Y_s)ds = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(X_s,Y_s)[dX_s + 2X_s ds - 2ds],$$

ce qui montre que $g(X_\cdot, Y_\cdot) - g(X_0,Y_0) - \int_0^\cdot f(X_s,Y_s)ds$ est une martingale. On a donc bien $g \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}g = f$.

Nous allons maintenant utiliser le lemme pour calculer $g_m(x,y) = \int_0^{+\infty} P_t f_m(x,y)\, e^{-t}dt$. Comme l'application f_m n'est pas continue, nous l'approchons par des applications $f_{m,\delta}$ définies pour $m > 0$ et $\delta > 0$ par :

$$f_{m,\delta}(x,y) = \frac{e^m - e^x}{e^m - 1}\psi_\delta(y-m) \text{ pour } (x,y) \in E,$$

où ψ_δ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, décroissante, valant 1 sur $]-\infty,0]$ et 0 sur $[\delta,+\infty[$. De cette façon, on a $f_{m,\delta} \in \mathcal{C}_0(E)$, donc l'application $g_{m,\delta}$ définie par $g_{m,\delta} = \int_0^{+\infty} P_t f_{m,\delta} e^{-t}dt$ appartient au domaine $\mathcal{D}_A$ du générateur infinitésimal et est l'unique solution de l'équation $g - \mathcal{A}g = f_{m,\delta}$ d'inconnue $g \in \mathcal{C}_0(E)$.

Cherchons si cette équation a une solution vérifiant les conditions du lemme. Si g est une telle solution, on a pour tout $(x,y) \in E$:

$$2x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - 2x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - g(x,y) = \frac{e^x - e^m}{e^m - 1}\psi_\delta(y-m).$$

Pour $y \in \mathbb{R}_+$ fixé, on voit que l'application $x \mapsto g(x, y)$ est solution sur l'intervalle $[0, y]$ d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. On vérifie facilement que l'application $x \mapsto \frac{e^x + e^m}{e^m - 1}\psi_\delta(y - m)$ est une solution particulière. Étudions l'équation homogène associée :

$$2xu'' - 2xu' + 2u' - u = 0.$$

La recherche des solutions développables en série entière en voisinage de 0 fournit une droite vectorielle de solutions : ce sont les multiples de S, où :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{(1.2.\cdots.n)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Cette série entière a un rayon de convergence égal à $+\infty$. On vérifie par une méthode de variation des constantes que ces solutions sont les seules solutions de l'équation homogène se prolongeant par continuité en 0.

D'après ce qui précède, si g est une solution de l'équation $g - \mathcal{A}g = f_{m,\delta}$ vérifiant les conditions du lemme, alors g est de la forme :

$$g(x, y) = \varphi_m(x)\psi_\delta(y - m) + S(x)c(y),$$

où $\varphi_m(x) = \frac{e^x + e^m}{e^m - 1}$ et c est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On doit avoir en outre, pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial y}(x, x) = \varphi_m(x)\psi'_\delta(x - m) + S(x)c'(x),$$

c'est-à-dire :

$$c'(x) = -\psi'_\delta(x - m)\frac{\varphi_m(x)}{S(x)}.$$

Par ailleurs, il faut que g soit à support compact, ce qui équivaut, compte tenu de ce que $\psi_\delta(y - m) = 0$ pour $y \geq m + \delta$, à la condition :

$$c(y) = 0 \text{ pour } y \text{ assez grand}.$$

On doit ainsi avoir :

$$c(y) = \int_y^{+\infty} \psi'_\delta(z - m)\frac{\varphi_m(z)}{S(z)}dz \text{ pour } y \in \mathbb{R}_+$$

d'où :

$$g(x, y) = \varphi_m(x)\psi_\delta(y - m) + S(x)\int_y^{+\infty} \psi'_\delta(z - m)\frac{\varphi_m(z)}{S(z)}dz \text{ pour } (x, y) \in E.$$

On vérifie facilement que cette formule définit bien une application g vérifiant les conditions du lemme et telle que $g - \mathcal{A}g = f_{m,\delta}$. Par unicité de la solution de l'équation $g - \mathcal{A}g = f_{m,\delta}$, g n'est autre que l'application $g_{m,\delta}$, ce qui prouve la formule :

$$g_{m,\delta}(x, y) = \varphi_m(x)\psi_\delta(y - m) + S(x)\int_y^{+\infty} \psi'_\delta(z - m)\frac{\varphi_m(z)}{S(z)}dz \quad \text{pour } (x, y) \in E.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned} g_m(x,y) &= \lim_{\delta \downarrow 0} g_{m,\delta}(x,y) \\ &= \varphi_m(x)\mathbb{1}_{\{y\le m\}} + S(x)\mathbb{1}_{\{y\le m\}}\big(\frac{-\varphi_m(m)}{S(m)}\big), \end{aligned}$$

car $-\psi'_\delta(\cdot - m)$ tend vers la masse de Dirac au point m quand $\delta \downarrow 0$. Ainsi, pour $m > 0$ et $(x,y) \in E$:

$$g_m(x,y) = \frac{S(x)}{e^m - 1}\mathbb{1}_{\{y\le m\}}\Big(\frac{e^x + e^m}{S(x)} - \frac{2e^m}{S(m)}\Big).$$

Remarque 5. — Le lecteur familier des fonctions de Kummer s'apercevra que $S(x) = M(1/2, 1, x) = \exp(x/2)I_0(x/2)$, où $M(1/2,1,\cdot)$ est la fonction de Kummer de paramètres $1/2$ et 1, et I_0 la fonction de Bessel modifiée d'indice 0. Le lecteur novice pourra consulter [1] au chapitre 13 et plus particulièrement la formule 13.63. Il pourra aussi se contenter du changement de fonction inconnue $u(x) = \exp(\frac{x}{2})v(\frac{x}{2})$ dans l'équation différentielle $2xu'' - 2xu' + 2u' - u = 0$ pour trouver que v est solution de l'équation de Bessel modifiée d'indice 0. Rappelons la définition de la fonction de Bessel modifiée d'indice $\nu \in \mathbb{N}$:

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}.$$

4.6. Justification des passages à la limite du § 4.4.

CONVERGENCE DES LOIS $\nu_{\ell,\varepsilon}$ ET $\nu'_{\ell,\varepsilon}$ QUAND $\varepsilon \downarrow 0$.

Montrons que la loi $\nu_{\ell,\varepsilon}$ de $\frac{1}{2\sqrt{\ell\varepsilon}}(X_\varepsilon - \ell, \sup_{s\le\varepsilon} X_s - \ell)$ sous Q_ℓ tend vers la loi ν de $(B_1, \sup_{s\le 1} B_s)$ quand $\varepsilon \downarrow 0$. On prouverait de la même façon que $\nu'_{\ell,\varepsilon} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \nu$.

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ étant le processus canonique sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on pose pour $\varepsilon > 0$ et $t \ge 0$:

$$Y_t^\varepsilon = \frac{X_{\varepsilon t} - \ell}{2\sqrt{\ell\varepsilon}}, \text{ c'est-à-dire } X_{\varepsilon t} = \ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}Y_t^\varepsilon.$$

Sous la loi Q_ℓ pour $\ell > 0$, le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est presque sûrement à valeurs positives, donc il admet pour générateur infinitésimal $2|x|\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$ (On a remplacé le cœfficient $2x$ devant $\frac{d^2}{dx^2}$ par $2|x|$ pour avoir un cœfficient partout positif).

Pour toute application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à support compact, les processus :

$$\big(f(X_t) - f(\ell) - \int_0^t (2|X_s|f''(X_s) - 2X_s f'(X_s))ds\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

et :

$$\left(f(X_{\varepsilon t}) - f(\ell) - \int_0^t (2|X_{\varepsilon s}|f''(X_{\varepsilon s}) - 2X_{\varepsilon s}f'(X_{\varepsilon s}))\varepsilon ds\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

sont donc des martingales.

En prenant $f : x \mapsto g(\frac{x-\ell}{2\sqrt{\ell\varepsilon}})$, où $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est à support compact, on obtient que :

$$\left(g(Y_{\varepsilon t}) - g(0) - \int_0^t [\frac{1}{2\ell}|\ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}Y_s^\varepsilon|g''(Y_s^\varepsilon) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\ell}}(\ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}Y_s^\varepsilon)g'(Y_s^\varepsilon)]ds\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

est une martingale.

Sous la loi Q_ℓ, la loi du processus Y^ε est donc solution du problème de martingale associé aux cœfficients a_ε et b_ε définis par :

$$a_\varepsilon(y) = \frac{1}{\ell}|\ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}y| \text{ et } b_\varepsilon(y) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\ell}}(\ell + 2\sqrt{\ell\varepsilon}y)$$

et à la condition initiale $Y_0^\varepsilon = 0$.

Comme $a_\varepsilon \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 1$ et $b_\varepsilon \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$ et comme le problème de martingales associé aux cœfficients constants $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ et à la condition initiale $X_0 = 0$ admet pour unique solution la mesure de Wiener issue de 0, le théorème de convergence de diffusions (voir [12], au chapitre 11, théorème 11.1.4) nous assure que la loi de Y^ε sous Q_ℓ tend faiblement vers la mesure de Wiener issue de 0. *A fortiori*, la loi $\nu_{\ell,\varepsilon}$ de $(Y_1, \sup_{s\leq 1} Y_s)$ sous Q_ℓ tend vers la loi ν de $(B_1, \sup_{s\leq 1} B_s)$.

Remarque. — Marc Yor m'a fait remarquer qu'un théorème de convergence en loi pour des martingales suffit ici : on commence par remarquer que sous la probabilité Q_ℓ, le processus Y^ε a même limite en loi quand $\varepsilon \downarrow 0$ que le processus Z^ε, où :

$$Z_t^\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\ell\varepsilon}}\left(X_{\varepsilon t} - \ell + \int_0^{\varepsilon t} 2X_s ds\right).$$

Or, pour $\varepsilon > 0$, Z^ε est une martingale locale continue issue de 0, dont la variation quadratique s'écrit :

$$\langle Z^\varepsilon, Z^\varepsilon\rangle_t = \frac{1}{4\ell\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t} 4X_s ds.$$

Comme on a presque sûrement :

$$\langle Z^\varepsilon, Z^\varepsilon\rangle_t \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} t \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

on en déduit que le processus Z^ε converge en loi vers le mouvement brownien B grâce à un théorème de convergence en loi pour les martingales (voir [11] au chapitre XIII, exercice 1.16).

LIMITE DES INTÉGRALES.

L'autre point à justifier est l'inégalité :

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{+\infty} e^{-\ell}d\ell \int_D\int_D \nu_{\ell,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\,\nu'_{\ell,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)\,G_{\ell,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2)$$
$$\geq \int_0^{+\infty} e^{-\ell}d\ell \int_D\int_D \nu(dx_1\times dy_1)\,\nu(dx_2\times dy_2)\,G_{\ell,0}(x_1,y_1,x_2,y_2).$$

Nous savons déjà que pour $\ell > 0$:

$$\nu_{\ell,\varepsilon} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \nu,\quad \nu'_{\ell,\varepsilon} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \nu$$

et :

$$G_{\ell,\varepsilon} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} G_{\ell,0} \text{ simplement sur } D\times D.$$

L'idée est d'utiliser le lemme de Fatou, car les applications $G_{\ell,\varepsilon}$ sont positives. Pour cela, on pose pour $\ell > 0$ et $\eta > 0$:

$$H_{\ell,\eta} = \inf_{0\leq\varepsilon\leq\eta} G_{\ell,\varepsilon},$$

et on écrit que comme $G_{\ell,\varepsilon} \geq H_{\ell,\eta}$ pour $\varepsilon \leq \eta$, on a pour $\eta > 0$ fixé :

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_D\int_D \nu_{\ell,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\,\nu'_{\ell,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)\,G_{\ell,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2)$$
$$\geq \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_D\int_D \nu_{\ell,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\,\nu'_{\ell,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)\,H_{\ell,\eta}(x_1,y_1,x_2,y_2)$$
$$\geq \int_D\int_D \nu(dx_1\times dy_1)\,\nu(dx_2\times dy_2)\,H_{\ell,\eta}(x_1,y_1,x_2,y_2)$$

car l'application $H_{\ell,\eta}$ est *continue* positive. En effet, pour $\ell > 0$, l'application : $(\varepsilon,x_1,y_1,x_2,y_2) \mapsto G_{\ell,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2)$ est continue par rapport à l'ensemble des cinq variables, ce qui se voit en écrivant pour $\varepsilon \geq 0$, $(x_1,y_1)\in D$ et $(x_2,y_2)\in D$:

$$G_{\ell,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2) = \frac{S(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}x_2)}{(\exp(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}y)-1)^2}\times\int_{x_1}^{y}\exp(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}z)2\sqrt{\ell}dz$$
$$\times\int_{x_2}^{y}\frac{\exp(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}z)(S'-S)(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}z)+\exp(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}y)S'(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}z)}{S(\ell+2\sqrt{\ell\varepsilon}z)^2}2\sqrt{\ell}dz$$

avec $y = y_1\vee y_2$. Par conséquent, la famille d'applications $(G_{\ell,\varepsilon})_{\varepsilon\in[0,\eta]}$ est *équicontinue*, ce qui entraîne la continuité de $H_{\ell,\eta}$.

En faisant tendre η vers 0 dans l'inégalité précédente, on obtient par le théorème de Beppo Levi :

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_D\int_D \nu_{\ell,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\,\nu'_{\ell,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)\,G_{\ell,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2)$$
$$\geq \int_D\int_D \nu(dx_1\times dy_1)\,\nu(dx_2\times dy_2)\,G_{\ell,0}(x_1,y_1,x_2,y_2),$$

puisque $H_{\ell,\eta} \underset{\eta\downarrow 0}{\uparrow} G_{\ell,0}$, et l'inégalité voulue s'obtient à partir de cette dernière en appliquant le lemme de Fatou.

4.7. Calcul de la constante C.

On a :

$$\begin{aligned} C &= \int_D \int_D \nu(dx_1 \times dy_1)\, \nu(dx_2 \times dy_2)\, (y_1 \vee y_2 - x_1)(y_1 \vee y_2 - x_2) \\ &= \mathbb{E}\big[(S_1 \vee S'_1 - B_1)(S_1 \vee S'_1 - B'_1)\big], \end{aligned}$$

où B' est un mouvement brownien indépendant de B et pour $t \geq 0$:

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s, \quad S'_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B'_s.$$

En développant le produit $(S_1 \vee S'_1 - B_1)(S_1 \vee S'_1 - B'_1)$, on obtient :

$$C = \mathbb{E}\big[(S_1 \vee S'_1)^2\big] - 2\, \mathbb{E}\big[B_1(S_1 \vee S'_1)\big].$$

Or par indépendance de S'_1 et de (B_1, S_1), on a pour $a \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[B_1(S_1 \vee S'_1) \mid S'_1 = a\big] &= \mathbb{E}\big[B_1(S_1 \vee a)\big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^1 B_t\, d(S_t \vee a)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^1 (S_t \vee a) d(S_t \vee a)\Big], \end{aligned}$$

car sur le support de la mesure $d(S_t \vee a)$, on a $B_t = S_t \vee a$. Donc :

$$\begin{aligned} 2\, \mathbb{E}\big[B_1(S_1 \vee S'_1) \mid S'_1 = a\big] &= \mathbb{E}\big[(S_1 \vee a)^2 - a^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[(S_1 \vee S'_1)^2 - S'^2_1 \mid S'_1 = a\big]. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$2\, \mathbb{E}\big[B_1(S_1 \vee S'_1)\big] = \mathbb{E}\big[(S_1 \vee S'_1)^2 - S'^2_1\big].$$

Ainsi :

$$C = \mathbb{E}[S'^2_1] = \mathbb{E}[B_1^2] = 1,$$

car S'_1 a même loi que $|B_1|$.

5. Deux propriétés des sauts du processus A

5.1. Introduction.

Dans cette partie, nous allons répondre aux deux questions suivantes :

1) Le processus A peut-il avoir des sauts isolés ?

2) Le mouvement brownien peut-il revenir à son point le plus visité sans le modifier ?

Nous savons d'après le corollaire 3, au § 1.2, que les sauts de A ne peuvent se produire qu'aux extrémités droites des intervalles ouverts de constance de L^*, et que le processus A est constant sur ces intervalles, si bien que les sauts de A sont "isolés à gauche".

En revanche, nous allons voir que les sauts de A sont immédiatement suivis d'une infinité d'autres sauts, et ne sont donc pas "isolés à droite", si bien que la réponse à la première question est NON.

La deuxième question pourrait se reformuler comme suit : les sauts du processus A sont-ils "obligés" ? En effet, toujours d'après le corollaire 3, nous savons que les intervalles ouverts de constance de L^* sont les intervalles où le mouvement brownien B n'occupe pas son site le plus visité. *A priori* deux situations peuvent se présenter aux extrémités droites de ces intervalles :

• Le mouvement brownien B visite suffisamment un autre point pour que le temps local en ce point rattrape (et dépasse) celui du point qui était le plus visité. À cet instant, le point le plus visité "saute".

• Le mouvement brownien B revient à son site le plus visité suffisamment vite pour que le point le plus visité ne change pas, auquel cas, il n'y a pas de saut à l'extrémité droite de l'intervalle de constance de L^*.

Il est assez facile de prouver que la première situation se produit et cela a déjà été constaté par N. Eisenbaum (voir la remarque 12 du chapitre I de [5]). Il est moins évident en revanche que le mouvement brownien puisse revenir vers son point le plus visité sans que des temps locaux au voisinage immédiat de celui-ci ne le doublent. Néanmoins, puisque le mouvement brownien a pu partir du point le plus visité sans le faire sauter, on est amené à penser qu'il peut également y revenir sans le faire sauter.

Nous prouverons dans le § 5.2 que c'est effectivement possible, répondant ainsi à la deuxième question par OUI.

Pour chacune de ces deux questions, nous aurons besoin d'une description assez précise de l'allure des temps locaux au voisinage de leur maximum.

5.2. Les sauts de A ne sont pas isolés.

Nous allons prouver ici le :

THÉORÈME 4. — *Presque sûrement, dans tout voisinage à droite des instants τ_{r+}, pour $r \in \mathbb{R}_+$, le processus A saute une infinité de fois.*

Comme d'après le § 1.2, le processus A est constant sur les intervalles $[\tau_r, \tau_{r+}[$ et ne peut sauter qu'aux instants de la forme τ_{r+} où $\tau_r < \tau_{r+}$, on en déduit le :

COROLLAIRE 8.

• *Presque sûrement, les processus L^* et A ont les mêmes intervalles ouverts de constance.*

• *Presque sûrement, tout saut de A est immédiatement suivi d'une infinité d'autres sauts.*

Le théorème se démontre facilement à partir de la :

PROPOSITION 4. — *Pour $r, h \in \mathbb{Q}_+^*$, considérons l'instant :*

$$\tau_{r,h} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid L_t^{B_{\tau_r}} \geq r + h\}.$$

On a alors $A_{\tau_{r,h}} \neq A_{\tau_r}$ presque sûrement.

En effet, en admettant la proposition, plaçons-nous sur l'événement formé des éventualités de Ω_3 (où Ω_3 est l'événement qui a été introduit au § 1.1) telles que :

• $t \mapsto A_t$ est une fonction de sauts.

• Pour tout $(r, h) \in \mathbb{Q}_+^{*2}$ $\quad A_{\tau_{r,h}} \neq A_{\tau_r}$.

• Pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$ $\quad \tau_{r,h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \tau_r$

Alors sur cet événement, le processus A possède au moins un saut dans tout intervalle $]\tau_r, \tau_{r,h}]$ où $(r, h) \in \mathbb{Q}_+^{*2}$. Comme $\tau_{r,h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \tau_r$ pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\tau_r \underset{r \to r_0+}{\longrightarrow} \tau_{r_0+}$ pour $r_0 \in \mathbb{R}_+$, on voit que tout voisinage à droite de τ_{r_0+} pour $r_0 \in \mathbb{R}_+$ contient un intervalle de la forme $]\tau_r, \tau_{r+h}]$ où $r, h \in \mathbb{Q}_+^*$ et contient donc un instant de saut du processus A, ce qui démontre le théorème à partir de la proposition.

Démonstration de la proposition 4. — On commence d'abord par remarquer que $B_{\tau_r} \neq 0$ presque sûrement. Une des nombreuses façons de le prouver consiste à écrire :

$$\{B_{\tau_r} = 0\} \subset \{L^*_{\tau_r^0} = r\} \quad \text{où} \quad \tau_r^0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid L_t^0 \geq r\}.$$

Ce dernier événement est de probabilité 0 car le processus $(L^x_{\tau_r^0})_{x\in\mathbb{R}_+}$ est un carré de Bessel de dimension 0, issu de r, d'après le deuxième théorème de Ray-Knight (voir [8] ou [11] au chapitre XI, section 2).

Par symétrie, il suffit donc de prouver que la probabilité de l'événement $\{A_{\tau_r} \neq A_{\tau_{r,h}}\}$ sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ est égale à 1. Nous allons prouver en fait que presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]0, \varepsilon]$ tel que $L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_{r,h}} > r + h$, ce qui entraîne que le point le plus visité à l'instant $\tau_{r,h}$ n'est plus $B_{\tau_r} = A_{\tau_r}$.

Pour cela, on introduit le mouvement brownien $\widetilde{B}_\cdot = B_{\tau_r+\cdot} - B_{\tau_r}$. $\widetilde{B}$ est issu de 0 et est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\tau_r}$, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le filtration engendrée par le mouvement brownien B. La formule $\widetilde{L}^x_t = L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r+t} - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r}$ fournit une version continue des temps locaux de $\widetilde{B}$ et l'on a :

$$\tau_{r,h} = \tau_r + \tilde{\tau}^0_h, \quad \text{où} \quad \tilde{\tau}^0_h = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \widetilde{L}^0_t \geq r\}.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^*_+$:

$$\{L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_{r,h}} > r + h\} = \{\widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r}\}.$$

Il s'agit donc de prouver que :

$$P[\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in]0, \varepsilon]\ \widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r} \mid B_{\tau_r} > 0] = 1.$$

Pour cela, nous allons d'une part montrer que pour la probabilité $P[\cdot \mid B_{\tau_r} > 0]$, les processus $(\widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h})_{x\in\mathbb{R}_+}$ et $(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{x\in\mathbb{R}_+}$ sont des processus de Feller indépendants, ce qui entraîne d'après la loi du $0 - 1$ de Blumenthal-Getoor que :

$$P[\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in]0, \varepsilon]\ \widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r} \mid B_{\tau_r} > 0] \in \{0, 1\}$$

et d'autre part montrer la convergence en loi :

$$\varepsilon^{-1/2}(\widetilde{L}^\varepsilon_{\tilde{\tau}^0_h} - h, r - L^{B_{\tau_r}+\varepsilon}_{\tau_r}) \quad \text{sachant} \quad \{B_{\tau_r} > 0\} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} (2\sqrt{h}B_1, 2\sqrt{r}R_1)$$

où R est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0, indépendant de B. Cette convergence en loi entraîne en effet que :

$$\begin{aligned}
P[\exists x \in]0, \varepsilon]\ \widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r} \mid B_{\tau_r} > 0]& \\
\geq P[\widetilde{L}^\varepsilon_{\tilde{\tau}^0_h} - \varepsilon > r - L^{B_{\tau_r}+\varepsilon}_{\tau_r} \mid B_{\tau_r} > 0]& \\
\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} P[\sqrt{h}B_1 > \sqrt{r}R_1] > 0&
\end{aligned}$$

d'où :

$$P[\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in]0, \varepsilon]\ \widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r} \mid B_{\tau_r} > 0] > 0,$$

ce qui avec la loi du $0-1$ prouvera que cette probabilité vaut 1 et démontrera ainsi la proposition. Les processus $(\widetilde{L}^x_{\widetilde{\tau}^0_h})_{x\in\mathbb{R}_+}$ et $(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{x\in\mathbb{R}_+}$ sachant $\{B_{\tau_r}>0\}$ sont indépendants car le mouvement brownien $\widetilde{B}$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\tau_r}$, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la filtration engendrée par le mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Il suffit donc de prouver que ce sont des processus de Feller et que l'on a les convergences en loi :

$$\varepsilon^{-1/2}(\widetilde{L}^\varepsilon_{\widetilde{\tau}^0_h}-h)\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 2\sqrt{h}B_1$$

et :

$$\varepsilon^{-1/2}(r-L^{B_{\tau_r}+\varepsilon}_{\tau_r}) \text{ sachant } \{B_{\tau_r}>0\}\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 2\sqrt{r}R_1.$$

D'après le deuxième théorème de Ray-Knight (voir [8] ou [11] chapitre XI, section 2), le processus $(\widetilde{L}^x_{\widetilde{\tau}^0_h})_{x\in\mathbb{R}_+}$ est un carré de Bessel de dimension 0 issu de h. Il s'agit donc d'un processus de Feller. En appliquant une transformée de Fourier connue sur les carrés de Bessel (voir [11] au chapitre XI corollaire 1.4), on voit que pour $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp(i\lambda\varepsilon^{-1/2}(\widetilde{L}^\varepsilon_{\widetilde{\tau}^0_h}-h))\big] &= \exp\Big(\frac{i\lambda\varepsilon^{-1/2}h}{1-i2\lambda\varepsilon^{1/2}}\Big)\exp(-i\lambda\varepsilon^{-1/2}h)\\ &= \exp\Big(\frac{-2\lambda^2h}{1-i2\lambda\varepsilon^{1/2}}\Big)\\ &\underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow}\exp(-2\lambda^2h),\end{aligned}$$

ce qui prouve la première convergence en loi.

Pour le processus $(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{x\in\mathbb{R}_+}$ sachant $\{B_{\tau_r}>0\}$, on obtient sa loi grâce à un théorème de N. Eisenbaum (voir [5] ou [6]) donnant la loi du processus $(L^x_{\alpha_r})_{x\in\mathbb{R}}$ où $\alpha_r=\tau^{\mathbb{R}_+}_r=\inf\{t>0\mid L^{\mathbb{R}_+}_t\geq r\}$ et en utilisant un théorème de retournement de D. Williams ([14], théorème 2.5) : en notant $S_t=\sup_{s\leq t}B_s$ pour $t\geq 0$, on voit sans peine que le processus $(L^{S_{\tau_r}-x}_{\tau_r})_{0\leq x\leq S_{\tau_r}-B_{\tau_r}}$ sachant $\{B_{\tau_r}>0\}$ a même loi que le processus $(L^{S_{\alpha_r}-x}_{\alpha_r})_{0\leq x\leq S_{\alpha_r}-B_{\alpha_r}}$ sachant $\{L^{\mathbb{R}_-}_{\alpha_r}<r\}$.

D'après le théorème de N. Eisenbaum, il s'agit donc de carrés de Bessel de dimension 4, issus de 0, pris jusqu'à leur premier instant de passage en r. Autrement dit, sachant $\{B_{\tau_r}>0\}$, le processus $(L^{S_{\tau_r}-x}_{\tau_r})_{0\leq x\leq S_{\tau_r}-B_{\tau_r}}$ est une diffusion régulière sur l'intervalle $[0,r]$, issue de 0, tuée en temps fini, lorsqu'elle atteint la frontière r. Cette diffusion admet pour générateur infinitésimal $\mathcal{A}=2x\frac{d^2}{dx^2}+4\frac{d}{dx}$, pour fonction d'échelle $s:x\mapsto -x^{-1}$ (qui vérifie $s(0+)=-\infty$ et $s(r)<+\infty$) et pour mesure de vitesse la mesure m de densité $\frac{dm}{dx}=\frac{x}{2}$.

D'après le théorème de retournement de D. Williams (voir [14], théorème 2.5), le processus

$$(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{0\leq x\leq S_{\tau_r}-B_{\tau_r}}$$

sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ est une diffusion issue de r, tuée lorsqu'elle atteint 0 et de générateur infinitésimal :

$$\widehat{\mathcal{A}} = (s(r) - s(x))^{-1}\mathcal{A}(s(r) - s(x)).$$

Un calcul facile aboutit à la formule :

$$\widehat{\mathcal{A}} = 2x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4x}{r-x}\frac{d}{dx}.$$

Comme $L^y_{\tau_r} = 0$ pour $y \geq S_{\tau_r}$, le processus $(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{x\in\mathbb{R}_+}$ est encore une diffusion de générateur $\widehat{\mathcal{A}}$, la frontière 0 étant cette fois un piège. Il s'agit donc d'un processus de Feller. Il reste à prouver la convergence en loi :

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r}) \quad \text{sachant} \quad \{B_{\tau_r} > 0\} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 2\sqrt{r}R_1.$$

Pour cela notons X le processus $(L^{B_{\tau_r}+t}_{\tau_r})_{t\in\mathbb{R}_+}$ et Y^ε le processus $(\frac{1}{4r\varepsilon}(r - L^{B_{\tau_r}+\varepsilon t}_{\tau_r})^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que la loi Q^ε du processus Y^ε sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ tend faiblement vers la loi du processus $({R_t}^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$, en montrant que Q^ε est solution d'un problème de martingales à cœfficients localement bornés, pour pouvoir appliquer un théorème de convergence de diffusions. (Comme nous voulons ici des cœfficients localement bornés nous avons choisi de prendre $(Y^\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = (\frac{1}{4r\varepsilon}(r - X_{\varepsilon t})^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ plutôt que $(\frac{1}{2\sqrt{r\varepsilon}}(r - X_{\varepsilon t}))_{t\in\mathbb{R}_+})$).

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, à support compact inclus dans $\mathbb{R}^*_+$. Posons pour $x \in [0,r]$:

$$g(x) = f\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right).$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$, à support compact inclus dans $[0,r[$, et l'on a :

$$g'(x) = -\frac{r-x}{2r\varepsilon}f'\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right)$$

et

$$g''(x) = \frac{1}{2r\varepsilon}f'\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right) + \left(\frac{r-x}{2r\varepsilon}\right)^2 f''\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right).$$

Sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$, le processus $(g(X_{\varepsilon t}) - \int_0^t \widehat{\mathcal{A}}g(X_{\varepsilon s})\varepsilon ds)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale. Or on a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon\widehat{\mathcal{A}}g(X_{\varepsilon s}) &= 2X_{\varepsilon s}\varepsilon g''(X_{\varepsilon s}) - \frac{4X_{\varepsilon s}}{r - X_{\varepsilon s}}\varepsilon g'(X_{\varepsilon s}) \\
&= \frac{X_{\varepsilon s}}{r}f'(Y^\varepsilon_s) + \frac{(r - X_{\varepsilon s})^2}{2r\varepsilon}\frac{X_{\varepsilon s}}{r}f''(Y^\varepsilon_s) + \frac{2X_{\varepsilon s}}{r}f'(Y^\varepsilon_s) \\
&= 2Y^\varepsilon_s\left(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon Y^\varepsilon_s}{r}}\right)f''(Y^\varepsilon_s) + 3\left(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon Y^\varepsilon_s}{r}}\right)f'(Y^\varepsilon_s).
\end{aligned}$$

Donc sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$, le processus :

$$\left(f(Y^\varepsilon_t) - \int_0^t (\frac{1}{2}a_\varepsilon(Y^\varepsilon_s)f''(Y^\varepsilon_s) + b_\varepsilon(Y^\varepsilon_s)f'(Y^\varepsilon_s))ds\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

est une martingale où pour $y \in \mathbb{R}$:

$$a_\varepsilon(y) = 4|y|\Big(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon|y|}{r}}\Big) \quad \text{et} \quad b_\varepsilon(y) = 3(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon|y|}{r}}).$$

Par approximation, on montre que cela reste vrai pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, à support compact. Autrement dit, la loi Q_ε est solution du problème de martingales associé à la condition initiale 0 et aux cœfficients a_ε et b_ε.

Comme $a_\varepsilon(y) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 4|y|$ et $b_\varepsilon(y) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 3$ uniformément sur les compacts vis-à-vis de y, la loi Q_ε converge vers la loi d'un carré de Bessel de dimension 3 issu de 0, d'après le théorème de convergence de diffusions (voir le théorème 11.1.4, au chapitre 11 de [12]). On en déduit la convergence en loi voulue, ce qui achève de prouver la proposition 4.

5.3. Les sauts de A ne sont pas "obligés".

Commençons par formaliser la question 2 soulevée au § 5.1 :

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la proposition 1, au § 1.3, on a presque sûrement $B_t \neq A_t$, c'est-à-dire $g(t) < t < d(t)$ d'après la propriété *(e)* du corollaire 3, au § 1.2. Sur l'intervalle $[g(t), d(t)[$ le point le plus visité est $B_{g(t)}$. À l'instant $d(t)$, "le" point le plus visité est $B_{d(t)}$. Le but de ce paragraphe est de prouver le :

THÉORÈME 5. — *Pour $t > 0$ la probabilité pour que le point le plus visité ne saute pas à l'instant $d(t)$ est non nulle. Autrement dit :*

$$P[B_{d(t)} = B_{g(t)}] > 0.$$

N. Eisenbaum s'est déjà intéressée à cette probabilité. En remarquant qu'elle ne dépendait pas de t (par changement d'échelle) elle a démontré dans la remarque 12 du chapitre 1 de [5] que cette probabilité était strictement inférieure à 1. Rappelons brièvement pourquoi : si cette probabilité valait 1, on aurait presque sûrement, pour tout $s \in \mathbb{Q}_+^*$, $B_{d(s)} = B_{g(s)}$, ce qui entraînerait que le processus A serait continu. Or il y a de nombreux moyens de prouver que A possède des sauts. On peut par exemple le déduire des résultats de F.R. Bass et P.S. Griffin [2], qui entraînent que presque sûrement :

$$\liminf_{s\to+\infty} A_s = -\infty, \quad \limsup_{s\to+\infty} A_s = +\infty \quad \text{et} \quad |A_s| \underset{s\to+\infty}{\to} +\infty\,.$$

On peut aussi le déduire du fait que A est un processus de sauts non constant, ou du théorème que nous venons de démontrer au § 5.2.

Pour démontrer que $P[B_{d(1)} = B_{g(1)}] > 0$, nous introduisons le premier instant après 1 où le mouvement brownien revient à son point le plus visité à l'instant 1 :

$$D(1) = \inf\{t \geq 1 \mid B_t = A_1\}.$$

La première étape consiste à prouver les égalités presque sûres :

$$\{A_{D(1)} = A_1\} = \{D(1) = d(1)\} = \{L^*_{D(1)} = L^*_1\} = \{B_{d(1)} = B_{g(1)}\}.$$

Parmi ces événements, le premier signifie que A_1 est encore le point le plus visité au premier instant où le mouvement brownien revient en A_1. Le dernier signifie que le point le plus visité ne saute pas à l'instant $d(1)$.

La deuxième étape consiste à prouver que $P[L^*_{D(1)} = L^*_1] > 0$, ce que nous ferons en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_1 = \sigma((B_s)_{s\in[0,1]})$ et en utilisant le lemme suivant qui constitue le point-clé de la démonstration.

LEMME 5. — *Soit ψ une fonction croissante et strictement positive sur un voisinage à droite de* 0*, à variation lente en* 0+*, c'est-à-dire vérifiant :*

$$\frac{\psi(tx)}{\psi(x)} \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} 1 \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}^*_+,$$

telle que $\psi(x) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$*. On a presque sûrement :*

$$\liminf_{x\downarrow 0} \frac{L^*_1 - L_1^{A_1\pm x}}{\sqrt{x}\psi(x)} = \left| \begin{array}{l} +\infty \textit{ si } \displaystyle\int_{0+}^{\cdot} \psi(x)\frac{dx}{x} \textit{ converge} \\ 0 \textit{ sinon} \end{array}\right.$$

Nous appliquerons ce lemme à $\psi : x \mapsto (lnx)^{-2}$, ce qui donne :

$$x^{-1/2}(lnx)^2(L^*_1 - L_1^{A_1\pm x}) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} +\infty \text{ presque sûrement.}$$

On dispose ainsi d'une minoration de l'avance du temps local au point le plus visité sur les temps locaux en ses voisins immédiats.

Ce lemme sera démontré au § 5.4.

Démonstration du théorème.

Première étape :

Sur l'événement presque sûr $\{B_1 \neq A_1\}$, on a $A_1 = B_{g(1)}$, et de deux choses l'une :

– ou bien à l'instant $D(1)$, A_1 est encore le point le plus visité.

Dans ce cas A_1 est resté le point le plus visité pendant tout l'intervalle de temps $[1, D(1)]$, puisque pour $t \in [1, D(1)]$, $L_t^{A_1} = L_{D(1)}^{A_1} = L^*_{D(1)}$. L'instant $D(1)$ est donc le premier zéro du processus $B - A$ après l'instant 1. En utilisant les propriétés du processus A énoncées au § 1.2, on voit donc que $D(1) = d(1)$, d'où $L^*_{D(1)} = L^*_{d(1)} = L^*_1$ et $B_{d(1)} = B_{D(1)} = A_1 = B_{g(1)}$.

– ou bien à l'instant $D(1)$, A_1 n'est plus le point le plus visité.

Dans ce cas, on ne peut avoir $D(1) = d(1)$ car cela entraînerait :

$$A_{D(1)} = A_{d(1)} = B_{d(1)} = B_{D(1)} = A_1,$$

ni $D(1) < d(1)$ car pendant l'intervalle de temps $[1, d(1)[$, A_1 est le point le plus visité. On a ainsi $D(1) > d(1)$, d'où $L^*_{D(1)} > L^*_{d(1)} = L^*_1$ par définition de l'instant $d(1)$ et $B_{d(1)} \neq A_1 = B_{g(1)}$ par définition de l'instant $D(1)$.

On a ainsi les équivalences :

$$A_{D(1)} = A_1 \iff D(1) = d(1) \iff L^*_{D(1)} = L^*_1 \iff B_{d(1)} = B_{g(1)},$$

puisque toutes ces égalités sont vraies dans le premier cas et fausses dans le second.

Deuxième étape :

Il s'agit de montrer que $P[L^*_{D(1)} = L^*_1] > 0$. Pour cela, on introduit le mouvement brownien $\widetilde{B} = B_{1+\cdot} - B_1$, issu de 0 et indépendant de $\mathcal{F}_1 = \sigma((B_s)_{s\in[0,1]})$. La formule $\widetilde{L}^x_t = L^{B_1+x}_{1+t} - L^{B_1+x}_1$ fournit une version continue des temps locaux de $\widetilde{B}$. On remarque que $D(1) = 1 + \tilde{\sigma}_{A_1-B_1}$, en notant $\tilde{\sigma}_x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \widetilde{B}_t = x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\{L^*_{D(1)} = L^*_1\} &= \{\forall x \in \mathbb{R} \quad L^{A_1+x}_{D(1)} \leq L^*_1\}\\ &= \{\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{L}^{A_1-B_1+x}_{\tilde{\sigma}_{A_1-B_1}} \leq L^*_1 - L^{A_1+x}_1\}.\end{aligned}$$

D'après la propriété de Markov, on a donc :

$$P[L^*_{D(1)} = L^*_1 \mid \mathcal{F}_1] = F(B_1 - A_1, L^*_1 - L^{A_1+\cdot}_1),$$

où :

$$F(y,\varphi) = P[\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{L}^{-y+x}_{\tilde{\sigma}_{-y}} \leq \varphi(x)] \quad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Nous allons démontrer que $F(B_1 - A_1, L^*_1 - L^{A_1+\cdot}_1) > 0$ presque sûrement, ce qui entraînera :

$$P[L^*_{D(1)} = L^*_1] = \mathbb{E}F(B_1 - A_1, L^*_1 - L^{A_1+\cdot}_1) > 0.$$

Or d'après le lemme, on a presque sûrement :

$$x^{-1/2}(lnx)^2(L^*_1 - L^{A_1\pm x}_1) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par symétrie, il suffit donc de prouver que $F(y,\varphi) > 0$ pour $y \in \mathbb{R}^*_+$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\varphi(0) = 0$.
- $\inf\limits_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x) > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$.
- $x^{-1/2}(lnx)^2\varphi(x) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$.

D'après le premier théorème de Ray-Knight (voir l'énoncé dans [10], [11] chapitre XI section 2 ou dans l'introduction du chapitre II de cette thèse), on a en conditionnant par rapport à $\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}}$:

$$F(y,\varphi) = \mathbb{E}\big[f(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})g(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})\big],$$

où pour $\ell \in \mathbb{R}_+$:

$$f(\ell) = Q^{2,y}_{0,\ell}[\forall t \in [0,y]\ X_t \leq \varphi(t)]$$
$$g(\ell) = Q^0_\ell[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \leq \varphi(y+t)],$$

en notant comme d'habitude :

$(X_t)_{t\in I}$ le processus canonique sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$,

Q^δ_x la loi d'un carré de Bessel de dimension δ issu de x,

$Q^{\delta,a}_{x,y}$ la loi du carré d'un pont de Bessel de $\sqrt{x}$ à $\sqrt{y}$, de dimension δ et de longueur a.

On remarque que les variables aléatoires $f(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})$ et $g(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})$ sont corrélées positivement, comme fonctions décroissantes d'une même variable aléatoire. La décroissance de f et g provient du théorème de comparaison de solutions d'équation différentielles stochastiques (voir le théorème 3.7 au chapitre IX de [11]). En effet Q^0_ℓ et $Q^{2,y}_{\ell,0}$ (qui est la loi retournée de $Q^{2,y}_{0,\ell}$) sont les lois des solutions des équations différentielles stochastiques :

$$Y_t = \ell + \int_0^t 2\sqrt{Y_s}dB_s \quad \text{et} \quad Y_t = \ell + \int_0^t 2\sqrt{Y_s}dB_s + \int_0^t \Big(2 - \frac{2Y_s}{y-s}\Big)ds.$$

Cette dernière équation s'obtient à partir de l'équation différentielle stochastique vérifiée par le pont brownien dans $\mathbb{R}^2$, de $(\ell,0)$ à $(0,0)$ et de longueur y.

On a ainsi :

$$\begin{aligned}F(y,\varphi) &\geq \mathbb{E}\big[f(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})\big]\mathbb{E}\big[g(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})\big]\\ &= Q^2_0[\forall t \in [0,y]\ X_t \leq \varphi(t)] \int_0^{+\infty} Q^0_\ell[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \leq \varphi(y+t)] \exp\Big(\frac{-\ell}{2y}\Big)\frac{d\ell}{2y}.\end{aligned}$$

En conditionnant le premier facteur par X_ε pour $\varepsilon \in]0,y[$, on obtient de la même façon l'inégalité :

$$Q^2_0[\forall t \in [0,y]\ X_t \leq \varphi(t)] \geq Q^2_0[\forall t \in [0,\varepsilon]\ X_t \leq \varphi(t)] \times Q^2_0[\forall t \in [\varepsilon,y]\ X_t \leq \varphi(t)].$$

Or, sous la loi Q^2_0 on a presque sûrement :

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{X_t}{2tln|ln\ t|} = 1,$$

d'après la loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien plan. Comme $t^{-1/2}(ln\ t)^2\varphi(t) \underset{t\downarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$, on a *a fortiori* :

$$X_t \underset{t\downarrow 0}{=} o(\varphi(t)) \quad \text{presque sûrement},$$

ce qui entraîne que l'inégalité $X_t \leq \varphi(t)$ est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit. C'est là le point clé de la démonstration : comme on utilise les valeurs $y = B_1 - A_1$, $\varphi(x) = L_1^* - L_1^{A_1+x}$ et $X_x = L_{D(1)}^{A_1+x} - L_1^{A_1+x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, cette inégalité signifie qu'à l'instant $D(1)$, le temps local au point A_1 ne s'est pas fait doubler par les temps locaux en ses voisins immédiats.

On a donc $Q_0^2[\forall t \in [0,\varepsilon]\ X_t \leq \varphi(t)] > 0$ en choisissant ε assez petit. Et comme $\inf\limits_{x \geq \varepsilon} \varphi(x) > 0$, on a aussi,

et
$$Q_0^2[\forall t \in [\varepsilon, y]\ X_t \leq \varphi(t)] > 0$$
$$Q_\ell^0[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \leq \varphi(y+t)] > 0 \quad \text{pour } \ell \text{ assez petit.}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F(y,\varphi) &\geq Q_0^2[\forall t \in [0,\varepsilon]\ X_t \leq \varphi(t)] \times Q_0^2[\forall t \in [\varepsilon, y]\ X_t \leq \varphi(t)] \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} Q_\ell^0[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \leq \varphi(y+t)] \exp\left(\frac{-\ell}{2y}\right)\frac{d\ell}{2y} \\ &> 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 6. — La première étape de la démonstration nous fournit une minoration de la probabilité de saut à l'instant $d(1)$. En effet, en reprenant les notations de la deuxième étape relative au mouvement brownien $\widetilde{B}$, on a :

$$\begin{aligned} P[B_{d(1)} \neq B_{g(1)}] &= P[L_{D(1)}^* > L_1^*] \geq P[L_{D(1)}^{B_1} > L_1^*] \\ &= P[\widetilde{L}^0_{\widetilde{\sigma}_{A_1-B_1}} > L_1^* - L_1^{B_1}]. \end{aligned}$$

Or :

$$P[\widetilde{L}^0_{\widetilde{\sigma}_{A_1-B_1}} > L_1^* - L_1^{B_1} \mid \mathcal{F}_1] = G(B_1 - A_1, L_1^* - L_1^{B_1})$$

avec :

$$G(y,\lambda) = P[\widetilde{L}^0_{\widetilde{\sigma}_{-y}} > \lambda] = \exp\left(\frac{-\lambda}{2|y|}\right) \quad \text{pour } y \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Ainsi

$$P[B_{d(1)} \neq B_{g(1)}] \geq \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{L_1^* - L_1^{B_1}}{2|B_1 - A_1|}\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{L_1^* - L_1^0}{2|A_1|}\Big)\Big],$$

la dernière égalité s'obtenant par retournement, en remarquant qu'à l'instant 1, $L_1^{B_1}$ est le temps local en 0 et $B_1 - A_1$ le point le plus visité du mouvement brownien $(B_1 - B_{1-t})_{t \in \mathbb{R}_+}$.

5.4. Démonstration du lemme 5.

Soit ψ une fonction croissante sur un voisinage à droite de 0, à variation lente en 0+, telle que $\psi(x) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$. Comme ψ est à variation lente en 0+, on a par changement d'échelle l'identité :

$$\liminf_{x\downarrow 0} \frac{L_T^* - L_T^{A_T \pm x}}{\sqrt{x}\psi(x)} = \liminf_{x\downarrow 0} \frac{L_1^* - L_1^{A_1 \pm x}}{\sqrt{x}\psi(x)} \text{ en loi,}$$

pour tout temps T indépendant du mouvement brownien B.

Choisissons pour T un temps exponentiel indépendant de B. D'après le théorème de D.B. Ray ([3] ou [10]), sachant $\{B_T = b\}$ où $b \in \mathbb{R}_+^*$, les processus $(L_T^{-x})_{x\in\mathbb{R}_+}$, $(L_T^x)_{x\in[0,b]}$ et $(L_T^x)_{x\geq b}$ sont des diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, où 0 est le seul point irrégulier. Comme $A_T \neq 0$ et $A_T \neq B_T$ presque sûrement, le processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ est une diffusion régulière (éventuellement retournée) au voisinage de A_T.

Par changement d'échelle et de temps, on est ramené à prouver un résultat identique pour le mouvement brownien au voisinage de son maximum sur un segment, car les dérivées de la fonction échelle et du changement de temps qui apparaissent sont strictement positives et finies.

On finit donc la démonstration en prouvant la :

PROPOSITION 5. — *Soit W un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. Soit ψ une fonction croissante sur un voisinage à droite de 0, à variation lente en 0+, telle que $\psi(x) \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$. Alors presque sûrement, pour tout instant ρ réalisant un maximum local du mouvement brownien W, on a :*

$$\liminf_{h\downarrow 0} \frac{W_\rho - W_{\rho+h}}{\sqrt{h}\psi(h)} = \left| \begin{array}{l} +\infty \textit{ si } \displaystyle\int_{0+}^{\cdot} \psi(x)\frac{dx}{x} \textit{ converge} \\ 0 \textit{ sinon} \end{array} \right.$$

Remarque 7. — En retournant le mouvement brownien W aux instants entiers, on voit qu'on a le même résultat pour $\liminf_{h\downarrow 0} \dfrac{W_\rho - W_{\rho-h}}{\sqrt{h}\psi(h)}$.

Démonstration de la proposition 5. — La proposition est une conséquence immédiate des trois observations suivantes :

1) Tout instant où W atteint un maximum local est de la forme $\rho(t_0, a)$ avec $t_0, a \in \mathbb{Q}_+$, en notant :

$$\sigma(t_0, a) = \inf\{t \geq t_0 \mid W_t - W_{t_0} = -a\}$$
$$\rho(t_0, a) = \inf\{t \geq t_0 \mid W_t = \sup_{t_0 \leq s \leq \sigma(t_0,a)} W_s\}.$$

$\rho(t_0, a)$ est presque sûrement le seul instant de $[t_0, \sigma(t_0, a)]$ réalisant le maximum de W sur cet intervalle à cause de la remarque suivante.

2) En utilisant un théorème de décomposition de Williams (voir [11] au chapitre VI, proposition 3.11), on voit que conditionnellement à $W_{\rho(t_0,a)} - W_{t_0} = m$, le processus $(m - W_{\rho(t_0,a)+t} + W_{t_0})_{0 \leq t \leq \sigma(t_0,a)-\rho(t_0,a)}$ est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 pris jusqu'à son premier instant de passage en $a + m$.

3) D'après le § 4.12 (Kolmogorov's test) de [7], si R est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0, alors presque sûrement :

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{Rh}{\sqrt{h}\psi(h)} = \left| \begin{array}{l} +\infty \text{ si } \displaystyle\int_{0+}^{\cdot} \psi(x) \frac{dx}{x} \text{ converge} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

6. Questions ouvertes

6.1. Lien entre L^F et le temps local de la semi-martingale $B - A^F$.

Nous avons démontré que L^F est le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $B - A^F$ dans les deux cas suivants :

– lorsque F est discret, ce qui était relativement simple, car le processus A^F est en escalier dans ce cas.

– lorsque $F = \mathbb{R}$, où la démonstration repose sur un calcul fastidieux.

On aimerait trouver une démonstration de cette propriété qui soit à la fois plus conceptuelle et générale (qui donne le résultat pour tout fermé F).

Il est tentant d'essayer de démontrer cette propriété dans le cas général, en approchant F par une suite de fermés discrets inclus dans F (comme nous l'avons fait au § 3.1) et en effectuant un passage à la limite. Mais quelle que soit la méthode employée, on bute sur un problème d'interversion de limites assez délicat.

On peut aussi essayer d'adapter au cas général la démonstration de l'égalité $\lambda_t^0 = L_t^F$ dans le cas où $F = \mathbb{R}$, qui a fait l'objet de la quatrième partie. On peut en reproduire le début sans changement : en prenant un temps T exponentiel d'espérance 2 et indépendant du mouvement brownien B, on voit qu'il suffit de prouver l'égalité : $\mathbb{E}\lambda_T^0 = \mathbb{E}L_T^F$, et on démontre comme au § 4.2 que l'on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\lambda_T^0 &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s - A_s^F|\le\varepsilon\}}\,ds\Big]\\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|B_T - A_T^F|\le\varepsilon\big].\end{aligned}$$

En revanche, on ne peut plus appliquer l'argument de retournement qui permettait de remplacer la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T^F$ par celle de la variable aléatoire A_T^F.

On est donc réduit à prouver l'égalité :

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|B_T - A_T^F|\le\varepsilon\big] = L_T^F.$$

Cette égalité ne fait intervenir que la loi conjointe de la variable aléatoire B_T et du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ qui est donnée par le théorème de D.B. Ray. Connaissant cette loi, il "suffit" donc de vérifier cette égalité. Mais on ne voit pas comment aborder dans le cas général les calculs des paragraphes 4.3 à 4.6.

Par ailleurs il serait remarquable que cette égalité soit vraie pour tout fermé F (nous savons déjà qu'elle est vraie pour tout fermé discret). Peut-on l'interpréter à partir de la loi conjointe de B_T et $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$?

6.2. Une égalité mystérieuse.

Si nous observons la démonstration de l'égalité :

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|A_T|\le\varepsilon\big] = \mathbb{E}L_T^*,$$

qui se trouve aux paragraphes 4.3 et 4.4, nous constatons qu'un miracle s'est produit. La formule de A.N. Borodin :

$$P[L_T^*\ge\ell] = \frac{4\ell e^\ell}{(e^\ell-1)^2}\frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)}\quad\text{pour } \ell\in\mathbb{R}_+^*,$$

nous a fourni l'expression suivante pour le second membre :

$$\mathbb{E}L_T^* = \int_0^{+\infty}\frac{4\ell e^\ell}{(e^\ell-1)^2}\frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)}d\ell.$$

Pour calculer le premier membre, qui est égal à $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}P[|A_T|\le\varepsilon\,;|B_T|>\varepsilon]$, on a utilisé le théorème de Ray. On a obtenu exactement le même expression, dans laquelle l'intégration vis-à-vis de ℓ provenait d'un conditionnement par rapport à $L_T^0=\ell$.

La démonstration prouve non seulement l'égalité escomptée, qui est l'égalité des *intégrales*, mais aussi l'égalité des *intégrandes* :

$$\begin{aligned}e^{-\ell}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|A_T|\le\varepsilon\mid L_T^0=\ell\big] &= e^{-\ell}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|A_T|\le\varepsilon;|B_T|>\varepsilon\mid L_T^0=\ell\big]\\ &= \frac{4\ell e^\ell}{(e^\ell-1)^2}\frac{I_1(\ell/2)}{I_0(\ell/2)} = P[L_T^*\ge\ell],\end{aligned}$$

qui était “inattendue”. Peut-on l’interpréter ?

Par changement d’échelle, on peut écrire une égalité similaire en remplaçant T par n’importe quel temps exponentiel indépendant du mouvement brownien. En interprétant chaque membre en termes de transformée de Laplace, on est conduit à supputer que pour $t, \ell \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{2\varepsilon} P\big[|A_t| \leq \varepsilon; L_t^0 \in d\ell\big] \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\ell}{2t} P\big[L_t^* \in d\ell\big],$$

ou encore :

$$\frac{1}{2\varepsilon} P\big[|A_t| \leq \varepsilon \mid L_t^* = \ell\big] \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\ell}{2t}.$$

Peut-on démontrer et interpréter ces inégalités ?

6.3. La loi de la variable aléatoire A_1.

Que peut-on dire de la loi de la variable aléatoire A_1 ? Est-ce une loi gaussienne ou une autre loi “classique” ?

Pour déterminer la loi de A_1, on pourrait par exemple la déduire de celle de A_T, où T est un temps exponentiel d’espérance 2 indépendant du mouvement brownien B. En effet, comme la loi de A_1 est symétrique et comme $A_1 \neq 0$ presque sûrement (cela peut se déduire du fait que $B_1 \neq A_1$ presque sûrement, en retournant le mouvement brownien B à l’instant 1), il suffit de connaître la transformée de Fourier de $ln|A_1|$. Or par changement d’échelle, on a pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\big[\,|A_T|^{i\theta}\big] = \mathbb{E}\big[(\sqrt{T}|A_1|)^{i\theta}\big] = \mathbb{E}\big[T^{i\theta/2}\big]\mathbb{E}\big[\,|A_1|^{i\theta}\big].$$

Or :

$$\mathbb{E}[T^{i\theta/2}] = 2^{i\theta/2}\Gamma\big(1 + \frac{i\theta}{2}\big) \neq 0.$$

Donc la transformée de Fourier de $ln|A_1|$ se déduit de celle de $ln|A_T|$.

On peut théoriquement obtenir la loi de A_T en utilisant le théorème de D.B. Ray qui donne la loi du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$, mais très vite, le calcul devient extrêmement pénible.

Nous nous contenterons de trois remarques qui donnent une assez bonne idée de l’allure de la loi de A_1.

Remarque 8. — La loi de A_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

En effet, soit N une partie négligeable de $\mathbb{R}$ et soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $P[A_1 \in N] \leq \eta$. Comme $A_1 \neq 0$ presque sûrement, on a $P[|A_1| \leq B_\varepsilon^*] \leq \eta$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit, où $B_\varepsilon^* = \sup\limits_{s\leq\varepsilon} |B_s|$. Or sur l’événement $\{|A_1| > B_\varepsilon^*\}$, on a : $A_1 = B_\varepsilon + \widetilde{A}_{1-\varepsilon}$, où

$\widetilde{A}_{1-\varepsilon}$ est le point le plus visité par le mouvement brownien $\widetilde{B} = B_{\varepsilon+\cdot} - B_\varepsilon$ à l'instant $1-\varepsilon$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P[A_1 \in N] &\leq P[B_\varepsilon + \widetilde{A}_{1-\varepsilon} \in N] + P[A_1 \neq B_\varepsilon + \widetilde{A}_{1-\varepsilon}] \\ &\leq 0 + \eta, \end{aligned}$$

car la loi de $B_\varepsilon + \widetilde{A}_{1-\varepsilon}$ est absolument continue, par indépendance de B_ε et de $\widetilde{A}_{1-\varepsilon}$.

Remarque 9. — Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{2}P[B_1 \geq 2a] \leq P[A_1 \geq a] \leq 2P[B_1 \geq a].$$

En effet, on a d'une part $A_1 \leq S_1$ où $S_1 = \sup_{s \leq 1} B_s$, d'où :

$$P[A_1 \geq a] \leq P[S_1 \geq a] = 2P[B_1 \geq a].$$

D'autre part, pour tout $b \in \mathbb{R}_+$: $P[A_1 \geq \frac{b}{2} \mid B_1 = b] = \frac{1}{2}$ car la loi de A_1 sachant $B_1 = b$ est symétrique par rapport à $\frac{b}{2}$ (cela se voit en retournant le mouvement brownien B à l'instant 1). On a donc $P[A_1 \geq a] \geq \frac{1}{2}P[B_1 \geq 2a]$ pour $a \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 10. — Si la loi de A_1 admet une densité continue et bornée f, alors cette dernière vérifie l'inégalité $f(a) \leq f(0)\exp(-a^2/2)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

En effet, il suffit, par symétrie, de prouver l'inégalité sur $\mathbb{R}_+$. Soit donc $a \in \mathbb{R}_+$. Notons σ_a le premier instant où le mouvement brownien est en a, $\widetilde{B}$ le mouvement brownien $B_{\sigma_a+\cdot} - a$, issu de 0, et $\widetilde{A}$ le processus du point le plus visité par le mouvement brownien $\widetilde{B}$. On a alors pour $\varepsilon > 0$:

$$\{A_1 \in [a, a+\varepsilon]\} \subset \{\sigma_a < 1; \widetilde{A}_{1-\sigma_a} \in [0, \varepsilon]\},$$

d'où par indépendance :

$$\begin{aligned} P\big[A_1 \in [a, a+\varepsilon]\big] &\leq \int_0^1 P\big[\widetilde{A}_{1-s} \in [0,\varepsilon]\big] P[\sigma_a \in ds] \\ &= \int_0^1 P\big[\widetilde{A}_1 \in [0, (1-s)^{-1/2}\varepsilon]\big] P[\sigma_a \in ds] \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^{(1-s)^{-1/2}} f(\varepsilon y)\varepsilon dy \Big) P[\sigma_a \in ds]. \end{aligned}$$

En divisant par ε et en prenant les limites quand $\varepsilon \downarrow 0$, on obtient par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$f(a) \leq \int_0^1 f(0)(1-s)^{-1/2} P[\sigma_a \in ds] = f(0)\mathbb{E}\big[(1-\sigma_a)^{-1/2}\mathbb{1}_{\{\sigma_a<1\}}\big].$$

En utilisant l'identité $\sigma_a = (a/B_1)^2$ en loi, on voit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(1-\sigma_a)^{-1/2}\mathbb{1}_{\{\sigma_a<1\}}\big] &= 2\mathbb{E}\big[B_1(B_1^2-a^2)^{-1/2}\mathbb{1}_{\{B_1>a\}}\big]\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{+\infty}(x^2-a^2)^{-1/2}xe^{-x^2/2}dx\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}(2y)^{-1/2}e^{-a^2/2}e^{-y}dy\\
&= e^{-a^2/2},
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

6.4. La probabilité de saut à l'instant $d(t)$.

Nous avons vu au § 5.2 que la probabilité pour que le processus A saute à l'instant $d(t)$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}_+^*$ et strictement comprise entre 0 et 1. Il serait intéressant de connaître sa valeur, c'est-à-dire de répondre à la question : "Que vaut $P[B_{d(1)} = B_{g(1)}]$?"

Là encore, on peut prendre un temps T exponentiel indépendant du mouvement brownien B et écrire que $P[B_{d(1)} = B_{g(1)}] = P[B_{d(T)} = B_{g(T)}]$, par changement d'échelle. En notant $\widetilde{L}$ le temps local du mouvement brownien $\widetilde{B} = B_{T+\cdot} - B_T$ et $\tilde{\sigma}_x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \widetilde{B}_t = x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$, on montre comme au § 5.2 que :

$$P[B_{d(T)} = B_{g(T)}] = P[\forall x \in \mathbb{R}\ \widetilde{L}^{A_T-B_T+x}_{\tilde{\sigma}_{A_T-B_T}} \leq L_T^* - L_T^{A_T+x}].$$

Les processus $(\widetilde{L}^{A_T-B_T+x}_{\tilde{\sigma}_{A_T-B_T}})_{x\in\mathbb{R}}$ et $(L_T^* - L_T^{A_T+x})_{x\in\mathbb{R}}$ sont indépendants conditionnellement à $B_T - A_T$. Le premier théorème de Ray-Knight nous donne la loi du premier sachant $B_T - A_T$. Le théorème de D.B. Ray nous donne théoriquement la loi conjointe du second et de $B_T - A_T$. On dispose donc de l'information nécessaire pour pouvoir théoriquement calculer cette probabilité.

6.5. La mesure de Hausdorff de l'ensemble des zéros de $B - A^F$.

Dans [9], E. Perkins a démontré que si $\mathcal{H}_\varphi$ désigne la mesure de Hausdorff associée à la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{2tln|lnt|}$, alors presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{H}_\varphi(\{s \in [0,t[\mid B_s = x\}) = L_t^x.$$

Ce résultat, améliorant dans le cas du mouvement brownien un théorème énoncé par S.J. Taylor et J.G. Wendel [13] concernant les processus stables, fournit à la fois la dimension *exacte* de Hausdorff des ensembles $\{s \in [0,t[\mid B_s = x\}$ et une interprétation des temps locaux comme mesure de Hausdorff de ces ensembles.

A-t-on un résultat semblable pour l'ensemble des zéros de $B - A^F$, à savoir :

$$\mathcal{H}_\varphi(\{s \in [0,t[\mid B_t = A_t^F\}) = L_t^F \ ?$$

Dans le cas où le fermé F est discret, ce résultat est une conséquence directe du théorème de E. Perkins, car le processus A^F est en escalier.

Bibliographie

[1] ABRAMOVITZ M., STEGUN I.A. — *Handbook of mathematical functions*, Ed. : Dover.

[2] BASS F.R., GRIFFIN P.S. — *The most visited site of brownian motion and simple random walk*, ZW **70** (1985), 417–436.

[3] BIANE P., YOR M. — *Sur la loi des temps locaux pris en un temps exponentiel. Sém. Prob. XXII*, Lecture Note in Mathematics Springer, Berlin Heidelberg New-York **1321** (1988), 454–466.

[4] BORODIN A.N. — *Distribution of integrals functionals of brownian motion*, J. Soviet. Math **27** (1984), 3005–3021.

[5] EISENBAUM N. — *Temps locaux, excursions et lieu le plus visité par un mouvement brownien linéaire*, Thèse de doctorat. Université de Paris 7, 1989.

[6] EISENBAUM N. — *Un théorème de Ray-Knight lié au suprémum des temps locaux browniens*, Prob. Th. Rel. Fields **87** (1990), 79–95.

[7] ITÔ K., MAC KEAN H.P. — *Diffusion processus and their sample paths*, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1965.

[8] KNIGHT F.B. — *Random walk and a sojourn density processus*, Trans. Amer. Math. Soc **109** (1963), 56–86.

[9] PERKINS E. — *The exact Hausdorff measure of the level sets of brownian motion*, ZW **58** (1981), 373–388.

[10] RAY D.B. — *Sojourn time of a diffusion process*, Ill. J. Math **7** (1963), 615–630.

[11] REVUZ D., YOR M. — *Continuous martingales and brownian motion*, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1991.

[12] STROOCK D.B., VARADHAN S.R.S. — *Multidimensional diffusion processes*, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1979.

[13] TAYLOR S.J., WENDEL J.G. — *The exact measure of the zero set of a stable process*, ZW und Verwandte Gebiete **6** (1966), 170–180.

[14] WILLIAMS D. — *Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I*, Proc. London Math. Soc **(3) 28** (1974), 738–768.

[15] YOR M. — *Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales*, Astérisque **52–53** (1978), 23–35.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(24 avril 1995)