L^2-COHOMOLOGIE ET INÉGALITÉS DE SOBOLEV

par Gilles CARRON

0. Introduction

Le but de cet article est d'obtenir des résultats de finitude pour la dimension des espaces de L^2-cohomologie de variétés non-compactes.

Rappelons que si (M^n, g) est une variété riemannienne complète son k- ième espace de L^2-cohomologie peut être défini comme l'espace, $\mathcal{H}^k(M)$, des k-formes différentielles $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ qui sont fermées et cofermées ($d\alpha = 0,\ \delta\alpha = 0$) ou de façon équivalente, qui sont harmoniques pour le Laplacien de Hodge-de Rham $\Delta^k = \delta d + d\delta$, (cf. **S**3 de cet article ou [Do]).

Lorsque la variété M est compacte, le théorème de Hodge-de Rham dit que ces espaces sont de dimension finie et qu'ils sont isomorphes aux espaces de cohomologie réelle de M. Cependant lorsque (M, g) n'est pas compacte, ces espaces ne sont pas, en général, de dimension finie. Beaucoup de résultats d'annulation avaient été obtenus ; citons par exemple [G-W], [Ma], [E-F], [E-R] lorsque la courbure de M est positive ou nulle et [D-X], lorsque la courbure de M est négative. Et à notre connaissance, les résultats de finitude concernaient des variétés dont un voisinage de l'infini avait une géométrie particulière (voir entre autres ([G-L], [Br]). Notre résultat est le suivant

3.2. THÉORÈME. — *Si (M, g) est une variété riemannienne complète qui pour un $p > 4$ vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$(0.1) \qquad \mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et dont le maximum $K(x)$ des courbures sectionnelles des $2-$plans tangents en x vérifie

$$\int_M K(x)^{\frac{p}{2}}dx < \infty,$$

alors les espaces de L^2-cohomologie de (M^n, g) sont de dimension finie.

Les résultats concernant la L^2 cohomologie sont regroupés dans la troisième partie : dans une première partie on établira la preuve de ce résultat dans son contexte plus général d'opérateur de Schrödinger. En effet, le Laplacien de Hodge-de Rham Δ^k admet la décomposition de Bochner-Weitzenbock suivante

$$\Delta^k = \overline{\Delta} + \mathcal{R}^k,$$

où $\overline{\Delta}$ est le laplacien brut du fibré vectoriel riemannien $\Lambda^k T^*M \longrightarrow M$ et où $\mathcal{R}^k$ est un champ d'endomorphismes symétriques de $\Lambda^k T^*M$ qui peut s'exprimer à l'aide de l'opérateur de courbure ([G-M 2]) ; par exemple sur les 1-formes, il s'agit du tenseur de Ricci. Grâce aux travaux de N. Varopoulos ([V]), les hypothèses du théorème nous permettront de montrer que l'opérateur $\overline{\Delta}^{-1}\mathcal{R}^k$ agit de $L^2(\Lambda^k T^*M)$ dans lui-même de façon compacte.

Dans une deuxième partie, nous obtiendrons des résultats d'annulation et des estimations pour la dimension de ces espaces ; nous utiliserons diverses méthodes. Concernant la L^2-cohomologie, la première méthode nous fournira le résultat suivant

PROPOSITION. — *Il existe une constante $C(p,k)$ telle que si (M,g) vérifie l'inégalité de Sobolev (0.1) pour $p > 2$, et si*

$$\int_M K^{\frac{p}{2}}(x)dx < C(p,k)\mu_p(M)^{\frac{p}{2}},$$

alors $\mathcal{H}^k(M) = \{0\}$.

Puis nous obtiendrons des résultats de presque annulation, ceci grâce à un résultat de Gallot-Meyer ([G-M 1]) qui, à partir d'une majoration de la norme L^q,$q > 2$, des éléments de $\mathcal{H}^k(M)$ en fonction de la norme L^2, permet de conclure à une majoration de la dimension de $\mathcal{H}^k(M)$. Ce résultat appliqué à la L^2 cohomologie est le suivant

3.4. PROPOSITION. — *Si (M^n,g) est une variété riemannienne qui satisfait à l'inégalité de Sobolev (0.1) pour un $p \geq 4$ alors*

Si la courbure de Ricci satisfait à

$$\int_M |\,\mathrm{ric}\_\,|^{\frac{p}{2}}(x)dx < \mu_p(M)^{\frac{p}{2}}\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1}$$

alors $\dim \mathcal{H}^1(M) \leq n = \dim \Lambda^1 T^*\mathbf{R}^n$, *et* $\dim \mathcal{H}^{n-1}(M) \leq n = \dim \Lambda^{n-1}T^*\mathbf{R}^n$;

et si la courbure de M satisfait à

$$\int_M K^{\frac{p}{2}}(x)dx < \left(\mu_p(M)/C(n,k)\right)^{\frac{p}{2}}\left(1 + \frac{1}{(C_n^k+1)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1},$$

alors $\dim \mathcal{H}^k(M) \leq C_n^k = \dim \Lambda^k T^*\mathbf{R}^n$;.

Remarque. — Nous avons aussi obtenu de tels résultats lorsque $p < 4$ (cf 2.b).

Pour obtenir des estimations plus générales, nous sommes amenés à supposer qu'une autre intégrale de courbure est finie ; ceci pour assurer que les k-formes harmoniques L^2 sont en fait bornées. On obtiendra un résultat généralisant le précédent en utilisant les inégalités de Gagliardo-Nirenberg obtenu par T. Coulhon.

Enfin en reprenant les estimées de Cwickel-Lieb-Rosenbljum obtenues par Bérard-Besson ([B-B]) nous obtiendrons le résultat suivant

THÉORÈME. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne qui vérifie l'inégalité de Sobolev (0.1) pour $p > 2$ et si la courbure de (M, g) vérifie $K \in L^{\frac{p}{2}} \cap L^{\frac{r}{2}}$ pour un $r > p$ alors les espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie et on a la majoration*

$$\dim \mathcal{H}^k(M) \leq C_n^k \; C(p,n) \int_M K^{\frac{p}{2}}(x)dx.$$

Remarque. — Pour le premier espace de L^2-cohomologie, il suffit de considérer la courbure de Ricci.

Lorsque (M^n, g) est isométriquement immergée dans un espace euclidien, la preuve développée nous permettra d'obtenir des résultats similaires mais uniquement sous des hypothèses sur la seconde forme fondamentale de l'immersion, ceci grâce au travaux de Hoffman-Spruck ([H-S]). Notre résultat est le suivant

3.5. THÉORÈME. — *Si (M^n, g) est une variété de dimension $n > 2$ isométriquement immergées dans un espace euclidien $\mathbf{R}^N$ telle que la seconde forme fondamentale II de l'immersion satisfait à*

$$\int_M |II|^n(x)dx < \infty, \text{ lorsque } n \geq 5$$

ou lorsque $n \leq 4$,

$$\int_M |II|^n(x)dx < \infty, \;\; \int_M |II|^{n+\varepsilon}(x)dx < \infty \text{ pour un } \varepsilon > 0,$$

alors les espaces de L^2-cohomologie de (M^n, g) sont de dimension finie.

Nous avons rappelé que lorsque (M^n, g) était compacte, les espaces de L^2 cohomologie avait une interprétation topologique puisqu'ils sont isomorphes aux espaces de cohomologie réelle de M. Dans le cadre des résultats de finitude énoncés ci-dessus, on aimerait interpréter la L^2-cohomologie. C'est M. Atiyah qui a introduit la L^2 cohomologie ([At]) dans le cas où la variété riemannienne (M, g) était le revêtement infini d'une variété compacte $\overline{M}$

$$\Gamma \longrightarrow M \longrightarrow \overline{M}.$$

Dans ce cas les espaces de L^2-cohomologie ne sont pas de dimension finie (à moins d'être nul), mais ils peuvent être considérés comme des Γ-modules pour lesquels ont peut définir une dimension de Von-Neuman, $b_k(M,\Gamma) = \dim_\Gamma \mathcal{H}^k(M)$, Atiyah montrait l'égalité

$$\int_{\overline{M}} \Omega = \chi(\overline{M}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i(\Gamma, M)\,;$$

où $\chi(\overline{M})$ est la caractéristique d'Euler de $\overline{M}$ et où Ω est la n-forme de Chern-Gauss-Bonnet. Ensuite J. Dodziuk ([Do]) a montré que ces nombres de Betti étaient de nouveaux invariants d'homotopie de $(\Gamma \triangleleft \pi_1(\overline{M}), M)$. Par la suite J. Cheeger et M. Gromov ont étendu ces résultats à des revêtements de variétés riemanniennes de volume fini et à courbure bornée ([C-G 1], [C-G 2]).

Une question qui apparaît naturellement après ces résultats de finitude est la suivante, lorsque (M^n, g) est une variété riemannienne complète qui satisfait à l'inégalité de Sobolev

$$\mu_n(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si la courbure de (M^n, g) vérifie

$$\int_M K(x)^{\frac{n}{2}} dx < \infty, \text{ lorsque } n > 4,$$

(ou $K \in L^{\frac{n}{2}} \cap L^{\frac{n+\varepsilon}{2}}$ lorsque $n \leq 4$), alors comment peut-on comparer la caractéristique d'Euler L^2 de M définie par

$$\chi L^2(M) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \dim \mathcal{H}^i(M)$$

et l'intégrale de la $n-$forme de Chern-Gauss-Bonnet sur M (intégrale finie grâce à l'hypothèse sur K). Afin de comprendre ceci, nous avons calculé dans l'appendice B la L^2-cohomologie des sous-variétés minimales d'un espace euclidien dont la seconde forme fondamentale II vérifie $\int_M |II|^n(x)dx < \infty$; M. Anderson (R. Osserman pour les surfaces) montre qu'une telle variété (M, g_0) est difféomorphe à une variété compacte $\overline{M}$ privée de b points correspondants aux bouts de (M, g_0) : $M \simeq \overline{M} - \{p_1, \dots, p_b\}$. Notre résultat est le suivant :

Notation. — On note $b_i L^2(M) = \dim \mathcal{H}^i(M)$, le i-ième nombre de Betti L^2 de (M, g).

B.1. THÉORÈME. — $b_0 L^2(M) = b_n L^2(M) = 0$.

Si $n = \dim M = 2$ *alors* $\mathcal{H}^1(M) \simeq H^1(\overline{M})$.

Si $n \geq 3$, *alors* $b_1 L^2(M) = b_1(\overline{M}) + b - 1$, *pour* $k \in [2, n-2]$, $\mathcal{H}^k(M) \simeq H^k(\overline{M})$ *et donc* $b_k L^2(M) = b_k(\overline{M})$,

et $b_{n-1} L^2(M) = b_{n-1}(\overline{M}) + b - 1$.

Ainsi, selon [A] , nous avons l'égalité suivante, lorsque dim $M = n \geq 4$ est paire alors

$$\int_M \Omega = \chi(\overline{M}) - 2b = \chi L^2(M).$$

Remarque. — Notons que l'interprétation de l'intégrale de la n-forme de Chern-Gauss-Bonnet, pour des variétés non-compactes, a donné lieu à de nombreux travaux, citons par exemple ceux de J. Brüning ([Br]), ceux de W. Müller ([M]) et ceux de J. Roe ([R1], [R2]).

1. Résultats généraux de finitude

Nous montrons dans ce paragraphe comment obtenir des résultats de finitude pour des noyaux d'opérateurs de Schrödinger.

Nous commençons par étudier le cas des opérateur de Schrödinger agissant sur les fonctions.

Notation. — Si x est un réel on note $x_- = \max(0, -x)$, et $x_+ = (-x)_-$ ainsi $x = x_+ - x_-$.

1.a. Pour les fonctions. — Nous avons le théorème suivant :

1.1. Proposition . — *Si pour un* $p > 4$, (M^n, g) *vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si $V : M \longrightarrow \mathbf{R}$ *est une fonction continue telle que*

$$\int_M V_-^{p/2}(x)dx < \infty,$$

alors $\mathcal{H}(V) = \{u \in L^2(M), \Delta u + V u = 0\}$ *est de dimension finie.*

Remarque. — Nous verrons dans un deuxième paragraphe comment obtenir des résultats de finitude lorsque $p \leq 4$.

La preuve de la proposition 1.1 repose sur la proposition suivante :

1.2. PROPOSITION . — *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème précédent, on pose $H = \Delta + V_+$, alors l'opérateur $H^{-1}V_-$ est un opérateur continu et compact de $L^2(M)$ dans lui-même.*

Le théorème précédent est un conséquence de cette proposition puisque

$$\mathcal{H}(V) = \mathrm{Ker}\{H^{-1}V_- - Id_{L^2(M)}\}.$$

Preuve. — Montrons d'abord que $H^{-1}V_-$ est un opérateur continu : en effet, d'une part, grâce à l'inégalité de Hölder, l'opérateur multiplication par V_- est continu de $L^2(M)$ dans $L^{\frac{2p}{p+4}}(M)$:

$$\int_M (V_- u)^{\frac{2p}{p+4}}(x)dx \leq \left(\int_M (V_-)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p+4}} \left(\int_M |u|^2\right)^{\frac{p}{p+4}}, \ \forall u \in L^2(M).$$

Notons que si $p > 4$ alors $\frac{2p}{p+4} > 1$. D'autre part, suivant les travaux de N. Varopoulos ([V], [C-S-V] et l'appendice A.1), nous savons que H^{-1} opère de $L^{\frac{2p}{p+4}}(M)$ dans $L^2(M)$, avec une norme d'opérateur qui vérifie

$$||H^{-1}||_{L^{\frac{2p}{p+4}} \to L^2} \leq C(p)\mu_p(M)^{-1}.$$

On en déduit donc que $H^{-1}V_-$ est un opérateur continu de L^2 dans lui-même avec une norme d'opérateur qui vérifie :

$$||H^{-1}V_-||_{L^2 \to L^2} \leq C(p)||V_-||_{L^{\frac{p}{2}}} \mu_p(M)^{-1}.$$

Remarque. — On pourrait ici en déduire un résultat d'annulation si

$$C(p)||V_-||_{L^{\frac{p}{2}}}\mu_p(M)^{-1} < 1,$$

puisqu'alors l'opérateur $H^{-1}V_-$ serait inversible, en fait on verra un résultat plus précis en 2.a).

Montrons alors la compacité de l'opérateur $H^{-1}V_-$. Si nous notons $\mathbf{1}_R$ la fonction caractéristique de la boule géodésique de centre x_0 fixé et de rayon R, nous avons la limite en norme d'opérateur de $L^2(M)$

$$\lim_{R \to \infty} H^{-1}(\mathbf{1}_R V_-) = H^{-1}V_-,$$

ceci est une conséquence du résultat précédent. Ainsi pour montrer la compacité de $H^{-1}V_-$, il suffit de montrer celle des $H^{-1}(\mathbf{1}_R V_-)$, pour cela on préfère montrer celle des opérateurs adjoints $(\mathbf{1}_R V_-)\, H^{-1}$; mais pour $\varphi \in L^2(M)$ on a

$$||(\mathbf{1}_R V_-)\, H^{-1}\varphi||_{L^2} \leq C||\rho H^{-1}\varphi||_{L^2},$$

où C est un majorant de V_- sur la boule de centre x_0 et de rayon R et ρ est une fonction lisse à support compact positive, égale à 1 sur cette boule et partout inférieure à 1. Il suffit donc de montrer que l'opérateur ρH^{-1} est compact, ceci est un simple conséquence du fait que ρH^{-1} est un opérateur continu de $L^2(M)$ dans $H_0^1(M)$, où $H_0^1(M)$ est le complété de $C_0^\infty(M)$ pour la norme (pré-)Hilbertienne $||u||^2_{H_0^1(M)} = \int_M |du|^2 = \int_M \Delta u \, u$. En effet, $H_0^1(M)$ s'injecte de façon compacte dans L^2(support ρ).

Montrons donc que $\rho H^{-1} : L^2(M) \longrightarrow H_0^1(M)$; soit $u \in C_0^\infty(M)$, alors

$$||\rho H^{-1} u||^2_{H_0^1(M)} = \int_M \Delta(\rho H^{-1} u)\,(\rho H^{-1} u) u,$$

En se servant des identités suivantes

$$\Delta(\rho H^{-1} u) = \Delta\rho \; H^{-1} u - 2\left(d\rho,\; d\left(H^{-1} u\right)\right) + \rho\Delta\left(H^{-1} u\right),$$

$$\frac{1}{2}\Delta(\rho^2) = \rho\Delta\rho - |d\rho|^2 \;;$$

et en intégrant deux fois par parties, nous obtenons :

$$||\rho H^{-1} u||^2_{H_0^1(M)} = \int_M |d\rho|^2 \left(H^{-1}\, u\right)^2 + \rho^2 \left(H^{-1} u\right) \Delta(H^{-1} u),$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$||\rho H^{-1} u||^2_{H_0^1(M)} \leq ||\left(|d\rho| H^{-1}\right) u||^2_{L^2} + ||\rho\Delta\left(H^{-1}\, u\right)||_{L^2}\, ||\rho H^{-1}\, u||_{L^2}.$$

Mais on a $|\Delta H^{-1} u| \leq \Delta H^{-1} |u| \leq |u|$, car $\Delta H^{-1} = Id - V_+ H^{-1}$ et l'opérateur H^{-1} préserve la positivité. On en conclut donc que

$$||\rho H^{-1} u||^2_{H_0^1(M)} \leq \left(||\, |d\rho|\, H^{-1}||^2_{L^2 \to L^2} + ||\rho H^{-1}||_{L^2 \to L^2}\right) ||u||^2_{L^2}. \qquad \square$$

1.3. Remarque. — Nous pouvons aussi remarquer que si (M, g) vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si $p > 2$ et sous les mêmes hypothèses que le théorème 1.1, alors l'opérateur $(\Delta + V_+)^{-1/2}\, V_-^{1/2}$ opère de façon compacte de $L^2(M)$ dans lui-même. Nous aurons besoin de ce résultat au 2.d. En effet, l'inégalité de Sobolev implique que $(\Delta + V_+)^{-1/2}$ est continu de L^2 dans $L^{\frac{2p}{p-2}}$,et l'inégalité de Hölder permet de conclure que l'opérateur multiplication par $V_-^{1/2}$ est continu de $L^{\frac{2p}{p-2}}$ dans L^2, ce qui donne

$$||\,(\Delta + V_+)^{-1/2}\, V_-^{1/2}||_{L^2 \to L^2} \leq \mu_p^{-1/2} ||V_-||^{1/2}_{L^{\frac{p}{2}}},$$

puisqu'un opérateur et son adjoint ont même norme. Pour montrer que cet opérateur est compact, on procède de même que précédemment, cela repose sur le fait que si ρ est une fonction lisse à support compact alors l'opérateur $\Delta^{-1/2}\rho$ opère continûment de L^2 dans H_0^1 puisque $||u||_{H_0^1} = ||\Delta^{-1/2} u||_{L^2}$.

Nous pouvons généraliser ces résultats au cas des sections d'un fibré riemannien, ceci grâce à l'inégalité de Kato.

1.b le cas des fibré. — Soit E un fibré vectoriel riemannien sur (M,g), on note $<\,,\,>$ (resp. $|\,|$) le produit scalaire (resp. la norme) sur les fibres de E ou d'un fibré naturel associé. Soit D la connexion de E compatible avec ce produit scalaire, on a donc

$$X.\langle\sigma,\tau\rangle = \langle D_X\sigma,\tau\rangle + \langle\sigma, D_X\tau\rangle\,,$$

pour tout champ de vecteur X de M et toutes sections lisses σ,τ de E. A la connexion compatible, on associe un opérateur $\overline{\Delta}$ le Laplacien de Bochner de E (appelé aussi le Laplacien brut de E) qui est défini à partir de la forme quadratique $\sigma \mapsto \int_M |D\sigma|^2$, plus exactement, nous avons l'identité suivante

$$\int_M \langle D\sigma, D\sigma\rangle = \int_M \left\langle\overline{\Delta}\sigma,\sigma\right\rangle,\ \forall\sigma\in C_0^\infty(M).$$

On a $\left(\overline{\Delta}\sigma\right)(x) = -\sum_{i=1}^n D_{e_i}D_{e_i}\sigma$, où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est un repère orthonormé de T_xM.

Dans beaucoup de problèmes géométriques, E est aussi muni d'un Laplacien naturel qui admet une décomposition de Bochner-Weitzenbock $\overline{\Delta}+V$, où V est un champ d'endomorphismes symétriques de E ; c'est le cas de la L^2-cohomologie (cf. le paragraphe 3). On décompose alors V en $V_+ - V_-$, où $V_+(x)s$ est égale à $V(x)s$ si s appartient à un espace propre de $V(x)$ associé à une valeur propre positive , et égale à zéro sur l'orthogonal et on définit de façon symétrique $V_- = (-V)_+$; ainsi $-|V_-|$ est la plus petite valeur propre de V et $|V_+|$ est la plus grande, on a alors le théorème suivant :

1.4. THÉORÈME. — *Si (M,g) vérifie pour un $p>4$, l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \le \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u\in C_0^\infty(M),$$

$$\text{et si } \int_M |V_-|^{\frac{p}{2}} < \infty$$

alors $\mathcal{H}(E,V) = \{\sigma\in L^2(E), \overline{\Delta}\sigma + V\sigma = 0\}$ est de dimension finie.

Preuve. — Nous ne refaisons pas la preuve, c'est la même que précédemment ; elle s'adapte grâce à l'inégalité de Kato et ces conséquences (Appendice de [B], et [H-S-U]) ; à savoir que si on note $H = \overline{\Delta} + V_+$ alors si σ est une section continue de E, on a

$$|H^{-1}V_-\,\sigma|(x) \le \left(\Delta^{-1}|V_-|\,|\sigma|\right)(x),$$

grâce à ceci on montre que $H^{-1}V_-$ opère de façon compacte sur $L^2(E)$. □

1.5. Remarque. — Nous avons comme en 1.3 que si $p>2$ alors $H^{-1/2}V_-^{1/2}$ opère de façon compacte sur $L^2(E)$, ceci grâce à l'inégalité

$$|H^{-1/2}V_-^{1/2}\sigma|(x) \le \left(\Delta^{-1/2}|V_-|^{1/2}|\sigma|\right)(x).$$

1.c Avec une autre inégalité de Sobolev. — Notons que nous pouvons améliorer notre résultat en considérant d'autres inégalités de Sobolev, à savoir

1.6. THÉORÈME. — *Si q est une fonction positive sur la variété riemannienne (M,g) telle que l'on ait l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)+q(x)u^2(x)dx,\ \forall u\in C_0^\infty(M),$$

alors si le champ V d'endomorphismes symétriques de E vérifie pour $p>4$,

$$\int_M \left(|V_-|(x)+q(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx<\infty,$$

alors $\mathcal{H}(E,V)=\{\sigma\in L^2(E), \overline{\Delta}\sigma+V\sigma=0\}$ est de dimension finie.

Pour montrer ce résultat, il suffit de remplacer l'opérateur de Laplace Δ (ou de Bochner $\overline{\Delta}$) par l'opérateur de Schrödinger $\Delta+q$ (ou par $\overline{\Delta}+q(x)Id$).

2. Bornes sur la dimension

Le but de cette partie est d'obtenir des majorations de la dimension de $\mathcal{H}(E,V)=\{\sigma\in L^2(E),\ \overline{\Delta}\sigma+V\sigma=0\}$ où E est un fibré riemannien sur (M,g), V un champ lisse d'endomorphismes symétriques de E et où $\overline{\Delta}=D^*D$ est le Laplacien de Bochner associé à la connexion compatible D de E.

Dans toute cette partie, nous notons $\mu_p(M)$, la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u\in C_0^\infty(M),$$

c'est à dire

$$\mu_p(M)=\inf\left\{\frac{||du||^2_{L^2}}{||u||^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}}},\ u\in C_0^\infty(M)\right\};$$

ainsi la non-trivialité de cette constante implique que l'inégalité de Sobolev précédente est non-triviale. Nous supposerons dans tout ce paragraphe que c'est le cas. Nous commençons par donner un résultat d'annulation :

2.a. Annulation.

2.1. PROPOSITION . — *Si*

$$\int_M |V_-|^{\frac{p}{2}} < \mu_p(M)^{\frac{p}{2}},$$

alors

$$\mathcal{H}(E,V) = \{\sigma \in L^2(E), \overline{\Delta}\sigma + V\sigma = 0\} = \{0\}.$$

Preuve. — Ceci repose sur l'identité suivante valable pour toute section C^2, σ de E et ρ une fonction lisse à support compact :

$$\int_M |D\rho\sigma|^2(x)dx = \int_M \left\langle \overline{\Delta}\sigma, \sigma \right\rangle \rho^2 + \int_M |d\rho|^2 \, |\sigma|^2 \, ;$$

Pour obtenir ceci, on intègre par parties le premier terme et on se sert de l'identité

$$D^* D\,(\rho\sigma) = \Delta\rho\,\sigma - 2D_{\mathrm{grad}\,\rho}\sigma + \rho\overline{\Delta}\sigma$$

$$\begin{aligned}\int_M |D\rho\sigma|^2(x)dx &= \int_M \left\langle D^* D\,(\rho\sigma)\,, \rho\sigma \right\rangle \\ &= \int_M \left\langle \overline{\Delta}\sigma, \sigma \right\rangle \rho^2 - \left\langle d\left(\frac{\rho^2}{2}\right),\, d|\sigma|^2 \right\rangle + \rho\Delta\rho\,|\sigma|^2,\end{aligned}$$

On termine alors en intégrant par parties le terme du milieu en utilisant la formule $\rho\Delta\rho - \Delta\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = |d\rho|^2$. On applique alors cette identité à $\sigma \in \mathcal{H}(E,V)$, qui est bien C^2 par régularité elliptique et on utilise l'inégalité de Sobolev pour obtenir

$$\mu_p(M)||\rho\sigma||^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \leq \int_M |D(\rho\sigma)|^2 = \int \left\langle -V\sigma, \sigma \right\rangle \rho^2 + |d\rho|^2|\sigma|^2. \tag{2.2}$$

On choisit alors une fonction ρ tel que $\rho = 1$ sur la boule géodésique $B(x,R)$ de centre x fixé et de rayon R et $\rho(y) = \frac{1}{r}$distance $(y, M - B(x, R+r))$ ailleurs, on a donc

$$\mu_p(M)||\rho\sigma||^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \leq \int_M \rho^2|V_-|\,|\sigma|^2 + \frac{1}{r^2}\int_{B(x,R+r)-B(x,R)} |\sigma|^2.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\left(\mu_p(M) - ||V_-||_{L^{\frac{p}{2}}}\right)\, ||\rho\sigma||^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}(M)} \leq \frac{1}{r^2}\int_{B(x,R+r)-B(x,R)} |\sigma|^2 \, ;$$

lorsque l'on fait tendre r vers l'infini, on obtient, sous les hypothèses de la proposition, que σ est nulle. □

Remarque. — Comme dans tout le reste de cette partie, ce résultat est valable pour tout $p > 2$, contrairement à la première partie.

Puis, nous allons montrer un résultat de finitude, pour cela on veut se servir des résultats de Gallot-Meyer ([G-M 1]).

2.b. Finitude. — Nous montrons ici que si $||V_-||_{L^{\frac{p}{2}}}$ est assez petit alors $\mathcal{H}(E,V)$ est de dimension finie avec une borne sur sa dimension, ceci sans hypothèse sur p.

2.3. PROPOSITION. — *Il existe une constante explicite $C(p,l) > 1$, telle que si*

$$||V_-||_{L^{\frac{p}{2}}} < C(p,l)\,\mu_p(M),$$

alors $\mathcal{H}(E,V)$ est de dimension finie et de plus il existe une fonction explicite $F_{(p,l)}$ telle que

$$\dim \mathcal{H}(E,V) \leq F_{(p,l)}\left(\mu_p^{-1}(M)\,||V_-||_{L^{\frac{p}{2}}}\right)\ ;$$

où on a noté l est la dimension des fibres de E. Notamment pour $p \geq 4$, on a l'estimation suivante : si

$$||V_-||_{L^{\frac{p}{2}}} \leq \left(1+\frac{1}{(l+1)^2}\right)^{1-\frac{2}{p}} \mu_p(M),$$

alors

$$\dim \mathcal{H}(E,V) \leq l.$$

Preuve. — Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on reprend l'inégalité (2.2) où on a choisi R assez grand pour que

$$\left(\int_{M-B(x,R)} |V_-|^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} \leq \varepsilon\mu_p(M),$$

ainsi en appliquant l'inégalité de Hölder au terme $\int_{M-B(x,R)} \rho|V_-|\,|\sigma|^2$, on obtient

$$(1-\varepsilon)\mu_p(M)\left(\int_M |\rho\sigma|^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_{B(x,R)} |V_-|\,|\sigma|^2 + \frac{1}{r^2}\int_{B(x,R+r)-B(x,R)} |\sigma|^2,$$

lorsque r tend vers l'infini, nous obtenons

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\mu_p(M)\left(\int_{B(x,R)} |\sigma|^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{1-\frac{2}{p}} &\leq (1-\varepsilon)\mu_p(M)\left(\int_M |\rho\sigma|^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{1-\frac{2}{p}}\\ &\leq \int_{B(x,R)} |V_-|\,|\sigma|^2.\end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant une astuce pour utiliser les résultats de Gallot-Meyer : à $\sigma \in \mathcal{H}(E,V)$, nous associons

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}(y) = \sigma(y)|V_-|^{\frac{2-p}{4}}(y) \text{ si } |V_-|(y) \neq 0 \text{ et } y \in B(x,R),\\ &\hat{\sigma}(y) = 0 \ \text{ ailleurs},\end{aligned}$$

alors nous avons l'inégalité

$$(1-\varepsilon)\mu_p(M)\left(\int_M |\hat{\sigma}|^{\frac{2p}{p-2}}(y)|V_-|^{\frac{p}{2}}(y)dy\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |\hat{\sigma}|^2(y)|V_-|^{\frac{p}{2}}(y)dy.$$

Or l'application $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ est une injection de $\mathcal{H}(E,V)$ dans $L^2(E, |V_-|^{p/2}(y)dy)$ ainsi grâce au théorème 4 de [G-M 1], nous en déduisons que si N est la dimension de $\mathcal{H}(E,V)$ alors si $N \geq l$ nous avons

$$\frac{\gamma_q(l)}{\gamma_q(N)} \leq \left((1-\varepsilon)\mu_p(M)\right)^{\frac{-p}{p-2}} \left(\int_M |V_-|^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p-2}} \ ;$$

où $q = 2p/(p-2) > 2$ et la fonction γ_q est définie à l'aide de la fonction Γ d'Euler par

$$\gamma_q(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Nous pouvons désormais faire tendre ε vers 0 et obtenir

$$\gamma_q(l)\left(\mu_p(M)^{-1}\|V_-\|_{L^{\frac{p}{2}}}\right)^{-\frac{p}{p-2}} \leq \gamma_q(N).$$

Mais comme $x \mapsto \gamma_q(x)$ est une fonction décroissante et tend vers 1 à l'infini, nous en déduisons que si

$$\frac{\|V_-\|_{L^{\frac{p}{2}}}}{\mu_p(M)} < \left(\gamma_q(l)\right)^{\frac{p}{p-2}},$$

alors $\dim \mathcal{H}(E,V) = N$ est finie et est majorée par

$$\text{Max}\ \left(l,\ \gamma_q^{-1}\left(\gamma_q(l)\left(\mu_p(M)\|V_-\|^{-1}_{L^{\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)\right).$$

Si $p \geq 4$, alors $q \leq 4$, nous pouvons expliciter un peu ce résultat car alors

$$\frac{\gamma_q(l)}{\gamma_q(N)} \geq \frac{\gamma_4(l)}{\gamma_4(N)} = \frac{l+2}{l}\ \frac{N}{N+2},$$

d'où $N \leq 2lI/(l+2-lI)$, où on a posé

$$I = \left(\frac{\|V_-\|_{L^{\frac{p}{2}}}}{\mu_p(M)}\right)^{\frac{p}{p-2}} < 1 + 2/l.$$

Ainsi si $I < 1 + 1/(l+1)^2$, nous avons $N \leq l$. □

2.c. majoration de la dimension et inégalités de Gagliardo-Nirenberg. — Le but de ce paragraphe est d'obtenir une majoration de la dimension de $\mathcal{H}(E,V)$ à partir des inégalités de Gagliardo-Nirenberg et du théorème 4 de [G-M 1].

2.4. THÉORÈME. — *Si $V_- \in L^{\frac{r'}{2}} \cap L^{\frac{r}{2}}$ où $r > p > r'$ et $r > 4$ alors $\mathcal{H}(E,V)$ est de dimension finie et*

$$\dim \mathcal{H}(E,V) \leq l\ \text{Max}\ \left(1, C(r',r,p)\left\|\frac{V_-}{\mu_p(M)}\right\|^{\frac{r}{2}}_{L^{\frac{r}{2}}}\ \left\|\frac{V_-}{\mu_p(M)}\right\|^{\frac{r'(r-p)}{2(p-r')}}_{L^{\frac{r'}{2}}}\right).$$

Preuve. — C'est un résultat classique d'obtenir que si $\sigma \in L^2(E)$ vérifie $\overline{\Delta}\sigma + V\sigma = 0$ et si $V_- \in L^{\frac{r}{2}}$ pour $r > p$ alors σ est borné (cf. [Y], appendice B) et même

$$||\sigma||_{L^\infty} \leq C(p,r)\mu_p(M)^{\frac{-p}{4}}||V_-||_{L^{r/2}}^{\frac{r}{r-p}}||\check{s}\sigma||_{L^2}.$$

Ceci nous permet d'affirmer que, sous les hypothèses du théorème, si $\sigma \in \mathcal{H}(E,V)$ alors $\sigma \in L^2 \cap L^\infty$ et que $(\overline{\Delta} + V_+)\sigma = V_-\sigma \in L^{\frac{r}{2}}$; mais nous avons

$$\sigma(x) = \left(e^{-t(\overline{\Delta}+V_+)}\sigma\right)(x) + \left(\int_0^t e^{-s(\overline{\Delta}+V_+)}(\overline{\Delta} + V_+)\sigma\, ds\right)(x),$$

En se servant du fait que le semi-groupe $e^{-t(\overline{\Delta}+V_+)}$ est dominé par le semi-groupe $e^{-t\Delta}$, on obtient

$$|\sigma|(x) \leq \left(e^{-t\Delta}|\sigma|\right)(x) + \left(\int_0^t e^{-s\Delta}|V_-|\,|\sigma|\, ds\right)(x),$$

nous procédons alors comme dans l'appendice et nous pouvons en déduire l'inégalité de Gagliardio-Nirenberg suivante

$$||\sigma||_{L^\infty} \leq C(p,s,r)\mu_p(M)^{-\theta}||V_-\sigma||_{L^{\frac{r}{2}}}^{\theta}||\sigma||_{L^{\frac{s}{2}}}^{1-\theta},$$

où $\theta = \frac{p/s}{1-p/r+p/s}$. Maintenant, nous majorons $||\sigma||_{L^{\frac{s}{2}}}$ en servant du fait que

$$(\overline{\Delta} + V_+)^{-1}\; L^{\frac{r'}{2}} \longrightarrow L^{\frac{s}{2}}$$

si $s = \frac{pr'}{p-r'}$, cette inclusion est un corollaire de ce qui est énoncé en appendice. Et nous avons donc

$$||\sigma||_{L^{\frac{s}{2}}} \leq\; C(p,r')\,\mu_p(M)^{-1}\,||V_-\sigma||_{L^{\frac{r'}{2}}}\;;$$

finalement, nous obtenons

$$||\sigma||_{L^\infty} \leq C(p,r',r)\mu_p(M)^{-1}||V_-\sigma||_{L^{\frac{r}{2}}}^{\theta}||V_-\sigma||_{L^{\frac{r'}{2}}}^{1-\theta}.$$

Mais nous avons les majorations suivantes

$$||V_-\sigma||_{L^{\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \leq \left(\int_M |\sigma|^2(y)\,|V_-|^{\frac{r}{2}}(y)\,dy\right)\;||\sigma||_{L^\infty}^{\frac{r-4}{2}},$$

$$||V_-\sigma||_{L^{\frac{r'}{2}}} \leq ||V_-||_{L^{\frac{r'}{2}}}||\sigma||_{L^\infty}.$$

Nous en déduisons donc la majoration

$$||\sigma||_{L^\infty}^2 \leq C(p,r',r)\mu_p(M)^{\frac{-r}{2\theta}}||V_-||_{L^{\frac{r'}{2}}}^{\frac{r}{2}\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}\int_M |\sigma|^2(y)\,|V_-|^{\frac{r}{2}}(y)dy\;;$$

$$\text{avec}\;\; \frac{1}{\theta} = \frac{r'}{r}\frac{r-p}{p-r'} + 1.$$

Ainsi $\mathcal{H}(E,V)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2\left(E, |V_-|^{\frac{r}{2}}(y)dy\right)$ selon le théorème 4 de [G-M 1], si $N = \dim\mathcal{H}(E,V) \geq l$, il existe un $\sigma_0 \in \mathcal{H}(E,V)$ tel que

$$N\;||\sigma_0||_{L^2(|V_-|^{\frac{r}{2}}(y)dy)}^2 \leq l\left(\int_M |V_-|^{\frac{r}{2}}(y)\,dy\right)\;||\sigma_0||_{L^\infty}^2,$$

Ainsi, la dimension de $\mathcal{H}(E,V)$ est bien finie et nous obtenons la majoration énoncée. □

2.d. Estimée de Cwickel-Lieb-Rosenbljum. — Dans cette partie, on veut utiliser la majoration de Cwickel-Lieb-Rosenbljum obtenue par Bérard-Besson ([B-B]) pour les variétés riemanniennes.

2.5. THÉORÈME. — *Si* $V_- \in L^{\frac{p}{2}} \cap L^{\frac{r}{2}}$ *où* $r > p$*, alors* $\mathcal{H}(E,V)$ *est de dimension finie et*

$$\dim \mathcal{H}(E,V) \leq l\, C(p)\, \mu_p(M)^{-p/2} \int_M |V_-|^{\frac{p}{2}}(x)dx.$$

Preuve. — Nous ne faisons pas la preuve en détail, nous donnons simplement les arguments qui font que nous pouvons utiliser la preuve de Bérard-Besson : nous posons $H = \overline{\Delta} + V_+$, c'est un opérateur positif dominé par Δ ; nous introduisons alors l'opérateur

$$K_m = V_-^{1/2} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j\, C_m^j\, \left(H + jV_-\right)^{-1}\ V_-^{1/2},$$

nous avons

$$K_m = V_-^{1/2} H^{-1/2} L_m(Y) H^{-1/2} V_-^{1/2},$$

$$\text{où } Y = H^{-1/2} V_- H^{-1/2} = \left(V_-^{1/2} H^{-1/2}\right)^* V_-^{1/2} H^{-1/2},$$

où $(\ )^*$ est l'opération passage à l'adjoint de $L^2(E)$ et $L_m(y) = \int_0^\infty e^{-t}\left(1 - e^{-ty}\right)^m dt$. Selon la remarque 1.5, l'opérateur $V_-^{1/2} H^{-1/2}$ est un opérateur compact de $L^2(E)$, donc K_m aussi. Enfin si $\sigma \in \mathcal{H}(E,V)$, alors l'hypothèse que $V_- \in L^{\frac{r}{2}}$, nous garantit que $\sigma \in L^\infty$ et que $\tilde{\sigma} = V_-^{1/2}\sigma \in L^2$ et vérifie $K_m \tilde{\sigma} = L_m(1)\tilde{\sigma} = \frac{1}{m+1}\tilde{\sigma}$.

Puisque K_m est un opérateur positif compact auto-adjoint, il a donc un nombre dénombrable de valeurs propres qui sont positives et nous avons

$$\dim \mathcal{H}(E,V) \leq \dim \operatorname{Ker}(K_m - L_m(1) Id) \leq (m+1) Tr\, K_m\ ;$$

la preuve est ensuite la même que celle de Bérard-Besson. $\square$

2.c. Amélioration. — Comme dans le paragraphe 1.c., nous pouvons énoncer des résultats de finitude similaires aux propositions 2.4 et 2.5 lorsque (M^n, g) satisfait à l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x) + q(x)u^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où q est une fonction lisse positive. Il suffit de reprendre la preuve en considérant l'opérateur de Schrödinger $\Delta + q$ en lieu et place du Laplacien Δ. On peut ainsi énoncer le

2.6. THÉORÈME. — *Si* (M^n,g) *vérifie l'inégalité de Sobolev précédente et si* $|V_-|$ *et* q *sont dans* $L^{\frac{p}{2}}\cap L^{\frac{r}{2}}$*, pour* $r>p$ *alors* $\mathcal{H}(E,V)$ *est de dimension finie et*

$$\dim\mathcal{H}(E,V)\le l\,C(p)\,\mu_p(M)^{-p/2}\int_M \left(|V_-|+q\right)^{\frac{p}{2}}(x)dx.$$

2.7. Cas d'annulation. — Nous pouvons aussi dans ce cadre reprendre la preuve du résultat d'annulation et conclure.

PROPOSITION. — *Si* (M^n,g) *vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}}\le\int_M |du|^2(x)+q(x)u^2(x)dx,\ \forall u\in C_0^\infty(M),$$

où q *est une fonction positive , alors si*

$$\int_M \left(|V_-|+q\right)^{\frac{p}{2}}(x)dx<\mu_p(M)^{p/2},$$

alors $\mathcal{H}(E,V)=\{0\}$.

3. Application à la L^2-cohomologie

Nous commençons par rappeler rapidement ce que sont les espaces de L^2-cohomologie.

3.a. La L^2-cohomologie. — Soit (M^n,g) une variété riemannienne complète de dimension n : l'opérateur de différentiation extérieure agit de

$$d\ :\ C_0^\infty(\Lambda^kT^*M)\longrightarrow C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$$

et vérifie $d\circ d=0$; on définit alors les espaces

i) $Z^kL^2(M)$ qui est le noyau de l'opérateur d agissant, de façon non-borné, sur $L^2(\Lambda^kT^*M)$, ou de façon équivalente

$$Z^kL^2(M)=\{\alpha\in L^2(\Lambda^kT^*M),\ d\alpha=0\},$$

où on entend que $d\alpha$ est une distribution (ou un courant).

ii) $B^kL^2(M)$ qui est l'adhérence dans $L^2(\Lambda^kT^*M)$ de $d\,C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$.

Comme $d\circ d=0$, nous avons $B^kL^2(M)\subset Z^kL^2(M)$, le $k^{\text{ième}}$ espace de L^2-cohomologie est défini par

$$H^k_{(2)}(M)=Z^kL^2(M)/B^kL^2(M).$$

Ainsi deux k-formes L^2, (faiblement) fermées α et β sont L^2-cohomologues si et seulement si il existe une suite de $(k-1)$-formes lisses à support compacts $(\gamma_l)_{l=0}^{\infty}$ telles que $\alpha - \beta = L^2 - \lim_{l\to\infty} d\gamma_l$.

Dans le cas où la variété est compacte, alors ces espaces sont de dimension finie et sont isomorphes aux espaces de cohomologie de de Rham ; dans le cas non-compact, ces espaces ne sont pas, en général, de dimension finie.

3.b. L^2-cohomologie et formes harmoniques L^2. — On note δ l'opérateur différentiel adjoint à d, i.e.

$$\int_M d\alpha \wedge *\beta = \int_M \alpha \wedge *\delta\beta \ , \ \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M),\ \beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M),$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge $* \ \Lambda^k T^* M \longrightarrow \Lambda^{n-k} T^* M$; par le théorème de Stokes, on a donc $\delta = (-1)^{nk+n+1} * d *$.

Si $\mathcal{H}^k(M)$ est l'espace des k-formes harmoniques L^2

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M),\ d\alpha = \delta\alpha = 0\},$$

alors l'espace $L^2(\Lambda^k T^* M)$ admet la décomposition orthogonale de Hodge-deRham suivante

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus B^k L^2(M) \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)},$$

où l'adhérence s'entend pour la topologie de $L^2(\Lambda^k T^* M)$. Nous avons aussi

$$Z^k L^2(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus B^k L^2(M),$$

ce qui signifie que nous avons l'isomorphisme

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq H_{(2)}^k(M).$$

En fait, selon [dR], si $\Delta^k = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de Hodge-deRham agissant sur les formes différentielles nous avons

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M),\ \Delta^k \alpha = 0\},$$

et ce Laplacien admet la décomposition de Bochner-Weitzenbock suivante

$$\Delta^k = \overline{\Delta} + \mathcal{R}^k,$$

où $\mathcal{R}^k$ est un endomorphisme symétrique de $\Lambda^k T^* M$ que l'on peut définir à l'aide de l'opérateur de courbure de (M^n, g) (cf [G-M 2]) ; par exemple $\mathcal{R}^1$ est l'endomorphisme associé au tenseur de Ricci. Ainsi grâce aux résultats généraux énoncés précédemment, nous pouvons en déduire les résultats de finitude suivants

3.c. Finitude de la L^2-cohomologie.

3.1. THÉORÈME . — *Si pour un* $p > 4$, (M^n, g) *vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si

$$\int_M |\mathcal{R}_-^k|^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

alors le $k^{\text{ième}}$ *espace de* L^2 *cohomologie de* (M, g) *est de dimension finie.*

Remarques.

i) Si (M, g) vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

pour un $p \leq 4$ alors l'hypothèse sur $\mathcal{R}_-^k$ pour avoir la finitude du $k^{\text{ième}}$espace de L^2- cohomologie est

$$\int_M |\mathcal{R}_-^k|^{\frac{p}{2}} < \infty \text{ et pour un } r > p,\ \int_M |\mathcal{R}_-^k|^{\frac{r}{2}} < \infty,$$

ii) À un facteur $C(n, k)$ près, nous pouvons majorer $|\mathcal{R}_-^k|(x)$ par le maximum $K(x)$ des courbures sectionnelles des 2-plans en x, i.e. $|\mathcal{R}_-^k| \leq C(n, k)\, K(x)$. nous pouvons ainsi énoncer le résultat suivant :

3.2. THÉORÈME. — *Si* (M, g) *vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si lorsque $p \geq 5$ *et* $K \in L^{p/2}$*,ou lorsque* $p \leq 4$ *et* $K \in L^{p/2} \cap L^{r/2}$*, pour un* $r > p$*, alors les espaces de* L^2*- cohomologie de* (M, g) *sont de dimension finie.*

Aussi grâce à la proposition 2.1 nous pouvons affirmer les résultats d'annulation suivants :

3.3. PROPOSITION . — *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne complète qui satisfait à l'inégalité de Sobolev suivante*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors

i) Si $\int_M |\operatorname{ric}_-|^{\frac{p}{2}}(x)dx < \mu_p(M)^{\frac{p}{2}}$*, alors* $\mathcal{H}^1(M) = \mathcal{H}^{n-1}(M) = \{0\}$*, où* ric_- *est la partie définie négative du tenseur de Ricci.*

ii) Si $\int_M K^{\frac{p}{2}}(x)dx < \left(\mu_p(M)/C(n,k)\right)^{\frac{p}{2}}$*, alors* $\mathcal{H}^k(M) = \{0\}$.

De plus si $p \geq 4$, grâce à la proposition 2.3, nous avons les résultats de presque-annulation suivant:

3.4. PROPOSITION. — *Si la courbure de Ricci satisfait à*

$$\int_M |\operatorname{ric}_-|^{\frac{p}{2}}(x)dx < \mu_p(M)^{\frac{p}{2}}\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1}$$

alors $\dim \mathcal{H}^1(M) \leq n = \dim \Lambda^1 T^* \mathbf{R}^n$ *, et* $\dim \mathcal{H}^{n-1}(M) \leq n = \dim \Lambda^{n-1} T^* \mathbf{R}^n$ *; et si la courbure de* M *satisfait à*

$$\int_M K^{\frac{p}{2}}(x)dx < \left(\mu_p(M)/C(n,k)\right)^{\frac{p}{2}}\left(1 + \frac{1}{(C_n^k+1)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1},$$

alors $\dim \mathcal{H}^k(M) \leq C_n^k = \dim \Lambda^k T^* \mathbf{R}^n$;.

3.d. Sous-variété d'un espace euclidien. — Nous montrons ici que pour les sous-variétés d'un espace euclidien, nous pouvons obtenir des résultats qui ne supposent pas d'inégalité de Sobolev , ceci grâce aux travaux de Hoffman-Sprück.

3.5. THÉORÈME. — *Si* (M^n, g) *est une variété de dimension* $n > 2$ *isométriquement immergée dans un espace euclidien* $\mathbf{R}^N$ *telle que la seconde forme fondamentale* II *de l'immersion satisfait à*

$$\int_M |II|^n(x)dx < \infty, \text{ lorsque } n \geq 5$$

$$\text{et lorsque } n \leq 4,\ \int_M |II|^n(x)dx < \infty,\ \int_M |II|^{n+\varepsilon}(x)dx < \infty \text{pour un } \varepsilon > 0,$$

alors les espaces de L^2*-cohomologie de* (M^n, g) *sont de dimension finie.*

Preuve. — On va utiliser les modifications des résultats de finitude énoncées en 1.c et 2.e. C'est possible grâce à l'inégalité de Sobolev obtenu par Hoffman-Spruck [H-S]

$$c_n \left(\int_M |u|^{\frac{n}{n-1}}(x)dx\right)^{1-\frac{1}{n}} \leq \int_M |du| + k|u|,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où k est la norme du vecteur courbure moyenne $k(x) = |\sum_{i=1}^n II_x(e_i, e_i)|$, où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base orthonormée de T_xM. Si $n > 2$ et si on applique cette inégalité à $u = v^{2\frac{n-1}{n-2}}$, en appliquant l'inégalité de Cauchy -Schwarz, on obtient l'inégalité suivante

$$\tilde{c}_n \left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |dv|^2(x) + k^2|v|^2(x)dx,\ \forall v \in C_0^\infty(M),$$

où $\tilde{c}_n = c_n^2 \frac{n-2}{4(n-1)}$. Le théorème s'obtient alors en remarquant d'abord que $k(x) \leq n|II|(x)$ et que grâce à la formule de Gauss, la courbure de (M, g) se calcule à partir de II, les hypothèses faites sur II et l'inégalité de Hoffman-Spruck font que nous pouvons appliquer les propositions 1.6. et 2.7. $\square$

Nous pouvons aussi énoncer dans ce cas un résultat d'annulation.

PROPOSITION. — *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, il existe une constante $\varepsilon(n)$ telle que si*

$$\int_M |II|^n(x)dx < \varepsilon(n)$$

alors tous les espaces de L^2-cohomologie de (M, g) sont nuls.

Appendice A : inégalités de Sobolev

Le but de cet appendice est de présenter les inégalités de Sobolev nécessaires aux preuves de cet article. Dans tous le reste de l'appendice, (M^n, g) est une variété riemannienne complète (de volume infini). Nous considérons un opérateur de Schrödinger sur (M, g) de la forme $H = \Delta + V$, où le potentiel V est une fonction positive ou nulle sur M. Dans ce cas, cet opérateur H est sous-markovien, i.e. le semi-groupe, $\left(e^{-tH}\right)_{t \geq 0}$, associé à cet opérateur vérifie

$$\forall\, 0 \leq f \leq 1 \Rightarrow \quad 0 \leq e^{-tH} f \leq 1.$$

Selon N. Varopoulos ([V]) et J. Nash, nous savons que pour H les propriétés suivantes sont équivalentes

i) H vérifie l'inégalité (de Sobolev) suivante

$$\mu \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M (Hu)(x)\, u(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

ii) le semi-groupe associé vérifie

$$||e^{-tH} u||_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{p}{2}}} ||u||_{L^1},\ \forall u \in L^1(M)\,;$$

avec le contrôle suivant entre les meilleures constantes apparaissant dans ces inégalités $c(p) \leq \mu^{p/2} C \leq C(p)$, où les constantes $c(p)$ et $C(p)$ sont explicites en fonction de p.

A.1. — Varopoulos montre aussi le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Si H vérifie les propriétés i) ou ii) précédentes alors pour $r \in]1, \frac{p}{2}[$, H^{-1} est un opérateur continu de $L^r(M)$ dans $L^{\frac{rp}{p-2r}}$, plus exactement il existe une constante $C(p,r)$ telle que*

$$\mu ||u||_{L^{\frac{rp}{p-2r}}} \leq C(p,r)||Hu||_{L^r},\ \forall u \in L^r.$$

A.2. — Grâce à T. Coulhon nous savons qu'en fait ces propriétés impliquent (et même sont équivalentes) à des inégalités de Gagliardo-Nirenberg.

PROPOSITION. — *Si H vérifie une des hypothèses i) ou ii) précédentes alors pour tout $r > p$ nous avons l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante*

$$||u||_{L^\infty} \leq C(p,s,r)\mu^{-\theta}||Hu||^{\theta}_{L^{\frac{r}{2}}}||u||^{1-\theta}_{L^{\frac{s}{2}}},\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où $\theta = \frac{p/s}{1-p/r+p/s}$.

Preuve. — La preuve que nous donnons est tiré de [Co]. Soit $u \in C_0^\infty(M)$, nous avons donc

$$u = e^{-tH}u + \int_0^t e^{-\tau H}(Hu)\,d\tau\ ;$$

compte tenu de la propriété ii) nous vérifions facilement que

$$||e^{-\tau H}Hu||_{L^\infty} \leq C(\mu\tau)^{-p/r}||Hu||_{L^r},$$
$$||e^{-tH}u|| \leq C(\mu t)^{-p/s}||u||_{L^s}.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty} &\leq C(\mu t)^{-p/s}||u||_{L^s} + \int_0^t C(\mu\tau)^{-p/r}||Hu||_{L^r}d\tau \\ &\leq C(\mu t)^{-p/s}||u||_{L^s} + C(\mu t)^{-p/r}\frac{t}{1-p/r}||Hu||_{L^r}, \end{aligned}$$

on obtient alors le résultat énoncé en choisissant le réel t qui optimise cette inégalité. □

Appendice B : la L^2-cohomologie des sous-variétés minimales à courbure totale finie

On va ici calculer les espaces de L^2-cohomologie des sous-variétés (M^n, g_0) minimales d'un espace euclidien et à courbure totale finie, i.e. dont la seconde forme fondamentale vérifie

$$\int_M |II|^n(x)dx < \infty.$$

Selon M. Anderson, la seconde forme fondamentale d'une telle variété est en fait bornée, (cf. [A], ceci repose sur les équations de Simons). Et nous savons donc que les espaces de L^2 cohomologie de ces variétés sont de dimension finie. En fait, Anderson (Osserman pour les surfaces) montre qu'une telle variété (M, g_0) est difféomorphe à une variété compacte $\overline{M}$ privée de b points correspondants aux bouts de (M, g_0) : $M \simeq \overline{M} - \{p_1, \ldots, p_b\}$. Notre résultat est le suivant :

B.1. Théorème. — $b_0 L^2(M) = b_n L^2(M) = 0$.

Si $n = \dim M = 2$ *alors* $\mathcal{H}^1(M) \simeq H^1(\overline{M})$.

Si $n \geq 3$, *alors* $b_1 L^2(M) = b_1(\overline{M}) + b - 1$,

pour $k \in [2, n-2]$, $\mathcal{H}^k(M) \simeq H^k(\overline{M})$ *et donc* $b_k L^2(M) = b_k(\overline{M})$,

et $b_{n-1} L^2(M) = b_{n-1}(\overline{M}) + b - 1$.

Où on a noté $b_i L^2(M) = \dim \mathcal{H}^i(M)$ le i-ième nombre de Betti L^2 de (M, g).

Preuve. — Nous commençons par le cas où $n \geq 3$, selon [A], (M, g_0) est C^∞ quasi-isométrique à une variété (M, g) plate à l'infini ; plus exactement les bouts B_i de (M, g) sont isométriques à $\mathbf{R}^n - r\mathbf{D}^n$, où $\mathbf{D}^n$ est la boule unité de $\mathbf{R}^n$ euclidien. Ou encore, il existe sur $\overline{M}$ une métrique $\overline{g}$ plate au voisinage des points $p_1, \ldots, p_b$, telle que g soit conforme à $\overline{g}$, $g = f^2\overline{g}$, où $f = 1$ sur $\overline{M} - \cup_{i=1}^b \overline{B}(p_i, 2\varepsilon)$ (boules géodésiques pour la métrique $\overline{g}$), et $f(x) = \overline{d}(p_i, x)^{-2}$ sur $\overline{B}(p_i, \varepsilon)$.

Comme les dimensions des espaces de L^2 cohomologie sont des invariants de quasi-isométrie, il suffit de calculer la L^2-cohomologie de (M,g). Nous allons conclure grâce à la proposition suivante qui compare la cohomologie à support compact et la cohomologie L^2.

On définit la cohomologie à support compact à partir du complexe :

$$\cdots \longrightarrow C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)\xrightarrow{d}C_0^\infty(\Lambda^kT^*M)\xrightarrow{d}C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\longrightarrow\cdots$$

par

$$H_0^k(M) = \mathrm{Ker}\{dC_0^\infty(\Lambda^kT^*M)\longrightarrow C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\}/dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M).$$

On a une application naturelle des espaces de cohomologie à support compact dans les espaces de cohomologie L^2. Et dans notre cas, nous avons :

B.2. PROPOSITION.

Si $k\in[1,n-1]$ alors $H_0^k(M)\longrightarrow\mathcal{H}^k(M)$ est injective.

Si $k\neq n-1$, alors $H_0^k(M)\longrightarrow\mathcal{H}^k(M)$ est surjective.

Et si nous définissons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\ :\mathcal{H}^{n-1}(M) &\longrightarrow \{(x_i)_{i=1}^b\in\mathbf{R}^b,\ \sum_{i=1}^b x_i=0\}\\ h\qquad &\mapsto \left(\int_{\partial B_i}h\right)_{i=1}^b\end{aligned}$$

alors cette application linéaire $\mathcal{L}$ est surjective et $H_0^{n-1}(M)\longrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}\subset\mathcal{H}^{n-1}(M)$ est surjective.

On déduit facilement le théorème de cette proposition car selon le lemme d'excision, la cohomologie à support compact de M est égale à la cohomologie relative

$H^*(\overline{M}, Z)$ (où $Z = \{p_1, \dots, p_b\}$), car M est difféomorphe à $\overline{M} - Z$. On en déduit alors le résultat grâce à la suite exacte (cf [Go])

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(Z) \longrightarrow H^k(\overline{M}, Z) \longrightarrow H^k(\overline{M}) \longrightarrow H^k(Z) \longrightarrow \cdots$$

Dans toute la suite du propos, x_0 est un point fixé de M.

Montrons d'abord l'injectivité.

Si $\alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)$ est une forme fermée nulle en cohomologie L^2, selon [dR], il existe une $k-1$ forme différentielle lisse β telle que

$$\alpha = d\beta,$$

il faut montrer qu'en fait nous pouvons choisir une telle forme β à support compact. A l'infini, sur $M -$ support α, β est une forme fermée. Mais pour R assez grand

$$M - \text{support } \alpha \subset M - B(x_0, R) \simeq \cup_{i=1}^b \left(\overline{B}(p_i, \varepsilon) - \{p_i\}\right),$$

et pour $k - 1 \neq 0, n-1$, nous avons la nullité des espaces de cohomologie

$$H^{k-1}\left(\cup_{i=1}^b \left(\overline{B}(p_i, \varepsilon) - \{p_i\}\right)\right) = \{0\} \ ;$$

ainsi pour $k \in [2, n]$, cette forme β est cohomologue à zéro à l'infini : il existe $\gamma \in C^\infty(\Lambda^{k-2}T^*(M - B(x_0, R)))$ telle que

$$\beta = d\gamma,$$

alors si ρ est une fonction lisse valant 1 sur $M - B(x_0, 3R)$ et nulle sur $B(x_0, 2R)$), la forme $\hat{\beta} = \beta - d(\rho\gamma)$, vérifie $d\hat{\beta} = \alpha$ et elle est à support compact, ce qui signifie que α est nulle en cohomologie à support compact.

Il reste à montrer l'injectivité dans le cas où $k = 1$. Dans ce cas puisque α est nulle en cohomologie L^2, il existe une suite de fonctions $u_l \in C_0^\infty(M)$ telle que $\lim_{l\to\infty} ||\beta - du_l||_{L^2} = 0$, l'inégalité de Sobolev (cf. [H-S])

$$c_n \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

implique que la suite u_l est de Cauchy dans $L^{\frac{2n}{n-2}}$ et donc converge vers une fonction u, mais cette fonction u doit vérifier $du = \alpha$. Comme α est à support compact, u est localement constante à l'infini, donc nulle à l'infini puisque $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}$. Et donc α est cohomologue à 0 pour la cohomologie à support compacte.

Montrons alors les surjectivités énoncées : ceci repose sur la proposition suivante :

B.3. PROPOSITION . — *Si h est une k-forme harmonique sur $\mathbf{R}^n - r\mathbf{D}^n$ alors pour $k \in [2, n-2]$, il existe une $(k-1)-$forme lisse β telle que* *i)* $h = d\beta$,

ii) $|\beta(x)| \leq \mathrm{C^{te}}||x|| \sup_{||y||=||x||} |h(y)|$.

Pour $k = 1$*, il existe une fonction harmonique* β *vérifiant la propriété ii) et une constante réelle* C *telle que*

$$h = Cd\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + d\beta.$$

Pour $k = n-1$*, alors il existe une* $(n-2)$ *forme lisse* β *qui satisfait à la propriété ii) et une constante* C *telle que*

$$h = C * d\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + d\beta.$$

Nous ne faisons pas la preuve de la proposition, elle repose sur le fait suivant :

FAIT. — *Si* h *est une* $k-$*forme fermée de* $\mathbf{R}^n - r\mathbf{D}^n$ *et si* $\gamma \in \mathrm{SO}(n)$ *alors il existe une* $(k-1)$ *forme* h_γ *satisfaisant à ii) telle que*

$$\gamma^* h - h = dh_\gamma.$$

Il suffit alors de moyenner cette équation par rapport à la mesure de Haar de $\mathrm{SO}(n)$. Nous pouvons alors établir la surjectivité pour $k \in [2, n-2]$.

Soit donc $h \in \mathcal{H}^k(M)$, il nous faut montrer que h est L^2 cohomologue à une forme à support compact ; d'après ce qui précède il existe β une $(k-1)$ forme lisse telle que sur $M - B(x_0, R)$, $h = d\beta$ et où β satisfait à l'estimation ii). Soit alors ρ une fonction lisse valant 1 sur $M - B(x_0, 2R)$ et à support dans $M - B(x_0, R)$, nous allons montrer que h est L^2 cohomologue à $h - d(\rho\beta)$, ce qui montrera la surjectivité. Pour cela on choisit ρ_r une fonction C^∞ à support compact dans $B(x_0, R+2r)$ telle que $\rho_r = \rho$ sur $B(x_0, R+r)$ et $|d\rho| \leq \frac{2}{r}$.

Si nous montrons que $d(\rho\beta) = L^2 - \lim_{r\to\infty} d(\rho_r\beta)$ nous aurons bien le résultat voulu, mais

$$\frac{1}{2}\,||d(\rho_r\beta - \rho\beta)||^2_{L^2} \leq \int_{M-B(x_0,R+r)} |d\beta|^2 + \int_{B(x_0,R+2r)-B(x_0,R+r)} |d\rho_r|^2|\beta|^2,$$

Majorons alors le deuxième terme de cette inégalité. Grâce à la propriété ii) nous avons que

$$\sup_{y\in B(x_0,R+2r)-B(x_0,R+r)} |\beta|(y) \leq C\ (R+2r) \sup_{y\in B(x_0,R+2r)-B(x_0,R+r)} |h(y)|,$$

puis nous avons la majoration suivante pour la forme harmonique h

$$\sup_{B(x_0,R+2r)-B(x_0,R+r)} |h(y)| \leq \frac{C(n)}{r^{\frac{n}{2}}} \left(\int_{M-B(x_0,R+r/2)} |h|(y)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

en effet cette estimée est valable pour les fonctions harmoniques sur $\mathbf{R}^n - rD^n$. On en déduit donc la majoration

$$\int_{B(x_0,R+2r)-B(x_0,R+r)} |d\rho_r|^2 |\beta|^2$$
$$\leq \mathrm{C^{te}} \operatorname{vol} B(x_0, R+2r) \frac{4}{r^2} \left(\frac{(R+2r)^2}{r^n} \right) \left(\int_{M-B(x_0,R+r/2)} |h|(y)^2 dy \right),$$

ce qui tend bien vers 0 lorsque r tend vers ∞.

Pour montrer la surjectivité de $H^1_0(M) \longrightarrow \mathcal{H}^1(M)$, nous reprenons la preuve précédente et la proposition B.2 pour voir que $h \in \mathcal{H}^1(M)$ est L^2 cohomologue à une forme $\hat{h}$ qui vérifie $\hat{h} = C_i d\left(\frac{1}{\rho_i^{n-2}}\right)$ sur chaque bout B_i (chacun isométrique à $\mathbf{R}^n - r\mathbf{D}^n$ et $\rho_i = ||x||$ sur ce bout). On choisit alors $\Phi \in C^\infty_0(\mathbf{R})$ telle que

$$\Phi(t) = t, \text{ pour } t \geq 3r$$
$$\Phi(t) = 0, \text{ pour } s < 2r,$$

alors la forme $\hat{h} - \sum_i C_i d\left(\frac{1}{(\Phi(\rho_i))^{n-2}}\right)$ est une forme à support compact de carré intégrable, et en tronquant de façon adéquate Φ, on montre facilement qu'elle est L^2 cohomologue à $\hat{h}$ donc à h.

Nous pourrions conclure le calcul des nombres de Betti L^2 de (M,g) en utilisant la dualité de Hodge-Poincaré, l'opérateur $*$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{H}^k(M)$ et $\mathcal{H}^{n-k}(M)$, on obtiendrait ainsi le théorème. Mais nous donnons ici une autre méthode pour calculer le $(n-1)$-ième espace de L^2 cohomologie de (M,g). Montrons d'abord que $H^{n-1}_0(M) \longrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{L} \subset \mathcal{H}^{n-1}(M)$ est une surjection. Ceci est une conséquence de ce qui a été fait précédemment, en effet soit $h \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}$, alors selon B.3. sur chaque bout B_i on a

$$h = C_i * d(\rho^{2-n}) + d\beta,$$

et la constante C_i se calcule par intégration sur ∂B_i : $C_i = \int_{\partial B_i} h$, mais $h \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}$, donc ces constantes sont bien nulles et on conclut alors en reprenant la preuve de la surjectivité de $H^k_0(M) \longrightarrow \mathcal{H}^k(M)$ lorsque $k \in [2, n-2]$.

Il reste à montrer que

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}\ :\mathcal{H}^{n-1}(M) & \longrightarrow & \{(x_i)_{i=1}^{b}\in\mathbf{R}^b,\ \sum_{i=1}^{b}x_i=0\}\\ h & \mapsto & \left(\int_{\partial B_i}h\right)_{i=1}^{b},\end{array}$$

est surjective. Remarquons d'abord que l'on a bien $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}^{n-1}(M)\right)\subset\{(x_i)\in\mathbf{R}^b,\sum x_i=0\}$, puisque

$$\sum_{i=1}^{b}\int_{\partial B_i}h=\int_{\partial K}h=\int_K dh=0,$$

où $K=M-\cup_i B_i$. Pour montrer cette surjectivité, nous rappelons que selon Anderson, nous savons compactifier conformément la métrique g par une métrique $\bar{g}=f^2g$ telle que $(\overline{M},\bar{g})$ soit une variété riemannienne compacte lisse. Nous notons G_{p_i} la fonction de Green de $(\overline{M},\bar{g})$, de pôle p_i, G_{p_i} résoud donc l'équation

$$\Delta^{\bar{g}}G_{p_i}(x)=\delta_{p_i}(x)-\frac{1}{\mathrm{vol}\,\overline{M}}\ ;$$

alors si $x_1,\dots,x_b\in\mathbf{R}$ telle que $\sum x_i=0$ la fonction $h=\sum_{i=1}^{b}x_iG_{p_i}$ est harmonique sur $\overline{M}-Z$, ainsi la $(n-1)$ forme $\omega=\overset{\bar{g}}{*}dh$ est fermé et cofermé sur $\overline{M}-Z$, de plus $\int_{\partial B_i}\omega=x_i$ pour $1\leq i\leq b$, car

$$\int_{\partial B_i}\omega=\int_{\partial B_i}\overset{\bar{g}}{*}dh=\int_{\partial B_i}\frac{\partial h}{\partial n}d\sigma=\int_{B_i}\Delta^{\bar{g}}h=\int_{B_i}\sum x_j\delta_{p_j}=x_i,$$

où n est la normale pointant vers p_i pour la métrique $\bar{g}$ et où les dernières expressions sont à prendre au sens des distributions. Il suffit maintenant de vérifier que $\omega\in L^2(\Lambda^{n-1}T^*M,g)$, or nous avons

$$\int_{B_i}|\omega|_g^2dv_g=\int_{B_i}f^{n-2}|\omega|_{\bar{g}}^2dv_{\bar{g}},$$

mais $|\omega|_{\bar{g}}\underset{p\to p_i}{\sim}c(n)\bar{d}(p,p_i)^{1-n}$ et $f(p)\underset{p\to p_i}{\sim}\bar{d}(p,p_i)^2$, ce qui montre que cette intégrale est bien finie et ceci achève le calcul pour les variétés minimales de dimension $n\geq 3$.

Le calcul de la L^2-cohomologie des surfaces minimales à courbure totale finie est lui beaucoup plus simple , en effet une telle surface est conformément équivalente à une surface compacte $\overline{M}$ privée de r points , nous avons une application naturelle

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{H}^1(\overline{M}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(M)\\ \alpha & \mapsto & \alpha,\end{array}$$

puisque en effet une 1− forme $L^2_{\bar{g}}$ $\bar{g}$-harmonique est aussi L^2_g g-harmonique ; réciproquement si $\alpha\in\mathcal{H}^1(M)$, α est bien une forme $L^2_{\bar{g}}$ harmonique sur $\overline{M}-Z$, il suffit de montrer que la singularité de α en chaque p_i est inessentielle, ceci est une conséquence du fait que α est de carré $\bar{g}$-intégrable. $\square$

4.Bibliographie

[A] M.T. ANDERSON. — *The compactification of a minimal submanifold in euclidian space by the gauss map*, Preprint IHES, 1984.

[At] M.F. ATIYAH. — *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque **32,33** (1976), 43–72.

[B] P. BÉRARD. — *Spectral geometry : direct and inverse problems*, Lect. Notes in Math. 1207, Springer-Verlag, New-York, Berlin, 1986.

[B-B] P. BÉRARD, G. BESSON. — *Number of ground states and estimates on some geometric invariants*, J. Funct. Anal. **94, n.2** (1990), 375–396.

[Br] J. BRÜNING. — *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry **32** (1990), 491–532.

[C-G 1] J. CHEEGER, M.GROMOV. — *On the characteristics numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume*, Rauch memorial volume, Differential Geometry and Complex analysis, I. Chavel and H.M. Farkas,Springer, Berlin, p.115,154, 1985.

[C-G 2] J. CHEEGER, M.GROMOV. — *Bounds of the Von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, J. Differential Geometry **21** (1985), 1–34.

[Co] T. COULHON. — *Inégalités de Gagliardo-Nirenberg pour les semi-groupes d'opérateurs et applications*, Potential Analysis **1** (1992), 343–353.

[C-S-V] T. COULHON, L.SALOFF-COSTE, N. VAROPOULOS. — *Analysis and geometry on groups*, Cambridge University Press, 1993.

[dR] G.DE RHAM. — *Variétés différentiables*, Herman, Paris, 1960.

[Do] J.DODZIUK. — *De Rham-Hodge theory for L^2cohomology of infinite covering*, Topology **16** (1977), 157–165.

[D-X] H. DONNELY, F. XAVIER. — *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifold*, Amer. J. Math. **106** (1984), 169–185.

[E-R] K. D. ELWORTHY, S. ROSENBERG. — *Manifofds with wells of negative curvature*, Invent. Math. **103** (1991), 471–495.

[E-F] J.S. ESCOBAR, A. FREIRE. — *The differential form spectrum of manifold of positive curvature*, Duke J. Math. **69** (1993), 1–42.

[G-M 1] S. GALLOT, D. MEYER. — *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres. Applications*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **21** (1988), 561–591.

[G-M 2] S. GALLOT, D. MEYER. — *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appli. **54** (1975), 259–284.

[Go] C.GODBILLON. — *Éléments de topologie algébrique*, Herman, Paris, collection Méthodes, 1971.

[G-W] R.GREENE, H.H. WU. — *Harmonics forms on noncompact Riemannian and Kähler manifolds*, Michigan Math. J. **28** (1981), 63–81.

[G-L] M. GROMOV, H.B. LAWSON. JR. — *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S. **58** (1983), 83–196.

[H-S] D. HOFFMAN, J.SPRUCK. — *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 7156–727.

[H-S-U] H. HESS, R. SCHRADER ET D.A. UHLENBROCK. — *Kato's Inequality and the Spectral Distribution of the Laplacian on Compact Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **15** (1980), 27–37.

[Ma] P. MALLIAVIN. — *Formules de la moyenne, calcul des perturbations et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 174–292.

[M] W. MÜLLER. — *Manifold with cusps of ranh one, Spectral theory and L^2 index theorem*, L.N. in Math ną 1244, Springer-Verlag, 1987.

[R1] J. ROE. — *An index theorem on open manifolds I, II* , J. Differential Geometry **27** (1988), 87-113,115-136.

[R2] J. ROE. — *Coarse cohomology and index theory on complete Manifolds*, Memoirs of the A.M.S. vol 104, ną 497, 1993.

[V] N. VAROPOULOS. — *Hardy-Littlewood theory for semigroups*, J. Funct. Anal. **63, n^{o}2** (1985), 240–260.

[Y] D. YANG. — *Convergence of riemannian manifolds with integral bounds on curvature II*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 179–199.

CARRON Gilles,
Institut FOURIER
URA 188 du CNRS,
B.P. 74
38402 St Martin d'hères.
e-mail : carron@fourier.grenet.fr