Mesures quasi-invariantes sur les groupes de difféomorphismes des variétés riemanniennes

E.Shavgulidze

E.Shavgulidze

Chair of Mathematical analysis,

Dept. of Mech. and Math.,

Moscow State University,

Moscow, 119899, Russia

Fax: (7-095) 932 88 27

Mesures quasi-invariantes sur les groupes de difféomorphismes des variétés riemanniennes

E.Shavgulidze

Résumé

Il s’agit de constructions des mesures de Borel quasi-invariantes sur les groupes Diff $^{k}(M)$ de difféomorphismes des variétés riemaniennes M (par rapport à translation à gauche de sous-groupes Diff $^{k+m}(M)$) et de séries des représetations unitaires de groupes Diff $^{k+m}(M)$.

Quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of riemannian manifolds

E.Shavgulidze

Abstract

One constructs quasi-invariant measures on groups Diff $^{k}(M)$ of diffeomorphisms of riemannian manifold M (with respect to the left actions of subgroups Diff $^{k+m}(M)$) and series of unitary represetations of groups Diff $^{k+m}(M)$.

1. Sur les groupes $\mathrm{Diff}^{\,k}(M)$ de difféomorphismes des variétés riemaniennes M on construit des mesures de Borel quasi-invariantes par rapport à translation à gauche de sous-groupes $\mathrm{Diff}^{\,k+m}(M)\,(m > \dim M + 1)$. Ces mesures définissent les séries des représetations unitaires de groupes $\mathrm{Diff}^{\,k+m}(M)$.

Sur les espaces de configuration ont considéré les mesures quasi-invariantes

A.M.Vershik, I.M.Gelfand, M.I.Graev [1], et dans le cas de cercles R.S.Ismagilov [2]. Sur les groupes de difféomorphismes des domaines de $\mathbf{R}^n$ on a étudié les analogues de ces mesures dans [3] et pour un cercle et un intervalle dans [4], [5], par M.P.Malliavin, P.Malliavin [6], A.V.Kosyak [7], Yu.A.Neretin [8],[9].

Je suis reconnaissant P.Malliavin pour ses conseils précieux et je remercie aussi

A.Panchishkin et A.Kosyak pour les discussions utiles. Je voudrais remercier tous collégues de Laboratoire de Mathématiques associe au CNRS d'Institut J.Fourier de Grenoble pour leur hospitalité qu'ils m'ont offré.

2. Soit U, V des domaines ouverts dans $\mathbf{R}^d$, $f : U \to V$ un difféomorphisme de classe $C^k\,(k > 1)$. Nous notons $B_l(\mathbf{R}^d \times \ldots \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ l'espace de toutes les fonctions l-lineaires de $\mathbf{R}^d \times \ldots \times \mathbf{R}^d$ sur $\mathbf{R}^d$. On définit pour tout $2m < l \leq k\,(m \geq 0)$ une application

$$A_{U,l,m} : U \to B_l(\mathbf{R}^d \times \ldots \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$$

par

$$A_{U,l,m} f\,(x)\,(h_1, \ldots, h_l) = = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \partial_{h_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(i)}} ((f'(x))^{-1} \partial_{h_{\sigma(i+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(l)}} f(x)) \quad (1)$$

(dans la première somme σ parcourt toutes les permutations de $\{1, \ldots, l\}$,

$h_1, \ldots, h_l \in \mathbf{R}^d,\ x \in U$) où $(f'(x))^{-1}$ est le operateur inverse de la dérivée de Fréchet de la fonction f au point x, ∂_h est la dérivée à direction $h \in \mathbf{R}^d$

$(\partial_h f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x+th) - f(x)])$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ est une solution du système d'équations linéaires:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} C_{l-i}^{p-j}\, C_i^j\, \alpha_i = 0 \quad (2)$$

$$(0 \leq j < p,\ 1 \leq p \leq m)$$

($C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ si $0 \leq j \leq i$ et $C_i^j = 0$ si $j > i$).

Ce système (2) a une solution unique [3].

Proposition 1. *Si $\varphi : V \to W$ est un difféomorphisme de classe C^{k+m} alors $A_{U,l,m}\varphi \circ f - A_{U,l,m} f$ est une application de classe C^{k+m-l}.*

Pour tous les $h_1, \ldots, h_l \in \mathbf{R}^d$ on a

$$\sum_\sigma \partial_{h_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(i)}} (((\varphi \circ f)'(x))^{-1} \partial_{h_{\sigma(i+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(l)}} \varphi \circ f(x)) =$$

$$= \sum_\sigma \partial_{h_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(i)}} ((f'(x))^{-1} \partial_{h_{\sigma(i+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(l)}} f(x)) +$$

$$+ \sum_\sigma \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=0}^{\min(i,m-p)} C_{l-i}^p \, C_i^j \, \partial_{h_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(j)}} [((\varphi \circ f)'(x))^{-1} \partial_{h_{\sigma(j+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(p+j)}} \varphi' \circ f(x))] \times$$

$$\times \, \partial_{h_{\sigma(p+j+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(l)}} f(x)) + b_i(x)$$

où b_i est une application de classe C^{k+m-l}.

En appliquant (1),(2) on obtient

$$A_{U,l,m}\varphi \circ f(x)(h_1, \ldots, h_l) =$$

$$= \frac{1}{l!} \sum_\sigma \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \partial_{h_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(i)}} ((f'(x))^{-1} \partial_{h_{\sigma(i+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(l)}} f(x)) \; (1) +$$

$$+ \frac{1}{l!} \sum_\sigma \sum_{p=1}^{m} (\sum_{i=j}^{m} C_{l-i}^{p-j} \, C_i^j \, \alpha_i) \times$$

$$\times \, \partial_{h_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(j)}} [((\varphi \circ f)'(x))^{-1} \partial_{h_{\sigma(j+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(p)}} \varphi' \circ f(x))] \partial_{h_{\sigma(p+1)}} \ldots \partial_{h_{\sigma(l)}} f(x)) =$$

$$= A_{U,l,m} f(x)(h_1, \ldots, h_l) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)$$

3. Soit M une variété riemanienne compacte connexe de dimension d de classe C^∞.

Nous notons pour $k > 0$ $\mathrm{Diff}^k(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^k de la variété M homotopes à l'identité.

Soit $C^n(TM)$ l'espace de Banach de tous les champs de vecteurs tangents (de la variété M) de classe C^n ($n \geq 0$) et $H_n = \Delta(C^{n+2}(TM))$ le sous-espace de $C^n(TM)$, où Δ est l'operateur de Laplace-Beltrami sur M. On munit $C^0(TM)$ du produit scalaire $(.,.)$ défini par la métrique riemannienne sur M. P_k est la projection orthogonale de $C^k(TM)\,(\subset C^0(TM))$ sur H_k par rapport au produit scalaire.

Il existe des domaines $U_1, \ldots, U_n$ ($U_i \subset \mathbf{R}^d$), $V_1, \ldots, V_n$ ($V_i \subset M$), des difféomorphismes $\psi_i : U_i \to V_i$ de classe C^∞ et des fonctions $\varrho_i : M \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ telles que $\mathrm{supp}\,\varrho_i \subset V_i$, $\varrho_i(x) \geq 0$ pour tout $i\,(0 \leq i \leq n)$, $x \in M$ et $\sum_{i=1}^n \varrho_i(x) = 1$ pour tout $x \in M$ ((V_i, ψ_i) est un atlas de M, ϱ_i est une partion de l'unité sur M).

On définit pour tout $2l < k$ une application $A_0 \,:\, \mathrm{Diff}^{\,k}(M) \to H_{k-2l}$ par

$$A_{0,l,m} f(x) =$$
$$= \sum_{i_1=1}^{d} \ldots \sum_{i_l=1}^{d} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{k-2l}\, \varrho_j(f^{-1}(x))\, \varrho_i(x) \times$$
$$\times\; A_{U_i \cap f_{-1}(U_j), 2l, m}(\psi_j^{-1} \circ f \circ \psi_i)\,(\psi_i^{-1}(x))\,(h_{i,i_1}, h_{i,i_1}, h_{i,i_2}, h_{i,i_2}, \ldots, h_{i,i_l}, h_{i,i_l}) \quad (3)$$

où $\psi_i'(\psi_i^{-1}(x), h_{i,1}), \psi_i'(\psi_i^{-1}(x), h_{i,2}), \ldots, \psi_i'(\psi_i^{-1}(x), h_{i,d})$ est un système orthonormal dans $T_x M$ $(x \in M)$.

Proposition 2. *Si f est un difféomorphisme de classe* $\mathrm{Diff}^{\,k}(M)$ *et φ est un difféomorphisme de classe* $\mathrm{Diff}^{\,k+m}(M)$ *alors $A_{0,l,m}\varphi \circ f \,-\, A_{0,l,m} f$ est un vecteur d'espace H_{k+m-2l}.*

Cette proposition est la suite de la proposition 1 et de (3).

Soit $k \,\geq\, 2l$ et $l \,>\, m \,>\, d+1$, λ est la mesure de Lebesgue sur M, μ_0 est une mesure de Gauss sur H_{k-l} défini par transformation de Fourier

$$e^{-\frac{1}{2}(\Delta^{-\frac{k-2l+d+1}{2}}\xi, \Delta^{-\frac{k-2l+d+1}{2}}\xi)}\; (\xi \in H_{k-2l});\;\; A : \mathrm{Diff}^{\,k}(M) \to H_{k-2l} \times M$$

une application définie par $A(f) = (A_{0,l,m} f, f(x_0))$, ou x_0 est un point fixé de M.

Nous pouvons définir une mesure μ de Borel sur $\mathrm{Diff}^{\,k}(M)$ par l'application A et la mesure $\mu_0 \otimes \lambda$.

Pour tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^{\,k}(M)$ il existe des domaines ouverts

$$U \subset \mathrm{Diff}^{\,k}(M),\; V \subset H_{k-2l} \times M,\; W \subset \mathbf{R}^d,$$

un isomorphisme topologique $B \,:\, V \to W$ telles que

$$f \in U,\; A(U) \subset V,\; B(A(U)) \subset W \cap (H_{k-2l} \times (\mathbf{R}^{d_0} \times 0))$$

et l'ensemble $B(A(U))$ est ouvert dans la sous-variété $W \cap (H_{k-2l} \times (\mathbf{R}^{d_0} \times 0))$, ou d_0 = codim H_{k-2l} par rapport à $C^{k-2l}(TM)$.

Soit λ_d une mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$, λ_{d_0} est une mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{d_0} \times 0$, $(\mu_0 \otimes \lambda_d)_V$ la restriction de $\mu_0 \otimes \lambda_d$ sur V, $(\mu_0 \otimes \lambda_{d_0})_W$ la restriction de $\mu_0 \otimes \lambda_{d_0}$ sur W, $(\mu_0 \otimes \lambda)_V \circ B^{-1}$ l'image de la mesure $(\mu_0 \otimes \lambda)_V$ sur W par rapport à l'application B^{-1}, $\eta(x) \,=\, \frac{d\,(\mu_0 \otimes \lambda_d)_W}{d\,(\mu_0 \otimes \lambda)_V \circ B^{-1}}\,(x)$ pour tout $x \in W$. Pour tous les ensembles de Borel $X \subset U$ on définie

$$\mu(X) \;=\; \int_{B(A(X))} \eta(x)\,(\mu_0 \otimes \lambda_{d_0})\,(d\,x)$$

En utilisant l'additivité on obtient la mesure de Borel μ sur $\mathrm{Diff}^{\,k}(M)$.

Théorème 1. *La mesure μ est quasi-invariante par rapport à translation à gauche de sous-groupes* $\mathrm{Diff}^{k+m}(M)$.

Ce théorème est corollaire de proposition 2.

Remarques 1. La mesure μ dépend du choix de l'atlas de M et de la partition de l'unité sur M. La mesure μ n'est pas quasi-invariante par rapport à translation à gauche de tout difféomorphisme $\varphi \in \mathrm{Diff}^{k+m}(M)$ tel que $||T_x(\varphi)|| \not\equiv 1$ ($T_x(\varphi)$ est l'application linéaire tangente á φ au point $x \in M$).

4. Soit $H = L_2(M, \mu)$ (l'espace de toutes fonction complexes intégrable en carré et presque partout définies) l'espace de Hilbert, $L_\varphi : \mathrm{Diff}^k(M) \to \mathrm{Diff}^k(M)$ ($\varphi \in \mathrm{Diff}^{k+m}(M)$) l'application définie par $L_\varphi(f) := \varphi^{-1} \circ f$ ($\varphi \in \mathrm{Diff}^{k+m}(M)$), $\mu_\varphi(X) = \mu(L_\varphi(X))$ pour tout ensemble de Borel $X \subset \mathrm{Diff}^k(M)$,

$$\rho(f) = \frac{d\mu_\varphi}{d\mu}(f) =$$
$$= \exp\{\frac{1}{2}(\Delta^{\frac{k-2l+d+1}{2}} A_{0,l,m} f, \Delta^{\frac{k-2l+d+1}{2}} A_{0,l,m} f) -$$
$$\frac{1}{2}(\Delta^{\frac{k-2l+d+1}{2}} A_{0,l,m} \varphi^{-1} \circ f, \Delta^{\frac{k-2l+d+1}{2}} A_{0,l,m} \varphi^{-1} \circ f)\}$$
$$(f \in \mathrm{Diff}^k(M)).$$

On définit une série de représentations unitaires du groupe $\mathrm{Diff}^{k+m}(M)$ sur H paramétrisées par $s \in \mathbf{R}$:

$$U_\varphi F(f) = (\rho(f))^{\frac{1}{2}+is} F(\varphi^{-1} \circ f)$$

$(F \in H,\ \varphi \in \mathrm{Diff}^{k+m}(M))$.

5. On note $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ le tore de dimension 2.

Soit

$C_0(T^2, \mathbf{R}^2) = \{ g \in C(T^2, \mathbf{R}^2) : \int_0^1 g(x_1, x_2)\, dx_1 = (0,0),\ \int_0^1 g(x_1, x_2)\, dx_2 = (0,0)\}$,

$P : C(T^2, \mathbf{R}^2) \to C_0(T^2, \mathbf{R}^2))$ la projection orthogonale par rapport au produit scalaire de $L_2(T^2, \mathbf{R}^2)$.

On définit une application

$$B_1 : \mathrm{Diff}^4(T^2) \to C_0(T^2, \mathbf{R}^2)$$

par

$$B_1 f(x) = P[-3(f'(x))^{-1} \Delta^2 f(x) +$$
$$+ \frac{2}{3} \sum_\sigma \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \sum_{i_3=1}^{2} \sum_{i_4=1}^{2} \delta_{i_1,i_2} \delta_{i_3,i_4} \partial_{e_{i_{\sigma(1)}}}((f'(x))^{-1} \partial_{e_{i_{\sigma(2)}}} \partial_{e_{i_{\sigma(3)}}} \partial_{e_{i_{\sigma(4)}}} f(x))]$$

(dans la première somme σ parcourt toutes les permutations de $\{1, 2\}$)

où $e_1, e_2 \in \mathbf{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $x \in T^2$, $(f'(x))^{-1}$ est le operateur inverse de la dérivée de Fréchet de la fonction f au point x ($(f'(x))^{-1} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$), $\delta_{i,i} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.

Soit λ_1 est la mesure de Haar sur T^2, μ_1 est une mesure de Gauss sur $C_0(T^2, \mathbf{R}^2)$ défini par transformation de Fourier $\exp\{\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (g(x_1, x_2), \Delta^{-1} g(x_1, x_2))_{\mathbf{R}^2}\, dx_1 dx_2\}$

$(g \in C_0(T^2, \mathbf{R}^2))$; $B_2 : \mathrm{Diff}^4(T^2) \to C_0(T^2, \mathbf{R}^2) \times T^2$ une application définie

par $B_2(f) = (B_1(f), f(0, 0))$ ($(0, 0) \in T^2$).

Nous pouvons définir une mesure μ_2 de Borel sur $\mathrm{Diff}^4(T^2)$ par l'application B_2 et

la mesure $\mu_1 \otimes \lambda_1$.

Pour tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^4(T^2)$ il existe des domaines ouverts

$U \subset \mathrm{Diff}^4(T^2)$, $V \subset C_0(T^2, \mathbf{R}^2) \times T^2$, telles que $f \in U$, et $B_2 : V \to W$ est

l'isomorphisme topologique. Pour tous les ensembles de Borel $X \subset U$ on définie

$\mu_2(X) = \mu_1 \otimes \lambda_1(B(X))$. En utilisant l'additivité on obtient

la mesure de Borel μ_2 sur $\mathrm{Diff}^4(T^2)$.

Théorème 2. *La mesure μ_2 est quasi-invariante par rapport à translation à gauche de sous-groupes* $\mathrm{Diff}^8(T^2)$.

Soit $\mu_{2,\varphi}(X) = \mu_2(L_\varphi(X))$ pour tout ensemble de Borel $X \subset \mathrm{Diff}^4(T^2)$

$(\varphi \in \mathrm{Diff}^8(T^2))$,

$$\rho_1(f) = \frac{d\mu_{2,\varphi}}{d\mu_2}(f) =$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}[\int_0^1 \int_0^1 (B_2(f)(x_1, x_2), \Delta B_2(f)(x_1, x_2))_{\mathbf{R}^2}\, dx_1 dx_2 -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 (B_2(\varphi^{-1} \circ f)(x_1, x_2), \Delta B_2(\varphi^{-1} \circ f)(x_1, x_2))_{\mathbf{R}^2}\, dx_1 dx_2]\}$$

$(f \in \mathrm{Diff}^4(T^2))$.

Remarques 2. On définit par la mesure μ_2 une série de représentations unitaires du groupe $\mathrm{Diff}^8(T^2)$ sur $L_2(\mathrm{Diff}^4(T^2), \mu_2)$

paramétrisées par $s \in \mathbf{R}$:

$$U_\varphi F(f) = (\rho_1(f))^{\frac{1}{2}+is} F(\varphi^{-1} \circ f)$$

$(F \in L_2(\mathrm{Diff}^4(T^2), \mu_2),\ \varphi \in \mathrm{Diff}^8(T^2))$.

6. Soit $S\,:\,C(T^2,\mathbf{R}^2)\to C(T^2,\mathbf{R}^2)$ un operateur lineaire tel que pour tout

$$f(x_1,x_2)\;=\;\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\;\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}\;a_{k_1,k_2}\,e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\;\;(f\in C(T^2,\mathbf{R}^2),\;a_{k_1,k_2}\in\mathbf{R}^2)$$

$$(Sf)(x_1,x_2)\;=\;\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\;\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}\;\frac{1}{(k_1^2+k_2^2+1)}\,a_{k_1,k_2}\,e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}.$$

Nous notons H_1 le complètement de $C(T^2,\mathbf{R}^2)$ par la norme $||f||_1\;=\;||(Sf)(x)||_{\mathbf{R}^2}$ $(f\in C(T^2,\mathbf{R}^2))$.

Soit $P_1\;:\;H_1\to H_1$ le prolongement continuous de P, $H_2=P_1(H_1)$,
$H\;=\;\{\,g\in L_2(T^2,\mathbf{R}^2):\,\int_0^1\,g(x_1,x_2)\,dx_1=(0,0),\;\int_0^1\,g(x_1,x_2)\,dx_2=(0,0)\}$,

On définit une application

$$B_3\;:\;\mathrm{Diff}^{\,2}(T^2)\to H_2$$

par

$$B_3f\,(x)\;=\;P_1\,[|\mathrm{Det}\,(f'(x))|^{\frac{1}{2}}\Delta^2 f(x)-$$
$$-\;\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\sum_{i_4=1}^{2}\delta_{i_1,i_2}\delta_{i_3,i_4}\partial_{h_{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)}}}((f'(x))^{-1}\partial_{h_{i_{\sigma(3)}}}\partial_{h_{i_{\sigma(4)}}}f(x))]$$

(dans la première somme σ parcourt toutes les permutations de $\{1,2\},\;x\in T^2$)
où $h_1=(f'(x))^{-1}\,e_1$, $h_2=(f'(x))^{-1}\,e_2$, $h_{i,j}=(f'(x))^{-1}\,\partial_{h_i}\partial_{h_j}f(x)$,

Soit μ_3 est une mesure de Gauss sur H_2 défini par la mesure cylindrique canonique de Gauss sur H;
$B_4:\mathrm{Diff}^{\,2}(T^2)\to H_2\times T^2$ une application définie
par $B_4(f)=(B_3(f),f(0,0))$ ($(0,0)\in T^2$).

Nous pouvons définir une mesure μ_2 de Borel sur $\mathrm{Diff}^{\,2}(T^2)$ par l'application B_4 et la mesure $\mu_3\otimes\lambda_1$.

Pour tout difféomorphisme $f\in\mathrm{Diff}^{\,2}(T^2)$ il existe des domaines ouverts
$U\subset\mathrm{Diff}^{\,2}(T^2),\;V\subset H_2\times T^2,$ telles que $f\in U,$ et $B_4\;:\;V\to W$ est
l'isomorphisme topologique. Pour tous les ensembles de Borel $X\subset U$ on définie
$\mu_4(X)\;=\;\mu_3\otimes\lambda_1(B(X))$. En utilisant l'additivité on obtient
la mesure de Borel μ_4 sur $\mathrm{Diff}^{\,2}(T^2)$.

Théorème 3. *La mesure μ_4 est quasi-invariante par rapport à translation à droite de sous-groupes* $\mathrm{Diff}^{\,6}(T^2)$.

Soit $R_\varphi(f) = f \circ \varphi$, $\mu_{4,\varphi}(X) = \mu_4(R_\varphi(X))$ pour tout ensemble de Borel $X \subset$ Diff $^2(T^2)$

($\varphi \in$ Diff $^6(T^2)$),

$$\rho_2(f) = \frac{d\mu_{4,\varphi}}{d\mu_4}(f) =$$
$$= \exp\{-\frac{1}{2}[\int_0^1 \int_0^1 (B_4(f)(x_1,x_2), B_4(f)(x_1,x_2))_{\mathbf{R}^2}\, dx_1 dx_2 -$$
$$- \int_0^1 \int_0^1 (B_4(f \circ \varphi)(x_1,x_2), B_4(f \circ \varphi)(x_1,x_2))_{\mathbf{R}^2}\, dx_1 dx_2]\}$$
($f \in$ Diff $^2(T^2)$).

Remarques 3. On définit par la mesure μ_4 une série de représentations unitaires du groupe Diff $^6(T^2)$ sur L_2(Diff $^2(T^2), \mu_4$)

paramétrisées par $s \in \mathbf{R}$:

$$U_\varphi F(f) = (\rho_2(f))^{\frac{1}{2}+is} F(f \circ \varphi)$$

($F \in L_2$(Diff $^2(T^2), \mu_4$), $\varphi \in$ Diff $^6(T^2)$).

Références

[1] A.M. Vershik,I.M. Gelfand,M.I. Graev, Representations of a group of diffeomorphisms, Uspekhi Mat.Nauk 30 (1975), no.6 (186), 3-50; English transl. in Russian Math.Survey 30 (1975).

[2] R.S. Ismagilov, On unitary representations of the diffeomorphism group of the circle, Funktsional.Anal.i Prilozhen. 5 (1971),no.3, 45-53; English transl. in Functional.Anal.Appl. 5 (1971).

[3] E.T. Shavgulidze,On a measure that is quasi-invariant with respect to the action of a group of diffeomorphisms of a finite-dimensional manifold, Soviet Math.Dokl v.38(1989) no.3,p.622-625

[4] E.T. Shavgulidze,An example of measure that is quasi-invariant respect to the action of group of diffeomorphims of circle, Functional.Anal.Appal. v.12 (1978) no.3,p.55-60

[5] E.T. Shavgulidze, Distributions on infinite-dimensional spaces and second quantization in string theories,II, in "V International Vilnuis Conference on Probability Theory and Math.Statistics", Abstracts of Comm., Vilnius, June 26- July 1, 1989, pp. 359-360.

[6] M.P. Malliavin, P. Malliavin, Measures quasi invariantes sur certain groupes de dimension infini, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1 311 (1990), 765-768.

[7] A.V. Kosyak, Irreducible Regular Gaussian Represetation of the Groups of the Interval and Circle Diffeomorphisms,J.Funct.Anal. 126 (1994), 493-547.

[8] Yu.A. Neretin, Representations of the Virasoro algebra and affines algebras, Sovr. probl. matem. Fund. Napravl. 22 (1988), Russian, English trans. in Encyclopaedia of Math. Sci., v.22.

[9] Yu.A. Neretin, Some Remarks of Quasiinvariant Actions of the Group of Diffeomorphisms of the Cirle and the Loop Groups,Preprints di Matematica n.15, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1993.

– ♢ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(3 avril 1995)