FORMULES LOCALES DE TYPE MARTINELLI-BOCHNER-KOPPELMAN SUR DES VARIÉTÉS CR

par Moulay Youssef BARKATOU

0. Introduction

Dans [Fi/Le] les auteurs ont construit un noyau local de type Martinelli-Bochner sur des hypersurfaces 1-concaves (cf. 1.1). Le but de cet article est d'établir des formules de type Martinelli-Bochner-Koppelman sur des sous-variétés CR génériques, q-concaves de $\mathbb{C}^n$ (cf. 1.1), et d'appliquer ces résultats aux équations de Cauchy-Riemann tangentielles.

La construction de nos noyaux se fait par "récurrence" sur la codimension de la sous-variété et utilise une formule d'homotopie pour $\overline{\partial}$ (obtenue dans [La/Le1] dans des domaines auxiliaires (coins)). Le point clé de cette construction est un résultat d'estimation (pour ces formules d'homotopie) d'un type nouveau que nous obtenons dans le théorème 2.1. Nos formules se déduisent, alors, de celles de Martinelli-Bochner-Koppelman classiques (dans $\mathbb{C}^n$) par l'application répétitive du théorème de Stokes.

Précisons le plan de cet article :

Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration du théorème 2.1.

Dans le paragraphe 3, nous considérons une sous-variété M, CR générique q-concave de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k dans $\mathbb{C}^n$; en utilisant une formule d'homotopie pour $\overline{\partial}$ sur des domaines localement $q+k-1$-convexes (cf. 1.9.8), nous construisons nos formules localement sur M pour les formes de type (n, r) avec $r \in \{0, \ldots, q-1, n-k-q+1, \ldots, n-k\}$ (théorèmes 3.3.14 et 3.3.17).

Dans le paragraphe 4 nous énonçons deux importantes applications de ces résultats. Pour d'autres applications nous renvoyons le lecteur à [Ba2]. Le théorème 4.1.3 est un théorème de régularité des solutions du $\overline{\partial}_b$ dans le cas où on ne peut résoudre en général (cf. [A/F/N]). Il donne une solution höldérienne d'ordre $1/2^k - \varepsilon$, (d'ordre $(\frac{1}{2} - \varepsilon)$ si M est supposée de classe $\mathcal{C}^3$), $\forall \varepsilon > 0$, pour une donnée f de bidegré $(0, q)$, continue et $\overline{\partial}_b$-exacte (*i.e.* $f = \overline{\partial}_b g$, où g est supposée à support compact si $q \geq 2$) dans un petit voisinage d'un point de M. Le théorème 4.2.1 est un théorème de type Hartogs-Bochner sur les variétés CR 1-concaves (cf. [He2], [L-T1], [Fi/Le]). Nous obtenons un prolongement CR höldérien d'ordre $\alpha/2^k - \varepsilon$ (d'ordre $\alpha/2 - \varepsilon$ si M est supposée de classe $\mathcal{C}^3$), $\forall \varepsilon > 0$, jusqu'au bord si la fonction à prolonger est continue CR et α-höldérienne sur le bord.

Dans le cas des hypersurfaces ($k = 1$), ces résultats ont été obtenus dans [Ba1].

1. Préliminaires et notations

1.1. — Soit M une sous-variété réelle de classe $\mathcal{C}^\ell$, $\ell \geq 1$, de $\mathbb{C}^n$ définie par

$$M = \{z \in \Omega / \rho_1(z) = \cdots = \rho_k(z) = 0\} \quad 1 \leq k \leq n \tag{1.1}$$

où les ρ_ν, $1 \leq \nu \leq k$, sont des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$, vérifiant $d\rho_1(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_k(z) \neq 0$ pour tout $z \in M$.

On note $T_z^{\mathbb{C}}(M)$ l'espace tangent complexe à M au point $z \in M$ *i.e.*,

$$T_z^{\mathbb{C}}(M) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n / \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\nu}{\partial z_j}(z)\zeta_j = 0, \nu = 1, \ldots, k\}.$$

On a $\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}(M) \geq n - k$. La variété M est dite CR si $\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}(M)$ est indépendante du point z, elle est dite CR générique si pour tout $z \in M$, $\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}(M) = n - k$ ce qui est équivalent à :

$$\overline{\partial}\rho_1 \wedge \overline{\partial}\rho_2 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_k \neq 0 \text{ sur } M. \tag{1.2}$$

Si M est CR générique et $\ell \geq 2$, on dit que M est q-concave, $0 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$, si pour tout $z \in M$ et tout $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ la forme quadratique sur $T_z^{\mathbb{C}}(M)$

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \rho_x}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}(z)\zeta_\alpha \overline{\zeta}_\beta, \text{ où } \rho_x = x_1\rho_1 + \cdots x_k\rho_k \text{ et } \zeta \in T_z^{\mathbb{C}}(M)$$

a au moins q valeurs propres strictement négatives.

1.2. — Soit f une forme différentielle sur un domaine $D \subseteq \mathbb{C}^n$. Alors on note $||f(z)||$, $z \in D$, la norme riemannienne de f en z (cf. [He/Le], section 0.4).

1.3. — Si M est une variété réelle de classe $\mathcal{C}^1$ et f une forme différentielle de degré maximal, alors on note $|f|$ la valeur absolue de f (cf. [He/Le], section 0.3).

1.4. — Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine.

$\mathcal{C}^0_*(D)$ est l'ensemble des formes différentielles continues sur D. On note

$$||f||_0 = ||f||_{0,D} = \sup_{z \in D} ||f(z)||$$

pour $f \in \mathcal{C}^0_*(D)$.

$\mathcal{C}^\alpha_*(\overline{D})$, $0 \leq \alpha < 1$, est l'espace des formes $f \in \mathcal{C}^0_*(D)$ dont les cœfficients admettent des prolongements continus à $\overline{D}$ qui sont, si $\alpha > 0$, höldériens d'ordre α. On note

$$||f||_\alpha = ||f||_{\alpha,D} = ||f||_{0,D} + \sup_{\substack{z,\zeta \\ z \neq \zeta}} \frac{||f(z) - f(\zeta)||}{|\zeta - z|^\alpha}$$

pour $0 < \alpha < 1$ et $f \in \mathcal{C}^\alpha_*(\overline{D})$.

$[\mathcal{C}^\ell_*(D)]_0$ est l'ensemble des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\ell$, ($\ell = 0, 1, 2, \ldots$) sur D et qui sont à support compact.

Si $\Lambda_{p,r}(D)$ est l'ensemble des formes de bidegré (p, r) sur D, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^0_{p,r}(D) &= \mathcal{C}^0_*(D) \cap \Lambda_{p,r}(D) \\
\mathcal{C}^\alpha_{p,r}(\overline{D}) &= \mathcal{C}^\alpha_*(D) \cap \Lambda_{p,r}(D) \\
\mathcal{C}^0_{p,*}(D) &= \bigcup_{0 \leq r \leq n} \mathcal{C}^0_{p,r}(D) \\
\mathcal{C}^\alpha_{p,*}(\overline{D}) &= \bigcup_{0 \leq r \leq n} \mathcal{C}^\alpha_{p,r}(\overline{D}) \\
[\mathcal{C}^\ell_{p,r}(D)]_0 &= [\mathcal{C}^\ell_*(D)]_0 \cap \Lambda_{p,r} \\
[\mathcal{C}^\ell_{p,*}(D)]_0 &= \bigcup_{0 \leq r \leq n} [\mathcal{C}^\ell_{p,r}(D)]_0.
\end{aligned}$$

1.5. — Soit M une sous-variété CR générique, de codimension k dans $\mathbb{C}^n$.

$\mathcal{C}^0_{(n,r)}(M)$ est l'espace des formes différentielles de type (n, r) qui sont continues sur M.

$\mathcal{C}^\alpha_{(n,r)}(M)(0 < \alpha < 1)$ est l'espace des formes différentielles continues de type (n, r) dont les cœfficients sont α-höldériens sur tout compact K de M.

$\mathcal{C}^\ell_{(n,r)}(M)(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$ est l'espace des formes de type (n, r) qui sont de classe $\mathcal{C}^\ell$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées d'ordre $\leq \ell$.

$\mathcal{D}^{\ell}_{(n,r)}(M)$ ou $[\mathcal{C}^{\ell}_{n,r}(M)]_0$ désigne l'ensemble de toutes les formes de $\mathcal{C}^{\ell}_{(n,r)}(M)$ qui sont à support compact dans M : une suite $(f_\nu)_{\nu\in M}$ converge dans $\mathcal{D}^{\ell}_{(n,r)}(M)$ si elle converge dans $\mathcal{C}^{\ell}_{(n,r)}(M)$ et s'il existe un compact $K \subset M$ tel que supp $f_\nu \subset K$ pour tout ν.

$L^{\infty}_{(n,r)}(M)$ désigne l'ensemble des (n,r)-formes qui ont des cœfficients bornés et mesurables sur M.

$[\mathcal{C}^{\ell}_{(n,r)}(M)]'$ et $[\mathcal{D}^{\ell}_{(n,r)}(M)]'$ sont respectivement les ensembles des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}^{\ell}_{(n,r)}(M)$ et $\mathcal{D}^{\ell}_{(n,r)}(M)$.

Les éléments de $[\mathcal{C}^{\ell}_{(n,r)}(M)]'$ sont les courants de bidegré $(0, n-k-r)$ d'ordre ℓ et à support compact dans M.

Si f est une forme différentielle de degré s avec des cœfficients localement intégrables sur M, $\langle f\rangle$ désigne l'élément de $[\mathcal{D}^{0}_{(n,n-k-s)}(M)]'$ défini par :

$$\langle f\rangle(\varphi) := \int_M f\wedge\varphi, \text{ pour } \varphi \in \mathcal{D}^{0}_{(n,n-k-s)}(M).$$

On définit l'opérateur

$$\overline{\partial}_M : [\mathcal{D}^{\ell}_{(n,r+1)}(M)]' \longrightarrow [\mathcal{D}^{\ell+1}_{(n,r)}(M)]'$$

par

$$(\overline{\partial}_M T)(\varphi) := (-1)^{n-k-r} T(d\varphi) \text{ pour } T \in [\mathcal{D}^{\ell}_{(n,r+1)}(M)]' \text{ et } \varphi \in \mathcal{D}^{\ell+1}_{(n,r)}(M).$$

Si $\overline{\partial}_M T = 0$, T est dit CR. Une forme f continue sur M est dite CR si et seulement si $\langle f\rangle$ est CR.

Si Ω est un domaine relativement compact dans M et à bord $\mathcal{C}^1$, une forme de degré s continue sur $b\Omega$ est dite CR si $\int_{b\Omega} f d\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}_{(n,n-k-1-s)}$.

1.6. — Soit $N \geq 1$ un entier. On note $P(N)$ l'ensemble de toutes les collections ordonnées $K = (k_1, \ldots, k_\ell)$, $\ell \geq 1$, d'entiers naturels vérifiant $1 \leq k_1, \ldots, k_\ell \leq N$, et on note $P'(N)$ l'ensemble de tous les $K = (k_1, \ldots, k_\ell) \in P(N)$ vérifiant $k_1 < \cdots < k_\ell$.

1.7. — Si $J = (j_1, \ldots, j_\ell)$, $1 \leq \ell < \infty$, est une collection ordonnée d'entiers naturels. Alors on écrit $|J| = \ell$, $J(\hat{\nu}) = (j_1, \ldots, j_{\nu-1}, j_{\nu+1}, \ldots, j_\ell)$ pour $\nu = 1, \ldots, \ell$, et $j \in J$ si $j \in \{j_1, \ldots, j_\ell\}$.

1.8. — Pour la définition de l'intégration des formes différentielles par rapport à une partie des variables, se référer à la section 0.2 dans [He/Le2].

1.9. — Nous rappelons, ici, quelques définitions et résultats de [La/Le1], dont nous aurons besoin par la suite.

1.9.1. — Soit $J = (j_1, \dots, j_\ell), 1 \le \ell < \infty$, une collection ordonnée d'entiers naturels avec $0 \le j_1 < \dots < j_\ell$. Alors on note Δ_J (ou $\Delta_{j_1,\dots,j_\ell}$) le simplexe de toutes les suites $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ de nombres $0 \le \lambda_j \le 1$ tels que $\lambda_j = 0$ si $j \notin J$ et $\Sigma\lambda_j = 1$. On oriente Δ_J par la forme $d\lambda_{j_2} \wedge \dots \wedge d\lambda_{j_\ell}$ si $\ell \ge 2$ et par $+1$ si $\ell = 1$.

1.9.2. — Soit $\overset{\circ}{\chi}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ fixée telle que

$$\overset{\circ}{\chi}\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

avec $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 0$ si $0 \le \lambda \le 1/4$ et $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 1$ si $1/2 \le \lambda \le 1$.

1.9.3. — Soit $N \ge 1$ un entier et $K = (k_1, \dots, k_\ell) \in P'(N)$. Alors pour $\lambda \in \Delta_{0K}$ avec $\lambda_0 \neq 1$, on note $\overset{\circ}{\lambda}$ le point de Δ_K défini par

$$\overset{\circ}{\lambda}_{k_\nu} = \frac{\lambda_{k_\nu}}{1 - \lambda_0} \quad (\nu = 1, \dots, \ell).$$

1.9.4. — Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domaine et ρ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Alors on note $L_\rho(\zeta)$ la forme de Levi de ρ au point $\zeta \in \Omega$, et $F_\rho(\cdot, \zeta)$ le polynôme de Levi de ρ au point $\zeta \in \Omega$, *i.e.*

$$L_\rho(\zeta)t = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \zeta_k} \overline{t}_j t_k$$

$\zeta \in \Omega, t \in \mathbb{C}^n$ et

$$F_\rho(z,\zeta) = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j}(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k)$$

$\zeta \in \Omega, z \in \mathbb{C}^n$.

1.9.5. Définition. — Une collection $(U, \rho_1, \dots, \rho_N)$ est dite une q-configuration, de classe $\mathcal{C}^\ell$ ($\ell = 1, 2, \dots$), dans $\mathbb{C}^n$ si $U \subseteq \mathbb{C}^n$ est un domaine convexe, et $\rho_1, \dots, \rho_N$ sont des fonctions réelles, de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur U, satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $\{z \in U : \rho_1(z) = \dots = \rho_N(z) = 0\} \neq \emptyset$,

(ii) $d\rho_1(z) \wedge \dots \wedge d\rho_N(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$,

(iii) si $\lambda \in \Delta_{1\dots N}$ et $\rho_\lambda := \lambda_1\rho_1 + \dots + \lambda_N\rho_N$

alors la forme de Levi $L_{\rho_\lambda}(z)$ a au moins $q+1$ valeurs propres strictement positives.

1.9.6. DÉFINITION. — Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine. D sera appelé une $\mathcal{C}^\ell$-intersection ($\ell = 1, 2, \ldots$), s'il existe un voisinage $U_{\overline{D}}$ de $\overline{D}$ et un nombre fini de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\ell$, $\rho_1, \ldots, \rho_N$ dans un voisinage de $\overline{U}_{\overline{D}}$ tels que

$$D = \{z \in U_{\overline{D}} : \rho_j(z) < 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, N\}$$

et

$$d\rho_{k_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{k_\ell}(z) \neq 0$$

pour tout $(k_1, \ldots, k_\ell) \in P'(N)$ et $z \in \partial D$ avec $\rho_{k_1}(z) = \cdots = \rho_{k_\ell}(z) = 0$.

1.9.7. — Soient n et q deux entiers avec $0 \leq q \leq n-1$. On note $MO(n,q)$ la variété complexe de toutes les matrices carrées d'ordre n et à cœfficients complexes qui définissent une projection orthogonale de $\mathbb{C}^n$ dans un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de dimension q.

1.9.8. DÉFINITION. — Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ une $\mathcal{C}^2$-intersection, D est dit localement q-convexe, $0 \leq q \leq n-1$, s'il existe $U_{\overline{D}}, \rho_1, \ldots, \rho_N$, comme dans la définition 1.9.6, satisfaisant en plus les conditions suivantes :

(i) si $K = (k_1, \ldots, k_\ell) \in P'(N)$ et

$$U_{\overline{D}}^K := \{z \in U_{\overline{D}} : \rho_{k_1}(z) = \cdots = \rho_{k_\ell}(z)\}$$

alors $(d\rho_{k_1}(z) - d\rho_{k_2}(z)) \wedge \cdots \wedge (d\rho_{k_1}(z) - d\rho_{k_\ell}(z)) \neq 0$ pour tout $z \in U_{\overline{D}}^K$,

(ii) il existe une application de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$Q : \Delta_{1\ldots N} \longrightarrow MO(n, n-q-1)$$

et des constantes $\alpha, A > 0$ telles que

$$\operatorname{Re} F_{\rho_\lambda}(z,\zeta) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \alpha|\zeta - z|^2 - A|Q(\lambda)(\zeta - z)|^2$$

pour tout $\lambda \in \Delta_{1\ldots N}$ et $z, \zeta \in U_{\overline{D}}$.

1.9.9. LEMME (= lemme 2.4 [La/Le1]). — *Soit* $(U, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ *une* q-*configuration, de classe* $\mathcal{C}^\ell$, *dans* $\mathbb{C}^n$, $0 \leq q \leq n-1$. *Alors pour tout point* $\xi \in U$ *avec* $\rho_1(\xi) = \cdots = \rho_N(\xi) = 0$, *il existe un nombre* $R_\xi > 0$ *tel que, pour tout* R *avec* $0 < R \leq R_\xi$

$$D := \{z \in U : \rho_j(z) < 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, N\} \cap \{z \in \mathbb{C}^n : |z - \xi| < R\}$$

soit un domaine localement q-*convexe.*

1.9.10. — Soit D un domaine localement q-convexe et $U_{\overline{D}}, \rho_1, \dots, \rho_N$ comme dans 1.9.6, pour $K = (k_1, \dots, k_\ell) \in P(N)$ on note

$$U_{\overline{D}}^K = \{\zeta \in U_{\overline{D}} : \rho_{k_1}(\zeta) = \dots = \rho_{k_\ell}(\zeta)\}$$

si $k_1, \dots, k_\ell$ sont distincts deux à deux, et $U_{\overline{D}}^K = \emptyset$ sinon. D'après la condition (i) dans 1.9.6, chaque $U_{\overline{D}}^K$ est une sous-variété fermée de classe $\mathcal{C}^2$ de $U_{\overline{D}}$. On note ρ_K, $K \in P(N)$, la fonction sur $U_{\overline{D}}^K$ définie par

$$\rho_K(\zeta) = \rho_{k_\nu}(\zeta) \quad (\zeta \in U_{\overline{D}}^K; \nu = 1, \dots, \ell)$$

et pour tout $K \in P(N)$ on définit

$$\Gamma_K = \{\zeta \in U_{\overline{D}}^K : \rho_j(\zeta) \leq \rho_K(\zeta) \leq 0 \text{ pour } j = 1, \dots, N\}.$$

Alors il est clair que chaque Γ_K est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^2$ de $\overline{D}$ et à bord $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

1.9.11. — Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine localement q-convexe, $0 \leq q \leq n-1$ et $U_{\overline{D}}, \rho_1, \dots, \rho_N, \alpha, A, Q$ comme dans 1.9.6.

Comme $\rho_1, \dots, \rho_N$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $\overline{U}_{\overline{D}}$, on peut trouver des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ $a_\nu^{kj}(\nu = 1, \dots, N; k, j = 1, \dots, n)$ sur $U_{\overline{D}}$ telles que

$$\left| a_\nu^{kj}(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\nu(\zeta)}{\partial \zeta_k \partial \zeta_j} \right| < \frac{\alpha}{2n^2}$$

pour tout $\zeta \in U_{\overline{D}}$. Posons

$$\rho_\lambda = \lambda_1 \rho_1 + \dots + \lambda_N \rho_N$$

et

$$a_\lambda^{kj} = \lambda_1 a_1^{kj} + \dots + \lambda_N a_N^{kj}$$

pour $\lambda \in \Delta_{1\dots N}$. Alors

$$\left| \sum_{k,j=1}^n \left(a_\lambda^{kj}(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta_k \partial \zeta_j} \right) t_k t_j \right| \leq \frac{\alpha}{2} |t|^2$$

pour tout $\zeta \in U_{\overline{D}}$, $t \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \Delta_{1\cdots N}$. Posons

$$\widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\xi, \zeta) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\lambda(\zeta)}{\partial \zeta j}(\zeta_j - \xi_j) - \sum_{k,j=1}^n a_\lambda^{kj}(\zeta)(\zeta_k - \xi_k)(\zeta_j - \xi_j)$$

pour $(\xi, \zeta, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times U_{\overline{D}} \times \Delta_{1\cdots N}$. Alors il résulte de l'inégalité ci-dessus et de la condition (ii) de 1.9.8 que

$$\operatorname{Re} \widetilde{F}_{\rho_\lambda}(\xi, \zeta) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(\xi) + \frac{\alpha}{2} |\zeta - \xi|^2 - A |Q(\lambda)(\zeta - \xi)|^2 \tag{1.3}$$

pour tout $(\xi, \zeta, \lambda) \in U_{\overline{D}} \times U_{\overline{D}} \times \Delta_{1\cdots N}$. Notons $Q_{kj}(\lambda)$ les cœfficients de la matrice $Q(\lambda)$, *i.e.*

$$Q(\lambda) = \left(Q_{kj}(\lambda) \right)_{k,j=1}^n \quad (k = \text{ l'indice colonne}).$$

Si $(\xi,\zeta,\lambda)\in\mathbb{C}^n\times U_{\overline{D}}\times\Delta_{1\cdots N}$, alors on pose

$$\begin{cases} \omega^j(\xi,\zeta,\lambda)=2\dfrac{\partial\rho_\lambda(\zeta)}{\partial\zeta j}-\displaystyle\sum_{k=1}^n a_\lambda^{kj}(\zeta)(\zeta_k-\xi_k)+A\sum_{k=1}^n\overline{Q_{kj}(\lambda)(\zeta_k-\xi_k)} \\ \omega(\xi,\zeta,\lambda)=\big(\omega^1(\xi,\zeta,\lambda),\ldots,\omega^n(\xi,\zeta,\lambda)\big) \\ \Psi(\xi,\zeta,\lambda)=\langle\omega(\xi,\zeta,\lambda),\zeta-\xi\rangle. \end{cases}$$

(pour $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ et $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\mathbb{C}^n\,\langle\omega,z\rangle=\omega_1z_1+\cdots+\omega_nz_n$). Comme $Q(\lambda)$ est une projection orthogonale, on a

$$\Psi(\xi,\zeta,\lambda)=\widetilde{F}_{\rho\lambda}(\xi,\zeta)+A|Q(\lambda)(\zeta-\xi)|^2$$

pour tout $(\xi,\zeta,\lambda)\in\mathbb{C}^n\times U_{\overline{D}}\times\Delta_{1\ldots N}$. Définissons

$$\Phi(\xi,\zeta,\lambda)=\Psi(\xi,\zeta,\lambda)-2\rho_\lambda(\zeta)$$

pour $(\xi,\zeta,\lambda)\in\mathbb{C}^n\times U_{\overline{D}}\times\Delta_{1\ldots N}$. Alors il résulte de (1.3) que

$$\operatorname{Re}\Phi(\xi,\zeta,\lambda)\geq-\rho_\lambda(\zeta)-\rho_\lambda(\xi)+\frac{\alpha}{2}|\zeta-\xi|^2$$

pour tout $(\xi,\zeta,\lambda)\in\mathbb{C}^n\times U_{\overline{D}}\times\Delta_{1\ldots N}$. En particulier on a $\Phi(\xi,\zeta,\lambda)\neq0$ si $(\xi,\zeta,\lambda)\in D\times\overline{D}\times\Delta_{1\ldots N}$ et on peut définir l'application suivante, qui est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\eta(\xi,\zeta,\lambda)=\overset{\circ}{\chi}(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta}-\overline{\xi}}{|\zeta-\xi|^2}+(1-\overset{\circ}{\chi}(\lambda_0))\frac{\omega(\xi,\zeta,\overset{\circ}{\lambda})}{\Phi(\xi,\zeta,\overset{\circ}{\lambda})}$$

pour tout $(\xi,\zeta,\lambda)\in D\times\overline{D}\times\Delta_{01\ldots N}$ avec $\xi\neq\zeta$ (pour la définition de $\overset{\circ}{\chi}$ et de $\overset{\circ}{\lambda}$, voir 1.9.2 et 1.9.3).

1.9.12. — Définissons

$$\widehat{H}(\xi,\zeta,\lambda)=\frac{1}{(2\pi i)n}\det(\overbrace{d\eta(\xi,\zeta,\lambda)}^{n})$$

où d est l'opérateur différentiel par rapport à toutes les variables ξ,ζ,λ, (pour la définition des déterminants, voir 0.7 [He/Le2]).

Soit f une $(n,*)$ continue sur D et dont les cœfficients sont intégrables sur Γ_K, $K\in P'(N)$, alors on définit

$$H_Kf(\xi)=\int_{(\zeta,\lambda)\in\Gamma_K\times\Delta_{OK}}f(\zeta)\wedge\widehat{H}(\xi,\zeta,\lambda),\quad \xi\in D$$

et posons

$$Hf=\sum_{K\in P'(N)}(-1)^{|K|}H_Kf.$$

THÉORÈME (H) (voir théorème 4.11 [La/Le1]). — *Soit $n-q\leq r\leq n$. Alors*

$$f=\overline{\partial}Hf+H\overline{\partial}f \text{ sur } D$$

pour toute forme $f\in\mathcal{C}^0_{0,r}(\overline{D})$ avec $\overline{\partial}f\in\mathcal{C}^0_{0,r+1}(\overline{D})$.

THÉORÈME (E) (voir théorème 4.12 [La/Le1]). — *Soit $1\leq r\leq n$. Alors H est un opérateur linéaire continu de $L^\infty_{0,r}(D)$ dans $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}_{0,r-1}(\overline{D})$ pour tout $0<\varepsilon\leq1/2$.*

1.10. — Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$. On note

$$\rho_\lambda := \lambda_1 \rho_1 + \cdots + \lambda_N \rho_N$$

$$\tau_\lambda(\zeta, z) := \left| \operatorname{Im} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\lambda(z)}{\partial z_j}(\zeta_j - z_j) \right| \quad \text{pour } z \in U \text{ et } \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Il est clair que pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante C_K telle que :

$$\tau_\lambda(\zeta, z) + |\zeta - z|^2 \leq C_K \left(\tau_\lambda(z, \zeta) + |\zeta - z|^2 \right) \tag{1.4}$$

pour tout $(\zeta, z) \in K \times K$.

1.11. — Soit D un domaine localement q-convexe et $(U_{\overline{D}}, \rho_1, \ldots, \rho_N)$, $\Phi(\xi, \zeta, \lambda)$ définies comme dans 1.9 et $\lambda \in \Delta_{1\ldots N}$.

Il est clair qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\tau_\lambda(\xi, \zeta) \leq \frac{1}{2} |\operatorname{Im} \Phi(\xi, \zeta, \lambda)| + C_1 |\zeta - \xi|^2$$

et

$$\operatorname{Re} \Phi(\xi, \zeta, \lambda) \geq C_2 |\zeta - \xi|^2 \tag{1.5}$$

pour tout $(\zeta, \xi) \in \overline{D} \times \overline{D}$ d'où l'existence d'une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\tau_\lambda(\xi, \zeta) + |\zeta - \xi|^2 \leq C_3 |\Phi(\xi, \zeta, \lambda)| \tag{1.6}$$

pour tout $(\zeta, \xi) \in \overline{D} \times \overline{D}$ et par suite l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\tau_\lambda(\xi, z) + |\xi - z|^2 - C|\zeta - z| \leq C_3 |\Phi(\xi, \zeta, \lambda)| \tag{1.7}$$

pour tout $(z, \zeta, \xi) \in U_{\overline{D}} \times \overline{D} \times \overline{D}$.

1.12. — Soient $z, \zeta, \xi \in \mathbb{C}^n$, alors les implications suivantes sont évidentes :

$$|\zeta - z| \leq \frac{1}{2} |\xi - z| \Longrightarrow |\zeta - \xi| \geq \frac{1}{2} |\xi - z| \tag{1.8}$$

$$|\zeta - z| \geq |\xi - z| \text{ et } |\zeta - \xi| \geq |\xi - z| \Longrightarrow |\zeta - z| \leq 2|\zeta - \xi| \leq 4|\zeta - z| \tag{1.9}$$

1.13. — On note $B(z, \zeta)$ le noyau de Martinelli-Bochner dans $\mathbb{C}^n$, *i.e.*

$$B(z, \zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} \bigwedge_{k \neq j} (d\overline{\zeta}_k - d\overline{z}_k) \wedge (d\zeta_1 - dz_1) \wedge \cdots \wedge (d\zeta_n - dz_n)$$

et $B_{s,r}(z, \zeta)$ la partie de $B(z, \zeta)$ qui est de bidegré (s, r) en z et donc de type $(n-s, n-1-r)$ en $\zeta (0 \leq s \leq n, 0 \leq r \leq n-1)$. On a (voir [He/Le1] ou [Ra]) :

$$\overline{\partial}_\zeta B_{s,r}(z, \zeta) = -\overline{\partial}_z B_{s,r-1}(z, \zeta) \text{ pour tout } (z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \text{ avec } z \neq \zeta.$$

Si $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un domaine et f est une forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit continue sur $\overline{D}$. On pose

$$B_D f(z) = \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \quad z \in \mathbb{C}^n$$

et

$$B_{\partial D} f(z) = \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) \quad z \in \mathbb{C}^n \setminus \partial D.$$

On a alors la représentation suivante (voir [He/Le1] ou [Ra]) (formule de Martinelli-Bochner-Koppelman)

$$B_{\partial D} f(z) - B_D \overline{\partial} f(z) + \overline{\partial} B_D f(z) = \begin{cases} (-1)^{s+r} f(z) & \text{si } z \in D \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

(Pour la définition de l'intégration par rapport à une partie de variables, voir 1.8).

1.14. — Si $Z \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et $f(z,\xi)$ est une fonction à valeurs complexes définie sur Z. On dit que $f(z,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}_{z,\xi}$ $(0 \leq \alpha, \beta \leq 1)$, si pour toute paire de compacts A, B de $\mathbb{C}^n$ avec $A \times B \subseteq Z$, on a l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) $f(z,\cdot) \in \mathcal{C}^\beta(B)$ pour tout $z \in A$ et l'application : $A \ni z \to f(z,\cdot)$ est höldérienne d'ordre α,

(ii) $f(\cdot,\xi) \in \mathcal{C}^\alpha(A)$ pour tout $\xi \in B$ et l'application : $B \ni \xi \to f(\cdot,\xi)$ est höldérienne d'ordre β.

Une forme $f(z,\xi)$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}_{z,\xi}$ sur Z si ses cœfficients le sont.

1.15. — Soient D^* et D deux domaines dans $\mathbb{C}^n$ et $f(z,\xi)$ une fonction à valeurs complexes, définie sur $D^* \times \overline{D}$. On dit que $f(z,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty,\beta}_{z,\xi}$ $(0 \leq \beta \leq 1)$ si pour tout $z \in D^*$, $f(z,\cdot) \in \mathcal{C}^\beta(\overline{D})$ et $z \to f(z,\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme application de D^* à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^\beta(\overline{D})$.

Une forme $f(z,\xi)$ définie sur $D^* \times \overline{D}$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty,\beta}_{z,\xi}$ si ses cœfficients le sont.

1.16. — Toutes les constantes seront notées par la lettre C (éventuellement C_ε pour les constantes dépendant de ε) sauf mention contraire.

2. Estimations

Dans ce paragraphe, nous allons établir des estimations (théorème 2.1) pour l'opérateur d'homotopie H (cf. 1.9.11). Ces résultats sont essentiels pour la suite de notre travail.

Soit $(U, \rho_1, \dots, \rho_N)$ une q-configuration (cf. 1.9.5) dans $\mathbb{C}^n$, $0 \le q \le n-1$, $z^0 \in U$ avec $\rho_1(z^0) = \cdots = \rho_N(z^0) = 0$ et $R > 0$ tel que

$$D := \{\xi \in U : \rho_j(\xi) < 0 \text{ pour } j = 1, \dots, N\} \cap \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi - z^0| < R\}$$

soit un domaine localement q-convexe (cf. 1.9.8 et 1.9.9) et

$$\overline{\partial}\rho_1(\xi) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_N(\xi) \neq 0 \text{ pour tout } \xi \text{ avec } |\xi - z^0| < R. \tag{2.1}$$

Posons $D^* := \{\xi \in U : \rho_j(\xi) > 0 \text{ pour } j = 1, \dots, N\} \cap \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi - z^0| < R\}$.

Soit H l'opérateur d'homotopie sur D défini dans 1.9.12.

2.1. THÉORÈME. — *Soient $\nu \in \mathbb{N}$, β un réel avec $1 \le \beta < 2$ et $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{N-1})$ une famille libre dans $\mathbb{R}^N$, alors il existe une constante $C_\beta > 0$ et une collection $\{\gamma_1, \dots, \gamma_L\}(L \in \mathbb{N}^*)$ de familles libres dans $\mathbb{R}^N$ $\gamma_i = (\gamma_i^1, \dots, \gamma_i^N)(1 \le i \le L)$ telles que si $z \in \overline{D}^*$ et si $f \in C^0_*(D)$ vérifie*

$$\|f(\zeta)\| \le \frac{\left(1 + \left|\ln|\zeta - z|\right|\right)^\nu}{\prod_{j=1}^{N-1} \left(\tau_{\alpha^j}(\zeta, z) + |\zeta - z|^2\right)|\zeta - z|^{2n-2N+\beta}} \tag{2.2}$$

(pour la définition de τ_{α^j}, voir 1.10) alors

(i) $Hf \in C^{1/2-\varepsilon}(\overline{D} \setminus \{z\})$ pour tout $\varepsilon > 0$ et de plus

$$\|Hf(\xi)\| \le C_\beta \sum_{i=1}^{L} \frac{\left(1 + \left|\ln|\xi - z|\right|\right)^{\nu+N+1}}{\prod_{j=1}^{N} \left(\tau_{\gamma_i^j}(\xi, z) + |\xi - z|^2\right)|\xi - z|^{2n-2N+2\beta-3}}. \tag{2.3}$$

(ii) Pour $\beta = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\|Hf(\xi^1) - Hf(\xi^2)\| \le$$

$$C_\varepsilon |\xi^1 - \xi^2|^{1/2-\varepsilon} \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{L} \frac{1}{\prod_{j=1}^{N}(\tau_{\gamma_i^j}(\xi^k, z) + |\xi^k - z|^2)|\xi^k - z|^{2n-2N}} \tag{2.4}$$

pour tout $\xi^1, \xi^2 \in \overline{D} \setminus \{z\}$ avec $\min(|z - \xi^1|, |z - \xi^2|) \ge |\xi^1 - \xi^2|$.

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin des deux lemmes suivants :

2.2. LEMME. — *Soient $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^s, \alpha^1, \dots, \alpha^r$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^N$, avec $\lambda^i \in \Delta_K (1 \le i \le s)$ si $\gamma = \sum_{i=1}^{s} a_i \lambda^i = \sum_{j=1}^{r} b_j \alpha^j$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\tau_\gamma(\xi, z) + |\xi - z|^2 \le C \max_{\substack{i / a_i \neq 0 \\ j / b_j \neq 0}} \left\{\tau_{\alpha^j}(\zeta, z) + |\zeta - z|^2, |\Phi(\xi, \zeta, \lambda^i)|\right\} \tag{2.5}$$

pour tout $(z,\xi,\zeta)\in\overline{D}^*\times\overline{D}\times D$.

Preuve du lemme 2.2. — Il est facile de voir d'après la définition de τ_γ (voir 1.10) que :

$$\tau_\gamma(\xi,z)\leq\tau_\gamma(\zeta,z)+\tau_\gamma(\xi,\zeta)+C|\zeta-z|\,|\xi-\zeta|$$

comme $|\xi-z|^2\leq(|\zeta-z|+|\xi-\zeta|)^2\leq 2(|\zeta-z|^2+|\xi-\zeta|^2)$ et compte tenu de (1.5) on obtient

$$\begin{aligned}\tau_\gamma(\xi,z)+|\xi-z|^2 &\leq C\Big(\sum_{b_j\neq 0}|b_j|\tau_{\alpha^j}(\zeta,z)+|\zeta-z|^2+\sum_{a_i\neq 0}|\alpha_i|\tau_{\lambda^i}(\xi,\zeta)+|\xi-\zeta|^2\Big)\\ &\leq C\max_{\substack{i/a_i\neq 0\\ j/b_j\neq 0}}\big\{\tau_{\alpha^j}(\zeta,z)+|\zeta-z|^2,|\Phi(\xi,\zeta,\lambda^i)|\big\}.\end{aligned}$$

■

2.3. LEMME. — *Soit* $K\in P'(N)$, ρ_K *et* Γ_K *comme dans 1.9 et soit* $(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^s,\alpha^1,\dots,\alpha^r)$ *une famille libre dans* $\mathbb{R}^N$ *avec* $\lambda^i\in\Delta_K$ *(pour tout* $1\leq i\leq s$*). Posons :*

$$\begin{aligned}u_j(z,\zeta) &:= \operatorname{Im}\sum_{k=1}^n\frac{\partial\rho_{\alpha^j}(\zeta)}{\partial\zeta_k}(\zeta_k-z_k)\quad \textit{pour } 1\leq j\leq r\\ t_j(\xi,\zeta) &:= \operatorname{Im}\Phi(\xi,\zeta,\lambda^j)\quad \textit{pour } 1\leq j\leq s.\end{aligned}$$

Alors il existe $\varepsilon>0$ *et un voisinage* $\mathcal{U}_{s_N}$ *de* $S_N=\{\rho_1=\dots=\rho_N=0\}\cap\overline{D}$ *tel que*

$$\bigwedge_{j=1}^r d_\zeta u_j(z,\zeta)\wedge\bigwedge_{j=1}^s d_\zeta t_j(\xi,\zeta)\wedge d\rho_K(\zeta)_{|_{\Gamma_K\cap\{\zeta\in\mathbb{C}^n:|\zeta-z|\leq\varepsilon \text{ et } |\zeta-\xi|\leq\varepsilon\}}}\neq 0 \tag{2.6}$$

pour tout $z\in\overline{D}^*\cap\mathcal{U}_{s_N}$, $\xi\in\overline{D}\cap\mathcal{U}_{s_N}$.

Preuve du lemme 2.3. — Soit $z\in S_N$, d'après la définition de u_j et t_j

$$\begin{aligned}d_\zeta u_j(z,\zeta)_{|\zeta=z} &= i\big(\overline{\partial}\rho_{\alpha^j}(z)-\partial\rho_{\alpha^j}(z)\big)\\ d_\zeta t_j(z,\zeta)_{|\zeta=z} &= i\big(\overline{\partial}\rho_{\lambda^j}(z)-\partial\rho_{\lambda^j}(z)\big).\end{aligned}$$

Alors d'après la condition (2.1) et le fait que $(\lambda^1,\dots,\lambda^s,\alpha^1,\dots,\alpha^r)$ soit libre dans $\mathbb{R}^N$, il est facile de montrer que

$$\bigwedge_{j=1}^r d_\zeta u_j(z,\zeta)_{|\zeta=z}\wedge\bigwedge_{j=1}^s d_\zeta t_j(z,\zeta)_{|\zeta=z}\wedge d\rho_K(z)\wedge\bigwedge_{j=2}^{\ell}\big(d\rho_{k_1}(z)-d\rho_{k_j}(z)\big)\neq 0$$

où $(k_1,\dots,k_\ell)=K$ d'où le résultat. ■

Preuve du théorème 2.1.

(i) Posons $\rho_{N+1}(\zeta) := |\zeta - z^0|^2 - R^2$. On a $H = H' + H''$ où

$$H'f = \sum_{K \in P'(N)} (-1)^{|K|} H_K f \quad \text{et} \quad H''f = \sum_{K \in P'(N) \cup \emptyset} (-1)^{|K|+1} H_{K \cup \{N+1\}} f.$$

Soit $z \in \overline{D}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0_*(D)$ vérifiant la condition (2.2), alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de z telle que $||f(\zeta)|| \leq C$ pour tout $\zeta \in \Gamma_{K \cup \{N+1\}}$ où $K \in P'(N) \cup \emptyset$ d'où d'après le théorème (E) dans 1.9.12 (cf. théorème 4.12 [La/Le1]), il existe une constante $C' > 0$, et pour tout $\varepsilon > 0$ une constante $C_\varepsilon > 0$ telles que

$$||H''f(\xi)|| \leq C'$$

et

$$||H''f(\xi^1) - H''f(\xi^2)|| \leq C_\varepsilon |\xi^1 - \xi^2|^{1/2-\varepsilon}.$$

De plus C' et C_ε sont indépendantes de z. Ainsi on a les estimations (2.3) et (2.4) pour $H''f$. Il reste à montrer le théorème pour $H'f$: le fait que $H'_K f \in \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(\overline{D} \setminus \{z\})$ résulte du théorème et de la continuité en ζ, ξ, λ des dérivées par rapport à ξ, pour $\xi \neq \zeta$, du noyau intégral définissant H'_K.

D'après les théorèmes 5.4 et 7.2 de [La/Le1], il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$||H'_K f(\xi)|| \leq C\big(\mathcal{M}_1(\xi) + \cdots + \mathcal{M}_m(\xi)\big)$$

où, pour $j \in \{1, \ldots, m\}$ $\mathcal{M}_j(\xi)$ est du type suivant :

$$I_{K,s} := \int_{\zeta \in \Gamma_K} \frac{||f(\zeta)|| d\sigma}{\big(|\rho_K(\zeta)| + |\zeta - \xi|^2\big) \prod_{i=1}^{s} |\Phi(\xi, \zeta, \lambda^i)| \, |\zeta - \xi|^{2n-|K|-s-1}}$$

avec $0 \leq s \leq |K|$, $\prod_{i=1}^{0} |\Phi(\xi, \zeta, \lambda^i)| := 1$, et les vecteurs $\lambda^1, \ldots, \lambda^s \in \Delta_K$ linéairement indépendants (pour $s \geq 1$). Pour estimer $I_{K,s}$ nous allons distinguer deux cas :

1^er^ cas :

$s = 0$ ou $\forall i \in \{1, \ldots, s\} \quad \lambda^i \in \langle \alpha^1, \ldots, \alpha^{N-1} \rangle$.

D'après le lemme 2.2 $I_{K,s}$ est majoré par la somme d'un nombre fini de termes du type suivant, quitte à réarranger $\lambda^1, \ldots, \lambda^s$ et $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N-1}$,

$$\frac{C}{\prod_{i=1}^{s} \big(\tau_{\gamma_1^i}(\xi, z) + |\xi - z|^2\big)} \int_{\zeta \in \Gamma_K} \Theta(z, \xi, \zeta) d\sigma \tag{2.7}$$

où

$\Theta(z, \xi, \zeta) =$

$$\frac{\Big(1 + \big|\ln|\zeta - z|\big|\Big)^\nu d\sigma}{(|\rho_K(\zeta)| + |\zeta - \xi|^2) \prod_{i=1}^{s-\ell} |\Phi(\xi, \zeta, \lambda^i)| \prod_{j=1}^{N-1-m} (\tau_{\alpha^j}(\zeta, z) + |\zeta - z|^2) |\zeta - z|^{2n-2N+\beta} |\zeta - \xi|^{2n-|K|-s-1}}$$

avec $\ell + m = s$, $\gamma^i \in \langle \lambda^1, \ldots, \lambda^s \rangle$ pour tout $1 \leq i \leq s$ et les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^N$:

$$(\gamma^1, \ldots, \gamma^s), (\gamma^1, \ldots, \gamma^m, \alpha^1, \ldots, \alpha^{N-1-m}),$$
$$(\gamma^{m+1}, \ldots, \gamma^s, \lambda^1, \ldots, \lambda^{s-\ell}), (\lambda^1, \ldots, \lambda^{s-\ell}, \alpha^1, \ldots, \alpha^{N-1-m}). \quad (2.8)$$

Quitte à réordonner les vecteurs $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N-1-m}$, on peut supposer compte tenu de (2.8) que les vecteurs suivants

$$\gamma^1, \ldots, \gamma^s, \alpha^1, \ldots, \alpha^{N-1-s} \quad (2.9)$$

sont linéairement indépendants.

D'après le lemme 2.3 et la condition (2.8), $\rho_K, u_1, \ldots, u_{N-1-m}, t_1, \ldots, t_{s-\ell}$ (où $u_j(\zeta) := \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho_{\alpha^j}(\zeta)}{\partial \zeta_k}(\zeta_k - z_k)$, $t_i(\zeta) := \operatorname{Im} \Phi(\xi, \zeta, \lambda^i)$) peuvent être considérées comme des coordonnées locales sur

$$\Gamma_K \cap \{|z - \zeta| \leq \varepsilon, |\zeta - \xi| \leq \varepsilon\} \quad \text{pour } z \in \overline{D}^* \cap \mathcal{U}_{s_N} \text{ et } \xi \in \overline{D} \cap \mathcal{U}_{s_N}. \quad (2.10)$$

Si Θ désigne l'intégrant dans (2.7), il est facile de voir que

$$\int_{\zeta \in \Gamma_K} \Theta(z, \xi, \zeta) d\sigma \leq C \quad \text{si } z \in \overline{D}^* \setminus \mathcal{U}_{s_N} \text{ ou } \xi \in \overline{D} \setminus \mathcal{U}_{s_N},$$
$$\int_{\substack{\zeta \in \Gamma_K \\ |\zeta - \xi| > \varepsilon}} \Theta(z, \xi, \zeta) d\sigma \leq C \quad \text{et} \int_{\substack{\zeta \in \Gamma_K \\ |\zeta - z| > \varepsilon}} \Theta(z, \xi, \zeta) d\sigma \leq C. \quad (2.11)$$

Nous allons maintenant estimer :

$$I^0_{K,s} := \int_{\substack{\zeta \in \Gamma_K \\ |\zeta - \xi| < \varepsilon \\ |\zeta - z| < \varepsilon}} \Theta(z, \xi, \zeta) \text{ pour } z \in \overline{D}^* \cap \mathcal{U}_{s_N} \text{ et } \xi \in \overline{D} \cap \mathcal{U}_{s_N}.$$

Pour cela on va utiliser la notation suivante : si $\xi \in \overline{D} \setminus \{z\}$, $W(\xi) \in \Gamma_K$ alors

$$I^0_{K,s}(W(\xi)) := \int_{\zeta \in W(\xi)} \Theta(z, \xi, \zeta) d\sigma$$

$\forall k \in \{1, \ldots, N-1\}, \exists C_k > 0$ telle que :

$$\tau_{\alpha^k}(\xi, z) + |\xi - z|^2 \leq \frac{C_k}{2} |\xi - z| \text{ pour } (z, \xi) \in \overline{D}^* \times \overline{D} \quad (2.12)$$
$$\tau_{\alpha^k}(\zeta, z) + |\zeta - z|^2 \geq \tau_{\alpha^k}(\xi, z) + |\xi - z|^2 - \frac{C_k}{2} |\zeta - \xi| \text{ pour } \zeta \in D, (z, \xi) \in \overline{D}^* \times \overline{D}. \quad (2.13)$$

Fixons $(z, \xi) \in \overline{D}^* \cap \mathcal{U}_{s_N} \times \overline{D} \cap \mathcal{U}_{s_N}$, avec $z \neq \xi$ et supposons, quitte à réordonner les vecteurs $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N-1}$, que :

$$\frac{\tau_{\alpha^1}(\xi, z) + |\xi - z|^2}{C_1} \leq \frac{\tau_{\alpha^2}(\xi, z) + |\xi - z|^2}{C_2} \leq \cdots \leq \frac{\tau_{\alpha^{N-1-s}}(\xi, z) + |\xi - z|^2}{C_{N-1-s}}. \quad (2.14)$$

Introduisons les ensembles suivants :

$$W_0^0(\xi) = \left\{\zeta \in \Gamma_K : |\zeta - \xi| \leq \frac{\tau_{\alpha^1}(\xi, z) + |\xi - z|^2}{C_1}\right\} \text{ pour } 0 \leq s \leq N-2$$

$$W_0^0(\xi) = \emptyset \text{ pour } s = N-1$$

$$W_j^0(\xi) = \left\{\zeta \in \Gamma_K : \frac{\tau_{\alpha^j}(\xi, z) + |\xi - z|^2}{C_j} \leq |\zeta - \xi| \leq \frac{\tau_{\alpha^{j+1}}(\xi, z) + |\xi - z|^2}{C_{j+1}}\right\}$$
$$\text{pour } 0 \leq s \leq N-3 \text{ et } 1 \leq j \leq N-2-s,$$

$$W_j^0(\xi) = \emptyset, \forall j \geq 1, \text{ pour } s \in \{N-2, N-1\}$$

$$W^1(\xi) = \Gamma_K \setminus \left(W_0^0(\xi) \cup \cdots \cup W_{N-2-s}^0(\xi)\right)$$

$$W^{10}(\xi) = \left\{\zeta \in W^1(\xi) : |\zeta - \xi| < \frac{|\xi - z|}{2}\right\}$$

$$W^{11}(\xi) = W^1(\xi) \setminus W^{10}(\xi)$$

$$W^{110}(\xi) = \left\{\zeta \in W^{11}(\xi) : |\zeta - z| < |\xi - z|\right\}$$

$$W^{111}(\xi) = W^{11}(\xi) \setminus W^{110}(\xi)$$

alors

$$I_{K,s}^0(\Gamma_K) = \sum_{j=0}^{N-2-s} I_{K,s}^0(W_j^0(\xi)) + I_{K,s}^0(W^{10}(\xi)) + I_{K,s}^0(W^{110}(\xi)) + I_{K,s}^0(W^{111}(\xi)). \quad (2.15)$$

Compte tenu de (1.7), (2.10), (2.12), (2.13) et (2.14) on a :

$$\begin{aligned}
I_{K,s}^0(W_0^0(\xi)) &\leq \frac{C\left(1 + \left|\ln|\xi - z|\right|\right)^{\nu}}{\prod_{k=1}^{N-1-s}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi, z) + |\xi - z|^2\right)|\xi - z|^{2n-2N+\beta}} \\
&\quad \int_{\substack{X \in \mathbb{R}^{2n-|K|+1} \\ |X| < \frac{|\xi - z|}{2}}} \frac{dX}{\prod_{j=1}^{s+1}\left(|X_j| + |X|^2\right)|X|^{2n-|K|-s-1}} \\
&\leq \frac{C\left(1 + \left|\ln|\xi - z|\right|\right)^{\nu+s+1}}{\prod_{k=1}^{N-1-s}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi, z) + |\xi - z|^2\right)|\xi - z|^{2n-2N+\beta-1}} \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

de même on a, pour $1 \leq j \leq N-2-s$,

$$\begin{aligned}
I_{K,s}^0(W_j^0(\xi)) &\leq \frac{C\left(1 + \left|\ln|\xi - z|\right|\right)^{\nu}}{\prod_{k=1}^{N-1-s}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi, z) + |\xi - z|^2\right)|\xi - z|^{2n-2N+\beta}} \\
&\quad \int_{\substack{X \in \mathbb{R}^{2n-|K|+1} \\ |X| < \frac{|\xi - z|}{2}}} \frac{dX}{\prod_{k=1}^{s+1+j}\left(|X_k| + |X|^2\right)|X|^{2n-|K|-s-1-j}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{C\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^{\nu+s+1+j}}{\prod_{k=1}^{N-1-s}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2N+\beta-1}} \tag{2.17}$$

et

$$I^0_{K,s}(W^{10}(\xi)) \leq \frac{C\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^{\nu}}{\prod_{k=1}^{N-1-s}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2N+\beta}}$$

$$\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-|K|+1}\\ |X|<\frac{|\xi-z|}{2}}} \frac{dX}{\prod_{j=1}^{N}\left(|X_j|+|X|^2\right)|X|^{2n-|K|-N}}$$

$$\leq \frac{C\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^{\nu+N}}{\prod_{k=1}^{N-1-s}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2N+\beta-1}}. \tag{2.18}$$

$\left(\prod_{k=1}^{0}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right):=1\right)$. Il résulte de (1.7) et (2.10) que :

- pour $|K|\leq N-1$,

$$I^0_{K,s}(W^{110}(\xi)) \leq \frac{C}{|\xi-z|^{2n-|K|-s-1}}\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-|K|+1}\\ |X|<|\xi-z|}} \frac{\left(1+\left|\ln|X|\right|\right)^{\nu}}{\prod_{j=1}^{N}\left(|X_j|+|X|^2\right)|X|^{2n-2N+\beta}}$$

$$\leq \frac{C\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^{\nu+N}}{|\xi-z|^{2n-N-s+\beta-2}}. \tag{2.19}$$

- pour $|K|=N$,

$$I^0_{K,s}(W^{110}(\xi)) \leq \frac{C}{|\xi-z|^{2n-N-s+1}}\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-N+1}\\ |X|<|\xi-z|^2}} \frac{\left(1+\left|\ln|X|\right|\right)^{\nu}dX}{\prod_{j=1}^{N-1}\left(|X_j|+|X|^2\right)|X|^{2n-2N+\beta}}$$

$$+\frac{C}{|\xi-z|^{2n-N-s-1}}\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-N+1}\\ |X|>|\xi-z|^2}} \frac{\left(1+\left|\ln|X|\right|\right)^{\nu}dX}{\prod_{j=1}^{N}\left(|X_j|+|X|^2\right)|X|^{2n-2N+\beta}}$$

$$\leq \frac{C\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^{\nu+N+1}}{|\xi-z|^{2n-N-s+2\beta-3}}. \tag{2.20}$$

Il découle de (1.8) et (2.10) que :

$$I^0_{K,s}(W^{111}(\xi)) \leq \frac{C}{|\xi-z|^{2n-N-s+\beta-3}}\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-|K|+1}\\ |X|>|\xi-z|}} \frac{\left(1+\left|\ln|X|\right|\right)^{\nu}dX}{\prod_{j=1}^{N}\left(|X_j|+|X|^2\right)|X|^{2n-N-|K|+2}}$$

$$\leq \frac{C\left(1+\left|\ell n|\xi-z|\right|\right)^{\nu+N+1}}{|\xi-z|^{2n-N-s+2\beta-3}}. \tag{2.21}$$

Ainsi d'après (2.11), (2.12), (2.15), $, \dots,$ (2.21) et le fait que $1 \leq \beta$, le terme (2.7) est majoré par la somme d'un nombre fini de termes du type :

$$\frac{C\left(1+\left|\ell n|\xi-z|\right|\right)^{\nu+N+1}}{\prod_{k=1}^{N}\left(\tau_{\gamma^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2N+2\beta-3}} \tag{2.22}$$

où $(\gamma^1,\dots,\gamma^N)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^N$.

2[e]*cas* :

$\exists i_0 \in \{1,\dots,s\}$ tel que $\lambda^{i_0} \notin \langle\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1}\rangle$ d'où $(\lambda^{i_0},\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1})$ est une base de $\mathbb{R}^N$ et $\dim\langle\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1}\rangle \cap \langle\lambda^1,\dots,\lambda^s\rangle = s-1$.

D'après le lemme 2.2, $I_{K,s}$ est majoré par la somme d'un nombre fini de termes du type suivant (quitte à réarranger $\lambda^1,\dots,\lambda^s$ et $\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1}$) :

$$\frac{C}{\prod_{k=1}^{s-1}\left(\tau_{\gamma^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)}\int_{\zeta\in\Gamma_K}\Theta(z,\xi,\zeta)d\sigma \tag{2.23}$$

où

$\Theta(z,\xi,\zeta) :=$

$$\frac{(1+\left|\ell n|\zeta-z|\right|)^{\nu}d\sigma}{(|\rho_K(\zeta)|+|\zeta-\xi|^2)\prod_{i=1}^{s-\ell}|\Phi(\xi,\zeta,\lambda^i)|\prod_{j=1}^{N-1-m}(\tau_{\gamma^j}(\zeta,z)+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-2N+\beta}|\zeta-\xi|^{2n-|K|-s-1}}$$

avec $\ell+m=s-1$, $\gamma^k \in \langle\lambda^1,\dots,\lambda^s\rangle \cap \langle\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1}\rangle$ pour tout $1 \leq k \leq s-1$, les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^N$:

$$(\gamma^1,\dots,\gamma^{s-1}),\ (\gamma^1,\dots,\gamma^m,\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1-m}),$$
$$(\gamma^{m+1},\dots,\gamma^{s-1},\lambda^1,\dots,\lambda^{s-\ell}),\ \text{et } (\lambda^1,\dots,\lambda^{s-\ell},\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1-m}). \tag{2.24}$$

Quitte à réordonner les vecteurs $\alpha^1,\dots,\alpha^{N-1-m}$ et les vecteurs $\lambda^1,\dots,\lambda^{s-\ell}$ et compte tenu de (2.24), on peut supposer que :

$$\gamma^1,\dots,\gamma^{s-1},\alpha^1,\dots,\alpha^{N-s},\lambda^1 \tag{2.25}$$

sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^N$. Comme dans le 1[er]cas il suffit d'estimer :

– $I^1_{K,s} := \int_{\substack{\zeta\in\Gamma_K \\ |\zeta-\xi|<\varepsilon \\ |\zeta-z|<\varepsilon}} \Theta(z,\xi,\zeta)d\sigma$ pour $z \in \overline{D}^* \cap \mathcal{U}_{s_N}$ et $\xi \in \overline{D} \cap \mathcal{U}_{s_N}$

Fixons $(z,\xi) \in (\overline{D}^* \cap \mathcal{U}_{s_N}) \times (\overline{D} \cap \mathcal{U}_{s_N})$ et supposons comme dans (2.14) que :

$$\frac{\tau_{\alpha^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2}{C_1} \leq \dots \leq \frac{\tau_{\alpha^{N-s}}(\xi,z)+|\xi-z|^2}{C_{N-s}} \tag{2.26}$$

où les constantes $C_k (1 \le k \le N-s)$ sont indépendantes de z et ξ et telles que :

$$\frac{\tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2}{2} \le C_k \frac{|\xi-z|}{2}$$

$$\tau_{\alpha_k}(\zeta,z)+|\zeta-z|^2 \ge \tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2-\frac{C_k}{2}|\zeta-\xi| \text{ pour Ê}\zeta\in D.$$

Soient $C, C^1 > 0$ deux constantes (voir (1.6)) telles que :

$$C|\Phi(\xi,\zeta,\lambda^1)| \ge \tau_{\lambda^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2-\frac{C^1}{2}|\zeta-z| \tag{2.27}$$

et

$$\tau_{\lambda^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2 \le \frac{C^1}{2}|\xi-z|. \tag{2.28}$$

Introduisons les ensembles suivants :

$$W_0^0(\xi)=\left\{\zeta\in\Gamma_K : |\zeta-\xi|\le\frac{\tau_{\alpha^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2}{C_1}\right\} \text{ pour } 0\le s\le N-1$$

$$W_0^0(\xi)=\emptyset \text{ si } s=N$$

$$W_j^0(\xi)=\left\{\zeta\in\Gamma_K : \frac{\tau_{\alpha^j}(\xi,z)+|\xi-z|^2}{C_j}\le|\zeta-\xi|\le\frac{\tau_{\alpha^{j+1}}(\xi,z)+|\xi-z|^2}{C_{j+1}}\right\}$$

$$\text{pour } 0\le s\le N-2 \text{ et } 1\le j\le N-1-s,$$

$$W_j^0(\xi)=\emptyset \quad \forall j\ge 1 \text{ pour } s\in\{N-1,N\}$$

$$W^1(\xi)=\Gamma_K\setminus\left(W_0^0(\xi)\cup\cdots\cup W_{N-1-s}^0(\xi)\right)$$

$$W^{10}(\xi)=\left\{\zeta\in W^1(\xi) : |\zeta-\xi|<\frac{|\xi-z|}{2}\right\}$$

$$W^{11}(\xi)=W^1(\xi)\setminus W^{10}(\xi)$$

$$W^{110}(\xi)=\left\{\zeta\in W^{11}(\xi) : |\zeta-z|\le\frac{\tau_{\lambda^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2}{C^1}\right\}$$

$$W^{111}(\xi)=W^{11}(\xi)\setminus W^{110}(\xi)$$

$$W^{1110}(\xi)=\left\{\zeta\in W^{111}(\xi) : |\zeta-z|<\frac{|\xi-z|}{2}\right\}$$

$$W^{1111}(\xi)=W^{111}(\xi)\setminus W^{1110}(\xi).$$

alors

$$I_{K,s}^1=\sum_{j=0}^{N-1-s} I_{K,s}^1(W_j^0(\xi))+I_{K,s}^1(W^{10}(\xi))+$$
$$I_{K,s}^1(W^{110}(\xi))+I_{K,s}^1(W^{1110}(\xi))+I_{K,s}^1(W^{1111}(\xi)). \tag{2.29}$$

En utilisant les mêmes astuces de calcul que dans le 1^er^cas, on obtient facilement :

$$I_{K,s}^1(W_j^0(\xi))\le\frac{C\left(1+\left|\ell n|\xi-z|\right|\right)^{\nu+s+j+1}}{\prod_{k=1}^{N-s}\left(\tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2N+\beta-1}} \tag{2.30}$$

pour $0 \leq j \leq N-s-1$

$$I^1_{K,s}(W^{10}(\xi)) \leq \frac{C\Big(1+\big|\ell n|\xi-z|\big|\Big)^{\nu+N+1}}{\prod\limits_{k=1}^{N-s}\big(\tau_{\alpha^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\big)|\xi-z|^{2n-2N+\beta-1}} \tag{2.31}$$

$$I^1_{K,s}(W^{110}(\xi)) \leq \frac{C\Big(1+\big|\ell n|\xi-z|\big|\Big)^{\nu+N+1}}{\big(\tau_{\lambda^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2\big)|\xi-z|^{2n-N-s+2\beta-3}} \tag{2.32}$$

$$I^1_{K,s}(W^{1110}(\xi)) \leq \frac{C\Big(1+\big|\ell n|\xi-z|\big|\Big)^{\nu+N+1}}{\big(\tau_{\lambda^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2\big)|\xi-z|^{2n-N-s+2\beta-3}} \tag{2.33}$$

$$I^1_{K,s}(W^{1111}(\xi)) \leq \frac{C\Big(1+\big|\ell n|\xi-z|\big|\Big)^{\nu+N+1}}{\big(\tau_{\lambda^1}(\xi,z)+|\xi-z|^2\big)|\xi-z|^{2n-N-s+\beta-2}}. \tag{2.34}$$

Ainsi, d'après (2.29), $\ldots$, (2.34) et le fait que $1 \leq \beta$, le terme (2.24) est majoré par la somme d'un nombre fini de termes du type suivant :

$$\frac{C\Big(1+\big|\ell n|\xi-z|\big|\Big)^{\nu+N+1}}{\prod\limits_{k=1}^{N}\big(\tau_{\gamma^k}(\xi,z)+|\xi-z|^2\big)|\xi-z|^{2n-2N+2\beta-3}} \tag{2.35}$$

où $(\gamma^1,\ldots,\gamma^N)$ est une base de $\mathbb{R}^N$.

L'estimation (2.3) découle de (2.22) et (2.35). ■

(ii) D'après les théorèmes 5.4 et 7.2 de [La/Le1], il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$||H_Kf(\xi^1)-H_Kf(\xi^2)|| \leq C\sum_{k=1}^{2}\big(\mathcal{M}'_1(\xi^k)+\cdots+\mathcal{M}'_m(\xi^k)\big)$$

pour tous $z \in \overline{D}^*$, $\xi_1,\xi_2 \in \overline{D}\setminus\{z\}$, où pour $j \in \{1,\ldots,m\}\mathcal{M}'_j(\xi)$ est de type :

$$\begin{aligned}I^{<}_{K,s}+I^{>}_{K,s} := &\int_{\substack{\zeta\in\Gamma_K\\ |\zeta-\xi|<CR^{1/2}}} \frac{||f(\zeta)||d\sigma}{\big(|\rho_K(\zeta)|+|\zeta-\xi|^2\big)\prod\limits_{i=1}^{s}|\Phi(\xi,\zeta,\lambda^i)|\,|\zeta-\xi|^{2n-|K|-s-1}}\\ &+R\int_{\substack{\zeta\in\Gamma_K\\ |\zeta-\xi|>CR^{1/2}}} \frac{||f(\zeta)||d\sigma}{\big(|\rho_K(\zeta)|+|\zeta-\xi|^2\big)^2\prod\limits_{i=1}^{s}|\Phi(\xi,\zeta,\lambda^i)|\,|\zeta-\xi|^{2n-|K|-s-1}}\end{aligned}$$

avec $R=|\xi^1-\xi^2|$, $0 \leq s \leq |K|$, $\prod\limits_{i=1}^{0}|\Phi(\xi,\zeta,\lambda^i)| := 1$, les vecteurs $\lambda^1,\ldots,\lambda^s \in \Delta_K$ sont linéairement indépendants.

En suivant la même démarche que dans *(i)*, il est facile d'établir que $I^{<}_{K,s}+I^{>}_{K,s}$ est majoré par la somme d'un nombre fini de termes de type :

$$\frac{CR^{1/2}\big(1 + |\ln R|\big)^{\nu+N+1}}{\prod_{j=1}^{N}\big(\tau_{\gamma^j}(\xi, z) + |\xi - z|^2\big)|\xi - z|^{2n-2N}}$$

$\forall (z, \xi) \in \overline{D}^* \times \overline{D}$, $z \neq \xi$ et $|z - \xi| \geq R$, où $(\gamma^1, \ldots, \gamma^N)$ est une base de $\mathbb{R}^N$. ∎

3. Formules de type Martinelli-Bochner-Koppelman

Dans ce paragraphe, nous allons établir (théorèmes 3.3.17 et 3.3.18) une formule de type Martinelli-Bochner-Koppelman pour les (n, r) formes différentielles ($0 \leq r \leq q - 1$ ou $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$) sur une sous-variété CR générique q-concave, de codimension k dans $\mathbb{C}^n$.

Nous généralisons ainsi le travail de B. Fischer et J. Leiterer [Fi/Le] qui a été fait dans le cas des hypersurfaces réelles 1-concaves.

Pour d'autres types de formules de représentations intégrales sur les variétés CR nous renvoyons le lecteur à [Ai/He].

Nous allons commencer par préciser quelques notations et définitions propres à ce paragraphe.

3.0. Notations et définitions.

3.0.1. — q, k, n sont des entiers naturels tels que $1 \leq q \leq (n-k)/2$ et $1 \leq k \leq n$.

$\mathcal{I}$ est l'ensemble des sous-ensembles $I \subseteq \{\pm 1, \ldots, \pm k\}$ tels que $|i| \neq |j|$ pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$.

Pour $I \in \mathcal{I}$, $|I|$ désigne le nombre d'éléments de I.

$\mathcal{I}(\ell)$, $1 \leq \ell \leq k$, est l'ensemble des $I \in \mathcal{I}$ avec $|I| = \ell$.

$\mathcal{I}'(\ell)$, $1 \leq \ell \leq k$, est l'ensemble des $I \in \mathcal{I}(\ell)$ qui sont de type $I = \{j_1, \ldots, j_\ell\}$ avec $|j_\nu| = \nu$ pour $\nu = 1, \ldots, \ell$.

Pour $I \in \mathcal{I}$ et $\nu \in \{1, \ldots, |I|\}$, I_ν désigne l'élément de rang ν dans I où les éléments de I sont ordonnés suivant leurs valeurs absolues, et on note $I(\hat{\nu}) = I \setminus \{I_\nu\}$.

Soit $2 \leq \ell \leq k$ et $1 \leq \nu \leq \ell$, alors

$$\mathcal{I}'(\ell, \hat{\nu}) := \{I(\hat{\nu}), I \in \mathcal{I}'(\ell)\}.$$

3.0.2. — M désignera une sous-variété CR générique q-concave, de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k dans $\mathbb{C}^n$.

Soient $z^0 \in M$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un voisinage de z^0 et $\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_k : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$M \cap U = \{\hat{\rho}_1 = \cdots = \hat{\rho}_k = 0\} \text{ et } \partial\hat{\rho}_1(z^0) \wedge \cdots \wedge \partial\hat{\rho}_k(z^0) \neq 0.$$

Puisque M est q-concave, il existe alors, d'après le lemme 3.1.1 de [Ai/He], une constante $C > 0$ telles que les fonctions

$$\tilde{\rho}_j := \hat{\rho}_j + C \sum_{\nu=1}^{k} \hat{\rho}_\nu^2 \quad (j = 1, \ldots, k)$$

$$\tilde{\rho}_j := -\hat{\rho}_{-j} + C \sum_{\nu=1}^{k} \hat{\rho}_\nu^2 \quad (j = -1, \ldots, -k)$$

possèdent la propriété suivante : pour tout $I \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \Delta_{1\cdots|I|}$ la forme de Levi de $\lambda_1\tilde{\rho}_{I_1} + \cdots + \lambda_{|I|}\tilde{\rho}_{I_{|I|}}$ en z^0 a au moins $q + k$ valeurs propres strictement positives. Alors d'après le lemme 2.4 de [La/Le1], il existe $R_{z^0} > 0$ tel que pour tout $I \in \mathcal{I}$ et tout R avec $0 \leq R \leq R_{z^0}$, l'ensemble

$$\{\tilde{\rho}_{I_1} < 0\} \cap \cdots \cap \{\tilde{\rho}_{I_{|I|}} < 0\} \cap \{\xi \in \mathbb{C}^n : |z^0 - \xi| < R\}$$

soit un domaine localement $(q + k - 1)$-convexe. Notons $\rho_j = \tilde{\rho}_j$ et $D := \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi - z^0| < R\}$ où $0 \leq R \leq R_{z^0}$ est choisi tel que :

$$\overline{\partial}\rho_1(\xi) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_k(\xi) \neq 0 \text{ pour tout } \xi \in D$$

et

$$M \cap D = \{\xi \in D : \rho_{j_1} = \cdots = \rho_{j_k} = 0\} \text{ pour tout } (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{I}'(k)$$

(voir le lemme 3.1.1 de [Ai/He]). Notons $M_0 := M \cap D$.

3.0.3. — Pour $I \in \mathcal{I}$, nous notons

$$D_I := \{\rho_{I_1} < 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{I_{|I|}} < 0\} \cap D,$$

$$D_I^* := \{\rho_{I_1} > 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{I_{|I|}} > 0\} \cap D,$$

$$S_I := \{\rho_{I_1} = \cdots = \rho_{I_{|I|}} = 0\} \cap D,$$

$$S_{\{j\}}^+ := \overline{D}_{\{j\}} \text{ pour } j = \pm 1, \ldots, \pm k$$

$$S_I^+ := S_{I(|\widehat{I}|)} \cap \overline{D}_{\{I_{|I|}\}} \text{ si } I \in \mathcal{I} \text{ et } |I| \geq 2.$$

On oriente ces variétés comme suit :

D_I et D_I^* comme $\mathbb{C}^n \quad \forall I \in \mathcal{I}$

$S_{\{j\}}^+$ comme $D_{\{j\}}$ pour $j = \pm 1, \ldots, \pm k$

S_I comme $\partial S_I^+ \quad I \in \mathcal{I}$

S_I^+ comme $S_{I(|\widehat{I}|)}$ pour tout $I \in \mathcal{I}$ avec $|I| \geq 2$

M_0 comme S_I avec $I = \{1, \ldots, k\}$.

3.0.4. — H^I est l'opérateur d'homotopie correspondant à D_I, dont on a rappelé la construction dans 1.9.12.

DÉFINITION. — Soit $I \in \mathcal{I}$ et $0 \leq m \leq |I|$. Alors on note $\mathcal{K}_*^m(D_I^* \times D_I)$ l'ensemble des formes $F(z,\zeta)$ définies sur $\overline{D}_I^* \times \overline{D}_I \setminus \{z=\zeta\}$ continues sur $D_I^* \times D_I$ et telles qu'il existe une constante $C>0$, un nombre $r \in \mathbb{N}$ et une collection finie de familles $\{\gamma_1,\dots,\gamma_p\}$ libres dans $\mathbb{R}^{|I|}$, $\gamma_i = \{\gamma_i^1,\dots,\gamma_i^m\}$ (si $m \geq 1$) avec :

$$||F(z,\zeta)|| \leq C \sum_{i=1}^{p} \frac{\Big(1+\big|\ell n|\zeta - z|\big|\Big)^r}{\prod_{j=1}^{m}\left(\tau_{\gamma_i^j}(\zeta,z)+|\zeta-z|^2\right)|\zeta-z|^{2n-2m-1}} \tag{3.1}$$

pour tout $(z,\zeta) \in \overline{D}_I^* \times \overline{D}_I$ avec $z \neq \zeta$ (pour la définition de τ_{γ^j}, voir 1.10).

Remarque. — Il est clair que $\forall I \in \mathcal{I}$ et $0 \leq m \leq |I|$

$$\mathcal{K}_*^m(D_I^* \times D_I) \subseteq \mathcal{K}_*^{m-1}(D_I^* \times D_I) \quad \text{si } m \geq 1$$

et, par restriction,

$$\mathcal{K}_*^m\left(D_{I(\hat{\nu})}^* \times D_{I(\hat{\nu})}\right) \subseteq \mathcal{K}_*^m(D_I^* \times D_I)$$

si $|I| \geq 2$ et $\nu \in \{1,\dots,|I|\}$.

DÉFINITION. — Soit $I \in \mathcal{I}$ et $F = F(z,\zeta) \in \mathcal{K}_*^{|I|-1}(D_I^* \times D_I)$. Alors d'après (3.1) $F(z,\cdot)$ est continue sur D_I et intégrable sur les variétés Γ_K (voir la définition au 1.9.10) donc on peut écrire

$$(H^I F)(\xi) := (H^I F(z,\cdot))(\xi), \quad z \in \overline{D}_I^*, \xi \in D_I$$

on définit ainsi un opérateur qu'on notera aussi H^I, sur

$$\mathcal{K}_*^{|I|-1}(D_I^* \times D_I).$$

3.1. COROLLAIRE DU THÉORÈME 2.1.

(i) $\forall I \in \mathcal{I}$

$$H^I : \mathcal{K}_*^{|I|-1}(D_I^* \times D_I) \longrightarrow \mathcal{K}_*^{|I|}(D_I^* \times D_I).$$

(ii) $\forall I \in \mathcal{I}, |I| \geq 2$ *et* $\forall \nu \in \{1,\dots,|I|\}$

$$H^{I(\hat{\nu})} : \mathcal{K}_*^{|I(\hat{\nu})|-1}(D_{I(\hat{\nu})}^* \times D_{I(\hat{\nu})}) \longrightarrow \mathcal{K}_*^{|I|-1}(D_I^* \times D_I).$$

(iii) Soient $I \in \mathcal{I}, \varepsilon > 0$ et $F \in \mathcal{K}_*^{|I|-1}(D_I^* \times D_I)$ telle que : il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ et une collection $\{\alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ de familles libres dans $\mathbb{R}^{|I|-1}$, $\alpha_i = \{\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^{|I|-1}\}$ (pour $|I| \geq 2$) vérifiant :

$$||F(z^1, \zeta) - F(z^2, \zeta)|| \leq$$
$$C_\varepsilon |z^1 - z^2|^{1/2^{|I|-1} - \varepsilon} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{\prod_{j=1}^{|I|-1} \left(\tau_{\alpha_i^j}(\zeta, z^k) + |\zeta - z^k|^2\right) |\zeta - z^k|^{2n-2|I|+2-\varepsilon}} \tag{3.2}$$

pour tous $(z^1, z^2) \in \overline{D}_I^{*2}$, $\zeta \in \overline{D}_I \setminus \{z^1, z^2\}$. Alors il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ et une collection $\{\mu_1, \dots, \mu_{L'}\}$ de familles libres dans $\mathbb{R}^{|I|}$ $\mu_i = \{\mu_i^1, \dots, \mu_i^{|I|}\}$ telles que :

$$||(H^I F(z^1, \cdot))(\xi) - (H^I F(z^2, \cdot))(\xi)|| \leq$$
$$C_\varepsilon |z^1 - z^2|^{1/2^{|I|} - \varepsilon} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{L'} \frac{1}{\prod_{j=1}^{|I|} \left(\tau_{\mu_i^j}(\xi, z^k) + |\xi - z^k|^2\right) |\xi - z^k|^{2n-2|I|-\varepsilon}} \tag{3.3}$$

pour tout $(z^1, z^2) \in \overline{D}_I^{*2}$ et $\xi \in \overline{D}_I \setminus \{z^1, z^2\}$.

(iv) Soient $I \in \mathcal{I}$ et $F \in \mathcal{K}_*^{|I|-1}(D_I^* \times D_I)$, alors il existe une collection $\{\mu_1, \dots, \mu_L\}$ de familles libres dans $\mathbb{R}^{|I|}$ $\mu_i = \{\mu_i^1, \dots, \mu_i^{|I|}\}$ telles que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ vérifiant

$$||H^I F(\xi^1) - H^I F(\xi^2)|| \leq$$
$$C_\varepsilon |\xi^1 - \xi^2|^{1/2 - \varepsilon} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{\prod_{j=1}^{|I|} \left(\tau_{\mu_i^j}(\xi^k, z) + |\xi^k - z|^2\right) |\xi^k - z|^{2n-2|I|}} \tag{3.4}$$

pour tout $z \in \overline{D}_I^*, \xi^1, \xi^2 \in \overline{D}_I \setminus \{z\}$ avec $\min(|z - \xi^1|, |z - \xi^2|) \geq |\xi^1 - \xi^2|$.

Preuve du corollaire.

(i) et *(iv)* découlent respectivement de *(i)* et *(iii)* dans le théorème 2.1 pour $D = D_I, N = |I|$ et $\beta = 1$.

(ii) résulte de *(i)* et de la remarque ci-dessus.

Montrons *(iii)*: soient $z^1, z^2 \in \overline{D}_I^*, \xi \in \overline{D}_I \setminus \{z^1, z^2\}$ et $\varepsilon > 0$.

1^er^ cas : $|z^1 - \xi| < 2|z^1 - z^2|^{1/2^{|I|}}$

(ceci implique que $|z^2 - \xi| \leq |z^1 - z^2| + |z^1 - \xi| \leq 3|z^1 - z^2|^{1/2^{|I|}}$). D'après *(i)* dans le théorème 2.1, pour $D = D_I, N = |I|$ et $\beta = 1$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ et une collection $\{\mu_1,\dots,\mu_p\}$ de familles libres dans $\mathbb{R}^{|I|}$ $\mu_i=\{\mu_i^1,\dots,\mu_i^{|I|}\}$ telles que :

$$\begin{aligned}
&\|(H^IF(z^1,\cdot))(\xi)-(H^IF(z^2,\cdot))(\xi)\|\\
&\leq \sum_{k=1}^{2}\|H^IF(z^k,\cdot))(\xi)\|\\
&\leq C\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{P}\frac{1}{\prod_{j=1}^{|I|}\left(\tau_{\mu_i^j}(\xi,z^k)+|\xi-z^k|^2\right)|\xi-z^k|^{2n-2|I|-1}}\\
&\leq C_\varepsilon|z^1-z^2|^{1/2^{|I|}-\varepsilon}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{P}\frac{1}{\prod_{j=1}^{|I|}\left(\tau_{\mu_i^j}(\xi,z^k)+|\xi-z^k|^2\right)|\xi-z^k|^{2n-2|I|-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$*cas* : $|z^1-\xi|>2|z^1-z^2|^{1/2^{|I|}}$

(ceci implique que $|z^2-\xi|\geq|z^1-\xi|-|z^1-z^2|\geq|z^1-z^2|^{1/2^{|I|}}$). D'après *(i)* dans le théorème 2.1, pour $D=D_I$, $N=|I|$ et $\beta=2-\varepsilon$, il existe une constante $C_\varepsilon>0$ et une collection $\{\gamma_1,\dots,\gamma_L\}$ de familles libres dans $\mathbb{R}^{|I|}$ telles que

$$\begin{aligned}
&\|(H^IF(z^1,\cdot))(\xi)-(H^IF(z^2,\cdot))(\xi)\|\\
&\leq C_\varepsilon|z^1-z^2|^{1/2^{|I|-1}-\varepsilon}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{L'}\frac{\left(1+\left|\ln|\xi-z^k|\right|\right)^{|I|+1}}{\prod_{j=1}^{|I|}\left(\tau_{\gamma_i^j}(\xi,z^k)+|\xi-z^k|^2\right)|\xi-z^k|^{2n-2|I|+1-2\varepsilon}}\\
&\leq C_\varepsilon|z^1-z^2|^{1/2^{|I|}-\varepsilon}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{L'}\frac{1}{\prod_{j=1}^{|I|}\left(\tau_{\gamma_i^j}(\xi,z^k)+|\xi-z^k|^2\right)|\xi-z^k|^{2n-2|I|-\varepsilon}}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.2. Les noyaux $B^I_{n,r}$ et $K^I_{n,r}$ et les cochaînes $B^\ell_{n,r}$ et $K^\ell_{n,r}$.

3.2.1. DÉFINITION. — $C^\ell(D\times D)$ est l'espace des familles $F=\{F^I\}_{I\in\mathcal{I}(\ell+1)}$ de formes $F^I=F^I(z,\zeta)\in\mathcal{C}^0_*(D_I^*\times D_I)$, pour $0\leq\ell\leq k-1$, $C^k(D\times D):=\{0\}$. L'application

$$\delta: C^\ell(D\times D)\longrightarrow C^{\ell+1}(D\times D),\quad 0\leq\ell\leq k-1$$

est définie par

$$(\delta F)^I=(-1)^{|I|}\sum_{\nu=1}^{|I|}(-1)^\nu F^{I(\hat\nu)},\quad I\in\mathcal{I}(\ell+2)$$

si $\ell\leq k-2$ et $\delta F=0$ si $\ell=k-1$.

Remarque. — Il est clair que $\delta \circ \delta = 0$.

3.2.2. Définition. — Pour $I \in \mathcal{I}$ avec $|I| = 1$, nous posons

$$B^I_{n,r}(z,\xi) := B_{n,r}(z,\xi) \text{ pour } (z,\xi) \in \overline{D}^*_I \times \overline{D}_I \text{ avec } z \neq \xi$$

où $B_{n,r}(z,\xi)$ est la partie du noyau de Bochner-Martinelli (voir 1.13) de bidegré (n,r) en z

$$B^0_{n,r} := \{B^I_{n,r}(z,\xi)\}_{I\in\mathcal{I},|I|=1}.$$

Notons que $B^I_{n,r}(z,\xi) \in \mathcal{K}^0_*(D^*_I \times D_I)$ et vérifie l'estimation (3.2) pour tout $I \in \mathcal{I}$ avec $|I| = 1$. Supposons maintenant que pour $0 \leq \ell \leq k-1$ la cochaîne

$$B^\ell_{n,r} = \{B^I_{n,r}\}_{I\in\mathcal{I}(\ell+1)} \in C^\ell(D \times D)$$

avec

$$B^I_{n,r} \in K^{|I|-1}_*(D^*_I \times D_I)$$

et vérifiant (3.2), soit déjà définie. Alors en posant

$$K^\ell_{n,r} = \{K^I_{n,r}\}_{I\in\mathcal{I}(\ell+1)} := \{H^I B^I_{n,r}\}_{I\in\mathcal{I}(\ell+1)},$$
$$B^{\ell+1}_{n,r} = \{B^I_{n,r}\}_{I\in\mathcal{I}(\ell+2)} := \delta K^\ell_{n,r}$$

et en utilisant le corollaire 3.1, on obtient ainsi des cochaînes :

$$B^\ell_{n,r} = \{B^I_{n,r}\}_{I\in\mathcal{I}(\ell+1)} \in C^\ell(D \times D)$$

et

$$K^\ell_{n,r} = \{K^I_{n,r}\}_{I\in\mathcal{I}(\ell+1)} \in C^\ell(D \times D),$$

pour tout $0 \leq \ell \leq k-1$, telles que

$$B^I_{n,r} \in \mathcal{K}^{|I|-1}_*(D^*_I \times D_I) \text{ et vérifie l'estimation (3.2)} \tag{3.5}$$

et

$$K^I_{n,r} \in \mathcal{K}^{|I|}_*(D^*_I \times D_I) \text{ et vérifie les estimations (3.3) et (3.4).} \tag{3.6}$$

Remarque. — Pour tout $I \in \mathcal{I}(\ell+1)$, $0 \leq \ell \leq k-1$,

$K^I_{n,r}(z,\xi)$ est de bidegré (n,r) en z

$K^I_{n,r}(z,\xi)$ est de bidegré $(0, n-|I|-1-r)$ en ξ

$B^I_{n,r}(z,\xi)$ est de bidegré (n,r) en z

$B^I_{n,r}(z,\xi)$ est de bidegré $(0, n-|I|-r)$ en ξ.

Convention. — $K^I_{n,r} := B^I_{n,r} := 0$ pour $r \leq -1$. (3.7)

3.2.3. Lemme. — *Soit $I \in \mathcal{I}$. Alors* *(i) Les formes* $B^I_{n,r}(z,\xi)$, $\overline{\partial}_z B^I_{n,r}(z,\xi)$ *(pour* $0 \leq r \leq n-|I|$*) et* $\overline{\partial}_\xi B^I_{n,r}(z,\xi)$ *(pour* $0 \leq r \leq q+k-|I|$*) sont de classe* $\mathcal{C}^{\infty,1/2-\varepsilon}_{z,\xi}$ *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $(z,\xi) \in D^*_I \times \overline{D}_I$*. De plus*

$$\overline{\partial}_\xi B^I_{n,r}(z,\xi) + \overline{\partial}_z B^I_{n,r-1}(z,\xi) = 0 \text{ pour } 0 \leq r \leq q+k-|I|. \tag{3.8}$$

(ii) Les formes $K^I_{n,r}(z,\xi)$, $\overline{\partial}_z K^I_{n,r}(z,\xi)$ *(pour* $0 \leq r \leq n-|I|-1$*) et* $\overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi)$ *(pour* $0 \leq r \leq q+k-|I|-1$*) sont de classe* $\mathcal{C}^{\infty,1/2-\varepsilon}_{z,\xi}$ *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $(z,\xi) \in D^*_I \times \overline{D}_I$*. De plus*

$$\overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi) + \overline{\partial}_z K^I_{n,r-1}(z,\xi) = B^I_{n,r}(z,\xi) \text{ pour } 0 \leq r \leq q+k-|I|-1. \tag{3.9}$$

(Ici $\overline{\partial}_z$ *est utilisé dans son sens usuel et* $\overline{\partial}_\xi$ *dans le sens des distributions).*

Preuve du lemme. — Nous allons montrer ce lemme par récurrence. Hypothèse de récurrence :

$A(m)$: *(i)* est vraie pour $|I| = m$ et *(ii)* est vraie pour $|I| = m-1$ si $m \geq 2$.

$A(1)$ résulte des propriétés du noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n$ (voir 1.13). Soit $m \geq 2$ et supposons que $A(m-1)$ soit vraie. Nous allons prouver en deux étapes que $A(m)$ est vraie.

1$^{\text{re}}$ étape : nous prouvons *(ii)* pour $|I| = m-1$.

D'après $A(m-1)$, les applications suivantes

$$D^*_I \ni z \longrightarrow B^I_{n,r}(z,\cdot)$$
$$D^*_I \ni z \longrightarrow \overline{\partial}_z B^I_{n,r}(z,\cdot)$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à valeurs dans $\mathcal{C}^0_*(\overline{D}_I)$ et comme l'opérateur H^I est continu de $L^\infty_*(D_I)$ dans $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(\overline{D}_I)$ (cf. [La/Le1], théorème 4.12), les applications suivantes

$$D^*_I \ni z \longrightarrow K^I_{n,r}(z,\cdot)$$
$$D^*_I \ni z \longrightarrow \overline{\partial}_z K^I_{n,r}(z,\cdot)$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à valeurs dans $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}_*(\overline{D}_I)$. D'autre part d'après le théorème (H) (cf. 1.9.12), le fait que D_I soit localement $q+k-1$-convexe et $B^I_{n,r}(z,\cdot)$ de bidegré $(0, n-|I|-r)$ en ξ, on a pour tout $0 \leq r \leq q+k-|I|-1$

$$B^I_{n,r}(z,\xi) = \overline{\partial}_\xi\big[(H^I B^I_{n,r}(z,\cdot))(\xi)\big] + \big[H^I \overline{\partial} B^I_{n,r}(z,\cdot)\big](\xi)$$

d'où d'après $A(m-1)$,

$$B^I_{n,r}(z,\xi) = \overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi) - \big[H^I \overline{\partial}_z B^I_{n,r-1}(z,\cdot)\big](\xi)$$

et comme l'opérateur H^I est une intégration sur une variété de dimension $2n+1$, ceci implique (voir 1.7) que

$$\begin{aligned} B^I_{n,r}(z,\xi) &= \overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi) + \overline{\partial}_z\big[H^I B^I_{n,r-1}(z,\cdot)\big](\xi) \\ &= \overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi) + \overline{\partial}_z K^I_{n,r-1}(z,\xi) \end{aligned}$$

et par suite, $\overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi) \in \mathcal{C}^{\infty,1/2-\varepsilon}_{z,\xi}(D^*_I \times \overline{D}_I)$ pour $0 \leq r \leq q+k-|I|-1$.

2^e *étape*: nous prouvons *(i)* pour $|I| = m$.

Par définition de la cochaîne $B^m_{n,r}(z,\xi)$ nous avons $B^m_{n,r} = \delta K^{m-1}_{n,r}$ et par suite,

$$\overline{\partial}_\xi B^m_{n,r}(z,\xi) = \delta \overline{\partial}_\xi K^{m-1}_{n,r}(z,\xi) \text{ et } \overline{\partial}_z B^m_{n,r}(z,\xi) = \delta \overline{\partial}_z K^{m-1}_{n,r}(z,\xi)$$

d'où d'après la 1^re étape $B^I_{n,r}(z,\xi), \overline{\partial}_\xi B^I_{n,r}(z,\xi)$ (pour $0 \leq r \leq q+k-|I|$) et $\overline{\partial}_z B^I_{n,r}(z,\xi)$ sont de classe $\mathcal{C}^{\infty,1/2-\varepsilon}(D^*_I \times \overline{D}_I)$ pour $|I| = m$. De plus on a pour tout $r \leq q+k-|I| = q+k-|I(\hat{\nu})|-1 \quad (\forall \nu \in 1,\dots,|I|)$

$$\overline{\partial}_\xi B^m_{n,r}(z,\xi) = \delta B^{m-1}_{n,r}(z,\xi) - \overline{\partial}_z \delta K^{m-1}_{n,r}(z,\xi)$$

et comme, par définition, $B^{\ell+1}_{n,r}(z,\xi) = \delta K^\ell_{n,r}(z,\xi), 0 \leq \ell \leq k-1$, et $\delta \circ \delta = 0$, ceci implique que

$$\overline{\partial}_\xi B^m_{n,r}(z,\xi) = -\overline{\partial}_z B^m_{n,r-1}(z,\xi). \qquad \blacksquare$$

3.2.4. THÉORÈME.

(i) Les formes $B^I_{n,r}(z,\xi)$*,* $\overline{\partial}_z B^I_{n,r}(z,\xi)$ *et* $\overline{\partial}_\xi B^I_{n,r}(z,\xi)$ *pour* $0 \leq r \leq q+k-|I|$ *admettent des extensions continues à* $\overline{D}^*_I \times \overline{D}_I \setminus \{z=\xi\}$ *et qui sont de classe* $\mathcal{C}^{0,1/2-\varepsilon}_{z,\xi}$*. De plus*

$$\overline{\partial}_\xi B^I_{n,r}(z,\xi) + \overline{\partial}_z B^I_{n,r-1}(z,\xi) = 0 \textit{ pour tout } 0 \leq r \leq q+k-|I|. \tag{3.10}$$

(ii) Les formes $K^I_{n,r}(z,\xi)$*,* $\overline{\partial}_z K^I_{n,r}(z,\xi)$ *et* $\overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi)$ *pour* $0 \leq r \leq q+k-|I|-1$ *admettent des extensions continues à* $\overline{D}^*_I \times \overline{D}_I \setminus \{z=\xi\}$ *et qui sont de classe* $\mathcal{C}^{0,1/2-\varepsilon}_{z,\xi}$*. De plus*

$$\overline{\partial}_\xi K^I_{n,r}(z,\xi) + \overline{\partial}_z K^I_{n,r-1}(z,\xi) = B^I_{n,r}(z,\xi) \textit{ pour tout } 0 \leq r \leq q+k-|I|-1. \tag{3.11}$$

Preuve. — Il suffit de suivre la preuve du (ν), corollaire 5.1 dans [Fi/Le] (voir [Ba2]).

3.3. Formules de type Martinelli-Bochner-Koppelman.

Dans ce paragraphe nous allons établir des formules de type Martinelli-Bochner-Koppelman (théorèmes 3.3.17 et 3.3.18) en utilisant les résultats du paragraphe précédent. Commençons par montrer que les noyaux $K^I(z,\xi)$ (resp. $B^I(z,\xi)$) sont intégrables sur S_I(resp. S^*_I).

3.3.1. LEMME. — *Soient* $I \in \mathcal{I}, r \in \mathbb{N}, (\gamma^1,\dots,\gamma^{|I|})$ *une famille libre dans* $\mathbb{R}^{|I|}$ *et* $z \in \overline{D}^*_I$ *alors* $\exists C > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$ *tel que* $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int_{\substack{\xi\in S_I\\ |\xi-z|<\varepsilon}} \frac{\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^r d\lambda(\xi)}{\prod_{i=1}^{|I|}\left(\tau_{\gamma^i}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2|I|-1}} \le C_\varepsilon\varepsilon\left(1+|\ln\varepsilon|\right)^{r+|I|} \tag{3.17}$$

$$\int_{\substack{\xi\in S^+_{I\cup\{j\}}\\ |\xi-z|<\varepsilon}} \frac{\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^r d\lambda(\xi)}{\prod_{i=1}^{|I|}\left(\tau_{\gamma^i}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2|I|-1}} \le C_\varepsilon\varepsilon\left(1+|\ln\varepsilon|\right)^{r+|I|} \tag{3.18}$$

(pour tout $j \in \{\pm1,\dots,\pm k\}\setminus I, |j|\le|I|$)

$$\int_{\substack{\xi\in S^+_I\\ |\xi-z|<\varepsilon}} \frac{\left(1+\left|\ln|\xi-z|\right|\right)^r d\lambda(\xi)}{\prod_{i=1}^{|I|-1}\left(\tau_{\gamma^i}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right)|\xi-z|^{2n-2|I|+1}} \le C_\varepsilon\varepsilon\left(1+|\ln\varepsilon|\right)^{r+|I|-1} \tag{3.19}$$

Preuve. — Posons

$$x_i(z,\xi) := \tau_{\gamma^i}(z,\xi) = \left|\operatorname{Im}\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial\rho_{\gamma^i}(\xi)}{\partial\xi_\ell}(\xi_\ell-z_\ell)\right|.$$

On sait d'après (1.3) (voir 1.10) qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\tau_{\gamma^i}(z,\xi)+|\xi-z|^2 \le C\left(\tau_{\gamma^i}(\xi,z)+|\xi-z|^2\right).$$

D'autre part puisque $\gamma^1,\dots,\gamma^{|I|}$ sont linéairement indépendants, il est facile de montrer, vue la généricité de M, qu'on peut choisir $u_1(z,\cdot),\dots,u_{|I|}(z,\cdot)$ comme des coordonnées locales sur S_I et $S^+_{I\cup\{j\}}$, pour $|z-\xi|<\varepsilon$ avec $\varepsilon>0$ assez petit. Ainsi le terme à gauche dans l'inégalité (3.17) (resp. l'inégalité (3.18)) est majoré par

$$\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-|I|}\\ |X|<\varepsilon}} \frac{\left(1+\left|\ln|X|\right|\right)^r dX}{\prod_{i=1}^{|I|}\left(|X_i|+|X|^2\right)|X|^{2n-2|I|-1}} \le C_\varepsilon\varepsilon\left(1+|\ln\varepsilon|\right)^{r+|I|}.$$

On montre (3.19) de la même façon. ∎

3.3.2. DÉFINITION.

(i) Soit $I\in\mathcal{I}$ et $j\in\{\pm1,\dots,\pm k\}\setminus I, |j|\le|I|$.

On sait que $K^I_{n,r}(z,\xi)$ est continue sur $\overline{D}^*_I\times\overline{D}_I\setminus\{z=\xi\}$, est de classe $\mathcal{C}^{\infty,0}_{z,\xi}$ sur $D^*_I\times D_I$ et appartient à $\mathcal{K}^{|I|}_*(D^*_I\times D_I)$. Alors vues les estimations (3.17) et (3.18), les opérateurs linéaires suivants sont bien définis et continus :

$$\widehat{K}^I_{n,r} : \mathcal{C}^0_*(S_I) \longrightarrow \mathcal{C}^0_{n,r}(\overline{D}^*_I)\cap\mathcal{C}^\infty_*(D^*_I)$$

et

$$\widehat{K}^{I,j}_{n,r} : \mathcal{C}^0_*(S^+_{I\cup\{j\}}) \longrightarrow \mathcal{C}^0_{n,r}(\overline{D}^*_I) \cap \mathcal{C}^\infty_*(D^*_I)$$

où

$$\widehat{K}^I_{n,r} f(z) := \int_{\xi\in S_I} f(\xi) \wedge K^I_{n,r}(z,\xi), \quad z \in \overline{D}^*_I,\, f \in \mathcal{C}^0_*(S_I)$$

et

$$\widehat{K}^{I,j}_{n,r} f(z) := \int_{\xi\in S^+_{I\cup\{j\}}} f(\xi) \wedge K^I_{n,r}(z,\xi), \quad z \in \overline{D}^*_I,\, f \in \mathcal{C}^0_*(S^+_{I\cup\{j\}})$$

(ii) Soit $I \in \mathcal{I}$. Puisque $B^I_{n,r}(z,\xi) \in \mathcal{K}^{|I|-1}_*(D^*_I \times D_I)$, est continue sur $\overline{D}^*_I \times \overline{D}_I \setminus \{z = \xi\}$ et de classe $\mathcal{C}^{\infty,0}_{z,\xi}$ sur $D^*_I \times D_I$, alors compte tenu de (3.1) et (3.19) l'opérateur défini par :

$$\widehat{B}^I_{n,r} f(z) := \int_{\xi\in S^+_I} f(\xi) \wedge B^I_{n,r}(z,\xi), \quad z \in \overline{D}^*_I,\, f \in \mathcal{C}^0_*(S^+_I)$$

est linéaire continu de $\mathcal{C}^0_*(S^+_I)$ dans $\mathcal{C}^0_*(\overline{D}^*_I) \cap \mathcal{C}^\infty_*(D^*_I)$. Si $|I| \geq 2$ et $\nu \in \{1,\ldots,|I|\}$ alors $S^+_{I(\hat{\nu})\cup(I_\nu)} = S^+_I$ et par suite

$$\widehat{K}^{I(\hat{\nu}),I_\nu} f(z) = \int_{\xi\in S^+_I} f(\xi) \wedge K^{I(\hat{\nu})}_{n,r}(z,\xi) \text{ pour } z \in \overline{D}^*_{I(\hat{\nu})} \text{ et } f \in \mathcal{C}^0_*(S^+_I)$$

d'où d'après la définition de $B^I_{n,r}$,

$$\widehat{B}^I_{n,r} f(z) = \sum_{\nu=1}^{|I|} (-1)^{\nu+|I|} \widehat{K}^{I(\hat{\nu}),I_\nu}_{n,r} f(z). \tag{3.20}$$

(iii)

$$\widehat{K}^I_{n,-1} = 0,\ \widehat{K}^{I,j}_{n,-1} = 0,\ \widehat{B}^I_{n,-1} = 0 \tag{3.21}$$

d'après la convention (3.7).

3.3.3. Lemme. — *Soit $I \in \mathcal{I}$, $0 \leq r \leq q-1$ et $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$ telle que df soit aussi continue sur D. Alors on a l'égalité suivante (dans le sens des courants) :*

$$d\widehat{K}^I_{n,r-1} f + (-1)^{|I|+1} \widehat{K}^I_{n,r} df = (-1)^{n+r}\left[d\widehat{B}^I_{n,r-1} f + (-1)^{|I|} \widehat{B}^I_{n,r} df\right] \tag{3.22}$$

sur $\overline{D}^*_I$ (et donc sur toute sous-variété, de classe $\mathcal{C}^1$, de $\overline{D}^*_I$).

Preuve. — Nous allons commencer par prouver le résultat suivant : si $0 \leq m \leq q-1$, $g \in [C^0_{n,m+1}(D)]_0$ avec dg continue sur D et si $z \in D^*_I$ alors :

$$\widehat{K}^I_{n,m} g(z) =$$

$$\int_{S^+_I} dg \wedge K^I_{n,m}(z,\cdot) + (-1)^{n+m+1} \widehat{B}^I_{n,m} g(z) + (-1)^{|I|} d_z \int_{S^+_I} g \wedge K^I_{n,m-1}(z,\cdot) \tag{3.23}$$

Preuve de (3.23). — Fixons $z \in D_I^*$. D'après le lemme 3.2.3, $\overline{\partial} K^I_{n,m}(z,\cdot)$ est continue sur $\overline{D}_I$ et on a la relation

$$\overline{\partial} K^I_{n,m}(z,\cdot) = B^I_{n,m}(z,\cdot) - \overline{\partial}_z K^I_{n,m-1}(z,\cdot) \text{ sur } \overline{D}_I$$

d'où

$$d[g \wedge K^I_{n,m}(z,\cdot)] = dg \wedge K^I_{n,m}(z,\cdot) + (-1)^{n+m+1} g \wedge B^I_{n,m}(z,\cdot) - d_z[g \wedge K^I_{n,m-1}(z,\cdot)]$$

sur $\overline{D}_I$ et donc sur S_I^+. Comme $\dim_{\mathbb{R}} S_I^+ = 2n - |I| + 1$, on a (voir 1.7)

$$\int_{S_I^+} d_z[g \wedge K^I_{n,m-1}(z,\cdot)] = (-1)^{|I|+1} d_z \int_{S_I^+} g \wedge K^I_{n,m-1}(z,\cdot).$$

Ceci implique (3.23), après avoir utilisé la formule de Stokes. Prouvons maintenant (3.22). Les formes $\widehat{K}_{n,r-1}f$, $\widehat{K}_{n,r-1}df$, $\widehat{B}_{n,r-1}f$ et $\widehat{B}_{n,r}df$ étant continues sur $\overline{D}_I^*$, il suffit d'établir (3.22) sur D_I^* (où ces formes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$). (3.24)

En posant $m = r$ et $g = df$ dans (3.23), on obtient

$$\widehat{K}^I_{n,r} df(z) = (-1)^{n+r+1} \widehat{B}^I_{n,r} df(z) + (-1)^{|I|} d_z \int_{S_I^+} df \wedge K^I_{n,r-1}(z,\cdot) \tag{3.25}$$

pour tout $z \in D_I^*$.

En posant $m = r-1$ (si $r \geq 1$) et $g = f$ dans (3.23), on obtient

$$\widehat{K}^I_{n,r-1} f(z) = \int_{S_I^+} df \wedge K^I_{n,r-1}(z,\cdot) + (-1)^{n+r} \widehat{B}^I_{n,r-1} f(z) + (-1)^{|I|} d_z \int_{S_I^+} f \wedge K^I_{n,r-2}(z,\cdot)$$

et donc

$$d\widehat{K}^I_{n,r-1} f(z) = d_z \int_{S_I^+} df \wedge K^I_{n,r-1}(z,\cdot) + (-1)^{n+r} d\widehat{B}_{n,r-1} f(z) \tag{3.26}$$

pour tout $z \in D_I^*$.

L'égalité (3.22) résulte de (3.24), (3.25) et (3.26). ∎

3.3.4. Définition.

(i) Soit χ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi = 1$ sur $]-\infty, 1/2]$ et $\chi = 0$ sur $[1, +\infty[$. Posons

$$\chi_\varepsilon(z) := \prod_{j=\pm 1,\dots,\pm k} \chi\left(\frac{\rho_j(z)}{\varepsilon}\right) \quad \text{pour } z \in D \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Alors il existe $C > 0$ telle que :

$$\|d\chi_\varepsilon(z)\| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad \forall z \in D \text{ et } \forall \varepsilon > 0. \tag{3.27}$$

Posons

$$f_\varepsilon := \chi_\varepsilon f \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}^0_*(D). \tag{3.28}$$

(ii) Soit $I \in \mathcal{I}, j \in \{\pm 1, \dots, \pm k\}$, et soit $f \in [\mathcal{C}^0_*(D)]_0$ telle que df soit aussi continue sur D. Alors les (n,r) courants suivants sont bien définis sur M_0 :

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}^I_{n,r} f &= d\widehat{K}^I_{n,r-1} f + (-1)^{|I|+1} \widehat{K}^I_{n,r} df \\
\widetilde{K}^{I,j}_{n,r} f &= d\widehat{K}^{I,j}_{n,r-1} f + (-1)^{|I|+1} \widehat{K}^{I,j}_{n,r} df \\
\widetilde{B}^I_{n,r} f &= d\widehat{B}^I_{n,r-1} f + (-1)^{|I|} \widehat{B}^I_{n,r} df.
\end{aligned}$$

3.3.5. Corollaire du lemme 3.3.3. — *Soit* $I \in \mathcal{I}, 0 \le r \le q-1$ *et* $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$ *telle que* df *soit aussi continue sur* D*. Alors l'égalité suivante est vraie sur* M *au sens des courants :*

$$\widetilde{K}^I_{n,r} f = (-1)^{n+r} \widetilde{B}^I_{n,r} f \tag{3.29}$$

3.3.6. Lemme. — *Soient* $2 \le \ell \le k$*,* $1 \le \nu \le \ell$*,* $I \in \mathcal{I}'(\ell, \hat{\nu})$ *et* $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$*,* $0 \le r \le n-k$*, telle que* df *soit aussi continue sur* D*. Alors uniformément sur* M_0*, on a :*

$$(i)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{S_I \cap \{\rho_\nu < 0\}} f_\varepsilon(\xi) \wedge K^I_{n,r-1}(z,\xi) + \int_{S_I \cap \{\rho_{-\nu} < 0\}} f_\varepsilon(\xi) \wedge K^I_{n,r-1}(z,\xi) - \widehat{K}^I_{n,r-1} f_\varepsilon(z) \right) = 0 \tag{3.30}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{S_I \cap \{\rho_\nu < 0\}} df_\varepsilon(\xi) \wedge K^I_{n,r}(z,\xi) + \int_{S_I \cap \{\rho_{-\nu} < 0\}} df_\varepsilon(\xi) \wedge K^I_{n,r}(z,\xi) - \widehat{K}^I_{n,r} df_\varepsilon(z) \right) = 0 \tag{3.31}$$

$$(ii)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{S^+_I \cap \{\rho_\nu < 0\}} f_\varepsilon(\xi) \wedge B^I_{n,r-1}(z,\xi) + \int_{S^+_I \cap \{\rho_{-\nu} < 0\}} f_\varepsilon(\xi) \wedge B^I_{n,r-1}(z,\xi) - \widehat{B}^I_{n,r-1} f_\varepsilon(z) \right) = 0 \tag{3.32}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{S^+_I \cap \{\rho_\nu < 0\}} df_\varepsilon(\xi) \wedge B^I_{n,r}(z,\xi) + \int_{S^+_I \cap \{\rho_{-\nu} < 0\}} df_\varepsilon(\xi) \wedge B^I_{n,r}(z,\xi) - \widehat{B}^I_{n,r} df_\varepsilon(z) \right) = 0. \tag{3.33}$$

Preuve.

(i)

1[er]*cas* : $\ell \le k-1$

Soit $I \in \mathcal{I}'(\ell, \hat{\nu})$ $\quad (|I| = \ell - 1)$. Nous allons estimer

$$A_\varepsilon = \int_{\substack{\xi \in S_I \cap \{\rho_\nu > 0, \rho_{-\nu} > 0\} \\ \xi \in \mathrm{supp}(\chi_\varepsilon)}} \|K^I_{n,m}(z,\xi)\| d\lambda(\xi) \qquad (0 \le m \le n-k).$$

Comme dans la preuve du lemme 3.3.1, $x_i(z,\cdot) := \tau_{\gamma^i}(z,\cdot)$ où $(\gamma^1,\dots,\gamma^{|I|})$ sont linéairement indépendants, peuvent être choisis comme des coordonnées locales sur S_I. Soient $x_{|I|+1},\dots,x_{2n-k}$ telles que $x_1,x_2,\dots,x_{2n-k},\rho_\nu,\rho_{\ell+1},\dots,\rho_k$ soient des coordonnées de S_I. Posons $x_0=\rho_\nu$, $X''=(x''_1,\dots,x''_{k-\ell})=(\rho_{\ell+1},\dots,\rho_k)$, $X'=(x'_1,\dots,x'_{2n-|I|-1})=(x_1,\dots,x_{2n-k},X'')$ et $X=(x_0,X')$. Notons que $X''\in\mathbb{R}^{k-|I|-1}$. Alors compte tenu de la définition de ρ_ν et $\rho_{-\nu}$, et de (3.1), il est clair qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tel que A_ε soit majoré par :

$$C\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-|I|}\\ |X_0|\le C|X'|^2\\ |X''|\le\varepsilon}}\frac{\Big(1+\big|\ln|X''|\big|\Big)^P dX}{\prod_{j=1}^{|I|}\big(|x_j|+|X''|^2\big)|X'|^{2n-2|I|-1}}$$

$$\le C\int_{\substack{X'\in\mathbb{R}^{2n-|I|-1}\\ |X''|\le\varepsilon}}\frac{\Big(1+\big|\ln|X''|\big|\Big)^P dX}{\prod_{j=1}^{|I|}\big(|x'_j|+|X''|^2\big)\prod_{j=|I|+1}^{2n-k}\big(|x'_j|+|X''|\big)|X''|^{k-|I|-3}}$$

pour obtenir cette inégalité, on a intégré par rapport à x_0 et on a minoré $|X'|$ par $|x'_j|+|X''|$ pour tout $j\in\{|I|+1,\dots,2n-k\}$. D'où, en intégrant d'abord par rapport à $x'_1,\dots,x'_{2n-k}$ puis par rapport à X'' ($X''\in\mathbb{R}^{k-|I|-1}$),

$$A_\varepsilon\le C\varepsilon^2(1+|\ln\varepsilon|)^{p+2n-k}.$$

Les égalités (3.30) et (3.31) découlent, alors, de (3.27) et (3.28).

2^e cas : $\ell=k$

Soit $I\in\mathcal{I}'(k,\hat\nu)$, $1\le\nu\le k$. Alors comme $M_0=\partial(S_I\cap\{\rho_\nu<0\})\cap D=\partial(S_I\cap\{\rho_{-\nu}<0\})\cap D$ (voir la définition de M_0 dans 3.0.9). On a pour tout $f\in[\mathcal{C}^0_{n,m+1}(D)]_0$

$$\int_{S_I\cap\big(\{\rho_\nu<0\}\cup\{\rho_{-\nu}<0\}\big)}f(\xi)\wedge K^I_{n,m}(z,\xi)=\int_{S_I}f(\xi)\wedge K^I_{n,m}(z,\xi)$$

d'où (3.30) et (3.31) pour $\ell=k$.

(ii)

Les égalités (3.32) et (3.33) se montrent de la même façon que dans le 1^er cas de la preuve de (i). ■

3.3.7. LEMME.

(i) Pour toute $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$ *telle que* df *soit aussi continue sur* D, $0 \leq r \leq n-k$, *et pour tout* $\nu = 1, \ldots, k$ *:*

$$f\Big|_{M_0} = (-1)^{n+r} \lim_{\varepsilon \to 0} \big(\widetilde{B}^{\{\nu\}}_{n,r} f_\varepsilon + \widetilde{B}^{\{-\nu\}}_{n,r} f_\varepsilon\big). \tag{3.34}$$

(ii) Soient $2 \leq \ell \leq k, 1 \leq \nu \leq \ell - 1, I \in \mathcal{I}'(\ell, \hat{\nu})$ *et soit* $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$, $0 \leq r \leq q-1$, *telle que* df *soit aussi continue sur* D. *Alors dans le sens des courants sur* M_0, *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\widetilde{K}^{I,\nu}_{n,r} f_\varepsilon + \widetilde{K}^{I,-\nu}_{n,r} f_\varepsilon\big) = 0. \tag{3.35}$$

(iii) Soit $2 \leq \ell \leq k$, $I \in \mathcal{I}'(\ell - 1)$ *et soit* $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$ *avec* $0 \leq r \leq n-k$, *telle que* df *soit aussi continue sur* D. *Alors dans le sens des courants sur* M_0, *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\widetilde{K}^{I,\ell}_{n,r} f_\varepsilon + \widetilde{K}^{I,-\ell}_{n,r} f_\varepsilon - \widetilde{K}^{I}_{n,r} f_\varepsilon\big) = 0. \tag{3.36}$$

Preuve.

(i) D'après la formule classique de Bochner-Martinelli-Koppelman dans $\mathbb{C}^n$ (voir 1.13) on a

$$\begin{aligned} f\Big|_{M_0} = \chi_\varepsilon f\Big|_{M_0} &= (-1)^{n+r}(dB_D f_\varepsilon \hat{\text{E}} - B_D df_\varepsilon) \\ &= (-1)^{n+r}\Big(\widetilde{B}^{\{\nu\}}_{n,r} f_\varepsilon + \widetilde{B}^{\{-\nu\}}_{n,r} f_\varepsilon\Big) + (-1)^{n+r}\big(dB_{\Omega_\nu} f_\varepsilon \hat{\text{E}} - B_{\Omega_\nu} df_\varepsilon\big) \end{aligned}$$

où $\Omega_\nu := D \cap \{\rho_\nu > 0,\ \rho_{-\nu}\hat{\text{E}} > 0\}$.

Il est clair d'après la preuve du lemme 3.3.6 que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(dB_{\Omega_\nu} f_\varepsilon - B_{\Omega_\nu} df_\varepsilon\big) = 0.$$

(ii) En appliquant la même méthode que dans la preuve du lemme 3.3.3, (*i.e.* en utilisant la relation (3.11) et en appliquant le théorème de Stokes) on obtient facilement

$$\widetilde{K}^{I,j}_{n,r} f_\varepsilon(z) + d\int_{S_I \cap \{\rho_j < 0\}} f_\varepsilon(\xi) \wedge K^I_{n,r-1}(z,\xi) + (-1)^{|I|+1}\int_{S_I \cap \{\rho_j < 0\}} df_\varepsilon(\xi) \wedge K^I_{n,r}(z,\xi)$$
$$= (-1)^{n+r}\left(d\int_{S_I^+ \cap \{\rho_j < 0\}} f_\varepsilon(\xi) \wedge B^I_{n,r-1}(z,\xi) + (-1)^{|I|}\int_{S_I^+ \cap \{\rho_j < 0\}} df_\varepsilon(\xi) \wedge B^I_{n,r-1}(z,\xi)\right)$$

pour tout $I \in \mathcal{I}'(\ell)$, $j \in \{\pm 1, \ldots, \pm k\} \setminus I$ et $z \in \overline{D}^*_I$.

En écrivant cette égalité respectivement pour $j = \nu$ et $j = -\nu$ et en utilisant les lemmes 3.3.6 et 3.3.3, on voit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\widetilde{K}^{I,\nu}_{n,r} f_\varepsilon + \widetilde{K}^{I,-\nu}_{n,r} f_\varepsilon\big) = 0.$$

(iii) résulte immédiatement de *(i)* du lemme 3.3.6, où $\nu = \ell$. ∎

3.3.8. LEMME. — *Soit* $2 \leq \ell \leq k, 0 \leq r \leq q-1$, $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$ *telle que* df *soit aussi continue sur* D*. Alors on a l'égalité suivante au sens des courants sur* M_0 *:*

$$\sum_{I\in\mathcal{I}'(\ell)} \widetilde{K}^I_{n,r} f = (-1)^{n+r} \sum_{I\in\mathcal{I}'(\ell-1)} \left(\widetilde{K}^{I,\ell}_{n,r} f + \widetilde{K}^{I,-\ell}_{n,r} f\right)$$
$$+(-1)^{n+r+\ell} \sum_{\nu=1}^{\ell-1} (-1)^\nu \sum_{I\in\mathcal{I}'(\ell,\hat{\nu})} \left(\widetilde{K}^{I,\nu}_{n,r} f + \widetilde{K}^{I,-\nu}_{n,r} f\right). \quad (3.37)$$

Preuve. — Ce lemme résulte immédiatement du corollaire 3.3.5 et de (3.20). ∎

3.3.9. LEMME. — *Soit* $2 \leq \ell \leq k, 0 \leq r \leq q-1$, $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$ *telle que* df *soit aussi continue sur* D*. Alors on a l'égalité suivante, au sens des courants sur* M_0 *:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\sum_{I\in\mathcal{I}'(\ell)} \widetilde{K}^I_{n,r} f_\varepsilon - (-1)^{n+r} \sum_{I\in\mathcal{I}'(\ell-1)} \widetilde{K}^I_{n,r} f_\varepsilon \Big) = 0. \quad (3.38)$$

Preuve. — Ce résultat découle du lemme 3.3.7 et des égalités (3.35) et (3.36). ∎

3.3.10. THÉORÈME. — *Soit* $f \in [\mathcal{C}^0_{n,r}(D)]_0$ *avec* $0 \leq r \leq q-1$ *telle que* df *soit aussi continue sur* D*. Alors, pour tout* $1 \leq \ell \leq k$*,*

$$f_{\big| M} = (-1)^{(n+r)(\ell+1)} \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{I\in\mathcal{I}'(\ell)} \widetilde{K}^I_{n,r} f_\varepsilon. \quad (3.39)$$

Preuve. — Pour $\ell = 1$, (3.39) découle du corollaire 3.3.5 et du lemme 3.3.7 *(i)* et alors du lemme 3.3.9, on déduit (3.39) pour $\ell = 2, \ldots, k$.

3.3.11. DÉFINITION.

(i) Soit $I \in \mathcal{I}'(k)$ alors on note

$$\operatorname{sgn} I := \begin{cases} 1 & \text{si le nombre d'éléments négatifs de } I \text{ est pair} \\ -1 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

(ii) Pour $0 \leq r \leq q-1$, notons $\widehat{K}_{n,r} := \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \widehat{K}^I_{n,r}$.

(iii) Notons

$$K_{n,r} := \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} (\operatorname{sgn} I) K^I_{n,r}$$
$$\overline{\partial}_z K_{n,r} := \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} (\operatorname{sgn} I) \overline{\partial}_z K_{n,r} \text{ et } \overline{\partial}_\xi K_{n,r} := \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} (\operatorname{sgn} I) \overline{\partial}_z K_{n,r}.$$

3.3.12. LEMME. — *$\overline{\partial}_\xi K_{n,r}(z,\xi) = -\overline{\partial}_z K_{n,r-1}(z,\xi)$ pour tout $z,\xi \in M_0$ avec $z \neq \xi$ et pour tout $0 \leq r \leq q-1$.*

Preuve. — D'après (3.11) et la définition de $K_{n,r}$ on a

$$\overline{\partial}_\xi K_{n,r}(z,\xi) = -\overline{\partial}_z K_{n,r-1}(z,\xi) + \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} (\operatorname{sgn} I) B^I_{n,r}$$

et il est clair d'après la définition de $B^I_{n,r}$ (voir 3.2.2) que $\sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} (\operatorname{sgn} I) B^I_{n,r} = 0$. ∎

3.3.13. LEMME. — *Soit $f \in [\mathcal{C}^1_{n,r}(M_0)]_0$ avec $0 \leq r \leq q-1$, alors l'égalité suivante est vraie sur M :*

$$f = (-1)^{(n+r)(k+1)} \Big(d\widehat{K}_{n,r-1} f + (-1)^{k+1} \widehat{K}_{n,r} df \Big) \tag{3.40}$$

Preuve. — (3.40) résulte de (3.39) pour $\ell = k$ et du fait que pour $I \in \mathcal{I}'(k)$ $f_{|S_I} = \chi_\varepsilon \tilde{f}_{|S_I}$ pour tout $\varepsilon > 0$, où $\tilde{f}$ est un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ de f au voisinage de M_0. ∎

Remarque. — Il est clair, d'après la définition de $\widehat{K}^I_{n,r}$ et l'orientation choisie pour M_0 (voir 3.0.11), que

$$\widehat{K}^I_{n,r} f = (\operatorname{sgn} I) \int_{M_0} f(\xi) \wedge K^I_{n,r}(z,\xi) \quad \text{pour tout } I \in \mathcal{I}'(k).$$

3.3.14. THÉORÈME. — *Soit $\Omega \subset\subset M_0$ un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si $f \in \mathcal{C}^1_{n,r}(\overline{\Omega})$, $0 \leq r \leq q-1$ alors au sens des courants, on a l'égalité suivante sur Ω :*

$$(-1)^{(n+r+1)(k+1)} f(z) = -\int_{\xi \in b\Omega} f(\xi) \wedge K_{n,r}(z,\xi) + \int_{\xi \in \Omega} df(\xi) \wedge K_{n,r}(z,\xi) + \\ + (-1)^{(k+1)} d \int_\Omega f(\xi) \wedge K_{n,r-1}(z,\xi).$$

Preuve. — Soient $\varphi \in [\mathcal{C}^\infty_{0,n-k-r}(\Omega)]_0$ et χ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact dans Ω et telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} \varphi$. Pour tout $z \in \operatorname{supp} \varphi$, $(1-\chi) f \wedge K_{n,r}(z,\cdot)$ et $d((1-\chi) f \wedge K_{n,r}(z,\cdot))$ sont continues sur $\overline{\Omega}$

$$d((1-\chi) f \wedge K_{n,r}(z,\cdot)) = df \wedge K_{n,r}(z,\cdot) - d(\chi f) \wedge K_{n,r}(z,\cdot) + \\ + (-1)^{n+r} (1-\chi) f \wedge \overline{\partial}_\xi K_{n,r}(z,\xi)$$

or d'après le lemme 3.3.12 on a $\overline{\partial}_\xi K_{n,r}(z,\xi) = -\overline{\partial}_z K_{n,r-1}(z,\xi)$ et comme $K_{n,r-1}(z,\xi)$ est de type $(n, r-1)$ en z on a $\overline{\partial}_\xi K_{n,r}(z,\xi) = -d_z K_{n,r-1}(z,\xi)$ et par suite

$$
\begin{aligned}
&d((1-\chi)f \wedge K_{n,r}(z,\cdot)) = \\
&\qquad df \wedge K_{n,r}(z,\cdot) - d(\chi f) \wedge K_{n,r}(z,\cdot) - d_z((1-\chi)f \wedge K_{n,r-1}(z,\cdot)).
\end{aligned}
$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Stokes (noter que $1-\chi \equiv 1$ sur $b\Omega$). ■

3.3.15. DÉFINITION. — Soit $n-k-q \leq r \leq n-k$, pour chaque $I \in \mathcal{I}'(k)$ soit $K_r^I(z,\xi)$ la forme définie sur $\overline{D}_I^* \times \overline{D}_I \setminus \{z=\xi\}$ telle que $K^I_{n,n-k-1-r}(z,\xi) = K_r^I(z,\xi) \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$. Pour $z, \xi \in M_0$ avec $z \neq \xi$ on définit

$$K_{n,r}(z,\xi) = d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n \wedge \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} (\mathrm{sgn}\, I) K_r^I(z,\xi) := d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n \wedge K_r(z,\xi).$$

De ce fait $K_{n,r}(z,\xi)$ est continue sur $M_0 \times M_0 \setminus \{z=\xi\}$ et vérifie une estimation de type (3.1) avec $m=k$. Il est alors facile (voir (3.17)) de montrer que l'application $f \to \int_{z \in M_0} f(z) \wedge K_{n,r}(z,\xi)$ est bien définie comme un opérateur linéaire continu de $L_*^\infty(M_0)$ dans $\mathcal{C}^0_{n,r}(M_0)$. Notons

$$\overline{\partial}_z K_{n,r}(z,\xi) := d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n \wedge \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} (\mathrm{sgn}\, I) \overline{\partial}_z K_r^I(z,\xi)$$

et

$$\overline{\partial}_\xi K_{n,r}(z,\xi) := d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n \wedge \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} (\mathrm{sgn}\, I) \overline{\partial}_\xi K_r^I(z,\xi).$$

Alors $\overline{\partial}_z K_{n,r}(z,\xi)$ et $\overline{\partial}_\xi K_{n,r}(z,\xi)$ sont continues sur $M_0 \times M_0 \setminus \{z=\xi\}$ et le lemme suivant se montre de la même façon que le lemme 3.3.12.

3.3.16. LEMME. — *Soit $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, alors*

$$\overline{\partial}_\xi K_{n,r-1}(z,\xi) = -\overline{\partial}_z K_{n,r}(z,\xi) \quad \textit{pour} \quad z \neq \xi.$$

3.3.17. THÉORÈME. — *Soit $\Omega \subset\subset M_0$ un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si $f \in \mathcal{C}^0_{n,r}(\overline{\Omega})$ avec $df \in \mathcal{C}^0_{n,r+1}(\overline{\Omega})$, $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$. Alors, au sens des courants l'égalité suivante est vraie sur Ω :*

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n(k+1)} f(\xi) = -\int_{b\Omega} K_{n,r}(z,\xi) \wedge f(z) + (-1)^{n-r} \int_\Omega K_{n,r}(z,\xi) \wedge df(z) \\
+ (-1)^{n-k-r} d \int_\Omega K_{n,r-1}(z,\xi) \wedge f(z).
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Preuve. — Le théorème 3.3.17 résulte du théorème 3.3.14 par dualité. ■

Remarque. — Rappelons que d'après la convention (3.7) $K_{n,-1} = 0$ et donc d'après la définition 3.3.15. $K_{n,n-k} = 0$.

4. Applications

Soit M une sous-variété CR générique, q-concave de classe $\mathcal{C}^2$ et de codimension k dans $\mathbb{C}^n$. Dans ce paragraphe, nous allons donner deux applications importantes des résultats obtenus dans les paragraphes précédents (pour d'autres applications voir [Ba2]) : il s'agit de la régularité des solutions du $\overline{\partial}_b$ pour le bidegré $(0,q)$ (cas où on ne peut pas résoudre en général cf. [A/F/N]) et du phénomène de Hartogs-Bochner dans M.

4.1. Régularité des solutions du $\overline{\partial}_b$.

Soient $z^0 \in M$ et M_0 un voisinage de z^0 tel qu'il a été défini dans 3.0.2 (les théorèmes 3.3.14 et 3.3.17 y sont valables).

Soient $0 \leq r \leq n-k$ et f une $(n, r+1)$-forme bornée sur M_0, posons

$$K_{M_0}f(z) := \int_{\xi\in M_0} f(\xi)\wedge K_{n,r}(z,\xi) \text{ si } 0\leq r\leq q-1$$

et

$$K_{M_0}f(\xi) := \int_{z\in M_0} f(z)\wedge K_{n,r}(z,\xi) \text{ si } n-k-q\leq r\leq n-k.$$

4.1.1. LEMME.

(i) Pour $0 \leq r \leq q-1, K_{M_0}f \in \bigcap_{0<\varepsilon\leq 1/2^k} \mathcal{C}^{1/2^k-\varepsilon}(M_0)$.

(ii) Pour $n-k-q \leq r \leq n-k K_{M_0}f \in \bigcap_{0<\varepsilon\leq 1/2} \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(M_0)$.

Preuve. — Ce lemme résulte de (3.6), (3.1), (3.3) et (3.4). ∎

4.1.2. Remarque. — En supposant M de classe $\mathcal{C}^3$ et en utilisant des formules d'homotopie pour $\overline{\partial}$ sur des domaines $q+k-1$-concaves spéciaux (cf. [Ba3]), vérifiant des estimations analogues à celles du théorème 2.1. On peut construire comme dans le paragraphe 3 des noyaux $\mathcal{K}_{n,r}(\xi, z)$ pour $0 \leq r \leq q-1$ définis et continus sur $M_0\times M_0\setminus\{z=\xi\}$ où M_0 est un petit voisinage d'un point z^0 dans M, de bidegré (n,r) en z et $(0, n-k-1-r)$ en ξ et vérifiant les estimations (3.1), (3.3), (3.4) (pour $m = |I| = k$) et le théorème 3.3.14.

En notant pour une $(n, r+1)$ forme bornée f, $(0 \leq r \leq q-1)$,

$$\mathcal{K}_{M_0} f(z) := \int_{\xi \in M_0} f(\xi) \wedge \mathcal{K}_{n,r}(\xi, z)$$

on obtient le résultat suivant :

$$\mathcal{K}_{M_0} f \in \bigcap_{0<\varepsilon \leq 1/2} \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}(M_0).$$

Du lemme 4.1.1, de la remarque 4.1.2 et du théorème 3.3.14, nous déduisons le théorème suivant dont la démonstration est analogue au théorème 1.1 de [Ba1] (cf. [Ba2]).

4.1.3. THÉORÈME. — *Soit M une sous-variété CR générique q-concave, de classe $\mathcal{C}^2$ (resp. $\mathcal{C}^3$) et de codimension k dans une variété analytique complexe de dimension n.*

(i) Si $q = 1$ et si T est une distribution d'ordre 0 sur M telle que $\overline{\partial}_M T$ soit défini par une 1-forme continue sur M, alors T est définie par une fonction qui est localement $(1/2^k - \varepsilon)$-höldérienne (resp. $(1/2 - \varepsilon)$-höldérienne) pour tout ε strictement positif.

(ii) Soit $z^0 \in M$ alors il existe un voisinage $M_0 \subset M$ de z^0 tel que, pour toute forme $f \in \mathcal{C}^0_{0,q}(M_0)$, si un courant T d'ordre 0, de bidegré $(0, q-1)$ et à support compact dans M_0 vérifie $\overline{\partial}_M T = \langle f \rangle$ alors il existe un courant S d'ordre 0 et de bidegré $(0, q-2)$ tel que $T - \overline{\partial}_M S$ soit défini par une forme $(1/2^k - \varepsilon)$-höldérienne (resp. $(1/2 - \varepsilon)$-höldérienne) pour tout ε strictement positif.

4.2. Phénomène de Hartogs-Bochner dans les variétés CR, 1-concaves.

Dans cette section nous supposons que M est 1-concave. En utilisant les propriétés des noyaux $K_{n,r}(z, \xi)$ et $\mathcal{K}_{n,r}(\xi, z)$ (cf. la remarque 4.1.2) nous montrons (voir [Ba1] et [Ba2]) le théorème suivant :

4.2.1. THÉORÈME. — *Soit M une sous-variété CR générique de classe $\mathcal{C}^2$ (resp. $\mathcal{C}^3$) et de codimension k dans une variété analytique complexe de dimension n et vérifiant la propriété suivante :*

$(*)$ $\left\{ \text{\textit{Pour tout $(0,1)$-courant T d'ordre nul sur M, $\overline{\partial}_M$-fermé et à support compact dans M, il existe une mesure S à support compact dans M telle que $\overline{\partial}_M S = T$.}} \right.$

Soit D un domaine relativement compact dans M tel que ∂D soit de classe $\mathcal{C}^2$ et $M \setminus \overline{D}$ soit connexe et soit f une fonction continue et CR sur ∂D (voir 1.5).

Alors il existe une fonction F continue sur $\overline{D}$, CR sur D et telle que $F_{|\partial D} = f$, dans les deux cas suivants :

1) f est α-höldérienne pour $0 < \alpha \leq 1$, et dans ce cas F sera $(\alpha/2^k - \varepsilon)$-höldérienne (resp. $(\alpha/2 - \varepsilon)$-höldérienne) sur $\overline{D}$ pour tout ε strictement positive ;

2) $\lim_{r \to 0} \omega(r) |\ell n r|^{k(k+5)/2} = 0$ où ω est le module de continuité de f sur ∂D.

Bibliographie

[Ai/He] AIRAPETJAN R.A., HENKIN G.M. — *Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-function*, Russian Math. Survey **39** (1984), 41–118.

[A/F/N] ANDREOTTI A., FREDRICKS G., NACINOVICH M. — *On the absence of Poincaré lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. IV, Ser.8 , n^o**3** (1981), 365–404.

[Ba1] BARKATOU M.Y. — *Régularité höldérienne du $\overline{\partial}_b$ sur les hypersurfaces 1-convexes-concaves*, à paraître au Math. Zeitschrift.

[Ba2] BARKATOU M.Y. — *Thèse, Grenoble*, 1994.

[Ba3] BARKATOU M.Y. — *Formules d'homotopie dans des petits anneaux q-concaves*, à paraître.

[Fi/Le] FISCHER B., LEITERER J. — *A local Martinelli-Bochner formula on hypersurfaces*, Math. Zeitschrift **214** (1993), 659–681.

[He2] HENKIN G.M. — *The Hartogs-Bochner effect on CR manifolds*, Soviet. Math. Dokl. **29** (1984), 78–82.

[He/Le1] HENKIN G.M., LEITERER J. — *Theory of functions on complex manifolds*, Birkhäuser Verlag, 1984.

[He/Le2] HENKIN G.M., LEITERER J. — *Andreotti-Grauert theory by integral formulas*, Birkhäuser Verlag, 1988.

[La/Le1] LAURENT-THIEBAUT C., LEITERER J. — *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann equation on q-convex wedges*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43,**(2) (1993), 383–436.

[L-T1] LAURENT-THIEBAUT C. — *Résolution du $\overline{\partial}_b$ à support compact et phénomène de Hartogs-Bochner dans les variétés CR*, Proc. of Symp. in Pure Math. **52** (1991), 239–249.

[Ra] RANGE R.M. — *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Graduate Texts in Math. **108**, Springer-Verlag, 1986.

– ◇ –

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

(8 mars 1995)