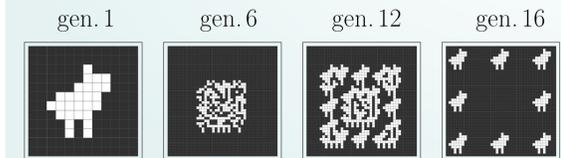


LE COMPTEUR DE PARITÉ DE FREDKIN

Le compteur de parité, inventé par Edward Fredkin en 1961, est un automate cellulaire dont la loi d'évolution est une des plus simples qui puisse être et dont le comportement global, tout en étant tout le contraire d'un phénomène émergent (comme l'est le jeu de la vie), révèle une propriété apparemment inattendue : décupler de façon périodique n'importe quel motif.

La règle est la suivante : Si le voisinage d'une cellule (les huit cellules adjacentes) contient un nombre impair de cellules actives, celle-ci sera active à la génération suivante. Dans le cas contraire elle sera inactive.



Les automates cellulaires basés sur des règles du type "Jeu de la Vie" (automate en grille,

deux états, voisinage de contact direct) peuvent prendre des comportements très divers. Ils se révèlent, suivant les cas soit stables, soit un nombre supérieur d'états et pour n'importe quel voisinage. chaotiques, explosifs, et même émergents (Jeu de la Vie). Ils peuvent aussi se montrer ordonnés et reproductifs (compteur de parité) illustrant une fois de plus les rapports complexes qu'il peut y avoir entre le comportement d'un système multi-agents et les lois élémentaires le régissant : la moindre modification dans ces lois peut changer du tout au tout ce comportement.

Mais contrairement au Jeu de la Vie (dont on ne peut anticiper ni expliquer rationnellement le comportement), cette propriété du compteur de parité s'explique parfaitement : il s'agit en fait d'un simple phénomène arithmétique qui peut être généralisé avec un nombre supérieur d'états et pour n'importe quel voisinage.

LE COMPTEUR DE FREDKIN GÉNÉRALISÉ

La règle du modulo :

Lorsque je fais "n modulo p", je fais la division euclidienne de n par p (division avec reste), et je garde le reste. On obtient ainsi un chiffre entre 0 et $p - 1$. Par exemple $13 \text{ modulo } 5 = 3$ ($13 = 5 \times 2 + 3$).

Les nouvelles conditions :

1. Les cellules peuvent avoir un nombre multiple d'états (ici par exemple des couleurs). Seulement ce nombre doit être **un nombre premier** (2, 3, 5, 7, 11, etc...)! Dans le cas du compteur de parité d'origine ce nombre premier est 2. Si ce nombre premier est p nous numérotons les états en leur associant un chiffre entre 0 et $p - 1$. Par exemple si $p = 7$, nous numérotons les états de 0 à 6.
2. Tous les voisinages sont valables (nous ne sommes plus obligés de prendre seulement en compte les 8 cellules adjacentes), il peut même y avoir absence de contact.

La règle du compteur de Fredkin généralisé est comme suit : Pour un nombre d'états p (premier), chaque cellule de la grille prend à la génération suivante l'état correspondant (au regard de la numérotation) à la somme modulo p des chiffres associés aux cellules de son voisinage.

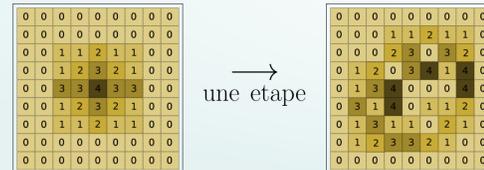
Résultat :

Une figure donnée à p couleurs, s'insérant dans un carré de taille p^n pixels en p^n étapes, selon la configuration opposée du voisinage.

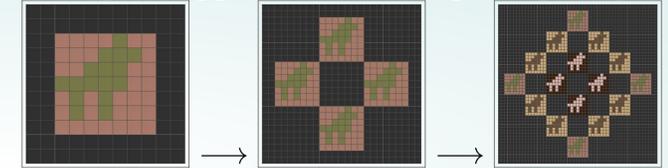
ILLUSTRATIONS

Exemple d'application du compteur pour $p = 5$:

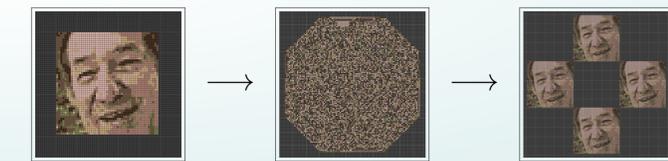
Le voisinage de la cellule bleue : les cellules rouges



Exemple d'application du compteur pour $p = 7$:



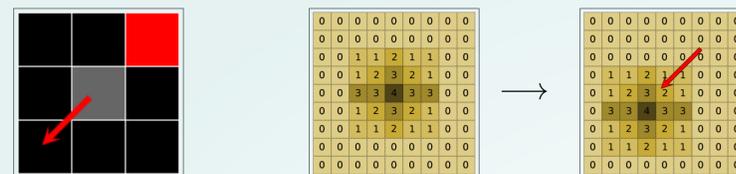
Autre exemple toujours avec $p = 7$:



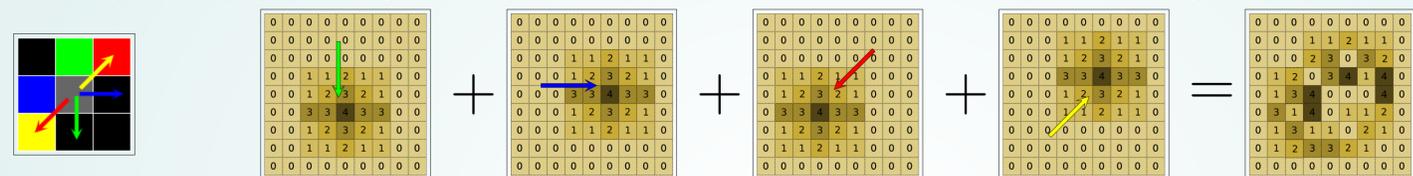
BRÈVE EXPLICATION DU PHÉNOMÈNE

LES IMAGES SE MÈLENT...

Un seul élément de voisinage : la figure subit une translation dans le sens opposé à la direction de cet élément de voisinage



Voisinage multiple : les images sont décuplées, déplacées selon chaque élément de son voisinage et enfin superposées modulo 5



LES CHEMINS SE REJOIGNENT...

Ainsi, au fur et à mesure des générations successives, les images se décuplent, se déplacent (et se superposent) selon tous les chemins qui peuvent être composés avec les directions de base données par le voisinage (flèches colorées). Or, plusieurs chemins peuvent aboutir au même point amenant ainsi des images à se superposer exactement.

Deux chemins :



EN UN MIRACLE ARITHMÉTIQUE

Lorsque le nombre de couleurs est premier, au bout de p générations l'ensemble des chemins peut se répartir ainsi :

1. Les chemins ayant suivi une direction unique (en ligne droite) : aucun autre chemin ne les rattrape.
2. Les chemins n'ayant pas suivi une direction unique : le nombre de chemins aboutissant au même endroit est un multiple p. Ainsi, le nombre de copies de l'image d'origine exactement superposées entre elles est un multiple de p et l'image disparaît en cet endroit.

De ce fait toutes les images disparaissent sauf celles s'étant "déplacées" selon une direction unique. Si ces dernières sont assez éloignées pour ne pas se superposer, on observe le phénomène de réplication de l'image.