Noyaux adaptés aux variétés CR et estimations pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel

Christine LAURENT-THIÉBAUT

Prépublication de l'Institut Fourier n° 704 (2007)

`http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

Résumé

Il s'agit d'un article de synthèse sur l'existence de solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel dans les variétés CR et les estimations $\mathcal{C}^k$ et L^p associées.

Mots-clés : variétés CR, équation de Cauchy-Riemann tangentielle, représentation intégrale, q-convexité.

Abstract

This is a survey paper on the existence of fundamental solutions for the tangential Cauchy-Riemann operator and the associated $\mathcal{C}^k$ and L^p estimates.

Keywords: CR manifolds, tangential Cauchy-Riemann equation, integral representation, q-convexity.

2000 Mathematics Subject Classification : 32V20, 32F10.

Dans cet article on s'intéresse à l'existence et à la construction de solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel dans les sous-variétés CR génériques de $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'à la résolubilité locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle avec estimations $\mathcal{C}^k$ et L^p.

Soit M une sous-variété CR générique, de codimension réelle k de $\mathbb{C}^n$ et z_0 un point de M. On dira qu'un noyau K_M est une solution fondamentale pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r, $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$, dans un voisinage U_{z_0} de z_0 dans M si K_M est une forme différentielle de degré $2n-k-1$ continue sur $U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$, où $\Delta(U_{z_0}) = \{(z,\zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \mid z = \zeta\}$ désigne la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$, qui vérifie au sens des courants

$$\overline{\partial}_{b,z}[K_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_{b,\zeta}[K_M]_{p,r} = [\Delta(U_{z_0})],$$

$[K_M]_{p,r}$ étant la composante de bidegré (p,r) en z de K_M, $0 \leq p \leq n$ et $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$ et $[\Delta(U_{z_0})]$ le courant d'intégration sur la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$.

L'existence d'une solution fondamentale en degré r au voisinage d'un point de M implique la validité du Lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ en degré r au voisinage de ce point. Si M est une hypersurface, on sait par les travaux de Kohn, qu'une condition suffisante pour la validité du Lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ en degré r au voisinage d'un point est que M satisfasse la condition $Y(r)$ en ce point. Dans le cas où M est une sous-variété CR générique de codimension réelle k, $k \geq 1$, Henkin [11] a prouvé que, si M est $\min(n-k-r+1, r+1)$-concave en un point de M, le Lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ est valide en degré r. On se limitera donc dans cet article au cas de variétés CR génériques q-concaves ou d'hypersurfaces vérifiant la condition $Y(q)$.

Les premières solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel ont été définies vers 1975, dans le cas où M est le bord d'un domaine strictement strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, dans des travaux de Romanov [17], Henkin [10] et Skoda [22]. Des estimations L^p et hölderiennes y sont également prouvées. Les noyaux construits indépendamment par Henkin et Skoda ont été repris par Boggess dans son livre [5] en utilisant le formalisme de Harvey et Polking ; il prouve des estimations $\mathcal{C}^l$ pour les opérateurs intégraux associés à ces noyaux. Ensuite Harvey et Polking ont considéré dans [9] le cas des hypersurfaces faiblement pseudoconvexes possédant une fonction support birégulière.

Lorsque M est une hypersurface vérifiant la condition $Y(q)$ de Kohn, les premières solutions fondamentales ont été données par Boggess et Shaw [6] en 1985. En 1992, Fischer et Leiterer [8] ont prouvé une formule de Bochner-Martinelli-Koppelman (ce qui est équivalent à l'existence d'une solution fondamentale) pour les hypersurfaces de classe $\mathcal{C}^2$ dont la forme de Levi possède q paires de valeurs propres de signes opposés, ainsi que des estimations uniformes. Dans [3], Barkatou a amélioré leurs résultats en prouvant des estimations $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, pour les mêmes noyaux. Finalement Fischer [7] a construit de nouveaux noyaux permettant d'obtenir les estimations optimales $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}$ dans ce cadre. Notons également le travail [20] de Shaw qui étend les résultats de Henkin aux hypersurfaces satisfaisant la condition $Y(q)$ et construit une solution fondamentale pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M.

Les premiers résultats sur la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle dans les variétés CR q-concaves sont annoncés par Henkin dans [11], puis développés dans [1]. Dans sa thèse [2], Barkatou a étendu les résultats de son article [3] au cas des variétés

CR q-concaves, obtenant ainsi une solution fondamentale avec des estimations $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ sur M. Cette solution fondamentale est construite par itération de la résolution du $\overline{\partial}$ dans des domaines à coins q-convexe attachés à la variété M. Finalement une solution fondamentale donnant les estimations $\mathcal{C}^k$ optimales est exhibée dans [4].

Les notations et la situation géométriques sont précisées dans la section 1 de cet article. Dans la section 2, nous présentons, en suivant les idées de [4], une méthode abstraite de construction de solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel dans les sous-variétés CR génériques de $\mathbb{C}^n$. Nous concrétisons cette construction dans la section 3 pour les variétés q-concaves et les hypersurfaces réelles qui vérifient la condition $Y(q)$ et nous donnons des estimations $\mathcal{C}^k$ et L^p pour les opérateurs intégraux associés. La section 4 est consacrée à la résolubilité locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle avec des estimations L^p et hölreriennes jusqu'au bord.

1 Situation géométrique et notations

Soit M une sous-variété différentiable de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{C}^n$ de codimension réelle k, $1 \leq k \leq n$, définie par

$$M = \{z \in \omega | \widehat{\rho}_1(z) = \cdots = \widehat{\rho}_k(z) = 0\},$$

où ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur ω à valeurs réelles qui vérifient $d\widehat{\rho}_1(z) \wedge \cdots \wedge d\widehat{\rho}_k(z) \neq 0$ pour tout $z \in M$.

On note $T_z^{\mathbb{C}}M$ l'espace tangent complexe à M au point $z \in M$. On a

$$T_z^{\mathbb{C}}M = \{\xi \in \mathbb{C}^n | \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widehat{\rho}_\nu}{\partial z_j}(z)\xi_j = 0, \nu = 1, \ldots, k\}.$$

On suppose que M est *Cauchy-Riemann (CR) générique*, c'est-à-dire que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}M = n - k$$

pour tout $z \in M$, ce qui équivaut à

$$\overline{\partial}\widehat{\rho}_1(z) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\widehat{\rho}_k(z) \neq 0$$

pout tout $z \in M$.

On suppose également que M n'est pas totalement réelle, i.e. $k < n$, et que M satisfait les conditions suffisantes introduites par Kohn et Henkin pour la résolubilité locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle, c'est-à-dire la condition $Y(q)$ pour les hypersurfaces et la q-concavité en codimension quelconque.

Définition 1.1. Une variété CR générique M de codimension réelle $k \geq 1$ est *q-concave* sur un voisinage U_{z_0} de $z_0 \in M$, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$, si pour tout $z \in U_{z_0}$ et tout $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ la forme hermitienne sur $T_z^{\mathbb{C}}M$, $\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \widehat{\rho}_x}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta} \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta$, où $\widehat{\rho}_x = x_1\widehat{\rho}_1 + \cdots + x_k\widehat{\rho}_k$, possède au moins q valeurs propres strictement négatives.

Définition 1.2. Une hypersurface réelle orientée M de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, satisfait la condition $Y(q)$ sur un voisinage U_{z_0} de $z_0 \in M$, $1 \leq q \leq n-1$, si la forme de Levi de M possède en chaque point de U_{z_0} au moins $\min(n-q, q+1)$ paires de valeurs propres de signe contraire (i.e. M est $\min(n-q, q+1)$-concave) ou si la forme de Levi de M possède en chaque point de U_{z_0} au moins $\max(n-q, q+1)$ valeurs propres de même signe.

Par exemple une hypersurface strictement pseudoconvexe satisfait la condition $Y(q)$ pour $1 \leq q \leq n-2$.

Remarquons que, pour les hypersurfaces, la notion de q-concavité correspond à la première alternative de la condition $Y(q-1)$.

Si M est une hypersurface qui satisfait la seconde partie de la condition $Y(q)$ et si $\hat\rho$ est une fonction définissante pour M sur ω dont la forme de Levi restreinte à l'espace tangent complexe à M possède en chaque point de $\omega \cap M$ au moins $\max(n-q, q+1)$ valeurs propres strictement positives, en posant $\rho = -e^{C\hat\rho} + 1$, on obtient une nouvelle fonction définissante pour M sur ω dont la forme de Levi possède $\max(n-q, q+1) + 1$ valeurs propres strictement positives sur $U \subset\subset \omega$, si C est une constante positive suffisamment grande.

Si M est q-concave sur ω, d'après le Lemme 3.1.1 de [1], pour $j = 1, \dots, k$, les fonctions

$$\rho_j = \widehat{\rho}_j + C \sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\rho}_\nu^2$$

$$\rho_{-j} = -\widehat{\rho}_j + C \sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\rho}_\nu^2.$$

possèdent la propriété suivante :

pour tout $I \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \Delta_I$ la forme de Levi de la fonction $\rho_\lambda = \lambda_{i_1}\rho_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{|I|}}\rho_{i_{|I|}}$ admet au moins $q+k$ valeurs propres strictement positives sur $U \subset\subset \omega$,

si C est une constante positive suffisamment grande et si $\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des parties $I \subset \{\pm 1, \dots, \pm k\}$ telles que $|i| \neq |j|$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, $|I|$ le nombre d'éléments de I et Δ_I le simplexe des suites $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ des nombres réels $\lambda_j \in [0,1]$ tels que $\lambda_j = 0$ si $j \notin I$ et $\sum \lambda_j = 1$.

On note $\mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, l'ensemble de tous les $I \in \mathcal{I}$ tels que $|I| = l$. On ordonne $I \in \mathcal{I}$ par le module de ses éléments et on note $\mathcal{I}'(l)$, $1 \leq l \leq k$, l'ensemble des multi-indices de longueur l tels que si $I = (i_1, \dots, i_l)$ alors $|i_\nu| = \nu$ pour $\nu = 1, \dots, l$. Si $I \in \mathcal{I}$ et $\nu \in \{1, \dots, |I|\}$, on pose $I(\widehat{\nu}) = I \setminus \{i_\nu\}$, où i_ν est le ν-ième élément de I après avoir ordonné I.

Finalement on pose

sgn$I = 1$ si le nombre d'éléments négatifs est pair

sgn$I = -1$ si le nombre d'éléments négatifs est impair.

Soient $I = (i_1, \dots, i_l)$ un multi-indice de $\mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, et D un domaine relativement compact dans U. On définit

$$\begin{aligned}
&D_I = \{\rho_{i_1} < 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{i_{|I|}} < 0\} \cap D\\
&D_I^* = \{\rho_{i_1} > 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{i_{|I|}} > 0\} \cap D\\
&S_I = \{\rho_{i_1} = 0 = \cdots = \rho_{i_{|I|}} = 0\} \cap D\\
&S_{\{j\}}^+ = \overline{D}_{\{j\}} \quad \text{pour} \quad j = \pm 1, \ldots, \pm k\\
&S_I^+ = S_{I(\widehat{|I|})} \cap \overline{D}_{\{i_{|I|}\}} \quad \text{si} \quad I \in \mathcal{I} \quad \text{and} \quad |I| \geq 2\\
&\widetilde{S}_I = S_I \cap \{\rho_{|I|+1} > 0\} \cap \{\rho_{-(|I|+1)} > 0\} \quad \text{si} \quad 1 \leq |I| \leq k-1
\end{aligned}$$

Notons que

$$S_I = S_{I(|I|+1)}^+ \cup S_{I(-(|I|+1))}^+ \cup \widetilde{S}_I$$

et que $\widetilde{S}_I = \emptyset$ si $|I| = k-1$. Ces variétés sont orientées comme suit : D_I et D_I^* comme $\mathbb{C}^n$ pour tout $I \in \mathcal{I}$, $S_{\{j\}}^+$ comme $D_{\{j\}}$ pour $j = \pm 1, \ldots, \pm k$, S_I comme ∂S_I^+ pour tout $I \in \mathcal{I}$, S_I^+ comme $S_{I(\widehat{|I|})}$ pour tout $I \in \mathcal{I}$ si $|I| \geq 2$ et $M \cap D$ comme S_I si $I = \{1, \ldots, k\}$.

On étend les définitions précédentes au cas où $|I| = 0$, c'est-à-dire $I = \emptyset$, en posant $S_\emptyset = D$ et $\widetilde{S}_\emptyset = S_\emptyset \cap \{\rho_1 > 0\} \cap \{\rho_{-1} > 0\}$.

Si f est une fonction définie sur un ouvert Ω de M, on définit la norme hölderienne d'ordre α, $0 < \alpha < 1$ de f par

$$\|f\|_{\alpha,\Omega} = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| + \sup_{\substack{z,\zeta\in\Omega\\ z\neq\zeta}} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{|z-\zeta|^\alpha}.$$

Si M est de classe $\mathcal{C}^l$, on note $\mathcal{C}^{l+\alpha}(\Omega)$ l'espace de Fréchet des fonctions de classe $\mathcal{C}^l$ sur Ω dont toutes les dérivées tangentielles d'ordre l sont localement hölderiennes d'ordre α. Pour tout compact K de Ω, le maximum de la borne supérieure sur K des dérivées tangentielles d'ordre inférieur à l et de la norme hölderienne d'ordre α des dérivées tangentielles d'ordre l définit une semi-norme sur $\mathcal{C}^{l+\alpha}(\Omega)$.

Si f est une (n,r)-forme différentielle sur $\Omega \subset\subset M$, elle s'écrit $f = \sum_J f_J dz \wedge d\overline{z}_J$ avec $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ et $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_r}$, car M est plongée dans $\mathbb{C}^n$. La norme de f est alors donnée par le maximum des normes des f_J.

2 Formule de Bochner-Martinelli-Koppelman pour les variétés CR

L'objet de cette section est de montrer qu'une famille de noyaux satisfaisant une équation aux dérivées partielles adéquate et possédant de bonnes propriétés d'intégrabilité permet d'obtenir une formule de Bochner-Martinelli-Koppelman dans les variétés CR de codimension quelconque.

Nous nous plaçons dans la situation géométrique de la section 1.

Pour $I \in \mathcal{I}$, $0I$ désigne le multi-indice $(0, i_1, \ldots, i_{|I|})$, où $I = (i_1, \ldots, i_{|I|})$ est ordonné en module croissant.

Lorsque $I = \emptyset$, ce qui correspond à un multi-indice I de longueur nulle, on pose $C_0(z,\zeta) = B(z,\zeta)$, où $B(z,\zeta)$ désigne un noyau dans $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire une forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de degré $2n-1$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid z = \zeta\}$.

On suppose que l'on sait associer à chaque multi-indice ordonné $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, des formes différentielles $C_{0I}(z,\zeta)$ de degré $2n - |I| - 1$ et $C_I(z,\zeta)$ de degré $2n - |I|$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$ et $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_z C_{0I} + \overline{\partial}_\zeta C_{0I} = C_{0\delta(I)} - C_I, \tag{2.1}$$

où $C_{0\delta(I)} = \sum_{\nu=1}^{|I|}(-1)^{\nu+1} C_{0I(\widehat{\nu})}$.

On suppose également que les noyaux C_I satisfont les conditions d'annulation suivantes :

$$[C_I(z,\zeta)]_{p,r} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k, \tag{2.2}$$

$$\overline{\partial}_z [C_I(z,\zeta)]_{p,r_0-1} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n, \tag{2.3}$$

où $[C_I(z,\zeta)]_{p,r}$ désigne la partie de bidegré (p,r) en z de C_I.

Pour alléger les écritures on pose $B_I = C_{0I}$ pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$. L'équation 2.1 s'écrit alors

$$\overline{\partial}_z B_I + \overline{\partial}_\zeta B_I = B_{\delta(I)} - C_I \tag{2.4}$$

On suppose finalement que pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, les noyaux B_I vérifient les conditions d'intégrabilité suivantes :

- pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I
- soit $j \in \{\pm 1, \ldots, \pm k\}$ tel que $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$, pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S^+_{I\cup\{j\}}} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I,
- pour $I = J$ ou $I = \delta(K)$ et $J = K(\widehat{|K|})$ avec $K \in \mathcal{I}(l+1)$, $\int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ tend vers 0, quand ε tend vers 0, si f_ε est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans $D \cap \{|\rho_1| < \varepsilon\} \cap \cdots \cap \{|\rho_k| < \varepsilon\}$ telle que $\|\overline{\partial} f_\varepsilon\| = O(\frac{1}{\varepsilon})$ et $\int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) = o(\varepsilon)$, si de plus $\overline{\partial} f_\varepsilon = 0$.

Définition 2.1. On appelle *famille de noyaux adaptés en degré* r, $r_0 \leq r \leq r_1$, à la variété CR générique M de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$, toute famille de noyaux B_I et C_I, $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, possédant les propriétés précédentes.

Le noyau $B_M = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_I$ est le noyau sur M associé à la famille de noyaux adaptés à la variété M.

Lemme 2.2. *Le noyau $B_M = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_I$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(M \cap U) \times (M \cap U) \setminus \{(z,\zeta) \in (M \cap U) \times (M \cap U) | z = \zeta\}$, de degré $2n-k-1$, tel que pour $0 \leq p \leq n$ et $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$*

$$\overline{\partial}_\zeta [B_M]_{p,r} = -\overline{\partial}_z [B_M]_{p,r-1},$$

où $[B_M]_{p,r}$ désigne la composante de bidegré (p,r) en z de B_M (on pose $[B_M]_{p,n-k} = 0$).

Démonstration. Rappelons que $B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)B_I$. La formule 2.4 donne alors immédiatement

$$\overline{\partial}_z B_M + \overline{\partial}_\zeta B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)B_{\delta(I)} - \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)C_I.$$

On sait, grâce aux propriétés d'annulation des noyaux C_I que $[C_I(z,\zeta)]_{p,r} = 0$ si $0 \le p \le n$ et $1 \le r_0 \le r \le r_1 \le n-k$, par conséquent

$$\overline{\partial}_z [B_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_\zeta [B_M]_{p,r} = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)[B_{\delta(I)}]_{p,r}.$$

De plus par définition de $\operatorname{sgn}(I)$ et $\delta(I)$, on a $\sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)[B_{\delta(I)}]_{p,r} = 0$. En effet pour un multi-indice donné $J \in \mathcal{I}(k-1)$, il existe deux multi-indices I_1 et I_2 dans $\mathcal{I}(k)$ tels que $J = I_1(\hat{\nu}) = I_2(\hat{\nu})$ qui vérifient $\operatorname{sgn}(I_1) = -\operatorname{sgn}(I_2)$ car, d'un point de vue ensembliste, si $I_1 = J \cup \{\nu\}$ alors $I_2 = J \cup \{-\nu\}$. □

La proposition suivante a été prouvée dans [4] en associant la formule de Stokes à la formule 2.1.

Proposition 2.3. *Soit f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D,$1 \le r_0 \le r \le r_1 \le n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M*

$$\begin{aligned}(-1)^{r+n}(\overline{\partial}_z \int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta) - \int_{\zeta\in D} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta))\\ = (-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}}(\overline{\partial}_b \int_{\zeta\in M} f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)\\ + (-1)^{k+1}\int_{\zeta\in M} \overline{\partial}_b f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)).\end{aligned}$$

Pour obtenir une formule d'homotopie pour les formes à support compact dans $D\cap M$, il suffit alors que le noyau initial $C_0 = B$ satisfasse

$$f(z) = (-1)^{r+n}(\overline{\partial}_z \int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta) - \int_{\zeta\in D} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)),$$

pour toute (n,r)-forme f de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D. C'est le cas par exemple si B désigne le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman dans $\mathbb{C}^n$.

Corollaire 2.4. *Si le terme initial $C_0 = B$ d'une famille de noyaux adaptés à la variété M en degré r, $1 \le r_0 \le r \le r_1 \le n-k$ au voisinage d'un point z_0 de M est une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann dans $\mathbb{C}^n$, alors le noyau associé $B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)B_I$ est une solution fondamentale en degré r, $1 \le r_0 \le r \le r_1 \le n-k$, de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur le voisinage $U_{z_0} = U \cap M$ de z_0.*

Plus précisément B_M est une forme différentielle définie sur $U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$, où $\Delta(U_{z_0}) = \{(z,\zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \mid z = \zeta\}$ désigne la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$, qui vérifie au sens des courants

$$\overline{\partial}_{b,z}[B_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_{b,\zeta}[B_M]_{p,r} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}[\Delta(U_{z_0})], \tag{2.5}$$

si $[B_M]_{p,r}$ désigne la composante de bidegré (p,r) en z de B_M, $0 \le p \le n$ et $1 \le r_0 \le r \le r_1 \le n-k$, et $[\Delta(U_{z_0})]$ le courant d'intégration sur la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$.

On en déduit aisément la formule de représentation intégrale suivante :

Théorème 2.5. *Soit Ω un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans U_{z_0} et f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{\Omega}$, $1\leq r_0\leq r\leq r_1\leq n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M*

$$\begin{aligned}(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}}f(z)&=\overline{\partial}_b\int_{\zeta\in\Omega}f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)\\&+(-1)^{k+1}\int_{\zeta\in\Omega}\overline{\partial}_bf(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)+(-1)^k\int_{\zeta\in\partial\Omega}f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta).\end{aligned}$$

On peut remarquer que la formule ci-dessus fournit une formule d'homotopie pour les formes à support compact dans U_{z_0}.

Le noyau initial B_0 utilisé pour construire la solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M n'a pas de lien direct avec la variété M. On aimerait pouvoir construire d'autres solutions fondamentales ne dépendant que de la géométrie de M dans le but d'obtenir des estimations optimales. Pour cela nous allons considérer séparément le cas des hypersurfaces et le cas de la codimension supérieure ou égale à 2.

Si M est une hypersurface, alors $\mathcal{I}'(1)$ possède deux éléments $I_1=(+1)$ et $I_2=(-1)$. On considére les deux multi-indices $J_1=I_1I_2=(+1,-1)$ et $J_2=I_2I_1=(-1,+1)$ et on suppose que l'on sait associer à chacun d'eux des formes différentielles $C_{0J_i}(z,\zeta)$ de degré $2n-3$ et $C_{J_i}(z,\zeta)$ de degré $2n-2$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z\in M$ et $\zeta\in M$ tels que $z\neq\zeta$, $i=1,2$, qui satisfont $C_{J_1}=-C_{J_2}$ et qui vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_{b,z}C_{0J_1}+\overline{\partial}_{b,\zeta}C_{0J_1}&=-C_{0I_1}+C_{0I_2}-C_{J_1},\\\overline{\partial}_{b,z}C_{0J_2}+\overline{\partial}_{b,\zeta}C_{0J_2}&=-C_{0I_2}+C_{0I_1}-C_{J_2}.\end{aligned}$$

au sens des courants sur $M\times M$. En faisant la différence de ces deux équations on obtient

$$\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)}(C_{0J_1}-C_{0J_2})=2(-B_M-C_{(+1,-1)}),$$

d'où $\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)}C_{(+1,-1)}=-\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)}B_M=[\Delta(U_{z_0})]$. Le noyau $R_M=C_{(+1,-1)}$ est donc une nouvelle solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M.

Supposons maintenant que M est de codimension k, $k\geq 2$. On note $\mathcal{I}'(l,*)$, $l\leq k$, l'ensemble des multi-indices de la forme $I*$, avec $I\in\mathcal{I}'(l)$ et on suppose que l'on sait associer à chaque multi-indice ordonné $J=I*$, $I\in\mathcal{I}'(l)$, des formes différentielles $C_{0J}(z,\zeta)$ de degré $2n-|I|-2$ et $C_J(z,\zeta)$ de degré $2n-|I|-1$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $(z,\zeta)\in M\times M$ tels que $z\neq\zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_{b,z}C_{0I*}+\overline{\partial}_{b,\zeta}C_{0I*}=(-1)^kC_{0I}+C_{0\delta(I)*}-C_{I*}.\tag{2.6}$$

On suppose de plus que ces noyaux sont suffisamment réguliers pour que l'équation (2.6) soit satisfaite au sens des courants sur $M\times M$. (Contrairement au cas des hypersurfaces, où l'indice ajouté dépendait du multi-indice I, ici l'indice * est le même pour tous les indices I, sinon l'idée de base est la même.)

On définit R_M par $R_M=\sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)C_{I*}$, il satisfait alors

$$\overline{\partial}_{b,z}(\sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)C_{0I*})+\overline{\partial}_{b,\zeta}(\sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)C_{0I*})=(-1)^kB_M-R_M\tag{2.7}$$

au sens des courants sur $U_{z_0} \times U_{z_0}$. Par conséquent si B_M est une solution fondamentale en degré r de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur un voisinage U_{z_0} de z_0, il en est de même de R_M et la formule de représentation intégrale du Théorème 2.5 est encore valable si on remplace B_M par $(-1)^k R_M$.

3 Construction de noyaux adaptés à une variété CR

Etant donnée une sous-variété CR générique M de classe $\mathcal{C}^3$, de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$ et un point z_0 de M, nous allons construire une famille de noyaux adaptés à M au sens de la Définition 2.1 au voisinage de z_0 à partir de formes de Cauchy-Fantappié.

Nous reprenons les notations de la section 1.

Définition 3.1. Une *section de Leray associée à M* sur un voisinage U de $\overline{D}$ est une application ψ qui associe à chaque multi-indice $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, une application à valeurs dans $\mathbb{C}^n$

$$\psi_I(z,\zeta,\lambda) = (\psi_I^1(z,\zeta,\lambda), \ldots, \psi_I^n(z,\zeta,\lambda))$$

définie et de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_I$, telle que

$$\langle \psi_I(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle = 1,$$

et

$$\psi_I|_{(\overline{D}_J \times \overline{D}_J^*)\setminus\{z=\zeta\}\times\Delta_I} = \psi_J|_{(\overline{D}_J \times \overline{D}_J^*)\setminus\{z=\zeta\}\times\Delta_I} \quad \text{si} \quad I \subset J.$$

Nous utiliserons des sections de Leray de la forme suivante :

$$\psi(z,\zeta,\lambda) = \frac{w(z,\zeta,\lambda)}{\langle w(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle}, \tag{3.1}$$

où w est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, et nous désignerons par $\Phi(z,\zeta,\lambda) = \langle w(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle$ le dénominateur de ψ.

Pour $\lambda \in \Delta_I$, si ρ_λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de z_0 dont la forme de Levi possède en tout point au moins s valeurs propres srtictement positives, on peut construire, à l'aide du polynôme de Levi de ρ_λ, une fonction $w(z,\zeta,\lambda)$ qui est s-holomorphe en la variable z (i.e. il existe des coordonnées holomorphes $h_1, \ldots, h_n$ au voisinage de chaque point telles que w soit holomorphe par rapport à $h_1, \ldots, h_s$) et telle que $\Phi(z,\zeta,\lambda)$ vérifie l'estimation

$$\mathrm{Re}\Phi(z,\zeta,\lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \alpha|\zeta - z|^2 \tag{3.2}$$

pour z et ζ au voisinage de z_0 avec α un réel strictement positif.

Nous considérons également la section de Bochner-Martinelli ψ_0 définie pour $z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ tels que $z \neq \zeta$ par

$$\psi_0(z,\zeta) = \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2}.$$

Le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman est alors donné par la formule

$$B(z,\zeta) == \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \langle \psi_0, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_0, d(\zeta - z)\rangle^{n-1}.$$

3.1 Cas des hypersurfaces vérifiant la condition Y(q)

Si M est une hypersurface réelle orientée de $\mathbb{C}^n$, on note $I_1 = (+1)$ et $I_2 = (-1)$ les deux éléments de $\mathcal{I}'(1)$. On définit les noyaux C_{I_i} et C_{0I_i}, $i = 1, 2$, en posant

$$C_{I_i} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \langle \psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle^{n-1},$$

$$\begin{aligned} C_{0I_i} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} &\langle \psi_0, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle \\ &\wedge \sum_{j+k=n-2} \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_0, d(\zeta - z)\rangle^j \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle^k. \end{aligned}$$

D'après [5], Chap. 20, ces noyaux vérifient

$$\overline{\partial}_z C_{0I_i} + \overline{\partial}_\zeta C_{0I_i} = B - C_{I_i},$$

ce qui correspond à l'équation (2.1). Le formalisme utilisé ici est dû à Harvey et Polking.

Il reste à choisir les sections de Leray ψ_{I_1} et ψ_{I_2} pour que les conditions d'intégrabilité et les conditions d'annulation de la section 2 soient satisfaites.

Nous allons supposer que l'hypersurface M satisfait la condition $Y(q)$ de Kohn (cf. Définition 1.2).

Supposons que la forme de Levi de M possède en chaque point de U au moins s valeurs propres de même signe. L'hypersurface M admet alors une fonction définissante ρ_+ sur U, dont la forme de Levi possède au moins $s + 1$ valeurs propres de même signe au voisinage de z_0. Notons $\psi_{I_1}(z, \zeta)$ la section de Leray du type (3.1) construite à partir du polynôme de Levi de ρ_+ et posons $\psi_{I_2}(z, \zeta) = \psi_{I_1}(\zeta, z)$. La section de Leray $\psi_{i_1}(z, \zeta)$ est alors $(s+1)$-holomorphe par rapport à la variable z et la section de Leray $\psi_{I_2}(z, \zeta)$ est $(s+1)$-holomorphe par rapport à la variable ζ. On voit alors facilement que les noyaux C_{I_i} vérifient les conditions d'annulation (2.2) avec $r_0 = n-s$ et $r_1 = s-1$. De plus l'estimation 3.2 assure que les conditions d'intégrabilité de la section 2 sont satisfaites.

Si M satisfait à la seconde partie de la condition $Y(q)$, le noyau B_M donné par $B_M = C_{0I_1} - C_{0I_2}$ est alors une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r pour $q \leq r \leq n - q - 1$, si $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$ et pour $n - q - 1 \leq r \leq q$, si $\frac{n-1}{2} \leq q \leq n - 2$ sur $U_{z_0} = U \cap M$.

Pour obtenir le noyau R_M, nous avons besoin des noyaux suivants :

$$\begin{aligned} C_{0I_1I_2} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} &\langle \psi_0, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_1}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle \\ \wedge \sum_{j+k+l=n-3} &\langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_0, d(\zeta - z)\rangle^j \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle^k \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle^l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{I_1I_2} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} &\langle \psi_{I_1}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \\ &\sum_{j+k=n-2} \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_1}, d(\zeta - z)\rangle^j \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle^k. \end{aligned}$$

D'après [5], Chap. 21, ils vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)} C_{0I_1I_2} &= -C_{0I_1} + C_{0I_2} - C_{I_1I_2},\\ \overline{\partial}_{b,(z,\zeta)} C_{0I_2I_1} &= -C_{0I_2} + C_{0I_1} - C_{I_2I_1}.\end{aligned}$$

au sens des courants sur $M \times M$.

Le noyau $R_M = C_{I_1I_2}$ est donc une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel pour les mêmes degrés que B_M, mais dont l'expression ne fait intervenir que des sections de Leray liées à M.

Dans le cas où M est le bord d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, le noyau R_M permet de construire une solution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur M.

Théorème 3.2. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^2$ et ρ une fonction définissante pour D de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que la forme de Levi de ρ possède au moins $q+1$ valeurs propres stictement positives, $q \geq \frac{n-1}{2}$ (i.e. D est strictement q-convexe au sens de Henkin-Leiterer). Si f est une (n,r)-forme continue sur ∂D, $n-q \leq r \leq q-1$ telle que $\overline{\partial}_b f = 0$, on a pour $z \in \partial D$*

$$f(z) = \overline{\partial}_b \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta).$$

Le cas $q = n-1$, qui correspond aux domaines strictement pseudoconvexes, a été étudié par Henkin [10], Romanov [17] et Skoda [22].

Supposons maintenant que la forme de Levi de M possède en chaque point de U au moins s paires de valeurs propres de signe contraire. Ce cas a été considéré par M.C. Shaw dans [21].

L'hypersurface M admet alors une fonction définissante ρ_+ sur U, dont la forme de Levi possède au moins $s+1$ valeurs propres strictement positives et une fonction définissante ρ_- sur U, dont la forme de Levi possède au moins $s+1$ valeurs propres strictement négatives. Notons $\psi_{I_1}(z,\zeta)$ la section de Leray du type (3.1) construite à partir du polynôme de Levi de ρ_+ et $\psi_{I_2}(z,\zeta)$ la section de Leray du type (3.1) construite à partir du polynôme de Levi de ρ_-. Les sections de Leray $\psi_{I_1}(z,\zeta)$ et $\psi_{I_2}(z,\zeta)$ sont alors $(s+1)$-holomorphe par rapport à la variable z. Les noyaux C_{I_i} vérifient donc les conditions d'annulation (2.2) avec $r_0 = n-s$ et $r_1 = n-1$. De plus l'estimation 3.2 assure que les conditions d'intégrabilité de la section 2 sont satisfaites. Si on échange le rôle des variables z et ζ dans les sections de Leray ψ_{i_1} et ψ_{I_2}, les noyaux C_{I_i} vérifient les conditions d'annulation (2.2) avec $r_0 = 1$ et $r_1 = s-1$.

Si M satisfait à la première partie de la condition $Y(q)$ avec $q \leq \frac{n-1}{2}$, i.e. M est $(q+1)$-concave, alors B_M et R_M sont des solutions fondamentales de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r pour $1 \leq r \leq q$ et pour $n-q-1 \leq r \leq n-1$.

Si f est une (n,r)- forme continue à support compact dans $U \cap M$, on définit les opérateurs

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_M f &= \int_M f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta),\\ \widetilde{R}_M f &= \int_M f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta).\end{aligned}$$

Ces opérateurs satisfont des estimations $\mathcal{C}^l$ et L^p optimales.

Théorème 3.3. *Si M est de classe $\mathcal{C}^3$ et si $\widetilde{T}$ désigne l'un des opérateurs $\widetilde{B}_M$ ou $\widetilde{R}_M$, les estimations suivantes sont satisfaites :*

(1) $\|\widetilde{T}f\|_{L^{\frac{2n}{2n-1}-\epsilon}} \leq C\|f\|_{L^1}$, *pour tout* $\epsilon > 0$ *assez petit.*

(2) $\|\widetilde{T}f\|_{L^{p'}} \leq C\|f\|_{L^p}$, *si* $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2n}$ *et* $1 < p < 2n$.

(3) $\|\widetilde{T}f\|_{L^{p'}} \leq C\|f\|_{L^p}$, *si* $p = 2n$ *et* $p < p' < \infty$.

(4) $\|\widetilde{T}f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \leq C\|f\|_{L^p}$, *si* $2n < p < \infty$, $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{n}{p}$.

(5) $\|\widetilde{T}f\|_{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{L^\infty}$.

(6) $\|\widetilde{T}f\|_{\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{\mathcal{C}^l}$, *si* M *est de classe* $\mathcal{C}^{l+3}$, $l \in \mathbb{N}$.

Les estimations L^p et hölderiennes sont dues à Henkin [10] et Skoda [22], lorsque M est le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe. Elles ont permis à Henkin et Skoda de construire des fonctions de la classe de Nevanlinna, dont les zéros sont imposés dans un domaine strictement pseudoconvexe. Les estimations $\mathcal{C}^l$ sont prouvées dans [5]. Dans le cas où la signature de la forme de Levi de M est mixte, les estimations du Théorème 3.3 sont démontrées dans [21].

3.2 Cas des variétés CR génériques q-concaves

En codimension $k \geq 2$, l'équivalent naturel de la condition $Y(q)$ est la notion de q-concavité, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.

On se place dans la situation géométrique décrite dans la section 1.

Soit $\overset{\circ}{\chi}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans lui-même qui vérifie $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 0$ si $0 \leq \lambda \leq 1/4$ et $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 1$ si $1/2 \leq \lambda \leq 1$.

Si $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, pour $\lambda \in \Delta_{0I}$ tel que $\lambda_0 \neq 1$, on note $\overset{\circ}{\lambda}$ le point de Δ_I défini par

$$\overset{\circ}{\lambda}_{i_\nu} = \frac{\lambda_{i_\nu}}{1-\lambda_0} \quad (\nu = 1, \dots, l).$$

Soit ψ une section de Leray associée à M au voisinage de $\overline{D}$, on pose

$$\psi_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta - z|^2} + (1 - \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0))\psi_I(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}) \tag{3.3}$$

pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I}$.

On peut alors définir les noyaux $K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$, pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I}$, par

$$K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle\psi_{0I}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{0I}, d(\zeta - z)\rangle^{n-1}, \tag{3.4}$$

et les noyaux $K_I(z,\zeta,\lambda)$ par

$$K_I(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle\psi_I, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_I, d(\zeta - z)\rangle^{n-1}. \tag{3.5}$$

Les noyaux K_{0I} et K_I sont des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^1$ et de degré $2n-1$ et on a

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = 0 \tag{3.6}$$

d'après la Proposition 3.9 de [12].

Pour finir on pose, pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$,

$$C_{0I}(z,\zeta) = \int_{\lambda\in\Delta_{0I}} K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$$
$$C_I(z,\zeta) = \int_{\lambda\in\Delta_I} K_I(z,\zeta,\lambda)$$

Les noyaux $C_{0I}(z,\zeta)$ et $C_I(z,\zeta)$ sont des formes différentielles respectivement de degré $2n-|I|-1$ et de degré $2n-|I|$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$ et $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$. La formule de Stokes et la relation

$$\partial\Delta_{0I} = \sum_{\nu=1}^{|I|}(-1)^\nu \Delta_{0I(\widehat{\nu})} + \Delta_I$$

impliquent qu'ils vérifient l'équation (2.1).

Si ψ est une section de Leray de la forme (3.1), dont le dénominateur Φ vérifie l'estimation (3.2), les conditions d'intégrabilité de la section 2 sont remplies.

Si de plus la section de Leray ψ est s-holomorphe en la variable z les conditions d'annulation du paragraphe 2 sont satisfaites pour $r_0 = n-s+1$ et $r_1 = n-k$ et si ψ est s-holomorphe en la variable ζ les conditions d'annulation du paragraphe 2 sont satisfaites pour $r_0 = 1$ et $r_1 = s-k-1$.

Il résulte de [14] que, si M est q-concave, on peut lui associer des sections de Leray ψ_I continues en $\lambda \in \Delta_I$ telles que $\psi_I(z,\zeta,.) = \psi_J(z,\zeta,.)|_{\Delta_I}$, si $I \subset J$ et $(q+k)$-holomorphes en la variable z. Ces sections sont construites à partir du polynôme de Levi de la fonction ρ_λ et d'une application continue T de $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ dans la grassmannienne des sous espaces de dimension $q'+k$ de $\mathbb{C}^n$, avec q' l'ordre maximal de concavité de M en z_0, telle que la forme de Levi de ρ_λ sur U soit définie positive sur $T(\lambda)$. En échangeant les rôles des variables z et ζ, nous obtiendrons des sections $(q+k)$-holomorphes en la variable ζ.

Le noyau B_M construit à partir des noyaux définis ici est une solution fondamentale sur $U_{z_0} = U \cap M$ de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r pour $1 \leq r \leq q-1$ et $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$ (cf. [4]).

Dans le cas des hypersurfaces ce noyau a été introduit par Fischer [7] et il permet d'obtenir des estimations $\mathcal{C}^l$ optimales pour la résolution de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel (cf. (6) du Th. 3.3). Malheureusement en codimension $k \geq 2$, il y a une perte de ϵ arbitrairement petit dans les mêmes estimations, le terme perturbateur provenant de la section de Bochner-Martinelli. Il faut donc construire un nouveau noyau plus adapté à la géométrie de M.

Comme dans la section 2, on note $\mathcal{I}'(l,*)$, $l \leq k$, l'ensemble des multi-indices de la forme $I*$, avec $I \in \mathcal{I}'(l)$. On pose $\rho_* = \rho_1 + \cdots + \rho_k$ et on considère la fonction w_* déduite du polynôme de Levi de ρ_*. On construit w_{I*} en interpolant w_I et w_* et on note ψ_{I*} la section de Leray associée, dont le dénominateur vérifie l'estimation 3.2.

On peut alors définir les noyaux $K_{0I*}(z,\zeta,\lambda)$ et $K_{I*}(z,\zeta,\lambda)$, pour $(z,\zeta,\lambda)\in(U_{z_0}\times U_{z_0}\setminus\Delta(U_{z_0}))\times\Delta_{0I}$, par

$$K_{0I*}(z,\zeta,\lambda)=\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle\psi_{0I*},d(\zeta-z)\rangle\wedge\langle(\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\psi_{0I*},d(\zeta-z)\rangle^{n-1},$$

$$K_{I*}(z,\zeta,\lambda)=\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle\psi_{I*},d(\zeta-z)\rangle\wedge\langle(\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\psi_{I*},d(\zeta-z)\rangle^{n-1}.$$

On pose, pour $(z,\zeta)\in U_{z_0}\times U_{z_0}\setminus\Delta(U_{z_0})$,

$$\begin{aligned}C_{0I*}(z,\zeta)&=\int_{\lambda\in\Delta_{0I*}}K_{0I*}(z,\zeta,\lambda)\\ C_{I*}(z,\zeta)&=\int_{\lambda\in\Delta_{I*}}K_{I*}(z,\zeta,\lambda).\end{aligned}$$

D'après [4], ces noyaux vérifient l'équation aux dérivées partielles (2.6). On peut donc en déduire une nouvelle solution fondamentale R_M pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M en degré r, $1\leq r\leq q-1$ et $n-k-q+1\leq r\leq n-k$.

La nouvelle solution fondamentale R_M permet cette fois d'obtenir les estimations $\mathcal{C}^l$ optimales pour la résolution de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel, c'est-à-dire avec un gain de régularité de $\frac{1}{2}$; elles sont démontrées dans [4]. Concernant les estimations L^p, il est prouvé dans [15] que R_M est de type faible $\frac{2n}{2n-1}$. Par conséquent l'opérateur intégral associé à R_M satisfait les estimations du Théorème 3.3.

4 Résolution locale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel avec estimations jusqu'au bord

Dans les sections précédentes nous avons donné des résultats concernant la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle pour des seconds membres à support compact.

Soit Ω un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans $M\cap U$. On veut construire de nouveaux noyaux prenant en compte la géométrie de Ω pour transformer la formule de représentation intégrale du Théorème 2.5 en une formule d'homotopie.

Notons $\bullet$ un nouvel indice. Pour tout $J\in\mathcal{I}'(l,*)$, $l\leq k$, on considère des formes différentielles $C_{0J\bullet}(z,\zeta)$ de degré $2n-|I|-3$ et $C_{J\bullet}(z,\zeta)$ de degré $2n-|I|-2$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $(z,\zeta)\in\Omega\times\Omega$ tels que $z\neq\zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_{b,z}C_{0J\bullet}+\overline{\partial}_{b,\zeta}C_{0J\bullet}=(-1)^kC_{0J}+C_{0\delta(J)\bullet}-C_{J\bullet}. \tag{4.1}$$

On suppose de plus que ces noyaux sont suffisamment réguliers pour que l'équation (4.1) soit satisfaite au sens des courants sur $M\times M$.

On dira que les noyaux $C_{J\bullet}$ sont adaptés au domaine Ω s'ils vérifient la condition d'annulation

$$[C_{J\bullet}(z,\zeta)]_{p,r}=0\quad\text{si}\quad 0\leq p\leq n\quad\text{et}\quad 1\leq r_0\leq r\leq r_1\leq n-k, \tag{4.2}$$

où $[C_{J\bullet}(z,\zeta)]_{p,r}$ désigne la partie de bidegré (p,r) en z de $C_{J\bullet}$.

On pose $G_{M,\Omega} = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \mathrm{sgn}(I)C_{0J\bullet}$ et on définit l'opérateur T_r sur les (n,r)-formes continues sur $\overline{\Omega}$ par

$$T_r g = (-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}}[\int_{\zeta\in\Omega} g(\zeta)\wedge R_M(z,\zeta) + (-1)^{n+r+1}\int_{\zeta\in\partial\Omega} g(\zeta)\wedge G_{M,\Omega}(z,\zeta)].$$

On déduit aisément de (4.1) et de la formule de Stokes le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Etant donnés une famille de noyaux adaptés à M sur un voisinage U_{z_0} d'un point z_0, un domaine Ω à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans $M\cap U_{z_0}$, et une famille de noyaux adaptés au domaine Ω, les opérateurs T_r vérifient la formule d'homotopie*

$$f = \overline{\partial}_b T_r f + T_{r+1}\overline{\partial}_b f, \tag{4.3}$$

si f est une (n,r)-formes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$, $1\le r_0\le r\le r_1\le n-k$.

Si M est q-concave et si Ω est l'intersection transverse de M avec un domaine $\widetilde{\Omega}$ strictement pseudoconvexe, soit $\psi_\bullet$ la section de Leray définie par Henkin et Lieb pour $\widetilde{\Omega}$. Les noyaux construits sur le modèle de ceux de la section 3.2 en remplaçant le multi-indice I par le multi-indice J et l'indice $*$ par l'indice $\bullet$ sont adaptés à Ω avec $r_0 = n-k-q+1$ et $r_1 = n-k$. Sous ces hypothèses géométriques, le Théorème 4.1 est prouvé dans [15].

Si M est q-concave et si Ω est l'intersection transverse de M avec le complémentaire d'un domaine $\widetilde{\Omega}$ strictement pseudoconvexe et une petite boule centrée sur le bord de ce domaine, Sambou et Touré [18] ont construit, par des méthodes analogues, des noyaux adaptés à Ω avec $r_0 = 1$ et $r_1 = q-2$. Ils obtiennent ainsi une formule d'homotopie en degré $1\le r\le q-3$ et une formule de résolution en degré $q-2$ après restriction de la petite boule.

Les opérateur T_r sont continus de $\mathcal{C}_{n,r}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{C}^{1/2-\epsilon}_{n,r-1}(\overline{\Omega})$ pour tout $0<\epsilon<1/2$. Contrairement au cas de la régularité intérieure où, en construisant un nouveau noyau, on a pu prouver les estimations höldériennes avec le gain optimal de $1/2$, on ignore si on peut éliminer la perte de ϵ arbitrairement petit dans les estimations au bord. Ce phénomène est analogue à celui qui intervient dans les estimations au bord pour l'opérateur de Cauchy-Riemann dans l'intersection de domaines strictement pseudoconvexes (cf. [16]).

Par ailleurs, après une modification classique du dénominateur des sections de Leray (il s'agit de remplacer $\Phi_\bullet$ par $\widetilde{\Phi}_\bullet(z,\zeta) = \Phi(z,\zeta) - 2\rho_\bullet(\zeta)$), on a contruit dans [15] des opérateurs $\widetilde{T}_r$ de résolution pour l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur Ω.

Théorème 4.2. *Soit M une variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$ et $z_0\in M$. Soit $\widetilde{\Omega}$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord C^3 de $\mathbb{C}^n$ contenant z_0 et $\Omega = M\cap\widetilde{\Omega}$. Il existe des opérateurs $\widetilde{T}_r$ tels que pour toute $f\in L^p_{(n,r)}(\Omega)$ telle que $\overline{\partial}_b f = 0$ dans Ω, $1\le p\le\infty$ et $n-k-q+1\le r\le n-k$, on ait $\overline{\partial}_b\widetilde{T}_r f = f$ dans Ω et que les estimations suivantes soient satisfaites :*

(1) $\|\widetilde{T}_r f\|_{L^{\frac{2n+2}{2n+1}-\epsilon}} \le C\|f\|_{L^1}$, *pour tout $\epsilon>0$ assez petit.*

(2) $\|\widetilde{T}_r f\|_{L^{p'}} \le C\|f\|_{L^p}$, *où $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2n+2}$ et $1<p<2n+2$.*

(3) $\|\widetilde{T}_r f\|_{L^{p'}} \le C\|f\|_{L^p}$, *où $p = 2n+2$ et $p<p'<\infty$.*

(4) $\|\widetilde{T}_r f\|_{\mathcal{C}^{\alpha-\epsilon}} \leq C\|f\|_{L^p}$, *où* $2n+2 < p < \infty$, $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{p}$ *et* $\epsilon > 0$.

(5) $\|\widetilde{T}_r f\|_{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \leq C\|f\|_{L^\infty}$, *pour tout* $\epsilon > 0$.

Notons que contrairement au cas höldérien, pour les estimations L^p, le gain de régularité au bord n'est plus arbitrairement proche du gain de régularité à l'intérieur. La régularité intérieure est donnée par des opérateurs de type faible $\frac{2n}{2n-1}$ (cf Th. 3.3), alors que la régularité au bord est donnée par des opérateurs de type faible $\frac{2n+2}{2n+1}$. Ce phénomène est probablement lié au fait que la notion de trace est mal définie dans les espaces L^p.

Corollaire 4.3. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2, l'image du* $\overline{\partial}_b$ *est fermée dans l'espace* $L^p_{(n,r)}(\Omega)$ *pour* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$.

Les estimations L^2 impliquent le théorème de décomposition de Hodge pour le $\overline{\partial}_b$ et l'existence des opérateurs $\overline{\partial}_b$-Neumann.

Corollaire 4.4. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2, on a la décomposition de Hodge forte :*

pour $n-k-q+1 < r < n-k$, *il existe un opérateur linéaire* $N_b : L^2_{(n,r)}(\Omega) \to L^2_{(n,r)}(\Omega)$ *tel que*

(1) N_b *est borné et* $\mathrm{Im}(N_b) \subset Dom(\Box_b)$.

(2) Pour tout $f \in L^2_{(n,r)}(\Omega)$, *on a*

$$f = \overline{\partial}_b\overline{\partial}_b^* N_b f \oplus \overline{\partial}_b^*\overline{\partial}_b N_b f.$$

(3) Si $f \in L^2_{(n,r)}(\Omega)$ *with* $\overline{\partial}_b f = 0$, *alors* $f = \overline{\partial}_b\overline{\partial}_b^* N_b f$. *La solution* $u = \overline{\partial}_b^* N_b f$ *est appelée la solution canonique, i.e. c'est l'unique solution orthogonale à* $\mathrm{Ker}(\overline{\partial}_b)$.

Si M est une hypersurface strictement pseudoconvexe, la possibilité de résoudre l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur un domaine Ω a été étudiée dans [13]. Une condition nécessaire de résolubilité sur Ω est que le bord de Ω soit contenu dans une hypersurface Levi-plate.

Si z_0 est un point fixé de M, il possède un système fondamental de voisinages dont le bord est contenu dans une hypersurface Levi-plate. En effet, après un changement de variable quadratique, on peut supposer que $z_0 = 0$ et que M possède une fonction définissante ρ au voisinage de l'origine telle que

$$\rho(z) = -\mathrm{Im} z_n + \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} z_j \overline{z}_k + O(|z|^3),$$

où (A_{jk}) est une matrice hermirienne définie positive. Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, la famille

$$\Omega_\delta = \{z \in M \mid \mathrm{Im}\ z_n < \delta\}$$

définit un système fondamental de voisinages de l'origine dont le bord est contenu dans une hypersurface Levi-plate. Dans [19], M.C. Shaw construit des noyaux adaptés aux domaines Ω_δ à l'aide du formalisme de Harvey et Polking (cf. 3.1) et prouve une formule d'homotopie en degré r, $1 \leq r \leq n-3$. Avec la même modification du dénominateur de la section de Leray liée au bord de Ω_δ que dans le cas q-concave, elle obtient des estimations L^p.

Théorème 4.5. *Soit M une hypersurface strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ et z_0 un point de M. Il existe un système fondamental de voisinages Ω_δ de z_0 et des opérateurs intégraux T_r^δ, $1 \leq r \leq n-3$, tels que pour toute $f \in L^p_{(n,r)}(\Omega_\delta)$, $1 \leq r \leq n-2$ et $1 < p < \infty$, $\overline{\partial}_b$-fermée dans Ω_δ, on ait $\overline{\partial}_b T_r^\delta f = f$ et*

$$\|T_r^\delta f\|_{L^p_{(n,r)}(\Omega_\delta)} \leq C\|f\|_{L^p_{(n,r-1)}(\Omega_\delta)},$$

où C ne dépend que de p et de δ.

Remarquons que, dans le cas des variétés q-concaves, il y a un gain de régularité dans les estimations L^p (Th. 4.2) car le bord des domaines considérés est contenu dans des hypersurfaces strictement pseudoconvexes, ce n'est plus le cas ici car le bord des domaines considérés est cette fois contenu dans des hypersurfaces Levi-plates.

Références

[1] R. A. Airapetjan et G. M. Henkin. Integral representation of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR function. *Russian Math.Survey*, 39 :41–118, 1984.

[2] M. Y. Barkatou. *Formules locales de type Bochner-Martinelli-Koppelman sur des variétés CR, applications.* Thèse, Grenoble, 1994.

[3] M. Y. Barkatou. Régularité hölderienne du $\overline{\partial}_b$ sur les hypersurfaces 1-convexes-concaves. *Math. Zeit.*, 221 :549–572, 1996.

[4] M. Y. Barkatou et C. Laurent-Thiébaut. Estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel. *Michigan Math. Journal*, 54 :545–586, 2006.

[5] A. Boggess. *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann Complex.* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1991.

[6] A. Boggess et M.-C. Shaw. A kernel approach to local solvability of the tangential Cauchy-Riemann equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289 :643–659, 1985.

[7] B. Fischer. Kernels of Martinelli-Bochner type on hypersurfaces. *Math. Zeit.*, 223 :155–183, 1996.

[8] B. Fischer et J.Leiterer. A local Martinelli-Bochner formula on hypersurfaces. *Math. Zeit.*, 214 :659–681, 1993.

[9] R. Harvey et J. Polking. Fundamental solutions in complex analysis, Part I and II. *Duke Math. J.*, 46 :253–300 and 301–340, 1979.

[10] G. M. Henkin. The Hans Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds. *Math. USSR Sbornik*, 31 :59–130, 1977.

[11] G. M. Henkin. Solution des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur des variétés Cauchy-Riemann q-concaves. *Comptes Rendus Acad. Sciences*, 293 :27–30, 1981.

[12] G. M. Henkin et J. Leiterer. *Andreotti-Grauert theory by integral formulas*, volume 74 of *Progress in Math.* Birkhaüser, 1988.

[13] C. Laurent-Thiébaut. Sur l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle dans une calotte strictement pseudoconvexe. *Int. Journal of Math.*, 16 :1063–1079, 2005.

[14] C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer. On Polyakov's notion of regular q-concave CR manifolds. *Math. Zeitschrift*, 253 :235–249, 2006.

[15] C. Laurent-Thiébaut et M.C. Shaw. Boundary hölder and L^p estimates for local solutions of the tangential Cauchy-Riemann equation. *Trans. A.M.S.*, 124 :93–106, 2000.

[16] R. M. Range et Y. T. Siu. Uniform estimates for the $\overline{\partial}$ on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries. *Math. Ann.*, 206 :325–354, 1974.

[17] A. V. Romanov. A formula and estimates for the solution of the tangential Cauchy-Riemann equation. *Math. USSR Sbornik*, 28 :49–71, 1976.

[18] S. Sambou et B. Touré. Formule d'homotopie pour un domaine à bord (q+k)-concave d'une variété CR générique et q-concave. Applications. *Ann. Polon. Math.*, 91 :43–55, 2007.

[19] M.-C. Shaw. L^p estimates for local solutions of $\overline{\partial}_b$ on strongly pseudoconvex CR manifolds. *Math. Ann.*, 288 :35–62, 1990.

[20] M.-C. Shaw. Integral representations for $\overline{\partial}_b$ in CR manifolds. In *Geometric Complex Analysis, edited by Junjiro Noguchi and al.*, World Scientific Publishing Co., pages 535–549, 1996.

[21] M.-C. Shaw. Homotopy formulas for $\overline{\partial}_b$ in CR manifolds with mixed levi signatures. *Math. Zeit.*, 224 :113–135, 1997.

[22] H. Skoda. Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. *Bul. SMF*, 104 :225–299, 1976.

Christine LAURENT-THIÉBAUT
Université de Grenoble
Institut Fourier - UMR 5582 CNRS/UJF
BP 74
38402 St Martin d'Hères cedex (France)

`Christine.Laurent@ujf-grenoble.fr`