Sur la régularité pour le phénomène d'extension de Hartogs-Severi-Weinstock dans les variétés CR 1-concaves

Christine LAURENT-THIÉBAUT

Prépublication de l'Institut Fourier n° 700 (2007)
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

Résumé

Après avoir rappelé les conditions cohomologiques et géométriques qui autorisent le phénomène d'extension de Hartogs-Severi-Weinstock dans les variétés CR, on s'intéresse plus particulièrement aux problèmes de régularité.

Mots-clés : variétés CR, extension de fonctions CR, équation de Cauchy-Riemann tangentielle.

Abstract

First we recall the cohomological and the geometrical conditions under which the Hartogs-Severi-Weinstock extension phenomenon occurs, then we study the regularity problems in this setting.

Keywords: CR manifold, extension of CR functions, tangential Cauchy-Riemann equation.

2000 Mathematics Subject Classification : 32F10, 32F40.

Nous présentons ici un article de synthèse sur le phénomène d'extension de Hartogs-Severi-Weinstock dans les variétés CR. Le point original de cet article est la démonstration de résultats de régularité pour ce phénomène d'extension.

Nous appelons phénomène d'extension de Hartogs-Severi-Weinstock le phénomène suivant :

Soit M une variété CR connexe , non compacte, de classe $\mathcal{C}^\infty$, K un compact de M et D un domaine à bord $\mathcal{C}^\infty$ relativement compact dans M tels que $M \setminus (D \cup K)$ et $\partial D \setminus K$ soient connexes ; si f est une fonction CR de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sur $\partial D \setminus K$ il existe une fonction F CR sur $D \setminus K$ et de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\overline{D} \setminus K$ telle que $F_{|\partial D \setminus K} = f$.

Notons que le bord du domaine D n'est pas nécessairement une variété CR. Une fonction f continue sur $\partial D \setminus K$ est dite CR si et seulement si le courant $f[\partial D \setminus K]^{0,1}$, où $[\partial D \setminus K]^{0,1}$ désigne la partie de bidegré $(0,1)$ du courant d'intégration sur le bord de D, est $\overline{\partial}_b$-fermé. De plus si le phénomène d'extension se produit, l'extension F de f satisfait alors, grâce à la formule de Stokes, l'équation

$$\overline{\partial}_b(F\chi_{D\setminus K}) = f[\partial D \setminus K]^{0,1},$$

où $\chi_{D\setminus K}$ est la fonction caractéristique de $D \setminus K$. Ce phénomène d'extension dépend donc directement de la résolubilité de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle pour certains types de données. Remarquons finalement que le problème d'extension relatif, i.e. $K \neq \emptyset$, est particulièrement intéressant pour les domaines D dont le bord rencontre K.

Le cas particulier où M est une variété analytique complexe non compacte est maintenant bien connu, il a été étudié par de nombreux auteurs, en particulier par Hartogs, Severi, Kneser, Fichera, Weinstock lorsque $K = \emptyset$ (cf. [17] pour un historique sur le sujet) et Lupacciolu et Stout dans le cas général (cf. [5]). L'existence de l'extension dans le cas d'une donnée $\mathcal{C}^\infty$ est directement liée aux propriétés d'annulation et de séparation du groupe de cohomologie de Dolbeault $H^{0,1}_\Phi(M \setminus K)$, où Φ est la famille des fermés C de $M \setminus K$ tels que $C \cup K$ soit compact, et au principe du prolongement analytique. Lorsque le groupe de cohomologie $H^{0,1}_\Phi(M \setminus K)$ est seulement séparé, la donnée f doit satisfaire une condition de moment. L'annulation du groupe de cohomologie de Dolbeault $H^{0,1}_\Phi(M \setminus K)$ est en général assurée par l'existence de bonnes fonctions d'exhaustion sur $M \setminus K$. Lorsque le compact K est vide, Φ est alors la famille c des parties compactes de M et $H^{0,1}_c(M)$ est toujours séparé (et on peut alors supprimer la condition de connexité sur $M \setminus D$), il est nul en particulier lorsque M est une variété de Stein de dimension supérieure ou égale à 2.

La régularité résulte d'une étude locale car dans une variété complexe, les distributions $\overline{\partial}$-fermées sont des fonctions holomorphes. Cette étude locale s'appuie sur les propriétés fines de la transformée de Bochner-Martinelli.

On a le résultat suivant [12] :

Théorème 0.1. *Soient M une variété analytique complexe connexe, non compacte, de dimension n, $n \geq 2$, K un compact de M et D un domaine à bord $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, relativement compact dans M tels que $M \setminus (D \cup K)$ et $\partial D \setminus K$ soient connexes.*

On suppose que K possède une base de voisinages $\mathcal{U}$ telle que pour tout $U \in \mathcal{U}$, M est une extension 1-convexe (au sens de Henkin-Leiterer) de U.

Alors si f est une fonction CR de classe $\mathcal{C}^r$, $r \leq p$, sur $\partial D \setminus K$ il existe une fonction F holomorphe sur $D \setminus K$ et de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\overline{D} \setminus K$ telle que $F_{|\partial D \setminus K} = f$.

L'hypothèse du Théorème 0.1 est satisfaite entre autre lorsque M est une variété de Stein de dimension supérieure ou égale à 2 et K un compact de Stein de M.

En affaiblissant les hypothèses sur M, il résulte du théorème d'annulation de Malgrange et de la dualité de Serre que

Théorème 0.2. *Soit M une variété analytique complexe connexe, non compacte et D un domaine à bord $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, relativement compact dans M.*

Soit f une fonction CR de classe $\mathcal{C}^r$, $r \leq p$, sur ∂D qui satisfait la condition de moment suivante :

– *pour toute $(n, n-1)$-forme différentielle φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}$-fermée au voisinage de l'adhérence de D, on a $\int_{\partial D} f\varphi = 0$.*

Alors il existe une fonction F holomorphe sur D et de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\overline{D} \setminus K$ telle que $F_{|\partial D \setminus K} = f$.

On a un résultat analogue dans le cas relatif si M est de dimension supérieure ou égale à 2 et K satisfait $H^{n,n-1}(K) = 0$ (cf. [15] et [5]).

Dans cet article nous nous intéressons au cadre plus général des variétés CR.

Remarquons que si M est le bord d'un domaine strictement convexe de $\mathbb{C}^n$, il ne possède pas la propriété d'extension de Hartogs-Severi-Weinstock. En effet pour tout point z_0 de M, le plan tangent complexe à M en z_0 ne rencontre M qu'au point z_0 et il est défini par une équation $f_{z_0}(z) = 0$, où f_{z_0} est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ dont la restriction à M s'annule uniquement en z_0. Soit D un domaine relativement compact dans M à bord $\mathcal{C}^\infty$ et z_0 un point de D, la restriction de la fonction $\frac{1}{f_{z_0}}$ à ∂D est une fonction CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne se prolonge pas à D. Plus généralement, par un biholomorphisme local, cette obstruction persiste pour les petits domaines si M est contenue au voisinage d'un de ses points dans le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Nous serons donc ammenés naturellement à imposer des conditions sur la forme de Levi de M.

Dans une première partie nous allons rappeler les conditions géométriques qui assurent l'annulation ou la séparation du groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie $H^{0,1}_\Phi(M \setminus K)$ et prouver le phénomène d'extension pour une donnée de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous ne nous intéresserons ici qu'au problème global (i.e. sans restriction sur la taille du domaine D). Le cas des domaines de petite taille a été considéré par Henkin dans [6] et par Henkin et Michel dans [7] pour les variétés analytiques réelles.

Dans une seconde partie nous considèrerons le cas où la donnée est seulement de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ et la variété M une variété CR 1-concave, localement plongeable.

Théorème 0.3. *Soient M une variété CR 1-concave, localement plongeable, connexe, non compacte, de classe $\mathcal{C}^\infty$, K un compact de M, D un domaine à bord $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, relativement compact dans M tels que $M \setminus (D \cup K)$ et $\partial D \setminus K$ soient connexes et f une fonction CR de classe $\mathcal{C}^r$, $r \leq p$, sur $\partial D \setminus K$ telle que le module de continuité ω des dérivées d'ordre r de f vérifie $\lim_{h \to 0} \omega(h) \ln |h| = 0$ au voisinage des points non génériques de $\partial D \setminus K$.*

On suppose que M satisfait des conditions géométriques qui autorisent la résolution du problème suivant :

$$\overline{\partial}_b T = f[\partial D \setminus K]^{0,1},\ \mathrm{supp} T \in \Phi, \tag{0.1}$$

alors il existe une fonction F CR sur $D \setminus K$ et de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\overline{D} \setminus K$ telle que $F_{|\partial D \setminus K} = f$.

Pour étudier la régularité nous utiliserons les solutions fondamentales de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel définies dans [2]. Un résultat pour une donnée continue a été annoncé par Henkin sans démonstration dans [6].

1 Géométrie et annulation ou séparation de la cohomologie à support

Commençons par prouver un résultat abstrait reliant le phénomène d'extension de Hartogs-Severi-Weinstock et les propriétés d'annulation et de séparation de certains groupes de cohomologie à support.

Soient M une variété CR abstraite non compacte de dimension réelle $2d+k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension CR d et K une partie compacte de M. On désigne par Φ la famille des parties fermées C de $M \setminus K$ telles que $C \cup K$ soit une partie compacte de M. On note $H^{0,1}_\Phi(M \setminus K)$ le groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie de bidegré $(0,1)$ à support dans la famille Φ, il s'agit du quotient de l'espace vectoriel des $(0,1)$-formes $\overline{\partial}_b$-fermées de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans Φ par l'espace des formes qui sont le $\overline{\partial}_b$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans Φ.

Si V est une hypersurface fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $M \setminus K$ telle que $V \cup K$ soit compact, une fonction f définie sur V est une *fonction CR de classe* $\mathcal{C}^\infty$ s'il existe une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus K$ telle que $\overline{\partial}_b \tilde{f}$ s'annule à l'ordre infini sur V.

Théorème 1.1. *On suppose que $M \setminus K$ est telle que toute fonction CR sur un ouvert connexe U de $M \setminus K$ nulle au voisinage d'un point de U est identiquement nulle sur U. Soient D un domaine à bord $\mathcal{C}^\infty$ relativement compact dans M tel que $M \setminus (D \cup K)$ et $\partial D \setminus K$ soient connexes et f une fonction CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\partial D \setminus K$. Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- $H^{o,1}_\Phi(M \setminus K) = 0$,
- *l'ensemble des $(0,1)$-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans Φ, $\overline{\partial}_b$-exactes sur $M \setminus K$ coïncide avec l'ensemble des $(0,1)$-formes différentielles θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus K$ qui vérifient $\int_{M \setminus K} \theta \wedge \varphi = 0$ pour toute $(d+k, d-1)$-forme différentielle φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}_b$-fermée dans $M \setminus K$ telle que* $\mathrm{supp}\varphi \cap \mathrm{supp}\theta$ *soit compact (ce qui implique que $H^{o,1}_\Phi(M \setminus K)$ est séparé) et pour toute $(d+k, d-1)$-forme différentielle φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}_b$-fermée telle que* $\mathrm{supp}\varphi \cap (\partial D \setminus K)$ *soit compact $\int_{\partial D \setminus K} f\varphi = 0$,*

alors il existe une fonction F CR sur $D \setminus K$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{D} \setminus K$ telle que $F_{|\partial D \setminus K} = f$.

Démonstration. Soit $\tilde{f}$ l'extension de classe $\mathcal{C}^\infty$ de f à $M \setminus K$ telle que $\overline{\partial}_b \tilde{f}$ s'annule à l'ordre infini sur $\partial D \setminus K$. Posons $g = \overline{\partial}_b \tilde{f}$ sur $D \setminus K$ et $g = 0$ sur $M \setminus (D \cup K)$, on définit ainsi une $(0,1)$-forme différentielle $\overline{\partial}_b$-fermée, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans Φ. Si l'une des deux hypothèses du théorème est satisfaite, il existe une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus K$

à support dans Φ telle que $\overline{\partial}_b h = g$. La fonction h est CR sur $M \setminus (\overline{D} \cup K)$ et nulle sur un sous ouvert puisque son support appartient à Φ, elle est donc identiquement nulle sur $M \setminus (D \cup K)$. La fonction $F = \tilde{f} - h$ est alors l'extension cherchée. □

L'hypothèse de propagation de la nullité des fonctions CR sur $M \setminus K$ faite au début du Théorème 1.1 correspond à un principe de prolongement analytique faible qui sera satisfait si $M \setminus K$ est minimale au sens de Tumanov, c'est-à-dire si pour tout point z_0 de $M \setminus K$ il n'existe pas de sous-variété CR de M passant par z_0 et de dimension strictement inférieure à celle de M.

Nous allons maintenant préciser des conditions géométriques sur M sous lesquelles les hypothèses cohomologiques du Théorème 1.1 sont satisfaites.

Dans toute la suite nous supposerons que M est une sous-variété CR générique de codimension réelle k d'une variété analytique complexe X de dimension n. Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction nous devons imposer des conditions sur la forme de Levi de M.

Nous dirons que M est *q-concave*, respectivement *faiblement q-concave*, si la forme de Levi de M possède au moins q valeurs propres strictement négatives, respectivement négatives ou nulles dans toutes les directions normales.

Considérons tout d'abord le cas où $K = \emptyset$. La famille Φ coïncide alors avec la famille c des parties compactes de M.

Dans un article récent J. Brinkschulte [3] a prouvé le théorème d'annulation suivant pour la cohomologie à support compact. C'est le meilleur résultat connu à ce jour.

Théorème 1.2. *Soient X une variété de Stein et M une sous-variété connexe, fermée, CR générique, faiblement 2-concave de X dont le fibré normal est trivial. Alors $H_c^{0,1}(M) = 0$.*

Ce résultat a été démontré sous une hypothèse de 2-concavité stricte pour une hypersurface dans [10], en codimension quelconque dans [9], lorsque $X = \mathbb{C}^n$ et dans [11] pour X de Stein.

Notons que dans [16], Porten a prouvé le Théorème 1.1 lorsque X est une variété de Stein, M une hypersurface réelle connexe, fermée, faiblement 2-concave de X et $K = \emptyset$ directement par des méthodes d'enveloppe d'holomorphie sans passer par l'annulation du groupe $H_c^{0,1}(M)$.

Remarquons sur un exemple dû à Hill et Nacinovich [8] que l'hypothèse de 2-concavité faible du Théorème 1.2, ne peut pas être réduite à de la 1-concavité même stricte. Si on considère l'hypersurface réelle M de $\mathbb{C}^3$ définie par $M = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 = 1\}$, le domaine D obtenu comme intersection de M avec la boule de centre 0 et de rayon 2 de $\mathbb{C}^3$, la fonction $f = \frac{1}{z_3}$ est CR sur le bord de D mais ne se prolonge pas à D car D contient l'ensemble $\{z \in M \mid z_3 = 0\}$. Le groupe de cohomologie $H_c^{0,1}(M)$ ne peut donc pas être nul.

Dans le cas de 1-concavité stricte, on peut néanmoins prouver un résultat de séparation pour la cohomologie à support compact [13].

Théorème 1.3. *Soit X une variété analytique complexe et M une sous-variété connexe, fermée, non compacte, CR générique, 1-concave de X de codimension réelle k. Alors $H_c^{0,1}(M)$ est séparé.*

Plus précisément, l'ensemble des $(0,1)$-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact, $\overline{\partial}_b$-exactes sur M coïncide avec l'ensemble des $(0,1)$-formes différentielles f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M qui vérifient $\int_M f \wedge \varphi = 0$ pour toute $(n, n-k-1)$-forme différentielle φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\overline{\partial}_b$-fermée dans M.

Ce théorème de séparation pour la cohomologie à support compact résulte d'un théorème de type Malgrange sur l'annulation de la cohomologie en degré maximal dans les variétés 1-concaves [14], de la dualité de Serre [13] et de l'hypoellipticité du $\overline{\partial}_b$ en bidegré $(0,1)$ pour ces variétés.

Dans le Théorème 1.2, la fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique de X induit l'existence d'une fonction d'exhaustion sur la sous-variété CR générique faiblement 2-concave M avec de bonnes propriétés de convexité.

Si M est une sous-variété CR générique faiblement q-concave d'une variété analytique complexe X, une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de M, à valeurs réelles, est dite *$(q+k)$-convexe* si pour tout point z de U et pour toute extension ψ de φ à un voisinage de z dans X, la restriction de la forme de Levi de ψ au plan tangent complexe en z à M possède au moins q valeurs propres strictement positives. En particulier si φ est la restriction d'une fonction strictement plurisousharmonique sur un voisinage de U dans X, elle est $(q+k)$-convexe.

Si Δ est un domaine relativement compact d'une sous-variété CR générique faiblement q-concave M d'une variété analytique complexe X, nous dirons que M est une *extension q-convexe* de Δ, s'il existe un voisinage W de $M \setminus \Delta$ et une fonction φ $(q+k)$-convexe sur W telle que les ensembles $\{z \in W \mid \alpha \leq \varphi(z) \leq \beta\}$ soient compacts et $\Delta \cap W = \{z \in W \mid \varphi(z) < 0\}$. Si $M = X$, alors $k = 0$ et cette notion d'extension q-convexe correspond à la notion d'extension (q-1)-convexe au sens de Henkin-Leiterer pour les variétés complexes.

On déduit facilement des résultats obtenus par Hélène Ricard dans sa thèse [18] un théorème d'annulation pour la cohomologie à support dans les variétés CR génériques 2-concaves analogue au Théorème 0.1.

Théorème 1.4. *Si M est une sous-variété CR générique 2-concave d'une variété analytique complexe, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le fibré normal est trivial et si K possède une base de voisinages $\mathcal{U}$ telle que pour tout $U \in \mathcal{U}$, M est une extension 2-convexe de U, alors $H^{0,q-1}_\Phi(M \setminus K) = 0$.*

Sous des hypothèses comparables à celles du Théorème 1.2, mais avec de la concavité stricte pour M, on obtient alors

Corollaire 1.5. *Soient X une variété de Stein, M une sous-variété connexe, fermée, CR générique, 2-concave de X dont le fibré normal est trivial et K l'intersection d'un compact de Stein de X avec M, alors $H^{0,1}_\Phi(M \setminus K) = 0$.*

Pour les hypersurfaces ces résultats ont été prouvés dans [10] et le Corollaire 1.5 a été démontré dans [11].

2 Régularité de l'extension

Dans cette partie nous nous restreignons au cas où M est une sous variété connexe, fermée, non compacte, CR générique, 1-concave, de classe $\mathcal{C}^\infty$, de codimension réelle k

d'une variété analytique complexe X de dimension n.

Soient K un compact de M et D un domaine à bord $\mathcal{C}^\infty$ relativement compact dans M tels que $M \setminus (D \cup K)$ et $\partial D \setminus K$ soient connexes. Si F est une fonction CR sur $D \setminus K$ et de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sur $\overline{D} \setminus K$, alors $f = F_{|\partial D \setminus K}$ satisfait l'équation $\overline{\partial}_b f [\partial D \setminus K]^{0,1} = 0$ et de plus

$$\overline{\partial}_b (F \chi_{D \setminus K}) = f [\partial D \setminus K]^{0,1}. \tag{2.1}$$

On se donne maintenant une fonction f continue sur $\partial D \setminus K$ telle que $\overline{\partial}_b f [\partial D \setminus K]^{0,1} = 0$ et on suppose que M satisfait des conditions géométriques qui autorisent la résolution du problème suivant :

$$\overline{\partial}_b T = f [\partial D \setminus K]^{0,1} \tag{2.2}$$

$$\text{supp} T \cup K \text{ est compact.} \tag{2.3}$$

Toute distribution T solution de 2.2 vérifiant la condition de support définit une distribution CR sur $M \setminus (\partial D \cup K)$ nulle sur un ouvert de M. Comme M est 1-concave, elle possède les propriétés suivantes : $T|_{D \setminus K}$ est une fonction CR, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D \setminus K$, et $T|_{M \setminus (\overline{D} \cup K)} = 0$.

Remarquons que si f possède une extension CR F, il résulte de 2.1 et de 2.2 que

$$\overline{\partial}_b (T - F \chi_{D \setminus K}) = 0.$$

La distribution $T - F \chi_{D \setminus K}$ est donc CR et nulle sur un ouvert de M. La 1-concavité de M implique que c'est la fonction nulle.

Pour prouver que $T|_{D \setminus K}$ est l'extension cherchée nous sommes donc naturellement amenés à étudier son comportement près du bord de D. Il s'agit d'un problème local, nous pouvons donc supposer pour cette étude que M est une sous-variété CR générique 1-concave de $\mathbb{C}^n$.

Fixons un point z_0 dans $\partial D \setminus K$. Soit M_0 un voisinage de z_0 dans M et χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans M_0 égale à 1 sur un voisinage U de z_0 relativement compact dans M_0.

Si T est une solution de 2.2 et S une solution de l'équation $\overline{\partial}_b S = \overline{\partial}_b (\chi T)$, la restriction à U de la distribution $T - S$ est CR sur U, c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque M est 1-concave. Le comportement de T près du bord de D au voisinage de z_0 sera donc identique à celui de $S|_U$. Notons qu'en particulier S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \setminus (D \cup K)$ car T est identiquement nulle sur cet ensemble.

Choisissons M_0 assez petit pour que le noyau R_{M_0} construit dans [2] soit défini sur M_0. Le noyau R_{M_0} est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_0 \times M_0 \setminus \Delta(M_0)$, qui vérifie $\overline{\partial}_{b_z} R_{M_0} = (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} [\Delta(M_0)]_{n,n-k}$, où $\Delta(M_0)$ désigne la diagonale de $M_0 \times M_0$ et $[\Delta(M_0)]_{n,n-k}$ la partie de bidegré $(n, n-k)$ en z du courant d'intégration sur $\Delta(M_0)$.

Un argument de dualité associé à la régularité de l'opérateur intégral $\widehat{R}_{M_0}$ défini par le noyau R_{M_0} permet d'étendre l'opérateur $\widehat{R}_{M_0}$ aux $(0,1)$-courants à support compact et on a

$$\overline{\partial}_b \widehat{R}_{M_0} (\overline{\partial}_b (\chi T)) = \overline{\partial}_b (\chi T).$$

De plus $\widehat{R}_{M_0} (\overline{\partial}_b (\chi T)) = \widehat{R}_{M_0} ((\overline{\partial}_b \chi) T) + \widehat{R}_{M_0} (\chi \overline{\partial}_b T)$, il suffit donc d'étudier la restriction à U de chacun des deux termes du second membre.

Puisque $\overline{\partial}_b\chi = 0$ sur U et que les singularités du noyau R_{M_0} sont concentrées sur la diagonale de $M_0 \times M_0$, le premier terme $\widehat{R}_{M_0}((\overline{\partial}_b\chi)T)$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U.

Le second terme s'écrit $\int_{z\in\partial D\cap M_0} \chi(\zeta)f(\zeta)R_{M_0}(z,\zeta)$ si $\zeta \notin \partial D \cap M_0$. Cette intégrale est l'analogue dans le cas CR de la transformation de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n$, car R_{M_0} est une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel. Nous pouvons espérer qu'elle aura des propriétés analogues à celles de la transformation de Bochner-Martinelli classique.

Théorème 2.1. *Soit V une hypersurface réelle orientée de classe $\mathcal{C}^1$ de M telle que $M_0 \setminus V$ possède exactement deux composantes connexes $M_0^\pm$, M_0^+ étant choisie telle que l'orientation de V coïncide avec celle du bord de M_0^+. Si f est une fonction continue à support compact dans $V \cap M_0$, on considère la fonction définie sur $M_0 \setminus V$ par*

$$F(\zeta) = (-1)^{k+n(k+1)+k(k+1)/2} \int_{z\in V\cap M_0} f(\zeta)R_{M_0}(z,\zeta).$$

Si f est hölderienne d'ordre α, les fonctions $F|_{M_0^\pm}$ possèdent des prolongements $F^\pm$ hölderiens d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ à $\overline{M}_0^\pm$ respectivement et

$$F^+|_{V\cap M_0} - F^-|_{V\cap M_0} = f.$$

Démonstration. Remarquons que si Ω est un domaine à bord $\mathcal{C}^\infty$ relativement compact dans M_0^+ tel que $\partial\Omega \cap V \supset \mathrm{supp} f$, on peut remplacer le domaine d'intégration par $\partial\Omega$ sans changer la valeur de l'intégrale.

On suppose que f est höldérienne d'ordre α. Soit $\tilde{f}$ une extension höldérienne d'ordre α de f à M_0, on pose

$$G(\zeta) = (-1)^{k+n(k+1)+k(k+1)/2} \int_{z\in\partial\Omega} (f(z) - \tilde{f}(\zeta))R_{M_0}(z,\zeta).$$

Comme le noyau R_{M_0} satisfait les formules intégrales

$$\int_{z\in\partial\Omega} R_{M_0}(z,\zeta) = (-1)^{k+n(k+1)+k(k+1)/2} \quad \text{si} \quad \zeta \in \Omega$$
$$\int_{z\in\partial\Omega} R_{M_0}(z,\zeta) = 0 \quad \text{si} \quad \zeta \notin \overline{\Omega},$$

on a $G = F - \tilde{f}$ sur Ω et $G = F$ sur $M_0 \setminus \overline{\Omega}$. Nous allons prouver que G est hölderienne d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ sur Ω et sur $M_0 \setminus \overline{\Omega}$, ce qui donnera le résultat cherché.

Posons $c_{n,k} = (-1)^{k+n(k+1)+k(k+1)/2}$, alors

$$
\begin{aligned}
c_{n,k}(G(\zeta_1) - G(\zeta_2)) = & \int_{\substack{z\in\partial\Omega \\ |z-\zeta_1|\leq 2|\zeta_1-\zeta_2|^{1/2}}} (f(z) - \tilde{f}(\zeta_1))R_{M_0}(z,\zeta_1) && (2.4)\\
& - \int_{\substack{z\in\partial\Omega \\ |z-\zeta_1|\leq 2|\zeta_1-\zeta_2|^{1/2}}} (f(z) - \tilde{f}(\zeta_2))R_{M_0}(z,\zeta_2) && (2.5)\\
& + \int_{\substack{z\in\partial\Omega \\ |z-\zeta_1|\geq 2|\zeta_1-\zeta_2|^{1/2}}} (f(z) - \tilde{f}(\zeta_1))(R_{M_0}(z,\zeta_1) - R_{M_0}(z,\zeta_2) && (2.6)\\
& + (\tilde{f}(\zeta_2) - \tilde{f}(\zeta_1)) \int_{\substack{z\in\partial\Omega \\ |z-\zeta_1|\geq 2|\zeta_1-\zeta_2|^{1/2}}} R_{M_0}(z,\zeta_2) && (2.7)\\
& + \tilde{f}(\zeta_1)\int_{z\in\partial\Omega} R_{M_0}(z,\zeta_1) - \tilde{f}(\zeta_2)\int_{z\in\partial\Omega} R_{M_0}(z,\zeta_2). && (2.8)
\end{aligned}
$$

Le dernier terme vaut $\tilde{f}(\zeta_1) - \tilde{f}(\zeta_2)$, si ζ_1 et ζ_2 sont dans Ω, et 0, si ζ_1 et ζ_2 sont dans $M_0 \setminus \overline{\Omega}$, il est donc contrôlé par $|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha$ sur chacun de ces ouverts.

Précisons maintenant les propriétés du noyau R_{M_0} qui vont nous permettre d'estimer les autres termes du second membre.

Sans perte de généralité on peut supposer que M_0 est définie par

$$M_0 = \{z \in \omega | \widehat{\rho}_1(z) = \cdots = \widehat{\rho}_k(z) = 0\},$$

où ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ω à valeurs réelles qui vérifient $d\widehat{\rho}_1(z) \wedge \cdots \wedge d\widehat{\rho}_k(z) \neq 0$ pour tout $z \in M$.

Puisque M est 1-concave, d'après le Lemme 3.1.1 de [1], il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $j = 1, \ldots, k$, les fonctions

$$
\begin{aligned}
\rho_j &= \widehat{\rho}_j + C\sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\rho}_\nu^2 \\
\rho_{-j} &= -\widehat{\rho}_j + C\sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\rho}_\nu^2.
\end{aligned}
$$

possèdent la propriété suivante :

pour tout $I \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \Delta_I$ la forme de Levi de la fonction $\rho_\lambda = \lambda_{i_1}\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_{|I|}}\rho_{i_{|I|}}$ admet au moins $k+1$ valeurs propres strictement positives sur U,

où $\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des parties $I \subset \{\pm 1, \ldots, \pm k\}$ telles que $|i| \neq |j|$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, $|I|$ le nombre d'éléments de I et Δ_I le simplexe des suites $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ des nombres réels $\lambda_j \in [0,1]$ tels que $\lambda_j = 0$ si $j \notin I$ et $\sum \lambda_j = 1$.

Le noyau R_{M_0} est alors contrôlé par une somme de termes de la forme

$$\frac{|\sigma \wedge \partial\rho_{i_1}(z) \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{i_m}(z)|}{\Pi_{\nu=1}^{k+1}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)||\zeta - z|^{2n-3k+m-3}},\ 0 \leq m \leq k$$

où σ est un monôme en $dz_1, \dots, dz_n, d\overline{z}_1, \dots, d\overline{z}_n$, $\lambda^1, \dots, \lambda^{k+1}$ sont des points du simplex de dimension k, $I \in \mathcal{I}'(k)$, qui forment un système de vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^{k+1}$et Φ vérifie l'estimation

$$\mathrm{Re}\ \Phi(z,\zeta,\lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \gamma|\zeta - z|^2. \tag{2.9}$$

On pose $t_\nu = \mathrm{Im}\ \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$ et $dt_\nu = d_\zeta \mathrm{Im}\ \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$. Pour tout multi-indice $(\nu_1, \dots, \nu_k)$ extrait de $(1, \dots, k+1)$, on a

$$|\sigma \wedge \partial\rho_{i_1}(z) \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{i_m}(z)| \leq \sum_{0 \leq |L| \leq m} |\sigma_L \wedge_{l \in L} dt_l|\ |\zeta - z|^{m-|L|}.$$

où $L = (l_1, \dots, l_{|L|})$ est un multi-indice de longueur $|L| \leq k$ extrait de $(\nu_1, \dots, \nu_k)$.

Comme $|L| \leq k$, il existe $\nu_L \in \{1, \dots, k+1\} \setminus L$ et d'après 2.9

$$\begin{aligned}\Pi_{\nu=1}^{k+1}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)||\zeta - z|^{2n-3k+|L|-3} \geq \\ \Pi_{l \in L}|\Phi(z,\zeta,\lambda^l)||\Phi(z,\zeta,\lambda^{\nu_L})||\zeta - z|^{2n-k-|L|-3}.\end{aligned}$$

Pour simplifier les écritures, on note O_s une fonction sur $M_0 \times M_0$ qui est un $O(|z-\zeta|^s)$, en particulier O_0 désignera une constante.

En suivant les estimations du paragraphe 5 de [2] on voit que les termes 2.4 et 2.5 sont contrôlés par des intégrales du type suivant :

$$\int_{\substack{X \in \mathbb{R}^{2n-k-1} \\ |X| \leq c_j|\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2}}} \frac{dX}{|X|^{2n-k-1-\alpha}} \leq O_0\ |\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{\alpha}{2}},$$

lorsque le multi-indice L est vide,

$$\int_{\substack{X \in \mathbb{R}^{2n-k-1} \\ |X| \leq c_j|\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2}}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{|L|+1}(|X_\nu| + |X|^2)\ |X|^{2n-k-|L|-3-\alpha}} \leq O_0\ |\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{\alpha+1}{2}}(1 + |ln|z_1 - z_2||)^{|L|+1},$$

si $0 < |L| < k$, car les fonctions $t_{l_1}, \dots, t_{l_{|L|}}, t_{\nu_L}$ peuvent être utilisées comme coordonnées locales,

$$\int_{\substack{X \in \mathbb{R}^{2n-k-1} \\ |X| \leq c_j|\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2}}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{k}(|X_\nu| + |X|^2)^{1+\frac{1}{k}}\ |X|^{2n-2k-3-\alpha}} \leq O_0\ |\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{\alpha}{2}},$$

si $|L| = k$, en remarquant que

$$\begin{aligned}\Pi_{l \in L}|\Phi(z,\zeta,\lambda^l)||\Phi(z,\zeta,\lambda^{\nu_L})| &= \Pi_{\nu=1}^{k+1}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)| \\ &\geq \min_{\nu_1, \dots, \nu_k \in \{1, \dots, k+1\}} \Pi_{j=1}^{k}|\Phi(z,\zeta,\lambda^{\nu_j})|^{1+\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

Des calculs analogues, mais en intégrant sur les domaines complémentaires, permettent de majorer le terme 2.7 par

$$O_0\ |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha \ln|\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Pour le terme 2.6, on écrit

$$
\begin{aligned}
R_{M_0}(z,\zeta_1) - R_{M_0}(z,\zeta_2) &= \int_{\lambda\in\Delta_{I*}} \frac{N(z,\zeta_1,\lambda)}{\Phi^n(z,\zeta_1,\lambda)} - \frac{N(z,\zeta_2,\lambda)}{\Phi^n(z,\zeta_2,\lambda)} \\
&= \int_{\lambda\in\Delta_{I*}} \frac{N(z,\zeta_1,\lambda) - N(z,\zeta_2,\lambda)}{\Phi^n(z,\zeta_1,\lambda)} + N(z,\zeta_2,\lambda)[\frac{1}{\Phi^n(z,\zeta_1,\lambda)} - \frac{1}{\Phi^n(z,\zeta_2,\lambda)}].
\end{aligned}
$$

Les fonctions $N(z,\zeta,\lambda)$ et $\Phi(z,\zeta,\lambda)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ζ et $N(z,\zeta,\lambda)$ est un O_{k+1-m}, par conséquent $|N(z,\zeta_1,\lambda) - N(z,\zeta_2,\lambda)| \leq |\zeta_1 - \zeta_2| O_{k-m}$ et

$$
\frac{1}{\Phi^n(z,\zeta_1,\lambda)} - \frac{1}{\Phi^n(z,\zeta_2,\lambda)} \leq O_0 \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|z_1 - z_2|}{\Phi^{n-p}(z_1,\zeta,\lambda)\Phi^{p+1}(z_2,\zeta,\lambda)}.
$$

On en déduit une majoration de ce terme par une somme d'intégrales du type suivant :

$$
\begin{aligned}
O_0\ |\zeta_1 - \zeta_2| \sum_{0\leq s\leq k} \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1} \\ 2|\zeta_1-\zeta_2|^{1/2}\leq |X|\leq C}} & \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{s+1}(|X_\nu| + |X|^2)\ |X|^{2n-k-s-2-\alpha}} \\
& \leq O_0\ (|\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{\alpha+1}{2}} + |\zeta_1 - \zeta_2|)(|\ln|\zeta_1 - \zeta_2|| + 1)^{k+1}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
O_0\ |\zeta_1 - \zeta_2| \sum_{0\leq s\leq k} \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1} \\ 2|\zeta_1-\zeta_2|^{1/2}\leq |X|\leq C}} & \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{s}(|X_\nu| + |X|^2)^{1+\frac{1}{s}}\ |X|^{2n-k-s-1-\alpha}} \\
& + O_0\ |\zeta_1 - \zeta_2| \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1} \\ 2|\zeta_1-\zeta_2|^{1/2}\leq |X|\leq C}} \frac{dX}{(|X_1| + |X|^2)\ |X|^{2n-k-1-\alpha}} \\
& \leq O_0\ (|\zeta_1 - \zeta_2|^{\frac{\alpha}{2}} + |\zeta_1 - \zeta_2|).
\end{aligned}
$$

Ces estimations impliquent donc que si f est hölderienne d'ordre α, alors G est hölderienne d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ sur chacun des ouverts Ω et $M_0 \setminus \overline{\Omega}$. □

Nous allons maintenant préciser les propriétés de

$$
F(\zeta) = (-1)^{k+n(k+1)+k(k+1)/2} \int_{z\in V\cap M_0} f(\zeta) R_{M_0}(z,\zeta)
$$

au voisinage des points de $V \cap M_0$, lorsque f est seulement continue.

Pour tout $\zeta \in V \cap M_0$, soient ν un vecteur tangent à M, transverse à V en ζ orienté vers M_0^+ et γ_ν une courbe dans M_0 telle que $\gamma_\nu(0) = \zeta$ et $\gamma'_\nu(0) = \nu$.

Lemme 2.2. *Si f est une fonction continue à support compact dans $V \cap M_0$ et si ζ est un point fixé de $V \cap M_0$, alors $F(\gamma_\nu(h)) - F(\gamma_\nu(-h)) - f(\zeta)$ converge vers 0 quand h tend vers 0 dans les deux cas suivants :*

(i) si ζ est un point générique de $V \cap M_0$ et si la courbe γ_ν est une courbe CR dans M_0 (i.e. son espace tangent en tout point est contenu dans l'espace tangent complexe à M_0),

(ii) si ζ est un point non générique de $V \cap M_0$ et si le module de continuité $\omega_{f,\zeta}$ de f en ζ satisfait $\lim_{\eta\to 0} \omega_{f,\zeta}(\eta) \ln|\eta| = 0$.

Démonstration. On déduit de l'expression de F et des propriétés du noyau R_{M_0} que

$$\begin{aligned} c_{n,k}&(F(\gamma_\nu(h)) - F(\gamma_\nu(-h)) - f(\zeta)) \\ &= \int_{z\in\partial\Omega}(f(z)-f(\zeta))(R_{M_0}(z,\gamma_\nu(h)) - R_{M_0}(z,\gamma_\nu(-h))). \end{aligned}$$

Si η est un nombre réel strictement positif assez petit, alors

$$|\int_{z\in\partial\Omega}(f(z)-f(\zeta))(R_{M_0}(z,\gamma_\nu(h)) - R_{M_0}(z,\gamma_\nu(-h)))| \tag{2.10}$$
$$\leq \int_{z\in\partial\Omega\cap B(\zeta,\eta)} |f(z)-f(\zeta)||R_{M_0}(z,\gamma_\nu(h)) - R_{M_0}(z,\gamma_\nu(-h))| \tag{2.11}$$
$$+ 2\|f\|_\infty \int_{z\in\partial\Omega\setminus B(\zeta,\eta)} |R_{M_0}(z,\gamma_\nu(h)) - R_{M_0}(z,\gamma_\nu(-h))|. \tag{2.12}$$

L'intégrale du terme 2.12 a déjà été estimée lors de l'étude du cas hölderien. Pour $\alpha = 0$ elle est majorée par $O_0|h|(\frac{1}{\eta^2}+1)$.

Pour le terme 2.11, il faut considérer d'une part le cas où le point ζ est un point générique de V et d'autre part le cas où il est non générique.

Si ζ est un point générique de V, on peut supposer que le vecteur ν est contenu dans l'espace tangent complexe à M en ζ et que la courbe γ_ν est une courbe CR de M.

Fixons $\epsilon > 0$. Comme f est continue, on peut choisir η de telle sorte que $|f(z)-f(\zeta)| < \epsilon$, si $z \in B(\zeta,\eta)$. Le terme 2.11 est alors majoré par

$$\epsilon \int_{z\in\partial\Omega\cap B(\zeta,\eta)} |R_{M_0}(z,\gamma_\nu(h)) - R_{M_0}(z,\gamma_\nu(-h))|. \tag{2.13}$$

Il suffit de prouver que l'intégrale de 2.13 est bornée. En effet on aura alors

$$c_{n,k}|F(\gamma_\nu(h)) - F(\gamma_\nu(-h)) - f(\zeta)| \leq O_0(\epsilon + |h|(\frac{1}{\eta^2}+1))$$

ce qui implique que $F(\gamma_\nu(h)) - F(\gamma_\nu(-h)) - f(\zeta)$ converge vers 0 quand h tend vers 0.

Puisque $d_\zeta\Phi$ s'annule à l'ordre 1 en $\zeta = z$, lorsque ζ parcourt une courbe CR de M et puisque la courbe γ_ν est transverse à V en ζ,

$$\begin{aligned} |\Phi(z,\gamma_\nu(h),\lambda) &- \Phi(z,\gamma_\nu(-h),\lambda)| \\ &\leq |\Phi(z,\gamma_\nu(h),\lambda) - \Phi(z,\zeta,\lambda)| + |\Phi(z,\gamma_\nu(-h),\lambda) - \Phi(z,\zeta,\lambda)| \\ &\leq O_0\ |h|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent l'intégrale de 2.13 est contrôlée par

$$O_0|h|^2 \sum_{0\leq s<k} \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1}\\ |X|\leq\eta}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{s+1}(|X_\nu|+|X|^2+h^2)\ (|X|^2+h^2)^{(2n-k-s-1)/2}}$$
$$+\,O_0|h|^2 \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1}\\ |X|\leq\eta}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{k}(|X_\nu|+|X|^2+h^2)^{1+\frac{1}{k}}\ (|X|^2+h^2)^{(2n-2k-1)/2}}$$
$$\leq O_0|h|(|ln|h||+1)^{k+1}\int_0^{\frac{\eta}{|h|}} \frac{r^{2n-k-s-3}\ dr}{(r^2+1)^{(2n-k-s-1)/2}} + O_0\int_0^{\frac{\eta}{|h|}} \frac{r^{2n-2k-2}\ dr}{(r^2+1)^{(2n-2k+1)/2}}$$
$$+\,O_0|h|^2\int_0^{\frac{\eta}{|h|}} \frac{r^{2n-2k-2}\ dr}{(r^2+1)^{(2n-2k-1)/2}},$$

qui est borné.

Considérons maintenant le cas où ζ est un point non générique de V et évaluons le terme 2.11. Il est majoré par

$$\omega_{f,\zeta}(\eta)(\int_{z\in\partial\Omega\cap B(\zeta,\eta)} |R_{M_0}(z,\gamma_\nu(h))| + \int_{z\in\partial\Omega\cap B(\zeta,\eta)} |R_{M_0}(z,\gamma_\nu(-h))|), \tag{2.14}$$

où $\omega_{f,\zeta}(\eta)=\sup_{z\in B(\zeta,\eta)}|f(z)-f(\zeta)|$ désigne le module de continuité de f en ζ.

Les deux intégrales de 2.14 sont du même type. Comme dans le cas hölderien, elles sont contrôlées par des intégrales du type suivant :

$$\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1}\\ |X|\leq\eta}} \frac{dX}{(|X|^2+h^2)^{(2n-k-1)/2}} \leq O_0 \int_0^{\frac{\eta}{|h|}} \frac{r^{2n-2k-2}\ dr}{(r^2+1)^{(2n-2k-1)/2}} \leq O_0\ (|\ln(\frac{\eta}{|h|})|+1),$$

lorsque le multi-indice L est vide,

$$\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1}\\ |X|\leq\eta}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{|L|+1}(|X_\nu|+|X|^2+h^2)\ (|X|^2+h^2)^{(2n-k-|L|-3)/2}}$$
$$\leq O_0\ |h|(1+|ln(|h|)|)^{|L|+1}\int_0^{\frac{\eta}{|h|}} \frac{r^{2n-2k-|L|-3}\ dr}{(r^2+1)^{(2n-2k-|L|-3)/2}}$$
$$\leq O_0(1+|ln(|h|)|)^{|L|+1}\eta,$$

si $0<|L|<k$, et

$$\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k-1}\\ |X|\leq\eta}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{k}(|X_\nu|+|X|^2+h^2)^{1+\frac{1}{k}}\ (|X|^2+h^2)^{(2n-2k-3)/2}} \leq O_0\ (|\ln(\frac{\eta}{|h|})|+1),$$

si $|L|=k$.

On en déduit que

$$c_{n,k}|F(\gamma_\nu(h))-F(\gamma_\nu(-h))-f(\zeta)| \leq O_0[\omega_{f,\zeta}(\eta)((|\ln(\frac{\eta}{|h|})|+1)+(1+|ln(|h|)|)^{|L|+1}\eta)$$
$$+\,|h|(\frac{1}{\eta^2}+1)].$$

En choisissant $\eta = |h|^{\frac{1}{3}}$, l'hypothèse sur le module de continuité de f aux points non génériques de V implique que $F(\gamma_\nu(h)) - F(\gamma_\nu(-h)) - f(\zeta)$ converge vers 0 quand h tend vers 0. $\square$

Théorème 2.3. *Soit V une hypersurface réelle orientée de classe $\mathcal{C}^1$ de M telle que $M_0 \setminus V$ possède exactement deux composantes connexes $M_0^\pm$, M_0^+ étant choisie telle que l'orientation de V coïncide avec celle du bord de M_0^+. Si f est une fonction continue à support compact dans $V \cap M_0$, on considère la fonction définie sur $M_0 \setminus V$ par*

$$F(\zeta) = (-1)^{k+n(k+1)+k(k+1)/2} \int_{z \in V \cap M_0} f(\zeta) R_{M_0}(z, \zeta).$$

On suppose que la fonction $F|_{M_0^-}$ possède un prolongement continu F^- à $\overline{M_0^-}$.

(i) Alors la fonction $F|_{M_0^+}$ possède un prolongement continu F^+ à $\overline{M_0^+} \setminus NG(V)$, où $NG(V)$ désigne l'ensemble des points non génériques de V et

$$F^+|_{(V \cap M_0) \setminus NG(V)} - F^-|_{(V \cap M_0) \setminus NG(V)} = f|_{V \setminus NG(V)}.$$

(ii) Si de plus le module de continuité ω_f de f satisfait $\lim_{h \to 0} \omega_f(h) \ln |h| = 0$ au voisinage des points non génériques de $V \cap M_0$, alors la fonction $F|_{M_0^+}$ possède un prolongement continu F^+ à $\overline{M_0^+}$ et

$$F^+|_{V \cap M_0} - F^-|_{V \cap M_0} = f.$$

Démonstration. Montrons l'assertion (i) pour commencer. Soient z_0 un point fixé de $(V \cap M_0) \setminus NG(V)$, ν_0 un vecteur unitaire transverse à V en z_0, contenu dans l'espace tangent complexe à M_0 en z_0 et orienté vers M_0^+ et $c_0 = \max\{|(\nu_0, \tau)| \mid \tau \in T_{z_0} V\}$. Notons v une fonction définissante de V dans M_0. Nous désignerons par V_t l'hypersurface de M_0 définie par $\{z \in M_0 \mid v(z) = t\}$. Choisissons η_0 assez petit pour que d'une part $|(\nu_0, \frac{\zeta - z_0}{|\zeta - z_0|})| \leq c$ avec $c_0 \leq c < 1$ pour tout $\zeta \in V \cap B(z_0, \eta_0)$ et tout $z \in B(z_0, \eta_0) \cap M_0$ soit un point générique de V_t pour $t = v(z)$ et que d'autre part on puisse définir un champ de vecteurs continu sur $M_0 \cap B(z_0, \eta_0)$ dont chaque élément ν_z est un vecteur unitaire transverse à $V_{v(z)}$ en z et contenu dans l'espace tangent complexe à M_0 en z, qui vérifie $\|\nu_z - \nu_0\| \leq \frac{1-c}{2}$. On note γ_z la courbe intégrale de ce champ passant par z et ζ le point d'intersection de cette courbe avec V. On suppose que η_0 est assez petit pour que l'on puisse choisir une paramétrisation uniforme des courbes γ_z qui vérifie $\gamma_z(\zeta) = 0$, c'est-à-dire que si on désigne par h la valeur du paramètre pour laquelle $\gamma_z(\pm h) = z$ alors $|h|$ est uniformément équivalent à $|z - \zeta|$ pour tout $z \in \cap B(z_0, \eta_0)$.

On a alors pour $z \in M_0^+$

$$\begin{aligned} |F(z) - f(z_0) - F^-(z_0)| \leq |F(\gamma_z(h)) - F^-(\gamma_z(-h)) - f(\zeta)| + |f(\zeta) - f(z_0)| \\ + |F^-(\gamma_z(-h)) - F^-(z_0)|. \end{aligned}$$

Fixons $\epsilon > 0$, il existe alors $\eta_1 > 0$ tel que $|f(\zeta) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, si $|\zeta - z_0| < \eta_1$, car f est continue sur V, et $\eta_2 > 0$ tel que $|F^-(z') - F^-(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, si $|z' - z_0| < \eta_1$, car F^- est continue sur $\overline{M_0^-}$. De plus la continuité uniforme de f et l'assertion (i) du lemme 2.2 impliquent que

$|F(\gamma_z(h)) - F^-(\gamma_z(-h)) - f(\zeta)|$ converge vers 0 uniformément par rapport à $\zeta \in B(z_0, \eta_0)$ quand h tend vers 0. Il existe donc $\eta_3 > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in B(z_0, \eta_0) \cap V$, $|F(\gamma_z(h)) - F^-(\gamma_z(-h)) - f(\zeta)| < \frac{\epsilon}{3}$, si $h < \eta_3$. Soit $\eta > 0$ tel que $\eta \leq \min(\eta_0, \frac{(1-c)\eta_1}{2}, \frac{(1-c)\eta_2}{2}, \frac{(1-c)\eta_3}{2})$. Pour tout $z \in B(z_0, \eta)$, on aura $|F(z) - f(z_0) - F^-(z_0)| < \epsilon$. On peut donc prolonger $F|_{M_0^+}$ en une fonction continue sur $\overline{M_0^+} \setminus NG(V)$.

Pour prouver l'assertion (ii), il reste à étudier ce qui se passe au voisinage des points non génériques de V. Il suffit de remplacer les courbes γ_z du cas précédent par les courbes intégrales du champ de vecteur normal aux V_t et d'utiliser l'estimation (ii) du lemme 2.2, qui est uniforme sur tout compact de V. □

Avant de démontrer le Théorème 0.3, précisons la définition d'une fonction CR de classe $\mathcal{C}^r$ sur une hypersurface V de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, de M.

Si $z_0 \in V$, nous dirons qu'une fonction CR f définie sur un voisinage de z_0 dans V est une *fonction CR de classe* $\mathcal{C}^r$, s'il existe une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^r$ sur un voisinage de z_0 dans la variété X, unique modulo les fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ qui s'annulent à l'ordre r sur V, qui coïncide avec f sur V et dont le $\overline{\partial}$ s'annule à l'ordre $r-1$ sur V. Soient $(z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées locales au voisinage de z_0 dans X, alors les restrictions à V des fonctions $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, n$, ne dépendent pas de l'extension $\tilde{f}$. On note $\frac{\partial f}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, n$, ces restrictions ; elles définissent des fonctions CR de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur V au voisinage z_0.

En revenant aux notations du début de ce paragraphe et en prenant pour V le morceau d'hypersurface $\partial D \cap U$, nous obtiendrons donc la régularité de la solution T du problème 2.2 avec la condition de support 2.3 en étudiant la solution de l'équation $\overline{\partial}_b S = f[V]^{0,1}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que U est contenu dans un domaine de carte de X. De manière analogue à Chirka dans [4], nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Si f est une fonction CR de classe $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r \leq p$ et si S est une fonction CR sur $U \setminus V$ vérifiant $\overline{\partial}_b S = f[V]^{0,1}$, alors les fonctions $\frac{\partial S}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, n$, sont localement intégrables sur U et vérifient*

$$\overline{\partial} \frac{\partial S}{\partial z_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j} [V]^{0,1}.$$

Démonstration. Puisque f est de classe au moins $\mathcal{C}^1$, la fonction CR S, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \setminus V$ car M est 1-concave, s'étend jusqu'à V de chaque côté de V en une fonction hölderienne d'ordre $\frac{1}{2}$, d'après le Théorème 2.1. Par conséquent ses dérivées $\frac{\partial S}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, n$, sont localement intégrables sur U. Elles définissent donc des distributions sur U et des calculs analogues à ceux conduits dans [4] montrent qu'elles vérifient

$$\overline{\partial} \frac{\partial S}{\partial z_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j} [V]^{0,1}.$$

□

Le Théorème 0.3 se déduit alors par une récurrence immédiate du Théorème 2.3 et du Lemme 2.4, car S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \setminus (D \cup K)$.

Références

[1] R. A. Airapetjan and G. M. Henkin. Integral representation of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR function. *Russian Math.Survey*, 39 :41–118, 1984.

[2] M. Y. Barkatou and C. Laurent-Thiébaut. Estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel. *Prépublication de l'Institut Fourier*, 593 :1–46, 2003.

[3] J. Brinkschulte. The $\overline{\partial}_M$-equation and the Hartogs phenomenon on weakly q-pseudoconcave CR manifolds. *Man. Math.*, 120 :181–192, 2006.

[4] E.M. Chirka. Analytic representation of cr-functions. *Mat. Sb. (N.S.)*, 98 :591–623, 1975.

[5] E.M. Chirka and E.L. Stout. Removable singularities in the boundary. In *Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry*, volume E26 of *Aspects of Mathematics*, pages 43–104, 1994.

[6] G. M. Henkin. The Hartogs-Bochner effect on CR manifolds. *Soviet Math. Dokl.*, 29 :78–82, 1984.

[7] G.M. Henkin and V. Michel. Principe de Hartogs dans les variétés CR. *J. Math. Pures Appl.*, 81 :1313–1395, 2002.

[8] C.D. Hill and M. Nacinovich. Pseudoconcave CR manifolds. In *Complex analysis and geometry*, V. Ancona, E. Ballico, A. Silva, eds., Marcel Decker, Inc., New-York.

[9] C. Laurent-Thiébaut. Résolution du $\overline{\partial}_b$ à support compact et phénomène de Hartogs-Bochner dans les variétés CR. volume 52 of *Proc. Symp. Pure Math.*, pages 239–249, 1991.

[10] C. Laurent-Thiébaut. Phénomène de Hartogs-Bochner relatif dans une hypersurface réelle 2-concave d'une variété analytique complexe. *Math. Zeitschrift*, 212 :511–525, 1993.

[11] C. Laurent-Thiébaut. Phénomène de Hartogs-Bochner dans les variétés CR. In *Topics in complex analysis*, volume 31 of *Banach center publications*, pages 233–247, 1995.

[12] C. Laurent-Thiébaut and J. Leiterer. On the Hartogs-Bochner extension phenomenon for differential forms. *Math. Ann.*, 284 :103–119, 1989.

[13] C. Laurent-Thiébaut and J. Leiterer. Some applications of Serre duality in CR manifolds. *Nagoya Math. J.*, 154 :141–156, 1999.

[14] C. Laurent-Thiébaut and J. Leiterer. Malgrange vanishing theorem in 1-concave CR manifolds. *Nagoya Math. J.*, 157 :59–72, 2000.

[15] G. Lupacciolu. Characterization of removable sets in strongly pseudoconvex boundaries. *Ark. Mat.*, 32 :455–473, 1994.

[16] E. Porten. Geometric methods in the study of CR functions and there singularities. Habilitationsschrift, Humboldt-Universität zu Berlin (2004).

[17] R. M. Range. Extension phenomena in multidimensional complex analysis : correction of the historical record. *Math. Intelligencer*, 24 :4–12, 2002.

[18] H. Ricard. Solution avec régularité jusqu'au bord de l'équation de Cauchy-Riemann dans les domaines à coins et de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle en codimension quelconque. Thèse de doctorat de mathématiques de l'Université Joseph Fourier (2002).

Christine LAURENT-THIÉBAUT
Université de Grenoble
Institut Fourier - UMR 5582 CNRS/UJF
BP 74
38402 St Martin d'Hères cedex (France)
`Christine.Laurent@ujf-grenoble.fr`