# Formes modulaires arithmétiques

Bertrand Gorsse et Gilles Robert

Prépublication de l'Institut Fourier n° 689 (2006)
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

**Résumé**

On note $\mathcal{S}_A$ l'anneau des polynômes en l'indéterminée $R$, à coefficients dans l'anneau $B = A\big[[q]\big]$ des séries formelles en $q$ sur un anneau $A$. Sur $\mathcal{S}_A$, on définit :

i) l'opérateur différentiel $\Theta$ en posant $\Theta q = q$ et $\Theta R = R^2$, d'où deux opérateurs différentiels $\partial$ et $\delta$, dits respectivement de Serre et de Shimura, définis par

$$\delta_\lambda = \Theta - \lambda R,\ \partial_\lambda = \Theta - \lambda \frac{E_2}{12}, \quad \text{avec} \quad \lambda \in A,$$

où $\frac{E_2}{12}$, est la série formelle $\frac{1}{12} - 2\sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) q^n$,

ii) pour chaque premier $\ell$, deux applications $A$-linéaires $|U_\ell$ et $|V_\ell$ de $\mathcal{S}_A$ dans lui-même, qui vérifient la relation dite "de Dwork"

$$(f(g|V_\ell))|U_\ell = (f|U_\ell)g \quad \text{pour} \quad f, g \in \mathcal{S}_A;$$

on a $|\delta|U_\ell = \ell|U_\ell|\delta$ et $|\delta|V_\ell = \frac{1}{\ell}|V_\ell\,\delta$.

On sait *cf.* [11], en particularisant $q$ en $e^{2\pi i z}$ et $R$ en $\frac{1}{4\pi y}$ avec $z$ complexe et $y = \operatorname{Im} z > 0$, que l'on a

$$\frac{E_2}{12}(e^{2\pi i z}) - R(z) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{(cz+d)^2|cz+d|^s}$$

ainsi $\eta := \frac{E_2}{12} - R$ se particularise de façon invariante par l'action de poids 2 du groupe modulaire $S\ell_2(\mathbb{Z})$.
Ceci nous permet *dans le cas classique* du § 1, quand $A$ contient $\overline{\mathbb{Q}}$, d'identifier (1.7) la notion de forme modulaire arithmétique de G. Shimura (en genre 1) [20] à celle de polynôme en $\eta$ à coefficients formes modulaires classiques, et *dans le cas p-adique surconvergent* § 2 et 3, de la définir (2.15a) et (3.26), pour $A$ approprié, comme polynôme en $\eta$ à coefficients formes modulaires surconvergentes. Le § 2 considère le poids entier ; le § 3, les familles continues, *cf.* [4], [2], [5].

Nous soulignons certaines propriétés de stabilité de ces espaces de formes modulaires arithmétiques sous l'action de l'opérateur $\delta$ de Shimura : *le point fondamental* *étant que l'opérateur $\partial$ de Serre conserve la notion de modularité*, aussi bien pour les formes modulaires *classiques* (c'est bien connu, *cf.* [22]) que pour les formes modulaires *surconvergentes* (dans le cas de poids entier *cf.* [2] § 4, et § 3 ci-dessous théorème 3.5 dans le cas général).

Les opérateurs de Hecke, dont l'action se déduit (3.25) de celle des applications $A$-linéaires $|U_\ell$ et $|V_\ell$ avec $\ell$ premier, laissent stables (lemme 3.1) ces espaces de formes modulaires arithmétiques ; ils sont compatibles avec $\delta$.

Un autre fil conducteur, à travers les variations déclinées dans les §§ 1, 2 et 3, est la persistance d'un opérateur $A$-linéaire $str$, respectant la stratification par le poids, et coïncidant dans le cas classique avec la "projection holomorphe", *cf.* ci-dessous théorèmes 1.4 et 3.10.

Les points non détaillés, ainsi que beaucoup d'autres résultats, peuvent être trouvés dans [8], thèse.

Une grille de lecture des résultats est la suivante : pour le paragraphe 1, les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4 ; pour le paragraphe 2 le théorème 2.1 ; pour le paragraphe 3 les théorèmes 3.5 et 3.10.

**Mots-clés** : forme modulaire classique ; opérateur différentiel gradué ; opérateur différentiel de Serre (resp. Shimura) ; isomorphisme différentiel gradué ; projection holomorphe ; forme modulaire surconvergente $p$-adique ; forme modulaire arithmétique ; projection stratifiée.

### Abstract

In genus one, this text describe a particular presentation of nearly holomorphic (or arithmetical) modular forms of Goro Shimura [20], which can be extended with essentially no changes to the $p$-adic overconvergent modular forms.

Let $R$ correspond to $\frac{1}{4\pi y}$, with $y = \mathrm{Im} z > 0$, and $q$ correspond to $e^{2\pi i z}$; then the almost holomorphic form

$$\eta := \frac{E_2}{12} - R$$

can be seen as an element of the ring $\mathcal{S}_A$, defined by $\mathcal{S}_A := B[R]$ with $B := A\big[[q]\big]$. We ask that $weight(\eta) := 2$.

Then the other arithmetical modular forms do form a graduated ring (resp. module) of polynomial in $\eta$ with coefficients in the ring (resp. module) of classical (resp. $p$-adic overconvergent) modular forms.

Hence see Alexei A. Panchishkin [15] for each of them we have a "$(q, R)$-development" with value in $\mathcal{S}_A$, for convenient ring $A$. Over $\mathcal{S}_A$ the partial differential operator $\Theta = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$ takes the shape $\Theta q = q$ and $\Theta R = R^2$. We define over $\mathcal{S}_A$ two graduated differential operators $\delta$ and $\partial$, respectively said of Shimura and of Serre, and describe their action on our arithmetical forms : the definition of them is to twist $\Theta f$ by adding $-f\, weight(f) E_2/12$, resp. $-f\, weight(f) R$, so that $\delta f = \partial f + f\, weight(f)\eta$.

That they respect our arithmetical forms comes from i) the very simple fact that

$$\delta_2\, \eta = \eta^2 - \frac{E_4}{144}$$

(this coming from the well known fact that $\Theta\big(\frac{E_2}{12}\big) = \big(\frac{E_2}{12}\big)^2 - \frac{E_4}{144}$) and ii) the respect by differential Serre's operator of both classical and $p$-adic overconvergent modular structures, pushing the weight by $+2$, see theorem 3.5.

One of the important interest of Shimura's differential operator is its compatibility with the action of the usual Hecke's operators (up to a rational factor, it commutes with them).

**Keywords** : classical modular form; graduated differential operator; Shimura's (resp. Serre's) differential operator; graduated differential isomorphism; holomorphic projection; $p$-adic overconvergent modular form; arithmetical modular form; stratified projection.

**2000 Mathematics Subject Classification**: 11Fxx ; 14Hxx ; 32Wxx

# 1 Cas classique

**1.1** Sur l'anneau $\mathcal{S}_A$ des polynômes en $R$ à coefficients dans l'anneau $B = A\big[[q]\big]$ des séries formelles en $q$ sur l'anneau $A$, on définit l'opérateur différentiel $\Theta$ par $\Theta R = R^2$ et $\Theta q = q$ *cf.* e.g. pour $A = \mathbb{Q}$ [15] § 2.5 et 2.8.

Ainsi $\Theta$ agit sur $A\big[[q]\big]$ par $q\frac{d}{dq}$.

Ceci permet, pour tout élément $\lambda$ de $A$, de définir l'opérateur $\delta_\lambda$, de Shimura, par

$$\delta_\lambda f = \Theta f - \lambda f R. \tag{1.1}$$

Par ailleurs l'opérateur de Serre

$$\partial_\lambda f = \Theta f - \lambda f \ \frac{E_2}{12} \tag{1.2}$$

avec $\frac{E_2}{12} = \frac{1}{12} - 2\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n$, et $\sigma_1(n) = \sum_{d|n,d>0} d$, peut également être étendu formellement à $\mathcal{S}_A$ (pourvu que $\frac{1}{6} \in A$). On a

$$\delta_\lambda f = \partial_\lambda f + \lambda f \ \Big(\frac{E_2}{12} - R\Big). \tag{1.3}$$

En attribuant à $\frac{E_2}{12}$ et à $R$ le poids 2, ces opérateurs différentiels peuvent bien sûr être itérés : $\delta_\lambda^{(r+1)} = \delta_{\lambda+2r} \circ \delta_\lambda^{(r)}$ et $\partial_\lambda^{(r+1)} = \partial_{\lambda+2r} \circ \partial_\lambda^{(r)}$ pour $r$ entier $\geq 0$, où $\delta_\lambda^{(0)}$ et $\partial_\lambda^{(0)}$ sont les opérateurs identité.

Or pour $A$ contenant $\overline{\mathbb{Q}}$, l'application $q$-développement (= développement en série de Fourier au voisinage de $i\infty$) permet de définir un plongement de l'anneau $M\mathcal{C}\ell(N)$, gradué par $k$ entier $\geq 0$, des formes modulaires classiques, de niveau $N$ c'est-à-dire stables sous l'action de $\Gamma_1(N)$, dans $A\big[[q]\big]$ ; on identifie $M\mathcal{C}\ell(N)$ à son image dans $A\big[[q]\big]$ par ce plongement.

Plus généralement, à l'aide de la particularisation de $q$ en $e^{2\pi i z}$, de $R$ en $\frac{1}{4\pi y}$ avec $y = \operatorname{Im} z$, pour $z$ élément du $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$, l'opérateur $\Theta$ devenant $\frac{1}{2\pi i}\ \frac{\partial}{\partial z}$, on sait définir ([19] § 3, Lemme 7, ou [8] § 1.1), un anneau $\mathfrak{A}M(N) \subseteq \mathcal{S}_A$, gradué par $k$ entier $\geq 0$, des formes presque modulaires (ou arithmétiques) de niveau $N$.

La strate $\mathfrak{A}M(N)_k$ de poids $k$ de $\mathfrak{A}M(N)$ est appliquée par $\delta_k$ dans la strate $\mathfrak{A}M(N)_{k+2}$ de poids $k+2$ *cf.* [19] § 2, par ailleurs, la strate $M\mathcal{C}\ell(N)_k$ de poids $k$ de $M\mathcal{C}\ell(N)$ est appliquée par $\partial_k$ dans la strate $M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2}$ de poids $k+2$ *cf.* [17], [22].

**1.2** Posons $\eta = \frac{E_2}{12} - R$ : il est bien connu (c'est écrit dans [11] ; cela a probablement [23] été vu par L. Kronecker avant 1890 ; c'est rappelé dans [20] formule (0.7)) que

$$\frac{E_2}{12}(e^{2\pi i z}) - R(z) = \frac{1}{4\pi^2}\ \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}}\ \sum_{(c,d)\neq(0,0)} \frac{1}{(cz+d)^2|cz+d|^s}\,, \tag{1.4}$$

et par suite $\eta = \frac{E_2}{12} - R \in \mathfrak{A}M_{1,2}(1)$. Une preuve élémentaire de ce fait se trouve aussi dans [16] § 4.4 formule (45) et (46).

Or par un calcul immédiat, on déduit de la formule classique $\Theta(\frac{E_2}{12}) = (\frac{E_2}{12})^2 - \frac{E_4}{144}$ *cf.* [14] cor. A.1.4.3, [22] § 3 l'identité

$$\delta_2 \ \eta = \eta^2 - \frac{E_4}{144}, \tag{1.5}$$

avec $E_4/144 = 1/144 + \frac{5}{3}\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n$, et $\sigma_3(n) = \sum_{d|n,d>0} d^3$.

En effet, on a

$$\delta_2\eta = \Theta\Big(\frac{E_2}{12} - R\Big) - 2\Big(\frac{E_2}{12} - R\Big)R = \Big(\frac{E_2}{12}\Big)^2 - 2\,\frac{E_2}{12}\,R + R^2 - \frac{E_4}{144} = \eta^2 - \frac{E_4}{144}.$$

Par ailleurs, appliquant (1.3) avec $\lambda = k$ à la forme modulaire classique $v$ de poids $k$, on obtient

$$\delta_k v = \partial_k v + k \ v \ \eta \tag{1.6}$$

avec $\partial_k v$ forme modulaire classique de poids $k+2$.

Il résulte donc de (1.5) et (1.6) que l'anneau $M\mathcal{C}\ell(N)[\eta]$ des polynômes en $\eta$ à coefficients formes modulaires classiques est stable sous l'action de l'opérateur différentiel $\delta$ de Shimura : précisément, sa strate de poids $k$ est appliquée par $\delta_k$ dans sa strate de poids $k+2$.

De plus, comme il est bien connu [19] Lemme 7, *cf.* aussi [12] Th. 2 § 10, le coefficient du terme de plus haut degré en $R$ d'une forme arithmétique $h \in \mathfrak{A}M(N)$ est une forme classique $v \in M\mathcal{C}\ell(N)$ ; par suite, une récurrence facile sur le degré en $R$ prouve l'identité

$$\mathfrak{A}M(N)_k = (M\mathcal{C}\ell(N)[\eta])_k, \tag{1.7}$$

pour chaque entier $k \geq 0$.

Le théorème 1.1 ci-dessous décrit, à partir de (1.5) et (1.6), la formule de récurrence liant les $(w_i)_{o\leq i\leq r+1}$ aux $(v_i)_{o\leq i\leq r}$ lorsque l'on explicite l'action de $\delta_k$ sur un élément

$$\sum_{i=0}^{r} v_i\,\eta_i \in \mathfrak{A}M_{r,k}(N),$$

avec $v_i \in M\mathcal{C}\ell(N)_{k-2i}$, sous la forme

$$\sum_{i=0}^{r+1} w_i\,\eta_i \in \mathfrak{A}M_{r+1,k+2}(N),$$

avec $w_i \in M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2-2i}$.

**Théorème 1.1** *Soit* $v = \sum_{i=0}^{r} v_i\,\eta^i$ *un élément de* $\mathfrak{A}M_{r,k}(N)$*, avec* $v_i$ *dans* $M\mathcal{C}\ell(N)_{k-2i}$*.*

*Écrivons l'élément* $\delta_k v$ *de* $\mathfrak{A}M_{r+1,k+2}(N)$ *sous la forme* $\delta_k v = \sum_{i=0}^{r+1} w_i\eta^i$, *avec* $w_i$ *dans* $M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2-2i}$. *Alors on a les formules de récurrence :*

$$w_0 = \partial_k v_0 - v_1\phi;$$

*pour* $i = 1, \ldots, r-1$, *on a*

$$w_i = (k+1-i)v_{i-1} + \partial_{k-2i}v_i - (i+1)v_{i+1}\phi;$$

*et enfin si* $r \geq 1$

$$w_r = (k+1-r)v_{r-1} + \partial_{k-2r}v_r,\ w_{r+1} = (k-r)v_r;$$

*avec* $\phi = \frac{E_4}{144}$.

En fait, si *l'on subsitue* $(\delta, \eta)$ avec $\delta = (\delta_\ell)_{\ell \text{ entier}}$ l'indice $\ell$ étant égal au poids de la forme sur laquelle $\delta_\ell$ agit, *en lieu et place de* $(q\frac{d}{dq}, \frac{E_2}{12})$ ; les formules du Théorème 1.1 coïncident avec celles donnant l'action de $q\frac{d}{dq}$ sur l'anneau gradué $M\mathcal{C}\ell\big[\frac{E_2}{12}\big]$ (*cf.* aussi [3], § 9 p.34).

D'ailleurs par [4] on sait que $\frac{E_2}{12}$ est transcendant sur l'anneau gradué des formes modulaires $p$-adiques surconvergentes (de poids entier) *cf.* § 2 ; *a fortiori* $\frac{E_2}{12}$ est transcendant sur l'anneau gradué $M\mathcal{C}\ell$ des formes modulaires classiques.

Pour définir un isomorphisme $i$ de l'anneau gradué $M\mathcal{A}\big[\frac{E_2}{12}\big]$, muni de l'opérateur $q\frac{d}{dq}$, sur l'anneau gradué $M\mathcal{A}[\eta]$, muni de l'opérateur différentiel $\delta$ agissant strate par strate, il suffit donc de demander :

i) $i$ agit sur $M\mathcal{A}$ par l'application identique ;

ii) $i$ applique $\frac{E_2}{12}$ sur $\eta = \frac{E_2}{12} - R$ ;

Bien évidemment cet isomorphisme respecte la stratification par le poids. De plus, il vient :

iii) *sur un élément homogène de* $M\mathcal{C}\ell\big[\frac{E_2}{12}\big]$ *de poids* $\ell$, *on a* $i^\star(q\frac{d}{dq}) = \delta_\ell$.

En effet, par i) et ii) le monôme $v\big(\frac{E_2}{12}\big)^a$, où $v \in M\mathcal{C}\ell_{\ell-2a}$, est appliqué par $i$ sur le monôme $v\eta^a$ ; et vu les propriétés des opérateurs différentiels $q\frac{d}{dq}$ d'une part et $\delta_\ell$ d'autre part, il suffit de prouver les deux identités suivantes, déduites de (1.5) et de (1.3),

$$\delta_2\Big(i\Big(\frac{E_2}{12}\Big)\Big) = \eta^2 - \frac{E_4}{144} = i\Big(\frac{E_2}{12}\Big)^2 - \frac{E_4}{144} = i\Big(q\frac{d}{dq}\ \frac{E_2}{12}\Big) := i^\star\Big(q\frac{d}{dq}\Big)\Big(\frac{E_2}{12}\Big) \tag{1.8}$$

et pour $v$ forme modulaire classique de poids $k$

$$\begin{aligned}\delta_k(i(v)) = \partial_k\, v + k\, v\, \eta = \partial_k\, v + k\, v\, i\Big(\frac{E_2}{12}\Big)&\\ = i\Big(q\frac{d}{dq}v\Big) := i^\star\Big(q\frac{d}{dq}\Big)(v).&\end{aligned} \tag{1.9}$$

Autrement dit, on a :

**Théorème 1.2** *L'homomorphisme $i$ de l'anneau $M\mathcal{C}\ell\big[\frac{E_2}{12}\big]$ dans l'anneau $M\mathcal{C}\ell[\eta]$ qui applique $\frac{E_2}{12}$ sur $\eta = \frac{E_2}{12} - R$, et qui agit sur les coefficients dans $M\mathcal{C}\ell$ par l'identité, est un isomorphisme.*

*Il respecte la stratification par le poids, et sur la strate de poids $k$ on a*

$$i^{\star}\Big(q\frac{d}{dq}\Big) = \delta_k,$$

*de sorte que $i$ est un isomorphisme de l'anneau différentiel $\big(M\mathcal{C}\ell\big[\frac{E_2}{12}\big], q\frac{d}{dq}\big)$ sur l'anneau différentiel $(M\mathcal{C}\ell[\eta], \delta)$.*

Soit $\nu_k$ le plongement naturel de $M\mathcal{C}\ell(N)_k$ dans $\mathfrak{A}M(N)_k$. Alors pour $k$ entier $> 2$, il résulte des formules du Théorème 1.1, que l'application $A$-linéaire

$$(\nu_k, \delta_{k-2}) : M\mathcal{C}\ell(N)_k \oplus \mathfrak{A}M(N)_{k-2} \longrightarrow \mathfrak{A}M(N)_k$$

est un isomorphisme *cf.* Théorème 1.4.

Ainsi pour chaque $h \in \mathfrak{A}M(N)_k$, avec $k$ entier $> 2$, il existe un élément unique $str_k(h) \in M\mathcal{C}\ell(N)_k$ tel que

$$h = str_k(h) + \delta_{k-2}\, g \tag{1.10}$$

avec $g \in \mathfrak{A}M(N)_{k-2}$. L'application $h \mapsto str_k(h)$ de $\mathfrak{A}M(N)_k$ vers $M\mathcal{C}\ell(N)_k$ est $A$-linéaire, et on a $str_k \circ \nu_k = id_{M\mathcal{C}\ell}$, avec $M\mathcal{C}\ell = M\mathcal{C}\ell(N)_k$.

Comme pour $f \in M\mathcal{C}\ell(N)_k$, $f$ parabolique, on a $< f, \delta_{k-2}(g) >_N = 0$, où $< \,,\, >_N$ désigne le produit scalaire de Petersson, comme observé dans [19], Lemme 6, *cf.* aussi [12] ; il résulte de (1.10) que $str_k$ coïncide avec la projection holomorphe [21] §3, Prop. 3.1 p. 590, [12] § 10, ou [6], thèse th. 1.2.2, de $\mathfrak{A}M(N)_k$ sur $M\mathcal{C}\ell_k(N), k > 2$.

**Exemple 1.3**

1. *Vu* (1.5) *on a* $str_4(\eta^2) = \frac{E_4}{144}$.
2. *En poids $k = 2$, l'image de $(id, \delta_{k-2})$ est $M\mathcal{C}\ell(N)_2 \subsetneq \mathfrak{A}M(N)_2 (= M\mathcal{C}\ell(N)_2 + A\eta)$ et $str_2(\eta)$ n'est pas défini.*

**Théorème 1.4** *Pour $k$ entier $\geq 2$ et $r \geq 0$ tel que $2r \leq k - 2$, l'application de récurrence $\phi_r$ donnant $(w_1, \ldots, w_{r+1})$ à partir de $(v_0, \ldots, v_r)$ décrite dans le théorème 1.1 (avec $k$ remplacé par $k - 2$) est $A$-linéaire.*

*Si de plus $k > 2$, alors $\phi_r$ est inversible : en effet, sa matrice est triangulaire et sa diagonale fait apparaître les entiers $(k-2, \ldots, k-2-r)$ ; ceux-ci sous l'hypothèse faite sont tous $\geq 1$, et donc inversibles (dans $A$).*

*Il s'ensuit que l'application $A$-linéaire*

$$(\nu_k, \delta_{k-2}) : M\mathcal{C}\ell(N)_k \oplus \mathfrak{A}M(N)_{k-2} \longrightarrow \mathfrak{A}M(N)_k$$

*est un isomorphisme, d'où l'existence d'une unique application A-linéaire* $str_k$ *caractérisée par* (1.10)

$$str_k : \mathfrak{A}M(N)_k \longrightarrow M\mathcal{C}\ell_k$$

*telle que* $str_k \circ \nu_k = id_{M\mathcal{C}\ell}$*, avec* $M\mathcal{C}\ell = M\mathcal{C}\ell(N)_k$.

*Cette application* $str_k, k > 2$*, n'est autre que la projection holomorphe de [21] § 3, [12] §10, [6], th 1.2.2.*

### 1.3 Conséquences et variations

**Remarque 1.5** *Faisant* $A = \mathbb{C}$*, on déduit donc du théorème 1.2 un isomorphisme de l'anneau différentiel des formes modulaires quasi holomorphes de niveau* $N$ *dont on sait [13] § 1, Prop. 1, qu'il est identique à* $\left(M\mathcal{C}\ell(N)\left[\frac{E_2}{12}\right],\, D = q\frac{d}{dq}\right)$*, avec* $D\left(\frac{E_2}{12}\right) = \left(\frac{E_2}{12}\right)^2 - \frac{E_4}{144}$*, sur l'anneau des formes modulaires arithmétiques* $(M\mathcal{C}\ell(N)[\eta], \delta)$*, avec* $\delta = (\delta_\ell)_{\ell\, entier}$ *, l'action de* $\delta$ *se faisant strate par strate.*

**Remarque 1.6** *Le point de vue précédent peut être adapté aux formes modulaires de poids* $\frac{1}{2}-$*entier (comme d'ailleurs la théorie des formes quasi-holomorphes peut l'être).*

*On notera qu'en poids* $k = \frac{1}{2} + \lambda$ *avec* $\lambda$ *entier* $\geq 0$*, la projection A-linéaire* $str_k$ : $\mathfrak{A}M(N)_{1/2+\lambda} \longrightarrow M\mathcal{C}\ell(N)_{1/2+\lambda}$ *avec* $4|N$ *est toujours définie.*

**Remarque 1.7** *L'isomorphisme i du théorème 1.2 peut être qualifié de canonique, car le A-module* $M\mathcal{C}\ell_2(1)$ *est réduit à* $\{0\}$*. Il commute avec les opérateurs de Hecke, cf. Rmq 2.2.*

Cependant pour $N$ arbitraire, considérons $\rho \in M\mathcal{C}\ell_2(N)$ une forme modulaire classique de poids 2, et de niveau $N$. Alors

$$\eta_\rho := \eta - \rho$$

est une forme modulaire de $\mathfrak{A}M_{1,2}(N)$, et l'on a les relations analogues à (1.5) et (1.6) :

$$\delta_2(\eta_\rho) = (\eta_\rho)^2 - \phi(\rho), \tag{1.5a}$$

avec $\phi(\rho) = \rho^2 + \partial_2\rho + \frac{E_4}{144} \in M\mathcal{C}\ell_4(N)$ ; et pour $v$ une forme modulaire classique de poids $k$,

$$\delta_k\, v = \partial_k^{(\rho)} v + k\, v\, \eta_\rho, \tag{1.6a}$$

avec $\partial_k^{(\rho)}$ lié à $\partial_k$ par $\partial_k^{(\rho)} = \partial_k + k\rho$ ; l'opérateur différentiel $\partial_k^{(\rho)}$ applique donc à nouveau $M\mathcal{C}\ell(N)_k$ dans $M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2}$. De plus, l'isomorphisme

$$\mathfrak{A}M(N) \simeq M\mathcal{C}\ell(N)[\eta_\rho]$$

ne modifie pas la stratification par le poids.

*On peut alors définir un isomorphisme d'anneaux gradués*

$$i_\rho : M\mathcal{C}\ell(N)\Big[\frac{E_2}{12}\Big] \longrightarrow \mathfrak{A}M(N)$$

*en posant*

i) $i_\rho$ agit sur $M\mathcal{C}\ell(N)$ par l'application identiques ;

ii$_\rho$) $i_\rho$ applique $\frac{E_2}{12}$ sur $\eta_\rho = \eta - \rho$.

Pour obtenir un isomorphisme d'anneaux différentiels, redonnant du côté arithmétique l'opérateur de Shimura $\delta$, il convient sur $M\mathcal{C}\ell(N)\big[\frac{E_2}{12}\big]$ de tordre l'opérateur $q\frac{d}{dq}$ en l'opérateur $\big(q\frac{d}{dq}\big)^{(\rho)}$ de la façon suivante :

iv$_\rho$) $\big(q\frac{d}{dq}\big)^{(\rho)}\ \big(\frac{E_2}{12}\big) := \big(q\frac{d}{dq}\big)\ \big(\frac{E_2}{12}\big) - \partial_2\rho - \rho^2$ ;

v$_\rho$) pour $v$ forme modulaire classique de poids $k$, $\big(q\frac{d}{dq}\big)^{(\rho)}(v) := \big(q\frac{d}{dq}\big)(v) + k\,\rho\,v$.

Vu (1.5a) et (1.6a), on vérifie alors sans peine les identités

$$\delta_2\Big(i_\rho\Big(\frac{E_2}{12}\Big)\Big) = i_\rho^\star\Big(\Big(q\frac{d}{dq}\Big)^{(\rho)}\Big)\Big(\frac{E_2}{12}\Big), \tag{1.8a}$$

$$\delta_k(i_\rho(v)) = i_\rho^\star\Big(\Big(q\frac{d}{dq}\Big)^{(\rho)}\Big)(v), \tag{1.9a}$$

analogues de (1.8) et (1.9). Par suite, il vient :

iii$_\rho$) *sur un élément homogène de* $M\mathcal{C}\ell(N)\big[\frac{E_2}{12}\big]$ *de poids* $\ell$, *on a* $i_\rho^\star\big((q\frac{d}{dq})^{(\rho)}\big) = \delta_\ell$.

**Remarque 1.8** *On peut se demander dans la remarque précédente si l'on peut trouver* $\rho$ *de façon que*

$$\phi(\rho) = \rho^2 + \partial_2\rho + \frac{E_4}{144} = 0.$$

*Autrement dit, comme* $\partial_2\rho = \Theta\rho - 2\rho\frac{E_2}{12}$, *a-t-on*

$$\Theta\rho = -\Big(\rho - \frac{E_2}{12}\Big)^2 + \Big(\frac{E_2}{12}\Big)^2 - \frac{E_4}{144} \quad ? \tag{1.11}$$

*Or cette équation différentielle définit la série* $\rho \in A\big[[q]\big]$ *de façon unique, et une solution en est déjà connue* $\rho = \frac{E_2}{12}$ *; c'est donc la seule, mais comme on le sait* $\frac{E_2}{12}$ *n'est pas modulaire.*

## 2 Cas $p$-adique surconvergent : poids entier

**2.1** Soit $p$ un nombre premier, et $K$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans le corps $\mathbb{C}_p$ (= corps de Tate). Soit $N$ entier, $(N,p) = 1$.

On note

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k(K, N, v)$$

l'anneau des formes modulaires $p$-adiques $v$-surconvergentes au-dessus de $K$, de poids $k \in \mathbb{Z}$, et de niveau $N$. La proposition 8 de [4] prouve que $\frac{E_2}{12}$ est transcendant sur $\mathcal{M}$ ; ce résultat est complété par la preuve de la stabilité de l'anneau de polynôme $\mathcal{M}\big[\frac{E_2}{12}\big]$ dans loc. cit., à la fois par l'opérateur d'Atkin $|U_p$ et par $\Theta = q\frac{d}{dq}$.

En fait, pour $\ell$ premier, les opérateurs $|U_\ell$ et $|V_\ell$ peuvent être définis sur l'anneau de polynômes $\mathcal{S}_A = B[R]$ avec $B = A\big[[q]\big]$ en posant, pour tout monôme $h\,R^m$ avec $m$ entier $\geq 0$ et $h = \sum_{n\geq 0} a_n q^n, a_n \in A$,

$$h\,R^m|U_\ell = \ell^m(\sum_{n\geq 0} a_{n\ell}\,q^n)R^m, \tag{2.12}$$

$$h\,R^m|V_\ell = \frac{1}{\ell^m}(\sum_{n\geq 0} a_n\,q^{\ell n})R^m, \tag{2.13}$$

et en les étendant par linéarité à $\mathcal{S}_A$.

Leur compatibilité avec l'opérateur de Shimura $\delta_\lambda, \lambda \in A$, *cf.* [8] Chap. I, est donnée par

$$\ell|U_\ell|\delta_\lambda = |\delta_\lambda|U_\ell \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ell}|V_\ell|\delta_\lambda = |\delta_\lambda|V_\ell\ ; \tag{2.14}$$

on vérifie de plus sans difficulté (en la ramenant par linéarité au cas de monômes $f_1R^a$ et $g_1R^b$, avec $f_1, g_1 \in B$ et $a, b$ entiers $\geq 0$) la relation

$$(f(g|V_\ell))|U_\ell = (f|U_\ell)g \tag{2.15}$$

pour tous $f, g \in \mathcal{S}_A$. Autrement dit, pour $\ell$ premier, les opérateurs $|U_\ell$ et $|V_\ell$ vérifient sur $\mathcal{S}_A$ la “relation de Dwork”.

Pour que le $q$-développement des éléments de l'anneau $\mathcal{M}$ des formes modulaires surconvergentes appartienne à $A\big[[q]\big]$, on choisit pour $A$ le corps $K$, ou bien $\mathbb{C}_p$.

La transcendance de $\frac{E_2}{12}$ sur $\mathcal{M}$ rappelée ci-dessus permet d'étendre les isomorphismes $i_\rho, \rho \in MC\ell_2(N)$, du § 1 en des isomorphismes différentiels

$$i^s_\rho : \Big(\mathcal{M}\Big[\frac{E_2}{12}\Big], \Big(q\frac{d}{dq}\Big)^{(\rho)}\Big) \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathcal{M}[\eta_\rho], \delta) \tag{2.15a}$$

avec $\eta_\rho = \Big(\frac{E_2}{12} - \rho\Big) - R$, et l'action de $\delta$ se faisant toujours strate par strate.

Ainsi, on a la conséquence suivante du théorème 2, p.33 de loc.cit.

**Théorème 2.1** *Soit $n$ un entier $\geq 0$, et notons $\delta^{(n+1)}$ l'opérateur de Shimura itéré $(n+1)$-fois.*

*Alors les restrictions aux éléments de $M_{-n}(K, N, v)$ des opérateurs différentiels $\Theta^{n+1}$ et $\delta^{(n+1)}_{-n}$ coïncident, et par [4] appliquent le module $M_{-n}(K, N, v)$ dans $M_{n+2}(K, N, v)$.*

**Remarque 2.2**

1. *L'isomorphisme (2.15a) reste valable pour $\rho \in M_2(K, N, v)$ surconvergente (de poids 2, et niveau $N$).*
2. *L'isomorphisme canonique $i_0^s$ avec $\rho = 0$ commute avec les opérateurs de Hecke $T_\ell$, $\ell$ premier (définis dans [4] d'une part, et ci-dessous identité* (2.19) *d'autre part).*

**2.2** Une forme modulaire particulière

$$\rho = \frac{E_2^\star}{12} = \frac{1}{12} + \frac{2}{p-1} \sum_{n \geq 1} \sigma_1^\star(n) q^n \tag{2.16}$$

avec $\sigma_1^\star(n) = \sum_{\substack{d>0, d|n \\ (d,p)=1}} d$, qui appartient à $M\mathcal{C}\ell_2(p)$ et est invariante par $\Gamma_0(p)$, paraît ici particulièrement intéressante.

En effet, en posant $\widetilde{E}_2 = E_2 - E_2^\star$, on a l'identité

$$\frac{\widetilde{E}_2}{12}\,(e^{2\pi i z}) - R(z) = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{p}{p-1} \lim_{\substack{s \to 0 \\ s>0}} \sum_{\substack{(c,d) \\ (c,p)=1}} \frac{1}{(cz+d)^2 |cz+d|^s} \tag{2.17}$$

qui implique l'appartenance de $\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R$ à $\mathfrak{A}M_{1,2}(p)$, et son invariance par $\Gamma_0(p)$ (sous l'action de poids 2) ; ainsi par différence il résulte de (1.4) et (2.17) que

$$\frac{E_2^\star}{12} = \Big(\frac{E_2}{12} - R\Big) - \Big(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R\Big)$$

appartient bien à $M\mathcal{C}\ell_2(p)$.

Comme $\dfrac{\widetilde{E}_2}{12} = \dfrac{p}{p-1}\dfrac{E_2}{12}\big|(1 - V_p)$, l'identité (2.17) ci-dessus résulte de (1.4) en appliquant l'opérateur $|(1 - V_p)$ à ses deux membres, où $V_p$ transforme $z$ en $pz$ ; on ajuste le résultat en multipliant par $\frac{p}{p-1}$.

Le $q$-développement de $\widetilde{E}_2/12$ est donné par

$$\frac{\widetilde{E}_2}{12}\,(q) = -2\,\frac{p}{p-1} \sum_{n \geq 1} p^{v_p(n)} \sigma_1^\star(n) q^n. \tag{2.18}$$

**Remarque 2.3** *Si* $\tilde{\eta} := \eta_\rho = \eta - \frac{E_2^\star}{12}$, *on a l'isomorphisme* $\mathfrak{A}M(Np^n) \simeq M\mathcal{C}\ell(Np^n)[\tilde{\eta}]$, $n$ *entier* $\geq 1$.

**2.3** Sur l'image par l'application $q$-développement des éléments de $\mathcal{M}[\tilde{\eta}]$, de poids $k$ niveau $N$ avec $(N, p) = 1$ et caractère $\psi \mod Np^n$ sous l'action de $\Gamma_0(Np^n)$, posons

$$|_{k,\psi}\, T_\ell = |U_\ell + \psi(\ell)\, \ell^{k-1} |V_\ell \tag{2.19}$$

(bien sûr, le caractère multiplicatif $\psi \mod Np^n$ doit prendre ses valeurs dans l'anneau $A$).

La compatibilité de l'opérateur de Hecke $|T_\ell$ avec l'opérateur de Shimura $\delta_\lambda, \lambda \in A$, est donnée par

$$\ell|_k\, T_\ell|\, \delta_\lambda = |\delta_\lambda|_{k+2}\, T_\ell \tag{2.20}$$

*cf.* [8], chap. I ; rappelons que pour $\lambda = k$ l'opérateur $\delta_k$ applique $\mathcal{M}[\eta]_k$ dans $\mathcal{M}[\eta]_{k+2}$ : en effet, pour chaque poids entier $t$, on a $\delta_t = \partial_t + t\eta$ et l'opérateur de Serre $\partial_t$ applique $\mathcal{M}_t$ dans $\mathcal{M}_{t+2}$ *cf.* [2], p. 222, identité (4.2) et aussi ci-dessous § 3, théorème 3.5. Notons en particulier

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R\Big)\Big|_{2,id}\, T_\ell &= (1+\ell)(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R), \ell \neq p, \\ \Big(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R\Big)\Big|U_p &= p(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Plus généralement, en raisonnant comme pour prouver l'identité (1) p. 32 de [4], on a

$$(h\tilde{\eta})\big|\frac{1}{p}\, U_p = (h|U_p)\tilde{\eta} + (h|U_p)\,\frac{E_2^\star}{12} - \Big(\frac{hE_2^\star}{12}\Big)\Big|U_p \tag{2.22}$$

pour tout élément $h$ de $\mathcal{S}_A$, avec $\tilde{\eta} = \frac{\widetilde{E_2}}{12} - R$ ; en effet, à l'aide pour $\ell = p$ de notre version (2.14) de la “relation de Dwork”, comme $\eta = \tilde{\eta} + \frac{E_2^\star}{12}$ et $\tilde{\eta} = \frac{p}{p-1}\eta\big|(1 - V_p)$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p}(h\tilde{\eta})|U_p &= (h\eta)|U_p - (h(\eta|V_p))|U_p \\ &= (h\tilde{\eta})|U_p + \Big(h\frac{E_2^\star}{12}\Big)\Big|U_p - (h|U_p)\,\frac{E_2^\star}{12} - (h|U_p)\tilde{\eta}; \end{aligned} \tag{2.23}$$

d'où (2.22) résulte immédiatement.

Fixons $r$ entier $\geq 0$ ; comme noté dans loc. cit. Remark 2, p. 32-33, il résulte de (2.22) que la restriction de l'opérateur $|U_p$ à la partie de degré en $\tilde{\eta}$ inférieure à $r$ de la strate $\mathcal{M}[\tilde{\eta}]_k$ de poids $k$ est complètement continue ; de polynôme caractéristique

$$\prod_{s=0}^{r} P(k-2s, p^sT), \tag{2.24}$$

où $P(k,T)$ désigne le polynôme caractéristique de la restriction à $\mathcal{M}_k(v) := M_k(K,N,v)$ de $|U_p$ — que l'on sait complètement continu [7], [13] et [9].

D'où un polynôme caractéristique pour $|U_p$ agissant sur $\mathcal{M}[\tilde{\eta}]_k$, à savoir

$$\prod_{s\geq 0} P(k-2s, p^sT).$$

# 3 Cas $p$-adique surconvergent : familles continues

**3.1** Beaucoup des difficultés qui pourraient maintenant surgir pour étendre cet opérateur $|U_p$ — quand les familles de formes modulaires $p$-adiques surconvergentes sont substituées aux formes modulaires surconvergentes de poids entier (cas du § 2) — semblent déjà avoir été surmontées par les travaux fondateurs de [3] et [5].

Dorénavant on suppose que l'anneau $A$ des coefficients de $\mathcal{S}_A$ est l'anneau des fonctions rigides sur le groupe rigide analytique $\mathcal{B}$ (= isomorphe au disque ouvert de rayon 1, centré en l'élément unité et muni de sa structure de groupe multiplicatif, dans $K^x$ (resp.$\mathbb{C}_p^x$)) à coefficients dans $K$ (resp. $\mathbb{C}_p$) *cf.* [5], § 1.4.

Nous identifions le $A$-module des (familles de) formes modulaires surconvergentes de niveau $N, p \nmid N$, soit $\mathcal{M}^\dagger(N)$, à leurs q-développements à valeurs dans $A(\mathcal{U})\big[[q]\big]$, où $\mathcal{U}$ est un sous-espace ouvert admissible de $\mathcal{B}$ *cf.* [5] §2.4.

Dans la définition (2.19) de $|T_\ell$, pour $\ell$ premier, on se libère de la contrainte de la multiplication par $\psi(\ell)\ell^{k-1}$ en la remplaçant *cf.* [5] lemme 3.4.1, par l'action d'un opérateur diamant $< \ell >^\star$ *cf.* loc. cit. et [3] § B5 qui permet de poser :

$$\begin{cases} |T_\ell & := |U_\ell + \frac{1}{\ell}| < \ell >^\star |V_\ell, \quad \text{si } \ell \nmid pN \\ |T_\ell & := |U_\ell, \quad \text{si } \ell | pN \end{cases} \tag{3.25}$$

agissant sur les éléments de $\mathcal{M}^\dagger(N)$.

On introduit alors $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N)$ le $A$-module des formes modulaires arithmétiques surconvergentes, en posant

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N) := \mathcal{M}^\dagger(N)[\eta]. \tag{3.26}$$

Bien sûr, on attribue à $\eta$ le poids 2 (la multiplication par $\eta$ décale le caractère-poids par multiplication par $(\tau^2, \eta_2)$ les notations étant celles de [5] § 1.4, en particulier $\tau$ désigne le caractère de Teichmüller).

Si $\ell = (\ell_N, \pi(\ell)) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\star \times \mathbb{Z}_p^\star$ nous définissons l'action de $< \ell >^\star$ sur les monômes $F\eta^a$ avec $F \in \mathcal{M}^\dagger(N)$ et $a$ entier $\geq 0$ par l'identité

$$(F\eta^a)| < \ell >^\star := \pi(\ell)^{2a}(F| < \ell >^\star)\eta^a \tag{3.27}$$

(car $\eta$ est invariant de poids 2 sous $S\ell_2(\mathbb{Z})$) ; puis nous étendons $< \ell >^\star$ à $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N) = \mathcal{M}^\dagger(N)[\eta]$ par linéarité.

Les opérateurs différentiels $\delta$ et $\partial$, *cf.* définition 3.3 ci-dessous sont compatibles sur $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N)$ à l'action de $< \ell >^\star$, et l'on a

$$|D| < \ell >^\star = \pi(\ell)^2| < \ell >^\star |D \tag{3.28}$$

où $D$ désigne au choix $\partial$ ou $\delta$.

Comme $|U_\ell$ et $|V_\ell$ pour $\ell$ premier ont déjà été définis sur l'anneau $\mathcal{S}_A = (A\big[[q]\big])[R]$, il s'ensuit :

**Lemme 3.1**

*a) Sur les éléments de* $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N) = \mathcal{M}^\dagger(N)[\eta]$, *on définit les opérateurs de Hecke* $|T_\ell$, $\ell$ *premier, à l'aide des identités* (3.25) *et* (3.27) *(si* $\ell \nmid pN$, *on a donc* $\pi(\ell) = \ell$*).*

*b) Il résulte alors de* (2.13) *et de* (3.28) *que l'on a* $f|\delta|T_\ell = \ell f|T_\ell|\delta$ *pour tout* $f \in \mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N)$.

## 3.2

**Définition 3.2** *On décompose chaque caractère-poids* $\kappa \in W_N$, *avec*

$$W_N = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^x \times \mathbb{Z}_p^x, \mathbb{C}_p^x)$$

*muni de sa structure de groupe analytique rigide cf. [5] § 1.4, comme un couple* $\kappa = (\psi, <\kappa>)$ *où* $\psi \in \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^x, \mathbb{C}_p^x)$ *et où* $<\kappa>$ *est un élément de* $\mathcal{B} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}$ $(1 + p\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p^x)$.

Sur $\mathcal{B}$ on définit un homomorphisme

$$\log : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

en posant

$$\log\theta := \log_p(\theta(u))/\log_p(u), \quad \theta \in \mathcal{B}\ ; \tag{3.29}$$

ici $u \in 1 + p\,\mathbb{Z}_p$ et $v_p(u-1) \geq 1$ et le membre de droite de (3.29) est indépendant du choix de $u$. Le noyau de l'homomorphisme $\log : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est le sous-groupe $\mathcal{B}_{\mathrm{tors}}$ de torsion de $\mathcal{B}$, formé des caractères d'ordre fini à valeurs racines $p^n$-ièmes de l'unité (pour $n$ entier suffisemment grand).

Si $\theta \in \mathcal{B}$ est défini sur $K$, alors $\log\theta \in K$.

**Définition 3.3** *Sur* $\mathcal{S}_A$ *on définit les opérateurs de dérivation de Serre, resp. Shimura, par*

$$\partial_{<\kappa>} = \Theta - \log <\kappa> \frac{E_2}{12},\ <\kappa> \in \mathcal{B},$$
$$\textit{resp.}\quad \delta_{<\kappa>} = \Theta - \log <\kappa> R,\ <\kappa> \in \mathcal{B},$$

*de sorte que*

$$\delta_{<\kappa>} = \partial_{<\kappa>} + \log <\kappa> \eta.$$

*On pose aussi* $\tilde{\partial}_{<\kappa>} = \Theta - \log <\kappa> \widetilde{\frac{E_2}{12}}$ *de sorte que* $\delta_{<\kappa>} = \tilde{\partial}_{<\kappa>} + \log <\kappa> \tilde{\eta}$.

**Définition 3.4** *Pour* $k$ *entier rationnel, on note* $n_k$ *le caractère de poids entier* $k$ *: avec les rotations de [5] § 1.4, on a donc* $n_k := \tau^k\eta_k$ *où* $\eta_k$ *est l'homomorphisme*

$$x \longmapsto x^k$$

*de* $1 + p\mathbb{Z}_p$ *dans* $\mathbb{C}_p^x$.

Si l'on prouve que $\partial_{<\kappa>}$ (et donc $\tilde{\partial}_{<\kappa>}$) applique la strate $\mathcal{M}(N)_\kappa$ de caractère-poids $\kappa$ dans la strate $\mathcal{M}(N)_{n_2\kappa}$ de caractère-poids $n_2\kappa$ (*cf.* théorème 3.5 ci-dessous), on saura que l'opérateur de Shimura $\delta$ qui vérifie aussi

$$\delta_2(\tilde{\eta}) = \tilde{\eta}^2 - \phi\Big(\frac{E_2^\star}{12}\Big), \text{ avec } \delta_2 = \delta_{<n_2>},$$

*cf.* (1.5a), préservera le $A$-module $\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N) = \mathcal{M}^\dagger(N)[\tilde{\eta}]$ tout en gardant l'essentiel des propriétés décrites dans le paragraphe 1 (*cf.* théorème 3.10 ci-dessous).

Il vient :

**Théorème 3.5** *L'operateur $\partial_{<\kappa>}$ préserve la surconvergence ; précisément, avec les notations de [5] § 2.4, p. 46, on a*

$$\partial_{<\kappa>} M_\kappa(K, N, v) \subseteq M_{n_2\kappa}(K, N, v).$$

*Il en va bien sûr de même sur les familles : $\partial$ décale alors le caractère-poids en le multipliant par $n_2$.*

**3.3 Preuve** : on note ci-dessous $M_\kappa$ les espaces notés $M_\kappa(K, N, v)$ dans [5] loc. cit.

L'argument repose sur le fait suivant :

**Fait** : *pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/N_p\mathbb{Z})^x, \mathbb{C}_p^x)$, on a*

$$\Theta M_{(\psi,0)} \subseteq M_{n_2(\psi,0)} = M_{(\tau^2\psi,\eta_2)}. \tag{3.30}$$

**Sous preuve** : l'indication du caractère $\psi$ correspond à la réaction de notre fonction modulaire, vis-à-vis de la transformation sous $\Gamma_0(Np^n)$ de la courbe elliptique sous-jacente.

Or pour $f$ de poids zéro, particularisant $q$ en $e^{2\pi iz}$ et l'action de $\Theta$ sur $A\big[[q]\big]$ en $\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$, pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S\ell_2(\mathbb{Z})$ agissant sur $z$ par $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$, on a par la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\Theta(f(e^{2\pi i\gamma z})) = \Big(q\frac{d}{dq}f\Big)(\gamma z) \times \frac{d}{dz}\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = \frac{1}{(cz+d)^2}\,(\Theta f)(e^{2\pi i\gamma z})\,;$$

d'où si $\gamma \in \Gamma_0(Np^n)$ l'identité

$$\psi(\gamma)(\Theta f)(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}(\Theta f)(\gamma z),$$

et par suite (continuité $p$-adique de l'opérateur $\Theta$) l'identité (3.30) proposée ci-dessus. □

Par ailleurs, observons que pour

$$E_{<\kappa>}(q) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\zeta^\star<\kappa>}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^\star_{<\kappa>}(n)q^n, \text{ si } <\kappa> \neq 1, \\ 1, \text{ si } <\kappa> = 1, \end{cases}$$

*cf.* [5] § 2.2 ou [2] § B1 avec

$$v_p(\frac{1}{\zeta^\star < \kappa >}) > 0, \tag{3.31}$$

on a pour $F(q)$ surconvergente de caractère-poids $\kappa$

$$\partial_{<\kappa>} F(q) = E_{<\kappa>}(q)\Theta\Big(\frac{F(q)}{E_{<\kappa>}(q)}\Big) + \partial_{<\kappa>}(E_{<\kappa>}(q))\frac{F(q)}{E_{<\kappa>}(q)}. \tag{3.32}$$

Vu l'identité (3.30), ceci prouve donc qu'il suffit de montrer que pour tout $< \kappa >$ dans $\mathcal{B}$ la série

$$\partial_{<\kappa>}(E_{<\kappa>}(q))/E_{<\kappa>}(q) \tag{3.33}$$

est surconvergente et appartient à $M_{n_2}(K, 1, v)$, avec $0 \leq v < p/(p+1)$ rationnel arbitraire.

Nous faisons donc ci-dessous $N = 1$, et nous posons $s = \log < \kappa >$.

Si $s = 0$, alors il existe $n$ tel que la puissance $p^n$ de $< \kappa >$ soit l'unité, et comme

$$\frac{\Theta E_{<\kappa>}(q)}{E_{<\kappa>}(q)} = \frac{1}{p^n}\,\frac{\Theta(E_{<\kappa>}(q)^{p^n})}{E_{<\kappa>}(q)^{p^n}}$$

avec $\partial_{<\kappa>} = \Theta$, on peut appliquer (3.30) à $\Theta(E_{<\kappa>}(q)^{p^n})$ d'où la propriété (3.33) dans ce cas là.

Supposons maintenant $s \neq 0$, et choisissons $a$ entier $\geq 0$ suffisemment grand de façon que

$$a + v_p\Big(\frac{12}{s}\Big) > \frac{1}{p-1}.$$

Nous reprenons les notations de [5] chap. 2, et particulièrement th. 2.2.2. On a :

**Proposition 3.6** *(homogénéité) Il existe une fonction analytique rigide sur $Z_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}^\star}$, bornée par 1 et surconvergente sur $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^\star$ (i.e. un élément de $A^0(Z_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}^\star}/\mathcal{B}\times\mathcal{B}^\star)^\dagger)$) ; de q-développement*

$$(E_\alpha(q))^{pt}/E_{\alpha^{pt}}(q), \qquad (\alpha, t) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}^\star,$$

**Sous preuve** : on pose $E = E_{(\tau^0,1)}$ où $E_{(\tau^0,1)}$ est la série d'Eisenstein classique de poids 1, utilisée dans [2] chap. B, bas p. 447.

Pour $v_p(u) > \frac{1}{p-1} - 1$ nous savons [3] cor. B. 4.5.2. que $E_{(\tau^0,u)}(q)/E(q)^u$ est le $q$-développement d'une fonction sur $Z_{\mathcal{B}^\star}$, surconvergente sur $\mathcal{B}^\star$ ; lorsque

$$\alpha = (\tau^0, s) \in \mathcal{B}^\star \quad \text{avec} \quad s = \log \alpha,$$
$$\beta = (\tau^0, s) \in \mathcal{B}^\star \quad \text{avec} \quad t = \log \beta,$$

ceci vaut pour $u = s$, comme pour $u = \log(\alpha^{pt}) = pst$.

De plus, par le même argument que dans [5] loc. cit. p. 41, ces deux fonctions sont sans zéros sur un voisinage affinoïde $Z(v), v > 0$, de $Z$ ; donc le quotient

$$(E_\alpha(q)/E(q)^s)^{pt}/(E_{\alpha^{pt}}(q)/E(q)^{pst})$$

est le $q$-développement d'une fonction sur $Z_{\mathcal{B}^\star\times\mathcal{B}^\star}$, surconvergente sur $Z_{\mathcal{B}^\star\times\mathcal{B}^\star}$.

On conclut la preuve de la Proposition 3.6 en utilisant le principe du prolongement analytique (par une variante du th. 2.2.4. de [5]). $\square$

[[Ci-dessus cette proposition est utilisée avec

$$\alpha =< \kappa >\in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad pt = p^a 12/s$$

où $s = \log < \kappa >$ qui vérifie $v_p(t) > \frac{1}{p-1} - 1$ *i.e.* $(\tau^0, t) \in \mathcal{B}^\star$.]]

Alors d'après (3.31) la série

$$G(q) := E_{<\kappa>}(q)^{12p^a/s} \tag{3.34}$$

est convergente ; comme $E_{<\kappa>}$ est une forme modulaire $p$-adique surconvergente de caractère-poids $< \kappa >\in \mathcal{B}$, la série (3.34) est une forme modulaire surconvergente ; d'après la Proposition 3.6 son caractère-poids $\rho$ appartient à $\mathcal{B}$ et vérifie

$$\log \rho = \frac{12p^a}{s} \log < \kappa >= 12p^a.$$

Le caractère-poids $\rho$ de (3.34) coïncide donc à un élément de $\mathcal{B}_{\text{tors}}$ près avec la projection dans $\mathcal{B}$ de la puissance $p^a$ du poids $(\tau^{12}, \eta_{12})$ de la forme modulaire parabolique classique

$$\Delta(q) = q \prod_{n\geq 1}(1 - q^n)^{24}.$$

Quitte à augmenter l'entier $a$, nous pouvons donc supposer qu'il y a égalité : alors, le quotient

$$G(q)/\Delta^{p^a}(q) \tag{3.35}$$

est une fonction modulaire surconvergente de caractère-poids la puissance $p^a$ de $(\tau^{-12}, 0)$.

En lui appliquant $\Theta$, on trouve donc d'après (3.30) un élément de

$$M_{n_2(\tau^{-b},0)} = M_{(\tau^{2-b},\eta_2)}$$

avec $b = 12p^a$, à savoir

$$\frac{\Theta G(q)}{\Delta^{p^a}(q)} - G(q)\,\frac{\Theta(\Delta^{p^a}(q))}{\Delta^{2p^a}(q)} \tag{3.36}$$

Or on a $\Theta(\Delta^{p^a})/\Delta^{p^a} = p^a\Theta(\Delta)/\Delta$, et comme $\Theta$ est $p$-adiquement continu on a aussi

$$\Theta(G(q)) = \frac{12p^a}{s}\, G(q)\, \frac{\Theta(E_{<\kappa>}(q))}{E_{<\kappa>(q)}}.$$

Multipliant alors la différence (3.36) par la fonction modulaire surconvergente

$$\frac{s}{12p^a}\,\Delta^{p^a}(q)/G(q)$$

(dérivation logarithmique), il s'ensuit que

$$\frac{\Theta E_{<\kappa>}(q)}{E_{<\kappa>}(q)} - \frac{s}{12}\,\frac{\Theta\Delta}{\Delta} \tag{3.37}$$

est un élément de $M_{n_2}(K,1,v)$, avec comme ci-dessus $0 \leq v < p/(p+1)$ rationnel arbitraire.

Mais il est bien connu (Ramanujan, *cf.* [14] corollary A.1.4.4., ou [22] lemme 3) que $\Theta\Delta/\Delta = E_2$. Ainsi (3.37) est une autre écriture de la propriété (3.33), qui se trouve complètement démontrée et avec elle le théorème 3.5. □

**Corollaire 3.7** *Le $A$-module $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N)$ est stable par l'opérateur différentiel $\delta$ de Shimura.*

**3.4** Plus précisément, l'opérateur $\delta$ de Shimura vérifiant les identités

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta_{<\kappa>} &=& \partial_{<\kappa>} + \log <\kappa> \eta, \\ \delta_2(\eta) &=& \eta^2 - \frac{E_4}{144}, \text{ avec } \delta_2 := \delta_{<n_2>}, \end{array}\right. \tag{3.38}$$

il résulte du théorème 3.5 — comme déjà indiqué — que les identités établies dans le théorème 1.1 valent encore pour un élément de

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}(N)_\kappa := (\mathcal{M}(N)[\eta])_\kappa,$$

où ici l'indice $\kappa$ désigne la strate de caractère-poids $\kappa$ ; voici les modifications à faire :

i) travailler avec des coefficients

$$(v_i)_{0\leq i\leq r} \text{ dans } \mathcal{M}(N)_{\kappa/n_{2i}}, \text{ au lieu de } M\mathcal{C}\ell(N)_{k-2i},$$
$$(w_i)_{0\leq i\leq r+1} \text{ dans } \mathcal{M}(N)_{n_2\kappa/n_{2i}}, \text{ au lieu de } M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2-2i},$$

ii) écrire $\partial_{<\kappa/n_{2i}>}$ au lieu de $\partial_{k-2i}, 0 \leq i \leq r$ ;

iii) *dans les coefficients des formules de récurrence* $\log <\kappa>$ doit être substitué au poids $k$.

En particulier, pour $\log <\kappa>$ différent d'un entier $\geq 2$, l'application $A$-linéaire

$$(\nu_\kappa, \delta_{<\kappa/n_2>}) : \mathcal{M}(N)_\kappa \oplus \mathfrak{A}\,\mathfrak{M}(N)_{\kappa/n_2} \longrightarrow \mathfrak{A}\,\mathfrak{M}(N)_\kappa \tag{3.39}$$

où $\nu_\kappa$ désigne l'injection naturelle de $\mathcal{M}(N)_\kappa$ dans $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}(N)_\kappa$ est un isomorphisme. D'où bien sûr, résulte une application $A$-linéaire

$$str_\kappa : \mathfrak{A}\,\mathfrak{M}(N)_\kappa \longrightarrow \mathcal{M}(N)_\kappa \tag{3.40}$$

telle que $str_\kappa \circ \nu_\kappa = id_{\mathcal{M}(N)_\kappa}$

Pour $\log <\kappa>$ entier $\geq 2$, l'obstruction est désignée par le théorème 2.1 ; les identités menant à celui-ci (*cf.* aussi [1] § 9 p. 34) impliquent en effet :

**Corollaire 3.8** *Soit $a$ un entier $\geq 0$ et notons $\delta^{(a+1)}$ l'opérateur de Shimura itéré $(a+1)$-fois.*

*Alors, si* $\log <\kappa>= a+2$, *les restrictions à $M_{\kappa/n_{2+2a}}(K,N,v)$ des opérateurs $\Theta^{a+1}$ et $\delta^{(a+1)}_{\kappa/n_{2+2a}}$ coïncident, et appliquent ce module dans le module $M_\kappa(K,N,v)$ des formes modulaires surconvergentes de caractère-poids $\kappa$.*

Une manifestation de ceci pour $r=a$, *dans l'itération définissant*

$$\delta^{(a+1)}_{<\kappa/n_{2+2a}>} = \delta_{<\kappa/n_2>} \circ \delta^{(a)}_{<\kappa/n_{2+2a}>}$$

est la division par $s-a$ avec $s = \log <\kappa/n_2>$ s'approchant $p$-adiquement de $a$, *qui est une nécessité* dans la dernière récurrence du théorème 1.1 pour déduire $v_a$ de $w_{a+1}$.

Toutefois $str_\kappa$ peut être défini sur le $A$-module homogène de caractère-poids $\kappa$

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1(N)_\kappa = \overset{a}{\underset{\alpha=0}{\oplus}} \mathcal{M}(N)_{\kappa/n_{2\alpha}}\eta^\alpha \tag{3.41}$$

où l'on suppose toujours $\log <\kappa>= a+2$ ; on a $str_\kappa \circ \nu^1_\kappa = id_{\mathcal{M}(N)_\kappa}$, où $\nu^1_\kappa$ désigne l'injection naturelle de $\mathcal{M}(N)_\kappa$ dans $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1(N)_\kappa$.

**Remarque 3.9** *Le module $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1(N)_\kappa$ s'écrit aussi bien*

$$\overset{a}{\underset{\alpha=0}{\oplus}} \mathcal{M}(N)_{\kappa/n_{2\alpha}}\eta_\rho^\alpha$$

*avec $\eta_\rho := \eta - \rho$, où $\rho \in \mathcal{M}(N)_{n_2}$ est modulaire surconvergente (de poids entier $n_2$, et niveau $N$).*

D'une façon plus générale, il semble que

$$str_{\kappa/n_{2+2a}}(p(w)) \equiv 0 \tag{3.42}$$

avec $p(w) = \sum_{\alpha\geq a+1} w_\alpha \eta^{\alpha-(a+1)}$, soit une condition nécessaire pour que $str_\kappa(w)$ avec $w = \sum_{\alpha\geq 0} w_\alpha\eta^\alpha$ puisse être définie (on suppose $w$ homogène de caractère-poids $\kappa$, et $\log <\kappa>= a+2$).

Ceci mérite étude plus approfondie.

Ici, notons simplement $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1^\dagger(N)$ le $A$-module formé des éléments de $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}^\dagger(N)$ dont les spécialisations éventuelles en $\kappa$, lorsque le caractère-poids $\kappa$ vérifie $\log <\kappa>$ entier $\geq 2$, appartiennent à $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1(N)_\kappa$. Alors, on a :

**Théorème 3.10** *Le module $\mathcal{M}^\dagger(N)$ des familles de formes modulaires surconvergentes s'injecte naturellement dans $\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1^\dagger$*

$$\nu : \mathcal{M}^\dagger(N) \hookrightarrow \mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1^\dagger(N);$$

*et il existe $str$, application $A$-linéaire compatible avec la stratification*

$$str : \mathfrak{A}\,\mathfrak{M}_1^\dagger(N) \longrightarrow \mathcal{M}^\dagger(N)$$

*telle que $str \circ \nu = id_{\mathcal{M}^\dagger(N)}$.*

## Références


[1] R. F. Coleman, *A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, Contemp. Math., 165 (1994), p. 21-51.

[2] R. F. Coleman, *Classical and Overconvergent modular forms*, Inv. math., 124 (1996), p. 215-241.

[3] R. F. Coleman, *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Inv. math, 127 (1997), p. 417-479.

[4] R. F. Coleman, F. Q. Gouvêa and N. Jochnowitz, *$E_2, \Theta$ and Overconvergence*, IMRN (1995) n°1, p. 23-41.

[5] R. F. Coleman and B. Mazur, *The Eigencurve*, London Math. Soc., 254 (1998), p.1-113.

[6] M. Courtieu, *Familles d'opérateurs sur les formes modulaires de Siegel et fonction L p-adiques*, thèse (juin 2000), Institut Fourier, Université Grenoble 1.

[7] B. Dwork, *The $U_p$ operator of Atkin on modular functions of level 2 with growth condition*, Antwerp, July 17 - August 3, 1972, LNM 350 (1973) p. 57–67.

[8] B. Gorsse, *Mesures p-diques associés au carré symétrique*, thèse (octobre 2006), Institut Fourier, Université Grenoble 1.

[9] F. Q. Gouvêa, *Arithmetic of p-adic modular forms*, LNM 1304, (1988).

[10] F. Q. Gouvêa, B. Mazur, *On the caracteristic power series of the U-operator*, Ann. Institut Fourier **43**, (1993), p. 301-312.

[11] H. Hecke, *Werke*, n°21 §3, p. 411-413 et n°24 §2, p. 469, [= Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd 4 (1925), p. 211-223 ; Bd 5 (1927), p. 199-224].

[12] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Math. Soc., Student Texts 26 (1993) Cambridge Univ. Press.

[13] M. Kaneko, D. Zagier, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms*, Prog. in Math., 129, (1995), p. 165-172.

[14] N. Katz, *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, Antwerp, July 17 - August 3, (1972), LNM 350 (1973) p. 69-190.

[15] A. A. Panchishkin, *Two variables p-adic L-functions attached to eigenfamilies of positive slope*, Inv. Math., 154, (2003), p. 551-615.

[16] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF, (1970).

[17] J.-P. Serre, *Congruences et formes modulaires (d'après H.P.F. Swinnerton-Dyer)*, Sém. Bourbaki (1971/72), exposé 416, LNM 317 (1973), p. 319-338.

[18] G. Shimura, *On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables*, Ann. of Math. 102 (1975), p. 491-515.

[19] G. Shimura, *The special values of the Zeta functions associated with cusp forms*, Comm. pure and applied math. 29 (1976), p. 783-804.

[20] G. Shimura, *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*, Math. Surveys and Monographs 82, AMS 2000.

[21] J. Sturm, *Evaluation of the symmetric square at the near center point*, Amer. J. Math 111 (1989), p. 585-598.

[22] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On $\ell$-adic representations and congruences for coefficients of modular forms*, Antwerp, July 17 - August 3 (1972), LNM 350 (1973), p. 1-55.

[23] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete 88, Springer-Verlag (1976).

Bertrand Gorsse
Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS-UJF)
100 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères - France
`bertrand.gorsse@ujf-grenoble.fr`

Gilles Robert
Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS-UJF)
100 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères - France
`Gilles.Robert@ujf-grenoble.fr`