Rigidité topologique sous une hypothèse d'entropie majorée et applications

Guillemette Reviron

Prépublication de l'Institut Fourier n° 686 (2006)
www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract

We study some families of compact length spaces whose entropy is bounded from above. We prove that these families are complete w.r.t. the Gromov-Hausdorff distance and we give an explicit constant $\varepsilon_0 > 0$ such that, on balls of radius ε_0 with respect to the Gromov-Hausdorff distance, the fundamental group is constant, the universal covers are close for the equivariant Gromov-Hausdorff distance, the length spectrum is continuous and the entropy is Lipschitz continuous. If we consider now some subsets of manifolds, we show moreover that the volume is semi-continuous from below and that the integral of the Ricci curvature is bounded from below.

Keywords: Metric spaces, entropy, Gromov-Hausdorff distance, (pre)compactness, topological rigidity, universel cover, length spectrum, volume.

Résumé

Nous étudions certaines familles d'espaces de longueur compacts dont l'entropie volumique est majorée. Nous montrons que ces familles sont complètes pour la distance de Gromov-Hausdorff et nous prouvons l'existence d'une constante explicite $\varepsilon_0 > 0$ telle que, sur les boules de rayon ε_0 pour la distance de Gromov-Hausdorff, le groupe fondamental est constant, les revêtements universels sont proches pour la distance de Gromov-Hausdorff équivariante, le spectre des longueurs est continu, l'entropie est Lipschitzienne. Si l'on se restreint à certains sous-ensembles des variétés riemanniennes compactes, nous montrons de plus que, sur ces boules de rayon ε_0, le volume est semi-continu inférieurement et que l'intégrale de la courbure de Ricci est minorée uniformément.

Mots-clés : Espaces métriques, entropie, distance de Gromov-Hausdorff, (pré)compacité, rigidité topologique, revêtement universel, spectre des longueurs, volume.

2000 Mathematics Subject Classification : 54E45 ; 53C23 ; 53C24 ; 14H30 ; 37A35

1 Introduction

Nous présentons ici des résultats de convergence, de précompacité et de complétude sur certaines familles de (classes d'isométrie de) variétés riemanniennes compactes (et, plus généralement, d'espaces métriques compacts) vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff, ainsi que des résultats de finitude et de continuité d'invariants topologiques et géométriques (premier nombre de Betti, volume, spectre marqué des longueurs, entropie volumique...). Ces questions ont été très étudiées, par exemple sur les familles $\mathcal{R}_{m,K,D}$ de variétés riemanniennes compactes de dimension m, de courbure de Ricci minorée et de diamètre majoré *définies plus précisément par*

$$\mathcal{R}_{m,K,D} := \left\{(M^m, g) \,/\, diam(M,g) \leq D;\, Ricci(M,g) \geq -(m-1)K^2 g\right\}$$

(voir, par exemple, les surveys [Co1], [Ga3], [Pa] et [Pe] sur les travaux de M. Anderson, K. Fukaya, M. Gromov, J. Cheeger, T. Colding, ...). Nous nous proposons ici d'aborder ces thèmes *en remplaçant l'hypothèse classique sur la courbure des variétés par une hypothèse bien plus faible de majoration de l'entropie.*
Dans le cadre classique, l'hypothèse de "courbure de Ricci minorée" oblige les variétés à se "ressembler" topologiquement et géométriquement. Par exemple, un des résultats de J. Cheeger et T. Colding (voir le théorème A.112 de [CC1]) assure que, si l'on se fixe une variété compacte (X, g) de dimension m, toute variété compacte de *même dimension* appartenant à $\mathcal{R}_{m,K,D}$ et suffisamment proche de X *pour la distance de Gromov-Hausdorff (notée* d_{GH}) est difféomorphe à X. De plus, $(\mathcal{R}_{m,K,D}, d_{GH})$ est précompact. Comme il n'est pas complet, il est naturel d'étudier son adhérence : les limites de suites de Cauchy d'éléments de $\mathcal{R}_{m,K,D}$ forment un sous-ensemble de l'ensemble des espaces métriques dits *de longueur* qu'il est très difficile de caractériser (voir le survey [Co1] des travaux de J. Cheeger et T. Colding qui décrivent l'adhérence de $\mathcal{R}_{m,K,D}$).

Récemment, J. Lott-C. Villani et K-T. Sturm ont eu la démarche suivante : plutôt que d'étudier l'adhérence de $\mathcal{R}_{m,K,D}$ d'un point de vue "intrinsèque", ils considèrent cette famille comme un sous-ensemble de l'ensemble des espaces métriques mesurés sur lequel ils généralisent l'hypothèse "dimension m et courbure de Ricci minorée", les définitions proposées étant continues par rapport à la distance de Gromov-Hausdorff : l'ensemble des espaces de longueur dont la "courbure-dimension" est uniformément minorée et le diamètre est majoré par D est alors un sous-ensemble complet pour la distance de Gromov-Hausdorff. Notons cependant que, jusqu'à présent, leurs travaux portent essentiellement sur la généralisation de l'hypothèse "courbure de Ricci positive" et que, sur les variétés, cette hypothèse implique que le groupe fondamental est à croissance polynômiale.

Dans cet article, nous nous plaçons également directement sur des familles d'espaces de longueur, mais nous remplaçons les hypothèses habituellement faites sur la courbure par une hypothèse de majoration de l'entropie volumique. Nous considérons ainsi des espaces *dont le groupe fondamental est à croissance exponentielle.* Nous avons pris le parti de n'imposer sur les espaces étudiés que des hypothèses sur des invariants qui sont continus pour la distance de Gromov-Hausdorff (cette continuité n'est pas un résultat connu et demande à être précisée et prouvée, ce qui sera fait par la suite). Notre but est d'obtenir des familles d'espaces métriques complètes pour la distance de Gromov-Hausdorff. Nous y étudierons l'adhérence de certaines sous-familles précompactes, la rigidité topologique, la convergence des revêtements universels, la continuité de certains invariants (premier nombre de Betti, spectre marqué des longueur, entropie volumique, volume, ...).

Cadre de travail - Nous considérons l'ensemble $\mathcal{M}_{H,D}$ *des classes d'isométrie d'espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe), dont le diamètre et l'entropie volumique sont majorés par* D *et* H où l'entropie volumique est définie de la manière suivante :

Définition 1. - *Soit* (X, d_X) *un espace de longueur compact qui admet un revêtement universel (dans un sens précisé dans la définition 12)* $p : (\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}}) \longrightarrow (X, d_X)$*. Soit* $\widetilde{x}$ *un point de* $\widetilde{X}$ *et* $N_{\widetilde{x}}(R)$ *le nombre de points de l'orbite de* $\widetilde{x}$ *(par l'action du groupe des automorphismes du revêtement universel) situés dans une boule de rayon* R*. Alors*

$$Ent(X, d_X) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log N_{\widetilde{x}}(R).$$

(Il est facile de vérifier que l'entropie volumique ne dépend pas du point $\widetilde{x}$ *et que la limite existe.)*

Dans le cadre des variétés riemanniennes compactes, cet invariant coïncide avec l'entropie volumique classique des variétés définie par

$$Ent_{vol}(X, g) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log Vol(B_{\widetilde{g}}(\widetilde{x}, R)).$$

Le théorème de Bishop-Gromov implique alors que l'ensemble $\mathcal{R}_{m,K,D}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{M}_{H,D}$ (pour $H = (m-1)K$) ; en fait, $\mathcal{M}_{H,D}$ est bien plus vaste que $\mathcal{R}_{m,K,D}$ dans le sens suivant :

(i) L'ensemble $\mathcal{M}_{H,D}$ n'est pas précompact pour la distance d_{GH} (voir [Re], exemple 2.29), tandis que l'ensemble $\mathcal{R}_{m,K,D}$ l'est d'après le résultat de précompacité de M. Gromov (voir [Gr] théorème 5.3)

(ii) Toute variété riemannienne de dimension m paire ($m \geq 4$) peut être obtenue comme la limite (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) d'une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension m, dont l'entropie est uniformément majorée (voir [Re], exemple 2.31) mais telles que deux variétés quelconques de la suite aient des caractéristiques d'Euler différentes (ceci est impossible dans $\mathcal{R}_{m,K,D}$ puisque les variétés de la suite sont alors difféomorphes à leur limite à partir d'un certain rang d'après le théorème A.112 de [CC])

(iii) Toute variété riemannienne (X, g) compacte de dimension $m \geq 3$ peut être obtenue comme la limite d'une suite de variétés riemanniennes compactes $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de même dimension m, toutes difféomorphes à X, dont l'entropie est uniformément majorée, mais telle que $(Vol(X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers l'infini (voir [Re], exemple 2.33). Au contraire, le volume est continu sur $\mathcal{R}_{m,K,D}$ relativement à la distance de Gromov-Hausdorff d'après le théorème 0.1 de [Co]).

Ces propriétés proviennent toutes du fait que l'entropie volumique est très peu sensible à des variations locales (même drastiques) de la topologie ou de la métrique (voir [Re], section 2.4).

Propriété FSG(N) - La seule rigidité topologique sous l'hypothèse "entropie majorée" que laissent espérer les exemples du point (*ii*) ci-dessus est donc la rigidité du groupe fondamental. Cependant, un résultat de rigidité du groupe fondamental doit rendre compte du contre-exemple de C. Plaut ([Pl], exemple 1.1) qui construit une suite de variétés de courbure de Ricci minorée et donc d'entropie majorée (les variétés construites sont des tores plats), dont la dimension m tend vers l'infini, qui converge vers un espace de longueur compact pour la distance de Gromov-Hausdorff, mais dont les groupes fondamentaux sont deux-à-deux distincts. Lorsqu'on travaille sur l'ensemble des variétés de courbure de Ricci minorée et de diamètre majoré, on évite ce problème en fixant la dimension m ainsi que certaines conditions algébriques sur le groupe fondamental qui conduisent au résultat de finitude de l'ensemble des groupes fondamentaux des variétés considérées (voir [Gr], proposition 5.28). Dans le présent article, nous voulons nous affranchir de toute hypothèse sur la dimension des objets étudiés (car la dimension n'est pas un invariant continu pour la distance de Gromov-Hausdorff). Nous avons choisi d'ajouter plutôt une hypothèse de nature homotopique (*notée $FSG(N)$, où FSG signifie "free semi-group"*) qui implique qu'on ne s'intéresse qu'à ceux de ces espaces dont le groupe fondamental (ou plutôt le groupe des automorphismes du revêtement universel) a des propriétés de croissance algébrique semblables à celles vérifiées par les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes de courbure négative :

Définition 2. - *Un groupe G non-abélien possède la propriété $FSG(N)$ si, pour toute paire d'éléments (γ, γ') qui ne commutent pas, le semi-groupe engendré par γ^N et $(\gamma')^N$ (ou $(\gamma')^{-N}$) est libre.*

Nous étudierons par la suite le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{H,D}$ suivant :

Définition 3. *L'ensemble $\mathcal{M}_{N,H,D}$ est l'ensemble des (classes d'isométrie des) espaces métriques de longueur compacts qui possèdent un revêtement universel (dans un sens précisé dans la définition 12) qui appartiennent à $\mathcal{M}_{H,D}$ et dont le groupe des automorphismes du revêtement universel est de centre réduit à zéro et possède la propriété $FSG(N)$ (pour un N uniforme).*

L'hypothèse algébrique "être FSG(N)" est relativement faible : par exemple, il existe un entier N_0 uniforme tel que le groupe fondamental de n'importe quelle surface de genre supérieur ou égal à deux possède la propriété $FSG(N_0)$. Plus généralement, construire des variétés (ou des espaces métriques) dont le groupe fondamental possède la propriété $FSG(N)$ pour un certain N ne pose pas de problème (c'est le cas de tous les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes de courbure strictement négative). Mais soulignons que nous imposons aux groupes des automorphismes du revêtement universel des éléments de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ de posséder la propriété *$FSG(N)$ pour un N uniforme*. Les premiers exemples de telles familles sont les groupes δ-non-abéliens (pour un $\delta > 0$ uniforme) présentés dans [BCG1], p.9-13 (où de nombreux exemples sont donnés) qui possèdent tous la propriété $FSG(N)$ pour $N = E[\frac{4}{\delta}]$ (voir la proposition 1.14 de [BCG1]) :

Définition 4. - *Soit $\delta > 0$.*

(i) *Un groupe discret Γ sera dit δ-épais s'il appartient à l'ensemble des groupes fondamentaux des variétés différentiables compactes connexes (de n'importe quelle dimension) qui admettent une métrique de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 et de rayon d'injectivité supérieur ou égal à δ.*

(ii) *Un groupe discret Γ sera dit δ-non-abélien s'il est non-abélien et si, pour toute paire d'éléments γ et γ' de Γ qui ne commutent pas, il existe un groupe δ-épais Γ' et un morphisme $\rho :< \gamma, \gamma' > \longrightarrow \Gamma'$ (où $< \gamma, \gamma' >$ est le sous-groupe de Γ engendré par γ et γ') tel que $\rho(< \gamma, \gamma' >)$ ne soit isomorphe ni à $\{0\}$, ni à $(\mathbb{Z}, +)$.*

Remarquons que si un groupe Γ non abélien admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte dont la courbure sectionnelle est inférieure à -1 et dont le rayon d'injectivité est minoré par δ, alors Γ est évidemment δ-non-abélien.

Par ailleurs, F. Zuddas donne d'autres familles de groupes qui possèdent la propriété $FSG(N)$ et qui ne sont pas des groupes fondamentaux de variétés compactes de courbure négative (les produits libres et produits amalgamés malnormaux -voir la définition p.933 de [KS]- de deux groupes ayant la propriété $FSG(N)$ (proposition 2.0.14 de [Zu]) ; les groupes hyperboliques selon Gromov non abéliens et sans torsion (proposition 2.0.15 de [Zu]) ; les "limites" de groupes possédant la propriété $FSG(N)$ (proposition 2.0.16 de [Zu])). Notons finalement que, si l'on se restreint aux variétés Y dont le groupe fondamental possède la propriété $FSG(N)$, l'ensemble des métriques g telles que (Y, g) appartienne à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ reste plus vaste que l'ensemble des métriques g telles que (Y, g) appartienne à $\mathcal{R}_{m,K,D}$. En effet, les constructions faites dans les points (i), (ii) et (iii) ci-dessus ne modifient pas le groupe fondamental et le groupe fondamental de toutes les variétés des suites qui y sont construites vérifie ainsi la condition $FSG(N)$ dès que la variété de départ la vérifie (c'est le cas en particulier lorsque la variété de départ est compacte et de courbure strictement négative, à condition de choisir N convenablement). Remarquons finalement que nous ne faisons aucune hypothèse sur la dimension des objets considérés.

Présentation des résultats - Nous nous intéressons à l'étude de la continuité de certains invariants sur la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$, en vue d'obtenir des résultats de complétude et de précompacité pour la distance de Gromov-Hausdorff. En particulier, nous nous sommes intéressés aux questions suivantes :

(i) Si deux espaces de longueur (X, d_X) et (Y, d_Y) qui appartiennent à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ sont suffisamment proches pour la distance de Gromov-Hausdroff, leurs groupes des automorphismes du revêtement universel sont-ils isomorphes ?

(ii) Si oui, est-il possible de comparer (métriquement) les actions de ces groupes sur les revêtements universels ; plus précisément, existe-t-il des approximations de Gromov-Hausdorff entre les revêtements universels de X et Y qui commutent avec l'isomorphisme obtenu au point (i) ?

(iii) Dans les deux questions qui précèdent, peut-on déterminer numériquement la valeur ε_0 de la distance de Gromov-Hausdorff entre (X, d_X) et (Y, d_Y) à partir de laquelle existent l'isomorphisme et l'approximation de Gromov-Hausdorff équivariante qui y sont décrits ?

(iv) Si l'on considère une suite d'espaces de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ qui est de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff, l'espace métrique limite admet-il un revêtement universel ? Si oui, que peut-on dire du groupe des automorphismes de ce revêtement ? L'espace-limite appartient-il à $\mathcal{M}_{N,H,D}$?

Les questions (i) et (iv) ont été étudiées par W. Tuschmann sous l'hypothèse "courbure sectionnelle bornée" :

Théorème 5. *([Tu1] et [Tu2])- Soit $((M_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente (pour d_{GH}) de variétés riemanniennes compactes connexes, dont la dimension et la courbure sectionnelle sont uniformément bornées. L'espace de longueur limite (X, d_X) est alors localement simplement connexe et admet un revêtement universel simplement connexe. De plus, pour n suffisamment grand, il existe un morphisme* surjectif *de $\pi_1(M_n)$ dans le groupe $\pi_1(X)$.*

Si (Y, d_Y) est un espace de longueur qui admet un revêtement universel $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$, *nous noterons $G(\widetilde{Y}, Y)$ le groupe des automorphismes du revêtement universel, c'est-à-dire l'ensemble des homéomorphismes h de $\widetilde{Y}$ tels que $p \circ h = p$.* Sous l'hypothèse "courbure de Ricci minorée", C. Sormani-G. Wei ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 6. *([SW], théorème 1.4)- Soit $((M_i^m, g_i))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variétés riemanniennes compactes qui appartiennent à $\mathcal{R}_{m,K,D}$ et qui convergent vers un espace de longueur (Y, d_Y) au sens de Gromov-Hausdorff. Alors le revêtement universel $\widetilde{Y}$ de Y existe et, pour n suffisamment grand (qui dépend de Y), il existe un homomorphisme* surjectif *de $\pi_1(M_n)$ dans le groupe $G(\widetilde{Y}, Y)$.*

Remarquons qu'il n'est pas précisé si le revêtement universel de Y est simplement connexe sous ces hypothèses (cf. [SW], où cette question est posée).

Sous l'hypothèse "entropie majorée", nous avons établi le théorème suivant, dont une version plus générale est donnée dans le théorème 18 :

Théorème 7. - *Il existe une constante (explicite) ε_0 (qui ne dépend que de N, H et D) telle que, si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces de longueur compacts qui appartiennent à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ et tels que $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$,*

(i) il existe un isomorphisme *ρ entre les groupes $G(\widetilde{X}, X)$ et $G(\widetilde{Y}, Y)$.*

(ii) il existe deux applications respectivement ρ-équivariante et ρ^{-1}-équivariante, notées $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ et $\widetilde{\psi} : \widetilde{Y} \longrightarrow \widetilde{X}$, qui sont, pour tout $R > 0$, des $(\frac{3}{\varepsilon_0}R+3)\varepsilon$-approximations de Gromov-Hausdorff entre les boules de rayon R de $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$, presque inverse l'une de l'autre (voir la définition 10).

Notons que ce résultat est un résultat de rigidité locale sur des boules de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$ de $\mathcal{M}_{N,H,D}$; la valeur exacte de ε_0 est $\varepsilon_0 := \frac{1}{N.H}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$, ce qui répond à la question (iii).

Une des conséquences du théorème 7 est la continuité uniforme de l'entropie volumique sur $\mathcal{M}_{N,H,D}$ par rapport à d_{GH}. Il est donc naturel de chercher à définir cet invariant sur l'adhérence de $(\mathcal{M}_{N,H,D}, d_{GH})$, puis d'étudier sa continuité sur cette adhérence. Or, nous montrons que tout espace (X, d_X) de cette adhérence possède un revêtement universel (voir la proposition 36), ce qui permet de définir son entropie volumique. Nous établissons alors le résultat de complétude suivant :

Théorème 8. - *La famille* $(\mathcal{M}_{N,H,D}, d_{GH})$ *est complète et l'entropie volumique y est uniformément continue.*

Le théorème 7 a également pour conséquence la continuité de certains invariants topologiques et géométriques sur la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$:

Corollaire 9. - *Si l'on se restreint à présent à l'ensemble des variétés qui appartiennent à* $\mathcal{M}_{N,H,D}$, *le théorème 7 a les conséquences suivantes :*

(i) le groupe fondamental (et donc le premier nombre de Betti) est constant sur les boules de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$ *;*

(ii) si (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *sont deux variétés riemanniennes compactes de courbure strictement négative qui vérifient les hypothèses du théorème 7, elles ont même type d'homotopie. Ceci permet alors de comparer (de manière optimale) le volume de deux variétés qui sont* ε_0*-proches si l'une des deux variétés est de courbure sectionnelle inférieure à* -1 *(voir les corollaires 45 et 46) ;*

(iii) la comparaison métrique de l'action des groupes donnée dans le point (ii) *du théorème 7 implique la continuité uniforme du spectre marqué des longueurs (par rapport à* d_{GH} *et sur tout intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}^+$*) avec contrôle du module de continuité uniforme (voir le corollaire 38) ; il en découle la complétude de certaines familles d'espaces métriques isospectraux ;*

(iv) la continuité uniforme de l'entropie (qui est même localement lipschitzienne avec contrôle de la constante de Lipschitz) permet d'obtenir une obstruction à ce qu'une variété ε_0*-proche d'une variété* X *donnée soit de courbure de Ricci minorée par une constante optimale ne dépendant que de* X *(voir le corollaire 44).*

Plan - Notons (H_{ε_0}) *l'hypothèse "la systole est minorée par* ε_0*".* Plus précisément :

$$(H_{\varepsilon_0}) \qquad \inf\{d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \gamma.\widetilde{x}) \,/\, \widetilde{x} \in \widetilde{X}, \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}\} > \varepsilon_0$$

Une des conséquences d'une version du Lemme de Margulis sans courbure démontrée par G. Besson, G. Courtois et S. Gallot dans [BCG1] est l'existence d'une constante $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(N, H, D)$ telle que tout espace de longueur qui appartient à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ vérifie l'hypothèse (H_{ε_0}).
Comme le théorème 7 reste valable si l'on remplace l'hypothèse "appartenir à $\mathcal{M}_{N,H,D}$" par l'hypothèse plus faible (H_{ε_0}), nous avons choisi de l'énoncer et de le démontrer dans ce cadre plus général (voir le théorème 18).

Nous commencerons par donner les définitions générales utilisées par la suite. Nous alertons l'attention du lecteur sur le fait que ces définitions, classiques, généralisent dans le cadre des espaces de longueur les définitions habituellement employées dans le cadre des variétés riemanniennes (revêtement universel, systole, entropie volumique...). Par ailleurs, nous ferons quelques rappels sur les propriétés de base des revêtements que nous utiliserons par la suite.

Dans la deuxième partie, nous énonçons et démontrons le théorème 18, résultat fondamental de cet article qui assure la rigidité du groupe des automorphismes du revêtement universel sous l'hypothèse (H_{ε_0}). Nous appliquons ensuite cet énoncé pour comparer le groupe fondamental d'une variété X donnée et celui d'un graphe qui approche cette variété. Cet exemple permet en particulier de faire clairement apparaître le rôle joué par chacun des paramètres du théorème 18 et d'établir l'optimalité de ce résultat. En s'appuyant sur le théorème 18, nous montrons l'existence du revêtement universel de l'espace-limite de toute suite convergente pour la distance de Gromov-Hausdorff, puis la continuité uniforme du spectre marqué des longueur, toujours sous l'hypothèse (H_{ε_0}).

Dans la dernière partie, nous appliquons tout ceci à l'étude des familles d'espaces de longueur d'entropie majorée.

Je remercie Sylvestre Gallot et Bruno Colbois pour leur disponibilité et leurs encouragements.

2 Généralités

Distance de Gromov-Hausdorff - Nous adopterons par la suite la définition suivante :

Définition 10. - *Une application $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces métriques compacts (X, d_X) et (Y, d_Y) est dite ε-presque-isométrique si elle vérifie, pour tous les points x et x' de X,*

$$|d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) - d_X(x, x')| < \varepsilon$$

La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts (X, d_X) et (Y, d_Y) est l'infimum des $\varepsilon > 0$ tels qu'il existe deux applications ε-presque-isométriques $\varphi : X \longrightarrow Y$ et $\psi : Y \longrightarrow X$ telles que, pour tout point x de X et tout point y de Y,

$$d_X(\psi \circ \varphi(x), x) < \varepsilon$$

$$d_Y(\varphi \circ \psi(y), y) < \varepsilon$$

Si φ et ψ vérifie ces deux dernières conditions, nous dirons qu'elles sont ε-presque-inverse l'une de l'autre.
Une ε-presque-isométrie $\varphi : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ qui admet un ε-presque-inverse est appelée ε-approximation de Gromov-Hausdorff entre (X, d_X) et (Y, d_Y).

Espaces de longueur - Si (X, d) est un espace métrique, nous choisirons la définition 2.3.1 de [BBI] pour définir la longueur L_d des courbes induite par la métrique d. Considérons à présent l'ensemble $\mathcal{R}$ des courbes (paramétrées par un intervalle fermé de $\mathbb{R}$) continues (pour la topologie induite par d) et définissons la pseudo-distance d_ℓ par

$$d_\ell(x, y) = \inf\{L_d(\gamma) / \gamma : [a, b] \longrightarrow X \in \mathcal{R} \text{ telle que } \gamma(a) = x \text{ et } \gamma(b) = y\}$$

On a évidemment $d_\ell \geq d$, mais, en général, d_ℓ et d ne coïncident pas. Un espace de longueur est alors défini de la manière suivante :

Définition 11. - *Un espace métrique (X, d) connexe par arcs est un espace de longueur si et seulement si d_ℓ et d coïncident.*

Dans toute la suite, nous ne considèrerons que des espaces connexes par arcs, munis d'une distance de longueur finie. De plus, sur un espace de longueur compact ou localement compact (pour la topologie induite par la distance de longueur), la distance entre deux points est toujours réalisée par la longueur d'au moins une courbe (que nous appellerons *géodésique minimisante*) qui joint ces deux points (voir [Gr], page 9).
En outre, remarquons qu'un espace de longueur est nécessairement localement connexe par arcs. Cette propriété est particulièrement importante lorsqu'on s'intéresse à l'existence de revêtements de X.

Existence de revêtement universel et α-revêtements - Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces de longueurs. Nous dirons que $p : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$ est un *revêtement de longueur régulier* si c'est un *revêtement topologique régulier (ou galoisien) qui est de plus une isométrie locale.* Son groupe d'automorphismes de revêtement, noté $G(Y, X)$, est le groupe des homéomorphismes h de Y tels que $p \circ h = p$. Il agit par isométries sur Y (librement et de manière totalement discontinue).

Si (X, d_X) est un espace de longueur semi-localement simplement connexe, il existe un revêtement de longueur régulier simplement connexe de X (voir [Go], théorème IX.5.3 p.137). Ce revêtement (qui est unique à équivalence de revêtement près) possèdent deux propriétés particulièrement intéressantes : les groupes $\pi_1(X)$ et $G(\widetilde{X}, X)$ sont dans ce cas isomorphes et, par ailleurs, ce revêtement est le plus grand revêtement de X dans le sens où c'est un revêtement de tous les revêtements de X.

Remarquons toutefois que, si le revêtement simplement connexe (quand il existe) est automatiquement le plus grand revêtement de X, le plus grand revêtement de X (quand il existe) n'est pas nécessairement simplement connexe (voir par exemple [Sp], exemple 18, p. 84). Dans ce cas, le groupe des automorphismes du revêtement universel de X n'est pas isomorphe au groupe fondamental de X, mais seulement à l'un de ses quotients (voir le paragraphe suivant). Remarquons également que la notion de revêtement simplement connexe ne "passe pas à la limite" pour la distance de Gromov-Hausdorff. Il existe en effet une suite d'espaces de longueur compacts et simplement connexes, qui converge vers un espace de longueur non simplement connexe mais qui est son propre "plus grand revêtement" (voir l'exemple 2.6 de [SW]). Nous avons donc choisi la définition plus générale suivante :

Définition 12. *(voir [Sp], p.80)- L'application $p : Y \longrightarrow X$ est un revêtement universel de X si pour tout autre revêtement $p' : Y' \longrightarrow X$ il existe un revêtement $p" : Y \longrightarrow Y'$ tel que $p = p' \circ p"$.*
Un tel revêtement est unique (à équivalence de revêtement près).

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ce n'est pas toujours la définition choisie dans la littérature où l'on ne considère souvent que des espaces semi-localement simplement connexes.
Dans le cadre des espaces de longueur, C. Sormani et G. Wei ont établi une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence d'un revêtement universel. Si (X, d_X) est un espace de longueur (connexe par arcs et localement connexe par arcs), il est possible de construire des sous-groupes normaux du groupe fondamental de X de la manière suivante : fixons $\alpha > 0$ et considérons le recouvrement ouvert $U_\alpha = (B(x, \alpha))_{x \in X}$ de X par les boules

$B(x,\alpha)$. Considérons le sous-groupe normal (noté $\pi_1(X,U_\alpha,x_0)$) de $\pi_1(X,x_0)$ engendré par les classes d'homotopie des lacets qui peuvent s'écrire sous la forme $\gamma^{-1}.\beta.\gamma$, où β est un lacet entièrement inclus dans une boule $B(x,\alpha)$ et γ est un chemin qui relie x_0 et x. Il existe alors un revêtement topologique régulier $p_\alpha : X^\alpha \longrightarrow X$ tel que, si x_0 est un point de X et si $\widetilde{x}_0$ est un élément de $p_\alpha^{-1}(x_0)$, alors $(p_\alpha)_*[\pi_1(X^\alpha,\widetilde{x}_0)] = \pi_1(X,U_\alpha,x_0)$. Le groupe $G(X^\alpha,X)$ des automorphismes du revêtement p_α est alors isomorphe à $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,U_\alpha,x_0)$ (voir [Sp], p.82). La famille des revêtements $(p_\alpha : (X^\alpha,d_{X^\alpha}) \longrightarrow (X,d_X))_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ ainsi définie est décroissante par rapport à α (voir [SW], p.3592) : si α_1 et α_2 sont deux réels tels que $0<\alpha_1<\alpha_2$, il existe un revêtement de longueur régulier $p : (X^{\alpha_1},d_{X^{\alpha_1}}) \longrightarrow (X^{\alpha_2},d_{X^{\alpha_2}})$.
Un critère d'existence du revêtement universel est alors donné dans le théorème suivant :

Théorème 13. *([SW], théorème 3.7)- Un espace de longueur compact (X,d) (qui n'est pas nécessairement supposé semi-localement simplement connexe) admet un revêtement universel si et seulement si il existe un réel strictement positif α_0 (qui dépend de X) tel que, pour tout α strictement inférieur à α_0, les revêtements $p_\alpha : (X^\alpha,d_{X^\alpha}) \longrightarrow (X,d_X)$ et $p_{\alpha_0} : (X^{\alpha_0},d_{X^{\alpha_0}}) \longrightarrow (X,d_X)$ coïncident. Dans ce cas, le revêtement universel de X est $p_{\alpha_0} : (X^{\alpha_0},d_{X^{\alpha_0}}) \longrightarrow X$.*

Nous rappelons à présent quelques propriétés de base sur les α-revêtements, propriétés dont nous nous servirons abondamment dans la preuve du théorème 18 (les preuves détaillées de ces propriétés classiques sont rappelées, par exemple, dans [Re] p. 85-88).
La proposition 2.7, p. 131 de [Go], appliquée au cas particulier où p est un α-revêtement donne le lemme suivant :

Lemme 14. - *Soit $p_\alpha : (X^\alpha,d_{X^\alpha}) \longrightarrow (X,d_X)$ un revêtement régulier de longueur de l'espace de longueur compact (X,d_X) et soit x_0 un point de X. Le relevé d'un lacet c sur X de point-base x_0 est un lacet de X^α si et seulement si la classe de c dans $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,U_\alpha,x_0)$ est nulle.*

En particulier, deux courbes c^α et γ^α sur X^α de même origine x^α ont même extrémité si et seulement si leurs projetés c et γ ont mêmes extrémités et si la classe du lacet $c.\gamma^{-1}$ appartient à $\pi_1(X,U_\alpha,p_\alpha(x^\alpha))$.

Propriété 15. - *Soit (X,d_X) un espace de longueur compact et considérons son α-revêtement de longueur $p_\alpha : (X^\alpha,d_{X^\alpha}) \longrightarrow (X,d_X)$. Alors, pour tout point $\widetilde{x}$ de X^α, l'application p_α (en restriction) est*

(i) un homéomorphisme de $B_{X^\alpha}(\widetilde{x},r)$ sur $B_X(x,r)$ (où $x=p_\alpha(\widetilde{x})$) si $r\le\alpha$

(ii) une isométrie globale de $B_{X^\alpha}(\widetilde{x},r)$ sur $B_X(x,r)$ si $r\le\alpha/2$.

Définition 16. - *Si (X,d) est un espace de longueur compact qui admet un revêtement universel $p : (\widetilde{X},d_{\widetilde{X}}) \longrightarrow (X,d)$, nous définissons la systole de (X,d) par $sys(X,d) = \inf\{d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x},\gamma.\widetilde{x}) \,/\, \widetilde{x}\in\widetilde{X}, \gamma\in\Gamma\setminus\{id\}\}$.*
Si le groupe $G(\widetilde{X},X)$ est trivial, on pose $sys(X,d)=+\infty$.

Notons que cette définition coïncide avec la notion usuelle de systole d'une variété riemannienne lorsque X est une variété et que d est la distance induite par une métrique riemannienne.

Proposition 17. - *Considérons un espace de longueur compact (X, d_X) qui admet un revêtement universel $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ dont la systole est minorée par ε_0. Alors, pour tout $0 < \alpha \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, le revêtement universel $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ coïncide avec le α-revêtement de X (ou, ce qui est équivalent, pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$, les groupes $\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$ et $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ coïncident).*

3 Construction d'approximations équivariantes entre revêtements

Nous démontrons dans cette section le résultat fondamental de cet article :

Théorème 18. - *Soit (X, d_X) un espace de longueur compact (connexe), qui admet un revêtement universel et dont la systole est minorée par un réel $\varepsilon_0 > 0$ (par exemple un espace de $\mathcal{M}_{N,H,D}$, la valeur de ε_0 étant donnée par la formule $\varepsilon_0 := \frac{1}{N.H} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$) et soit (Y, d_Y) n'importe quel espace de longueur compact (connexe) tel que $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ tel que $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$,*

- *(i) il existe un isomorphisme ρ entre les groupes $G(\widetilde{X}, X)$ et $G(Y^\alpha, Y)$. En d'autres termes, il existe un morphisme surjectif $\widetilde{\rho} : \pi_1(Y, y) \longrightarrow G(\widetilde{X}, X)$ dont le noyau est $\pi_1(Y, U_{5\varepsilon}, y)$.*
- *(ii) ρ et $\widetilde{\rho}$ sont des morphismes induits par l'approximation de Hausdorff entre (X, d_X) et (Y, d_Y). Plus précisément, il existe deux applications $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \longrightarrow Y^\alpha$ et $\widetilde{\psi} : Y^\alpha \longrightarrow \widetilde{X}$ qui sont, pour tout $R > 0$, des $(\frac{3\varepsilon}{2\alpha}R + 3\varepsilon)$-approximations de Gromov-Hausdorff entre les boules de rayon R de $\widetilde{X}$ et Y^α, presque inverse l'une de l'autre. De plus, les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ sont respectivement ρ-équivariante et ρ^{-1}-équivariante et passent au quotient en des approximations de Hausdorff entre (X, d_X) et (Y, d_Y).*

Remarques 19. -

- *(i) En fait, nous montrons les inégalités suivantes sur $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$: pour tous les points $\widetilde{x}$ et $\widetilde{x}'$ de $\widetilde{X}$, pour tous les points $\widetilde{y}$ et $\widetilde{y}'$ de Y^α,*

$$(1) \qquad \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \widetilde{x}') - 3\varepsilon \leq d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}')) \leq \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{-1} d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \widetilde{x}') + \varepsilon$$

$$(2) \qquad \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) d_{Y^\alpha}(\widetilde{y}, \widetilde{y}') - 3\varepsilon \leq d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\widetilde{y}), \widetilde{\psi}(\widetilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\widetilde{y}, \widetilde{y}') + \varepsilon$$

$$(3) \qquad d_{\widetilde{X}}((\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi})(\widetilde{x}), \widetilde{x}) < \varepsilon \text{ et } d_{Y^\alpha}((\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi})(\widetilde{y}), \widetilde{y}) < \varepsilon$$

- *(ii) Si l'espace (Y, d_Y) possède un revêtement universel (resp. est semi-localement simplement connexe) et si sa systole est également minorée par ε_0, pour tout réel $\alpha > 0$ vérifiant $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, Y^α est le revêtement universel de Y (voir la proposition 17) et $G(Y^\alpha, Y)$ est le groupe des automorphismes de ce revêtement universel (resp. est isomorphe au groupe fondamental de Y) ; le théorème 18 est donc un résultat de rigidité locale sur le groupe des automorphismes du revêtement universel (resp. sur le* *groupe fondamental) et de quasi-rigidité de son action sur le revêtement universel sous l'hypothèse "systole minorée".*

(iii) *Sous l'hypothèse "systole minorée" on ne peut espérer améliorer le résultat de rigidité du groupe fondamental ci-dessus en un résultat de rigidité homotopique ou homologique. En effet, la remarque 3.20 de [Re] donne un contre-exemple : on y construit une suite de variétés dont la systole est uniformément minorée, dont la caractéristique d'Euler tend vers l'infini et qui convergent (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) vers une variété régulière.*

(iv) *Les hypothèses faites sur α dans le théorème 18 sont nécessaires : le réel α ne peut pas être choisi arbitrairement petit par rapport à ε ou arbitrairement grand par rapport à $\frac{\varepsilon_0}{2}$ (voir le paragraphe suivant sur l'approximation d'une variété par un graphe).*

(v) *Dans le cas où (X, d_X) est son propre revêtement universel (par exemple si (X, d_X) est une sphère), le groupe des automorphismes du revêtement universel est trivial. Le théorème 18 s'énonce alors de la manière suivante :*
Corollaire 20. - *Soit (X, d_X) un espace de longueur compact qui est son propre revêtement universel. Pour tout $\varepsilon > 0$, si (Y, d_Y) est un espace de longueur compact (connexe) quelconque tel que $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \varepsilon$, le groupe fondamental $\pi_1(Y, y)$ de Y est isomorphe à $\pi_1(Y, U_{5\varepsilon}, y)$.*

Corollaire 21. *Soit Y une variété compacte qui admet une métrique g_0 de courbure sectionnelle $\sigma_0 < 0$. S'il existe sur Y une suite de métriques $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entropie uniformément bornée (mais dont la courbure est de signe quelconque) qui forment une suite de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff, alors l'espace-limite (X, d) admet un revêtement universel $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ et, de plus, $G(\widetilde{X}, X)$ est isomorphe à $\pi_1(Y)$.*

Preuve du corollaire 21. - La variété Y admet une métrique g_1 de courbure sectionnelle $\sigma_1 \le -1$. Si $\delta_1 = inj(Y, g_1)$, le groupe $\pi_1(Y)$ est δ_1-épais (voir la définition 4). Comme, par ailleurs, l'entropie des espaces (Y, g_n) est supposée uniformément bornée par H et que, si n est suffisamment grand, $diam(Y, g_n) \le diam(X, d) + 1$, le point (iv) du théorème 2.1 de [BCG1] implique que, pour tout n suffisamment grand, $sys(Y, g_n) \ge \varepsilon_1 := \dfrac{\delta_1}{(4+\delta_1)H} e^{-2(\frac{4+\delta_1}{\delta_1})H(diam(X,d)+1)}$. Posons alors $\varepsilon_n = d_{GH}((Y, g_n), (X, d))$. Si n est suffisamment grand pour que $5\varepsilon_n < 6\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_n$, le théorème 18 implique que $\pi_1(Y) = G(\widetilde{Y}, Y) \simeq G(X^{6\varepsilon_n}, X)$. En particulier, les groupes $G(X^\alpha, X)$ sont tous isomorphes à partir d'un certain rang et le théorème 13 implique que X admet un revêtement universel $\widetilde{X}$ et que $G(\widetilde{X}, X) \simeq \pi_1(Y)$. □

Illustration : Approximation d'une variété par un graphe - Fixons un espace de longueur compact (connexe) (X, d) quelconque, semi-localement simplement connexe : son revêtement universel est simplement connexe et $G(\widetilde{X}, X)$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0)$. On construit un graphe qui approche l'espace de longueur (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de la manière suivante : si $\varepsilon < 1/4$, considérons un ε^2-réseau fini sur (X, d_X), noté $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$. On construit le graphe G (fini donc compact), dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$, en mettant une arête entre deux points x et y de $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ si et seulement si la distance (sur X)

entre ces deux points est strictement inférieure à ε ; on attribue alors à cette arête la longueur $d_X(x,y)$. On munit ensuite le graphe G de la distance de longueur d_G naturellement induite par cette construction. On peut alors vérifier que G est connexe par arcs et que $d_{GH}((X,d_X),(G,d_G)) \leq 4\varepsilon(D+\varepsilon)$ (voir [Re] p.117).

Le théorème 18 et sa preuve permettent alors de déduire le groupe fondamental de X à partir d'un quotient du groupe fondamental de G de la manière suivante :

Corollaire 22. - *Soit (X,d_X) un espace de longueur compact (connexe), semi-localement simplement connexe, de diamètre inférieur à D et dont la systole est supérieure à ε_0 (par exemple un espace de $\mathcal{M}_{N,H,D}$, pour $\varepsilon_0 = \frac{1}{NH}\log\frac{1}{1-e^{-2NHD}}$). Soit G un graphe de recouvrement connexe construit comme ci-dessus tel que $d_{GH}((X,d_X),(G,d_G)) < \frac{\varepsilon_0}{66}$. Le morphisme canonique de $\pi_1(G,x_0)$ sur $\pi_1(X,x_0)$ (associé à l'inclusion) est surjectif et a pour noyau le sous-groupe $\pi_1(G,U_{\varepsilon_0/13},x_0)$.*

Ce corollaire découle de la preuve du théorème 18, en remarquant que l'isomorphisme ρ qui y est construit dans le cas général coïncide ici avec le morphisme canonique associé à l'inclusion (où l'inclusion est dans ce cas une approximation de Gromov-Hausdorff).

3.1 Démonstration du théorème 18

Le théorème 18 est une version quantitative précisée du théorème 3.4 de [SW], dont certaines idées étaient déjà présentes dans [Tu1] et [Tu2]. Même si cette preuve s'appuie sur des techniques classiques, nous avons décidé de la détailler, d'une part pour montrer que les idées classiques de preuve (valables dans le cas d'applications continues) s'appliquent encore dans le cas d'approximations de Hausdorff non continues, mais aussi pour montrer qu'un calcul effectif des valeurs admises de ε et de α est possible en fonction seulement du minorant de la systole de (X,d_X). Enfin, la comparaison des distances obtenues n'est pas classique.
L'idée de la preuve qui suit est de discrétiser les courbes sur X pour les transporter en des "courbes discrètes" sur Y à l'aide de l'approximation de Hausdorff entre X et Y. Si la discrétisation est assez fine, nous allons montrer qu'une courbe représentant une classe de $G(\widetilde{X},X)$ est envoyée sur une courbe représentant une classe de $G(Y^\alpha,Y)$. Nous posons donc la définition suivante :

Définition 23. - *Soit (X,d_X) un espace de longueur. Une subdivision $T=(t_i)_{i=0\ldots p}$ de l'intervalle $[0,a]$ sera dite δ-admissible pour la courbe $c:[0,a]\longrightarrow X$ si $0=t_0<t_1<\cdots<t_p=a$ et si, pour tout $i\in\{0,1,\ldots,p-1\}$ et tout $t\in[t_i,t_{i+1}]$, $d_X(c(t_i),c(t))<\delta$.*

Construction de l'application $\widetilde{\varphi}$ et du morphisme ρ - Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une ε-approximation. Fixons définitivement un point x_0 de X, un point $\widetilde{x}_0$ qui appartient à $p^{-1}(x_0)$, notons $y_0=\varphi(x_0)$ et fixons un point y^α dans $(p_\alpha)^{-1}(y_0)$.
Si $\widetilde{x}$ est un point de $\widetilde{X}$, nous allons construire $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$. Soit $\widetilde{c}$ une courbe qui relie $\widetilde{x}_0$ à $\widetilde{x}$ dans $\widetilde{X}$, $c=p\circ\widetilde{c}$ et $x=p(\widetilde{x})$. Soit $T=(t_i)_{i=1\ldots p}$ une subdividion δ-admissible pour la courbe c. On construit sur Y une courbe c_T qui joint $y_0=\varphi(x_0)$ et $\varphi(x)$ en joignant, pour tout i, $\varphi\circ c(t_i)$ à $\varphi\circ c(t_{i+1})$ par une courbe minimisante quelconque de (Y,d_Y). On relève ensuite cette courbe en une courbe (continue) c_T^α de Y^α telle que $c_T^\alpha(0)=y^\alpha$.

Lemme 24. - *Si $c : [0,a] \longrightarrow X$ est une courbe incluse dans une boule $B_X(x,r)$ et si T est une subdivision δ-admissible pour c, la courbe c_T est incluse dans la boule $B_Y(\varphi(x), r+\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{\delta}{2})$.*

Preuve du lemme 24. - Pour tout t de $[t_i,t_{i+1}]$, comme φ est une ε-approximation, on a

$$\begin{array}{rcl} d_Y(\varphi(x),c_T(t)) & \leq & d_Y(\varphi(x),\varphi\circ c(t_i))+d_Y(\varphi\circ c(t_i),c_T(t)) \\ & < & r+\varepsilon+d_Y(\varphi\circ c(t_i),c_T(t)) \end{array}$$

On conclut en ajoutant à cette inégalité celle obtenue en remplaçant t_i par t_{i+1} et en utilisant le fait que $d_Y(\varphi\circ c(t_i),c_T(t))$ est la longueur de $c_T([t_i,t])$. $\square$

Lemme 25. - *L'extrémité $c_T^\alpha(1)$ du chemin c_T^α ne dépend ni du choix de la subdivision T (si elle est δ-admissible pour $\delta \leq \frac{2}{3}\alpha-\varepsilon$), ni du choix des courbes minimisantes entre les points $\varphi\circ c(t_i)$ et $\varphi\circ c(t_{i+1})$.*

Preuve du lemme 25. - Soient $\delta>0$ et $\delta'>0$ inférieurs à $\frac{2}{3}\alpha-\varepsilon$. Soit $T=(t_i)_{i=1\dots p}$ (resp. $T'=(t'_i)_{i=1\dots q}$) une subdivision de $[0,a]$, δ-admissible (respectivement δ'-admissible) pour la courbe c. Construisons les courbes c_T et $c_{T'}$, posons $T" = T\cup T'$ et construisons $c_{T"}$.
Commençons par montrer que le lacet $c_{T"}.c_T^{-1}$ est un lacet de $\pi_1(Y,U_\alpha,y_0)$, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme produit de lacets du type $\beta.c.\beta^{-1}$, où c est un lacet inclus dans une boule de rayon α et β est un chemin entre y_0 et y.
Tout d'abord, si $\beta_i = c_{T|[t_0,t_i]}$ et si γ_i est le lacet de point base $\varphi\circ c(t_i)$ donné par $\gamma_i = c_{T"|[t_i,t_{i+1}]}.c^{-1}_{T|[t_i,t_{i+1}]}$, on a, en homotopie : $\prod_{i=0}^{p-1}\beta_i.\gamma_i.\beta_i^{-1} \sim c_{T"}.c_T^{-1}$. Par ailleurs, comme le lacet $c_{|[t_i,t_{i+1}]}.c^{-1}_{|[t_i,t_{i+1}]}$ est inclus dans une boule de rayon δ, le lemme 24 implique que le lacet γ_i est inclus dans la boule $B_Y(\varphi\circ c(t_i),\frac{3}{2}(\delta+\varepsilon))$. Dès que $\alpha\geq\frac{3}{2}(\delta+\varepsilon)$, on en déduit que tous les lacets de la forme $\beta_i.\gamma_i.\beta_i^{-1}$ appartiennent au groupe $\pi_1(Y,U_\alpha,y_0)$; il s'ensuit que le lacet $c_{T"}.c_T^{-1}$ appartient également à $\pi_1(Y,U_\alpha,y_0)$. D'après la proposition 14, il se relève sur Y^α en un lacet $c^\alpha_{T"}.(c_T^{-1})^\alpha$ où $c^\alpha_{T"}$ et $(c_T^{-1})^\alpha$ sont les relevés des courbes $c_{T"}$ et c_T^{-1} d'origines respectives y^α et $c^\alpha_{T"}(a)$. Comme $(c_T^{-1})^\alpha(a)=y^\alpha=c_T^\alpha(0)$, on a $(c_T^{-1})^\alpha=(c_T^\alpha)^{-1}$ et il s'ensuit que les courbes $c^\alpha_{T"}$ et c^α_T ont même extrémité.

On montre de même que les courbes $c^\alpha_{T"}$ et $c^\alpha_{T'}$ ont même extrémité et, finalement, si $\alpha\geq\frac{3}{2}(\delta+\varepsilon)$, les courbes c^α_T et $c^\alpha_{T'}$ ont même extrémité, ce qui termine la preuve du lemme 25. $\square$

Remarque 26. *Le lemme 25 entraîne que l'on peut toujours remplacer une subdivision δ-admissible T par une subdivision T' plus fine (ce qui veut dire que δ peut être choisi arbitrairement petit) pourvu que $\delta\leq\frac{2}{3}\alpha-\varepsilon$.*

A tout point $\widetilde{x}$ de $\widetilde{X}$, on associe le point $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$ construit de la manière suivante : soit $\widetilde{c}$ une courbe quelconque reliant $\widetilde{x}_0$ à $\widetilde{x}$ et soit $c=p\circ\widetilde{c}$ sa projection sur X. A toute subdivision δ-admissible de $\widetilde{c}$ (pour $\delta<\frac{2}{3}\alpha-\varepsilon$), notée T, on associe la courbe c_T de Y construite comme au lemme 25 et l'on pose $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})=c_T^\alpha(1)$, où $c_T^\alpha(1)$ est l'extrémité du chemin c_T^α.

D'après le lemme 25, $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$ ne dépend pas de la subdivision T. Pour s'assurer que l'application $\widetilde{\varphi}$ est bien définie, il nous reste à vérifier que la construction de $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$ ne dépend pas du chemin $\widetilde{c}$ choisi entre $\widetilde{x}_0$ et $\widetilde{x}$, c'est-à-dire que si $\widetilde{\gamma}$ est un autre chemin qui relie ces deux points, alors $\gamma_T^\alpha(1) = c_T^\alpha(1)$. D'après la proposition 14, ceci équivaut à prouver que $\gamma_T.c_T^{-1}$ appartient à $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$. Nous commençons par montrer quelques résultats intermédiaires et nous montrons l'indépendance de la construction de $\widetilde{\varphi}$ par rapport au chemin choisi dans le lemme 29.

Lemme 27. - *Soient c et γ deux lacets sur X tels que $[c]^r = [\gamma]^r$ dans $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_r, x_0)$ et T une subdivision δ-admissible pour c et γ.*

Si $\alpha \geq r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$ et si $\delta \leq \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$, alors $[c_T]^\alpha = [\gamma_T]^\alpha$ dans $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$.
En particulier, si c et γ sont homotopes et si $\alpha > \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$, on a l'égalité $[c_T]^\alpha = [\gamma_T]^\alpha$ pour toute subdivision T, pourvu qu'elle soit δ-admissible pour c et γ.

Preuve du lemme 27. - Considérons deux lacets quelconques c et γ de X, de point-base x_0, et notons $a = c.\gamma$ le lacet obtenu par concaténation. Si $T' = (t'_i)_{i=0\dots p}$ et $T" = (t"_j)_{j=0\dots q}$ sont des subdivisions δ-admissibles de c et γ, la subdivision $T = T' \cup T" = (t_i)_{i=0,\dots,p+q}$, obtenue en concaténant les deux subdivisions et en identifiant $t"_0$ et t'_p, est δ-admissible pour a. Comme la classe de a_T dans $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ ne dépend pas des chemins minimisants choisis entre les points $\varphi \circ \alpha(t_i)$, on peut construire α_T comme la concaténation de $c_{T'}$ et de $\gamma_{T"}$.

De même, si c est une courbe sur X, on construit $(c^{-1})_T$ comme égale à $(c_T)^{-1}$.

Si de plus, $[c]^r = [\gamma]^r$, le lacet $\alpha = \gamma.c^{-1}$ est alors un produit de lacets du type $\beta.\gamma_i.\beta^{-1}$, où chaque γ_i est un lacet inclus dans une boule $B_X(x_i, r)$. D'après la propriété de concaténation que nous venons d'établir, le lacet α_T peut alors être construit comme un produit de lacets du type $\beta_{T_1}.\gamma_{i_{T_2}}.\beta_{T_1}^{-1}$, où $\gamma_{i_{T_2}}$ est inclus (d'après le lemme 24) dans la boule $B_Y(\varphi(x_i), r+\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{\delta}{2})$. Comme $B_Y(\varphi(x_i), r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2})$ est incluse dans $B_Y(\varphi(x_i), \alpha)$, on a $[\alpha_T]^\alpha = [e]^\alpha$. Par ailleurs, comme $[\alpha_T]^\alpha = [\gamma_{T"}.c_{T'}^{-1}]^\alpha$, on a $[\gamma_{T"}]^\alpha = [c_{T'}]^\alpha$.

Si γ et c sont deux lacets homotopes, alors, pour tout $r > 0$, $[c]^r = [\gamma]^r$ dans $\pi_1(X, x_0)/\pi_1$ (X, U_r, x_0). Si $\alpha > \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$, posons $r = \alpha - \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{\delta}{2} > 0$: il découle du point (i) du lemme 27 que $[c_T]^\alpha = [\gamma_T]^\alpha$. □

Lemme 28. - *Si $\frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, et si c parcourt l'espace des lacets de point-base x_0, l'application $c \longmapsto c_T$ (où T est une subdivision quelconque δ-admissible pour c) induit, par passage aux classes d'homotopie, un morphisme*

$$\rho : \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$$

(Rappelons que $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ est isomorphe à $G(\widetilde{X}, X)$) et que $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1$ (Y, U_α, y_0) est isomorphe à $G(Y^\alpha, Y)$).

Preuve du lemme 28. - D'après la proposition 17, puisque $sys(X, d_X) > \varepsilon_0$, les groupes $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ et $\pi_1(X, U_r, x_0)$ sont égaux pour tout $0 < r \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. En particulier, si $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ et si $\alpha - \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{\delta}{2} > 0$ et si c et γ sont deux lacets tels que $[c]^{\varepsilon_0/2} = [\gamma]^{\varepsilon_0/2}$, il en découle que

$[c]^{\alpha-\frac{3}{2}\varepsilon-\frac{\delta}{2}} = [\gamma]^{\alpha-\frac{3}{2}\varepsilon-\frac{\delta}{2}}$. Si T et T' sont des subdivisions δ-admissibles pour c et γ, le lemme 27 entraîne que $[c_T]^\alpha = [\gamma_{T'}]^\alpha$; l'application ρ est donc bien définie.

Le fait que ρ est un morphisme découle du fait que $[e_T]^\alpha = e$ et de la propriété de concaténation, établie quand $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta+\varepsilon)$ dans la preuve du lemme 27 : si $a = c.\gamma$ et si $T = T' \cup T$", alors a_T et $(c_{T'}.\gamma_{T"}$ représentent le même élément de $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha y_0)$. Ceci termine la preuve du lemme 28. □

Lemme 29. - *Si $\frac{3}{2}(\delta+\varepsilon) < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, la construction de $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$ ne dépend pas du choix du chemin $\widetilde{c}$, pourvu que celui-ci relie $\widetilde{x}_0$ à $\widetilde{x}$ dans $\widetilde{X}$; l'application $\widetilde{\varphi} : \widetilde{x} \longrightarrow \widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$ est donc correctement définie.*

Preuve du lemme 29. - Si $\widetilde{c} : [0,1] \longrightarrow \widetilde{X}$ et $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \widetilde{X}$ sont deux chemins continus d'origine $\widetilde{x}_0$ et d'extrémité $\widetilde{x}$, et si l'on note $c = p \circ \widetilde{c}$ et $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma}$, le chemin $\gamma.c^{-1}$ est un lacet de X dont un relevé est le *lacet* $\widetilde{\gamma}.(\widetilde{c})^{-1}$. Il s'ensuit que le lacet $\gamma.c^{-1}$ appartient à $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ (d'après la proposition 14). Si T est une subdivision δ-admissible pour les courbes γ et c, le lemme 28 permet d'en déduire que

$$[e]^\alpha = \rho([\gamma.c^{-1}]^{\varepsilon_0/2}) = [\gamma_T.(c_T)^{-1}]^\alpha$$

Le lacet $\gamma_T.(c_T)^{-1}$ sur Y appartient donc à $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$: son relevé $\gamma_T^\alpha.(c_T^\alpha)^{-1}$ est alors un lacet sur Y^α et les relevés γ_T^α et c_T^α des courbes γ_T et c_T, qui ont même origine y^α, ont même extrémité dans Y^α. Il en découle que la construction de $\widetilde{\varphi}$ ne dépend pas du chemin choisi entre $\widetilde{x}_0$ à $\widetilde{x}$. □

Construction de l'application $\widetilde{\psi}$ - Soit $\psi : Y \longrightarrow X$ une ε-approximation de Hausdorff "presque-inverse" de l'approximation φ (c'est-à-dire que ψ et φ vérifient le point (ii) de la définition 10). On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\psi \circ \varphi(x_0) = \psi(y_0) = x_0$. On construit alors l'application $\widetilde{\psi} : Y^\alpha \longrightarrow \widetilde{X}$ et le morphisme $r : \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ comme on a construit l'application $\widetilde{\varphi}$ (en relevant cette fois-ci l'application ψ) et le morphisme ρ. Il suffit pour cela de remarquer que $\widetilde{X}$ est le $\frac{\varepsilon_0}{2}$-revêtement de X. Comme dans le lemme 25, on montre l'indépendance de la construction par rapport au choix de la subdivision T δ-admissible pour $\delta \leq \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$, ainsi que l'indépendance par rapport au choix des courbes minimisantes entre les points $\psi \circ c(t_i)$ et $\psi \circ c(t_{i+1})$. Par ailleurs, si $\frac{\varepsilon_0}{2} > \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$ l'application

$$\begin{array}{rccc} r: & \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0) \\ & [c]^\alpha & \longmapsto & [c_T]^{\varepsilon_0/2}, \end{array}$$

induite par passage aux classes d'homotopie est bien définie. En effet, si c et γ sont deux lacet de Y tels que $[c]^\alpha = [\gamma]^\alpha$, le lemme 27 implique que $[c_T]^{\varepsilon_0/2} = [\gamma_T]^{\varepsilon_0/2}$. On montre comme dans le lemme 28 que, sous ces conditions, l'application r est un morphisme. L'application $\widetilde{\psi}$ est alors bien définie dès que $\frac{\varepsilon_0}{2} > \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon$.

Preuve des inégalités du théorème 18 -

Lemme 30. - *Si $\frac{3}{2}\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ (bien) définies ci-dessus vérifient, pour tous les points $\widetilde{x}$ et $\widetilde{x}'$ de $\widetilde{X}$ et pour tous les points $\widetilde{y}$ et $\widetilde{y}'$ de Y^α,*

(i) $d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}')) \leq \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{-1} d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \widetilde{x}') + \varepsilon$

(ii) $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\widetilde{y}), \widetilde{\psi}(\widetilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\widetilde{y}, \widetilde{y}') + \varepsilon$

Preuve du lemme 30. - Comme $\frac{3}{2}\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, le lemme 29 nous assure l'existence de $\widetilde{\varphi}$. De même, comme $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, l'application $\widetilde{\psi}$ est bien définie.

Choisissons un réel δ qui vérifie $0 < \delta < \min\{\frac{2}{3}\alpha - \varepsilon, \varepsilon_0 - 3\varepsilon - 2\alpha$.
Soit $\widetilde{c}$ une courbe minimisante qui relie les points $\widetilde{x}$ et $\widetilde{x}'$ dans $\widetilde{X}$. Soit $\widetilde{\gamma}$ un chemin qui joint les points $\widetilde{x}_0$ et $\widetilde{x}$. Pour construire $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}')$, comme $\frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (par choix de δ) et $\varepsilon < \frac{2\alpha}{3}$, le lemme 29 nous permet de choisir le chemin $\widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma}.\widetilde{c}$ comme chemin qui relie $\widetilde{x}_0$ et $\widetilde{x}'$. Si T (resp. T') est une subdivision δ-admissible pour $\widetilde{\gamma}$ (resp. $\widetilde{c}$) paramétrée par $[0,1]$ (resp. $[1,2]$), alors $T \cup T' = T_1$ est une subdivision δ-admissible pour $\widetilde{\beta}$.

Posons $\delta' = \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$ et fixons un réel $\eta > 0$. Construisons une subdivision T" de $[1,2]$ (δ'-admissible pour la courbe $\widetilde{c}$) de telle sorte que les points $\widetilde{c}(t_i)$ (pour tous les éléments $t_i \in T" \setminus \{2\}$ sauf le dernier) vérifient $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{c}(t_i), \widetilde{c}(t_{i+1})) = \delta' - \eta$. Alors, la subdivision $T_2 = T \cup T"$ est une subdivision de $\widetilde{\beta}$ qui, bien que n'étant plus δ-admissible, permet de construire une courbe $\beta^\alpha_{T_2}$ de Y^α qui a la même extrémité que $\beta^\alpha_{T_1}$ d'après le lemme 25 et le paragraphe qui le suit (car on a bien alors $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta' + \varepsilon)$). On a donc, puisque $\widetilde{x} = \widetilde{\beta}(1)$ et $\widetilde{x}' = \widetilde{\beta}(2)$,

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = \gamma^\alpha_T(1) = \beta^\alpha_{T_2}(1) \text{ et } \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}') = \beta^\alpha_{T_1}(2) = \beta^\alpha_{T_2}(2)$$

Ainsi,

$$d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}')) \leq \sum_{t_i \in T" \setminus \{2\}} d_{Y^\alpha}(\beta^\alpha_{T_2}(t_i), \beta^\alpha_{T_2}(t_{i+1}))$$

Puisque la courbe $\beta^\alpha_{T_2}$ est la courbe relevée de β_{T_2}, on a

$$\begin{array}{rcccl} d_{Y^\alpha}(\beta^\alpha_{T_2}(t_i), \beta^\alpha_{T_2}(t_{i+1})) & \leq & \text{long } (\beta^\alpha_{T_2|[t_i,t_{i+1}]}) & = & \text{long } (\beta_{T_2|[t_i,t_{i+1}]}) \\ & = & d_Y(\varphi \circ \beta(t_i), \varphi \circ \beta(t_{i+1})) & < & d_X(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) + \varepsilon \\ & \leq & d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\beta}(t_i), \widetilde{\beta}(t_{i+1})) + \varepsilon & & \end{array}$$

la dernière inégalité provenant du fait que p est contractante.

Par ailleurs, comme $T" \subset [1,2]$ et comme $\widetilde{\beta}_{|[1,2]} = \widetilde{c}$ est minimisante, en sommant et en faisant tendre η vers zéro, on en déduit que

$$d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}')) \leq d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \widetilde{x}') + \left(\frac{d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \widetilde{x}')}{\delta'} + 1\right)\varepsilon$$

ce qui termine la preuve de la première inégalité du lemme 30.

On procède de la même manière pour la deuxième inégalité du lemme 30, en remplaçant $\widetilde{\varphi}$ par $\widetilde{\psi}$ et $\widetilde{x}$ et $\widetilde{x}'$ par deux points quelconques $\widetilde{y}$ et $\widetilde{y}'$ de Y^α. La seule différence réside dans le fait que, pour pouvoir appliquer le lemme 25, il faut remplacer α pat $\frac{\varepsilon_0}{2}$ et δ' par $\delta" = \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$. On trouve ainsi

$$d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\widetilde{y}), \widetilde{\psi}(\widetilde{y}')) \leq d_{Y^\alpha}(\widetilde{y}, \widetilde{y}') + \left(\frac{d_{Y^\alpha}(\widetilde{y}, \widetilde{y}')}{\delta"} + 1\right)\varepsilon$$

ce qui termine la preuve du lemme 30. □

Lemme 31. - *Les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ vérifient, pour tous les points $\widetilde{x}$ de $\widetilde{X}$ et pour tous les points $\widetilde{y}$ de Y^α,*

(i) $d_{\widetilde{X}}((\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi})(\widetilde{x}), \widetilde{x}) < \varepsilon$ *si* $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10}$

(ii) $d_{Y^\alpha}((\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi})(\widetilde{y}), \widetilde{y}) < \varepsilon$ *si* $\varepsilon < \frac{\alpha}{5}$

Preuve du lemme 31. - Soit $\widetilde{c}$ une courbe qui joint $\widetilde{x}_0$ et $\widetilde{x}$; fixons une subdivision $T = (t_i)_{0 \leq i \leq N}$ δ-admissible pour $\widetilde{c}$. Nous allons prouver par récurrence sur i que, si c_T^α est la courbe sur Y^α associée à $c = p \circ \widetilde{c}$ selon le procédé décrit avant le lemme 27, alors, pour tout $t_i \in T$,

$$(H_i) \qquad d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \widetilde{c}(t_i)) < \varepsilon$$

Ceci est vrai au rang $i = 0$, puisque $\widetilde{\psi}(\widetilde{y}_0) = \widetilde{x}_0$ par construction.
Supposons que ce soit vrai à l'ordre i, alors

(1) $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \widetilde{c}(t_i)) < \varepsilon$ par hypothèse de récurrence

(2) $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \widetilde{c}(t_{i+1})) < \varepsilon + \delta$ par l'inégalité triangulaire

Par ailleurs, la courbe c_T^α est un relevé de la courbe c_T minimisante entre les points $\varphi \circ c(t_i)$ et $\varphi \circ c(t_{i+1})$, ce qui implique

$$\begin{aligned} d_{Y^\alpha}(c_T^\alpha(t_i), c_T^\alpha(t_{i+1})) &\leq \text{long } (c^\alpha_{T|[t_i,t_{i+1}]}) = \text{long } (c_{T|[t_i,t_{i+1}]}) \\ &= d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_{i+1})) < \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième inégalité du lemme 30, nous en déduisons l'inégalité

$$(3) \quad \begin{aligned} d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1})) &< \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon \\ &\leq \frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon \end{aligned}$$

la dernière ligne étant valable parce que $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10}$.
Si l'on choisit δ tel que $\frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4}$, les membres de droite des inégalités (2) et (3) sont majorés par $\frac{\varepsilon_0}{4}$. Comme $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ coïncide avec le $\frac{\varepsilon_0}{2}$-revêtement $(X^{\varepsilon_0/2}, d_{X^{\varepsilon_0/2}})$ de X, le point (i) de la propriété 15 implique que les points $\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1})$ et $\widetilde{c}(t_{i+1})$ sont les uniques relevés de $\psi \circ \varphi[c(t_{i+1})]$ et de $c(t_{i+1})$ dans la boule de $\widetilde{X}$ de centre $\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i)$ et de rayon $\frac{\varepsilon_0}{4}$. Comme, d'après le point (ii) de la propriété 15, l'application p est une isométrie en restriction à cette boule, on a

$$d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1}), \widetilde{c}(t_{i+1})) = d_X(\psi \circ \varphi(c(t_{i+1})), c(t_{i+1})) < \varepsilon$$

ce qui prouve l'inégalité (H_i) pour tout i. En l'appliquant pour $t_i = 1$, on obtient $d_{\widetilde{X}}\left(\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}),\widetilde{x}\right) < \varepsilon$. Ceci termine la preuve de la première inégalité du lemme 31.

Montrons la deuxième inégalité : soit c^α une courbe qui joint y^α et $\widetilde{y}$ dans Y^α ; fixons une subdivision $T = (t_i)_{0\le i\le N}$ (δ-admissible) pour c^α et construisons la courbe c_T de X et son relevé $\widetilde{c}_T$ sur $\widetilde{X}$ associées à la courbe $c = p_\alpha \circ c^\alpha$. On prouve par récurrence que, pour tout $t_i \in T$,

$(H_i')\quad d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{c}_T(t_i), c^\alpha(t_i)) < \varepsilon$

La preuve est identique à celle que nous venons de faire, à condition d'y remplacer $\widetilde{\psi}$ par $\widetilde{\phi}$, c_T^α par $\widetilde{c}_T$ et $\frac{\varepsilon_0}{2}$ par α. On obtient ainsi que, si $\varepsilon < \frac{\alpha}{5}$, alors $d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\psi}(\widetilde{y}),\widetilde{y}) < \varepsilon$. □

Lemme 32. - *Si $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ définies ci-dessus vérifient, pour tous les points $\widetilde{x}$ et $\widetilde{x}'$ de $\widetilde{X}$ et pour tous les points $\widetilde{y}$ et $\widetilde{y}'$ de Y^α,*

$$\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left[d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x},\widetilde{x}') - 3\varepsilon\right] \le d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}),\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}'))$$

et

$$\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left[d_{Y^\alpha}(\widetilde{y},\widetilde{y}') - 3\varepsilon\right] \le d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\widetilde{y}),\widetilde{\psi}(\widetilde{y}'))$$

Preuve du lemme 32. - Remarquons que l'hypothèse $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ implique que $\varepsilon < \frac{\alpha}{5}$, que $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10}$ et que $\frac{3}{2}\varepsilon < \alpha$, d'où la validité des lemmes 25 à 31 pour une valeur suffisamment petite de δ. En appliquant l'inégalité triangulaire et le lemme 31, puis le lemme 30, nous obtenons

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x},\widetilde{x}') &\le d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}),\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}')) + 2\varepsilon \\ &\le \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}),\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}')) + 3\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui donne la première inégalité du lemme 32.

La deuxième inégalité se montre exactement de la même manière. □

Le morphisme ρ est un isomorphisme -

Lemme 33. - *Si $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, le morphisme ρ défini dans le lemme 28 est un isomorphisme dont l'inverse est le morphisme r défini dans la section "Construction de l'application $\widetilde{\psi}$".*

Preuve du lemme 33. - Rappelons tout d'abord que $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ coïncide avec $(X^{\varepsilon_0/2}, d_{X^{\varepsilon_0/2}})$. Notons $[c]$ la classe d'un lacet c sur X dans le groupe $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,U_{\varepsilon_0/2},x_0)$, $\widetilde{c}$ le relevé de ce lacet à $\widetilde{X}$ d'origine $\widetilde{x}_0$ et $[\gamma]^\alpha$ la classe d'un lacet γ sur Y dans le groupe $\pi_1(Y,y_0)/\pi_1(Y,U_\alpha,y_0)$ et γ^α le relvé de ce lacet à Y^α d'origine y^α.

L'action de $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,U_{\varepsilon_0/2},x_0)$ (respectivement de $\pi_1(Y,y_0)/\pi_1(Y,U_\alpha,y_0)$) sur $\widetilde{X}$ (resp. sur Y^α) étant définie par $[c].\widetilde{x}_0 = \widetilde{c}(1)$ (resp. $[\gamma]^\alpha.y^\alpha = \gamma^\alpha(1)$), on a, pour tout lacet c (resp. γ) de point-base x_0 sur $\widetilde{X}$ (resp. de point-base y_0 sur Y^α),

(4) $r([\gamma]^\alpha).\widetilde{x}_0 = [\gamma_{T'}].\widetilde{x}_0 = \widetilde{\gamma}_{T'}(1) = \widetilde{\psi}(\gamma^\alpha(1)) = \widetilde{\psi}([\gamma]^\alpha.y^\alpha)$
(5) $\rho([c]).y^\alpha = [c_T]^\alpha.y^\alpha = c_T^\alpha(1) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{c}(1)) = \widetilde{\varphi}([c].\widetilde{x}_0)$
où T (resp. T') est une subdivision δ-admissible de c (resp. de γ) et où δ est choisi suffisamment petit pour que, sous l'hypothèse $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, toutes les hypothèses des lemmes 25 à 31 soient vérifiées. On obtient ainsi

$$(r \circ \rho([c])).\widetilde{x}_0 = \widetilde{\psi}[\rho([c]).y^\alpha] = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}([c].\widetilde{x}_0)$$

donc, en appliquant le lemme 31, il s'ensuit que

$$d_{\widetilde{X}}\left([r \circ \rho([c])].\widetilde{x}_0, [c].\widetilde{x}_0\right) < \varepsilon$$

Les points $r \circ \rho([c]).\widetilde{x}_0$ et $[c].\widetilde{x}_0$ sont donc deux éléments de $p^{-1}(x_0)$ situés à une distance inférieure à ε et, si $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$, ils sont confondus d'après le point (i) de la propriété 15. Ainsi, comme l'action de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ sur $\widetilde{X}$ est sans point fixe, on a $r \circ \rho = id$.

On prouve de même que $\rho \circ r = id$, donc que ρ et r sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. □

Equivariance des applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ - L'action de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ décrite dans la preuve du lemme 33 explicite l'isomorphisme $\Phi_{\widetilde{x}_0}$ entre ce groupe et le groupe $G(\widetilde{X}, X)$ des automorphismes de revêtement ; $\Phi_{\widetilde{x}_0}([c])$ est défini commel'unique élément de $G(\widetilde{X}, X)$ qui envoie $\widetilde{x}_0$ sur $\widetilde{c}(1)$ où $\widetilde{c}$ est le relvé de c d'origine $\widetilde{x}_0$. Bien que $\Phi_{\widetilde{x}_0}$ dépende du choix de $\widetilde{x}_0$ dans la fibre au-dessus de x_0, nous adopterons, par commodité, la notation $[c].\widetilde{x}$ pour $\Phi_{\widetilde{x}_0}([c]).\widetilde{x}$. La même remarque vaut pour l'isomorphisme entre $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ et $G(Y^\alpha, Y)$. Moyennant cet abus de langage, on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 34. - *Pour tous les points $\widetilde{x}$ de $\widetilde{X}$ et $\widetilde{y}$ de Y^α, pour tous les éléments $[\gamma]$ de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ et tous les éléments $[\beta]^\alpha$ de $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$, on a*

$$\widetilde{\varphi}([\gamma].\widetilde{x}) = \rho([\gamma]).\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$$

$$\widetilde{\psi}([\beta]^\alpha.\widetilde{y}) = r([\beta]^\alpha).\widetilde{\beta}(\widetilde{y})$$

Preuve du lemme 34. - Ce lemme a déjà été prouvé dans le cas où $\widetilde{x} = \widetilde{x}_0$ et $\widetilde{y} = y^\alpha$, puisque nous avons déjà vu que $[c]^\alpha.y^\alpha$ est l'extrémité du relevé c^α de c d'origine y^α. Si $\widetilde{y}$ est un point quelconque de Y^α, choisissons une courbe b^α qui joint y^α à $\widetilde{y}$ et notons $\bar{b}$ la courbe relevée de $b = p_\alpha \circ b^\alpha$ en partant de l'origine $[c]^\alpha.y^\alpha = c^\alpha(1)$. On a alors,

(6) $[c]^\alpha.\widetilde{y}$ = extrémité de $\bar{b}$
= extrémité du relevé $c^\alpha.\bar{b}$ (dans Y^α) de la courbe $c.b$ d'origine y^α

En effet, la courbe $t \longrightarrow [c]^\alpha.b^\alpha(t)$ est un relevé de b de même origine que $\bar{b}$; elle coïncide donc avec $\bar{b}$ et

$$\text{extrémité de } \bar{b} = [c]^\alpha.(\text{extrémité de } b^\alpha) = [c]^\alpha.\widetilde{y}$$

[Il s'agit là d'une propriété classique des revêtements galoisiens, qui vaut aussi pour le revêtement $\widetilde{X} \longrightarrow X$ (ne serait-ce que parce que $\widetilde{X} = X^\delta$ si δ est suffisamment petit).]

Choisissons des subdivisions δ-admissibles (pour δ assez petit) T et T' de c et b respectivement et notons $T = T' \cup T"$ la subdivsion concaténée de $(c.b)$. Rappelons que
(7) $[c_{T'}] = r([c]^\alpha)$
(8) $\widetilde{\psi}(\widetilde{y}) = \widetilde{\psi}(b^\alpha(1)) =$ extrémité du relevé $\widetilde{b}_{T"}$ de $b_{T"}$ d'origine $\widetilde{x}_0$
On en déduit que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}([c]^\alpha.\widetilde{y}) &= \widetilde{\psi}(\text{extrémité de } c^\alpha.\bar{b}) \\
&= \text{extrémité du relevé } \widetilde{(c.b)}_T \text{ de } (c.b)_T \text{ d'origine } \widetilde{x}_0 \\
&= \text{extrémité du relevé de } c_{T'}.b_{T"} \text{ d'origine } \widetilde{x}_0 \\
&= [c_{T'}].(\text{extrémité du relevé } \widetilde{b}_{T"} \text{ de } b_{T"} \text{ d'origine } \widetilde{x}_0) \\
&= [c_{T'}].\widetilde{\psi}(\widetilde{y}) \\
&= r([c]^\alpha).\widetilde{\psi}(\widetilde{y})
\end{aligned}$$

où la première et la quatrième égalité découlent de (6), la seconde et la cinquième de la définition de $\widetilde{\psi}$ (voir (8)), la troisième de la construction de $(c.b)_T$ à partir de $c.b$ qui donne $(c.b)_T = c_{T'}.b_{T"}$ (ce choix étant rendu possible par le lemme 25) et la sixième des égalités (7) et (8).

Ceci prouve l'équivariance de $\widetilde{\psi}$ par rapport à la représentation r ; l'équivariance de $\widetilde{\varphi}$ par rapport à ρ se prouve de la même manière. $\square$

3.2 Convergence des revêtements universels et complétude

Dans cette partie, nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 35. - *L'ensemble des classes d'isométrie d'espaces métriques de longueur compacts qui admettent un revêtement universel et dont la systole (au sens de la définition 16) est uniformément minorée par $\varepsilon_0 > 0$ est complet pour la distance de Gromov-Hausdorff.*

Comme l'ensemble des (classes d'isométrie) des espaces de longueur compacts est complet pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir [Gr],proposition 3.8), le théorème 35 découle de la proposition suivante :

Proposition 36. - *Soit $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de longueur qui possèdent un revêtement universel et dont la systole est uniformément minorée. Si $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff, elle converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique de longueur compact (Y, d_Y) qui a les propriétés suivantes :*

(i) l'espace limite (Y, d_Y) admet un revêtement universel, noté $(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}})$;

(ii) le revêtement $Y^\alpha \longrightarrow Y$ coïncide avec le revêtement $\widetilde{Y} \longrightarrow Y$ pour tout réel α tel que $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (donc la systole de Y est supérieure à ε_0) ;

(iii) $(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}})$ est la limite pour la topologie Gromov équivariante (au sens de la définition de K. Fukaya donnée dans [Fu]) de la suite des revêtements universels $((\widetilde{X}_n, d_{\widetilde{X}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 37. *Le revêtement universel de (Y, d_Y) n'est pas nécessairement simplement connexe, même si les revêtements universels de tous les espaces X_n le sont (voir l'exemple 3.76 de [Re]).*

Preuve du corollaire 36. - Pour montrer le point (i), il suffit de vérifier que, pour tous les réels α et α' tels que $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, les revêtements $p_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y$ et $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \longrightarrow Y$ coïncident. Le paragraphe qui précède le théorème13 implique qu'il existe un revêtement $\pi : Y^{\alpha'} \longrightarrow Y^\alpha$. On a alors la chaîne de revêtements

$$\begin{array}{ccc} Y^{\alpha'} & \longrightarrow & Y^\alpha \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Y & \end{array}$$

Nous allons vérifier que π est un isomorphisme de revêtement.
Soit $\varepsilon > 0$ un réel tel que $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ et $5\varepsilon < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ et soit n un entier suffisamment grand pour que $d_{GH}((X_n, d_n), (Y, d_Y)) < \varepsilon$. On applique ensuite le théorème 18 au revêtement $p_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y$ puis au revêtement $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \longrightarrow Y$. Or, dans la preuve du lemme 28, on montre qu'il existe un point x_n de X_n et un point y_0 de Y tels que l'application

$$\begin{array}{cccc} r_n : & \pi_1(Y, y_0) & \longrightarrow & \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, U_{\varepsilon_0/2}, x_n) \\ & [c] & \longmapsto & [c_T] \end{array}$$

soit un morphisme dont le noyau contient $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ et $\pi_1(Y, U_{\alpha'}, y_0)$.
Il s'ensuit que le morphisme r_n passe au quotient en deux morphismes

$$r_n^\alpha : \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) \longrightarrow \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, U_{\varepsilon_0/2}, x_n)$$

$$r_n^{\alpha'} : \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_{\alpha'}, y_0) \longrightarrow \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, U_{\varepsilon_0/2}, x_n)$$

Le lemme 33 prouve que ces deux morphismes sont deux isomorphismes ; il en découle que

$$\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) = Ker\, r_n = \pi_1(Y, U_{\alpha'}, y_0)$$

Le corollaire IX.3.6 de [Go] permet d'en déduire que $\pi : Y^{\alpha'} \longrightarrow Y^\alpha$ est un isomorphisme de revêtement. Ceci implique que les revêtements $p_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y$ et $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \longrightarrow Y$ sont identiques pour tous les réels $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Le théorème 12 de [SW] implique que l'espace Y admet un revêtement universel (ce qui termine la preuve du point (i)) et que ce revêtement universel coïncide avec $p_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y$ pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon_0}{2}[$ (ce qui termine la preuve du point (ii)).

Soient $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$. Si n est suffisamment grand pour que $d_{GH}((X_n, d_n), (Y, d_Y)) < \varepsilon$, les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ construites dans le théorème 18 sont des $\left[\frac{3R}{2\alpha - 3\varepsilon} + 2\right] \varepsilon$-approximations de Gromov-Hausdorff entre les boules de rayon R des espaces $\widetilde{X}$ et $Y^\alpha = \widetilde{Y}$. De plus, ces applications sont respectivement ρ-équivariante et $(\rho)^{-1}$-équivariante. La suite des revêtements universels $((\widetilde{X}_n, d_{\widetilde{X}_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}})$ au sens de la topologie de Gromov-équivariante. □

3.3 Continuité uniforme du spectre marqué des longueurs et isospectralité

Soit (X, d) un espace de longueur compact semi-localement simplement connexe. *Le spectre marqué des longueurs* de X est l'application qui, à chaque classe d'homotopie libre, associe la plus petite longueur d'un lacet de la classe. *Nous généralisons cette définition au cas où X n'est pas semi-localement simplement connexe mais possède un revêtement universel* de la manière suivante : si l_X est l'application de $G(\widetilde{X}, X)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$l_X(\gamma) = \inf_{\widetilde{x} \in \widetilde{X}} d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \gamma.\widetilde{x})$$

et si $\sim$ désigne la relation d'équivalence sur $G(\widetilde{X}, X)$ définie par $\gamma \sim \gamma'$ si et seulement si il existe $g \in G(\widetilde{X}, X)$ tel que $\gamma = g^{-1}\gamma' g$, *le spectre marqué des longueurs* est l'ensemble des valeurs prises, *avec multiplicité*, par l'application $\bar{l}_X : G(\widetilde{X}, X)/\sim \longrightarrow \mathbb{R}^+$ obtenue par passage au quotient de l'application l_X. Le *spectre non marqué* des longueurs est l'ensemble des valeurs prises par $\bar{l}_X$, *sans multiplicité*.

Corollaire 38. - *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces de longueur dont la systole est minorée par ε_0 (par exemple deux espaces de $\mathcal{M}_{N,H,D}$, avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{NH} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$) et tels que*

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

Alors, si $\rho : G(\widetilde{X}, X) \longrightarrow G(\widetilde{Y}, Y)$ est l'isomorphisme construit dans le théorème 18 et si $\bar{\rho}$ est la bijection induite par ρ entre les ensembles de classes de conjugaison $G(\widetilde{X}, X)/\sim$ et $G(\widetilde{Y}, Y)/\sim$, pour tout élément γ de $G(\widetilde{X}, X)/\sim$,

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(\bar{l}_X(\gamma) - \varepsilon\right) \leq \bar{l}_Y(\bar{\rho}(\gamma)) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^{-1} \bar{l}_X(\gamma) + \varepsilon$$

Preuve du corollaire 38. - Soit g un élément de $G(\widetilde{X}, X)$. Comme $\bar{l}_X(\text{classe de } g \text{ modulo } \sim) = l_X(g)$, il nous suffit de prouver que

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)(l_X(g) - \varepsilon) \leq l_Y(\rho(g)) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^{-1} l_X(g) + \varepsilon$$

Or, d'après le théorème 18 (remarque 19), comme $\widetilde{\varphi}$ est ρ-équivariante, en faisant tendre α vers $\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, g(\widetilde{x})) &\geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)\left(d_{\widetilde{Y}}[\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(g(\widetilde{x}))] - \varepsilon\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)\left(d_{\widetilde{Y}}[\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \rho(g).\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})] - \varepsilon\right) \end{aligned}$$

En passant à l'infimum en $\widetilde{x}$, nous obtenons

$$l_X(g) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)(l_Y(\rho(g)) - \varepsilon)$$

La minoration dans la double-inégalité du corollaire 38 se démontre de la même manière en utilisant l'inégalité suivante :

$$d_{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}, g(\widetilde{y})) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(d_{\widetilde{X}}[\widetilde{\psi}(\widetilde{y}), \widetilde{\psi}(g(\widetilde{y}))] - \varepsilon\right)$$

□

La continuité du spectre des longueurs peut être interprétée de la manière suivante :

Corollaire 39. *(i) L'ensemble des espaces métriques de longueur compacts isospectraux pour le spectre des longueurs (marqué ou non-marqué) est un sous-ensemble complet (donc fermé) de l'ensemble des espaces de longueur compacts muni de la distance de Gromov-Hausdorff.*

(ii) Tout ensemble de variétés riemanniennes compactes isospectrales (pour le spectre du laplacien) de courbure sectionnelle strictement négative est d'adhérence compacte dans l'ensemble des espaces de longueur compacts isospectraux à ces variétés (pour le spectre non marqué des longueurs) muni de la distance de Gromov-Hausdorff.

Preuve du corollaire 39. - Considérons une suite de Cauchy $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces de longueur compacts isospectraux. Comme la systole est donnée par le spectre non marqué des longueurs, la proposition 36 implique que l'espace-limite de longueur (X, d) possède un revêtement universel. Le point (i) découle alors du corollaire 38.

Le point (ii) provient du résultat de Y. Colin de Verdière (voir le corollaire de [CV]) qui assure que, sous les hypothèses du point (ii), deux variétés isospectrales ont même spectre des longueurs non marqué (donc même systole L) et même volume. Comme les variétés considérées sont de courbure strictement négative, sur toute variété de la famille considérée, les boules de rayon $L/2$ sont de volume uniformément minoré et la proposition 5.2 de [Gr] assure que la famille est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Le point (i) implique finalement que l'adhérence de la famille est incluse dans l'ensemble des espaces de longueur compacts isospectraux aux variétés considérées (pour le spectre des longueurs non marqué).

$\square$

4 Familles d'espaces de longueur d'entropie majorée

Rappelons que l'entropie volumique d'un espace de longueur compact est définie dans la définition 1 et que $N_{\widetilde{x}}(\widetilde{X}, R)$ (ou $N_{\widetilde{x}}(R)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté) désigne le nombre de points de l'orbite de $\widetilde{x}$ sous l'action de $G(\widetilde{X}, X)$ situés dans la boule $B(\widetilde{x}, R)$ de $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$. Si (Y, d_Y) est un espace de longueur non compact (localement compact) et si μ_Y est une mesure borélienne sur Y, on définit son entropie volumique par rapport à la mesure μ_Y de la manière suivante :

$$Ent(Y, d_Y, \mu_Y) = \liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \log[\mu_Y(B(y, R))]$$

($Ent(Y, d_Y, \mu_Y)$ ne dépend pas du point y choisi sur Y).
Remarquons que, si (X, d_X) est un espace de longueur compact qui possède un revêtement universel, son entropie est l'entropie volumique de ce revêtement universel, muni de la mesure de comptage sur l'orbite d'un point sous l'actoin du groupe $G(\widetilde{X}, X)$.

4.1 Continuité uniforme de l'entropie

Théorème 40. - *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel. Si la systole de (X, d_X) est minorée par $\varepsilon_0 > 0$ (en particulier si (X, d_X) est un espace de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ où ε_0 vaut $\varepsilon_0 = \frac{1}{NH}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$) et si $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$, alors*

(i) Pour tout $\alpha \in]5\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon[$,

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) Ent(X, d_X) \leq Ent(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_{Y^\alpha}) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

où μ_{Y^α} est la mesure de comptage de l'orbite d'un point sous l'action de $G(Y^\alpha, Y)$ sur Y^α.

(ii) $Ent(Y, d_Y) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X)$

(iii) Si, de plus, $sys(Y, d_Y) \geq \varepsilon_0$, alors

$$\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) Ent(X, d_X) \leq Ent(Y, d_Y) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

Preuve du théorème 40. - L'isomorphisme $\rho : G(\widetilde{X}, X) \longrightarrow G(Y^\alpha, Y)$ qui est construit dans le théorème 18 vérifie, pour tout élément γ de $G(\widetilde{X}, X)$,

$$d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \rho^{-1}(\gamma)(\widetilde{x})) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \left[d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(\rho^{-1}(\gamma)(\widetilde{x}))) + 3\varepsilon\right]$$

Il en découle que, pour tout $R > 0$,

$$\frac{\log N_{\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})}[Y^\alpha, R]}{R} \leq \frac{\log N_{\widetilde{x}}\left[\widetilde{X}, (R + 3\varepsilon)\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}\right]}{(R + 3\varepsilon)\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}} \frac{(R + 3\varepsilon)\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}}{R}$$

En passant à la limite inférieure quand R tend vers $+\infty$, on obtient l'inégalité de droite du point (i).
On montre que $Ent(X, d_X) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} Ent(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_{Y^\alpha})$ de la même manière, à partir de l'inégalité :

$$d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}), \widetilde{\varphi}(\gamma.\widetilde{x})) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} d_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}, \gamma.\widetilde{x}) + \varepsilon$$

Le point (ii) découle du point (i) de la manière suivante : rappelons que $(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}}) \xrightarrow{\pi_\alpha} (Y^\alpha, d_{Y^\alpha}) \xrightarrow{p_\alpha} (Y, d_Y)$ est une chaîne de revêtements et notons que, si $y^\alpha = \pi_\alpha(\widetilde{y})$, alors π_α envoie $B_{\widetilde{Y}}(\widetilde{y}, R)$ (resp. $G(\widetilde{Y}, Y).\widetilde{y} = (p_\alpha \circ \pi_\alpha)^{-1}(y)$) surjectivement sur $B_{Y^\alpha}(y^\alpha, R)$ (resp. sur $G(Y^\alpha, Y).y^\alpha = p_\alpha^{-1}(y)$). Ceci implique que $Ent(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_{Y^\alpha}) \leq Ent(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}}, \mu_{\widetilde{Y}}) = Ent(Y, d_Y)$. L'inégalité de (ii) se déduit alors en faisant tendre α vers $\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ dans (i).

Si l'on suppose de plus que $sys(Y, d_Y) > \varepsilon_0$, pour tout α vérifiant l'hypothèse du point (i), Y^α est le revêtement universel de Y. Comme il est remarqué au début de cette section, on a alors $Ent(Y, d_Y) = Ent(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_\alpha)$. L'inégalité de droite du point (iii) découle donc directement du point (i). L'inégalité de gauche s'obtient à partir de l'inégalité de droite, en remarquant que, sous les hypothèses du point (iii), les rôles des espaces X et Y sont symétriques. $\square$

La continuité uniforme de l'entropie sous l'hypothèse “systole minorée” (théorème 40) associée au résultat de complétude sur la famille des espaces de longueur dont la systole est minorée (voir le théorème 35) implique la proposition suivante :

Proposition 41. - *Si une suite $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces de longueur qui possèdent un revêtement universel et dont la systole est uniformément minorée converge vers un espace de longueur (Y, d_Y) au sens de Gromov-Hausdorff, alors la suite $(Ent(X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Ent(Y, d_Y)$ (qui est bien définie puisque Y possède un revêtement universel).*

Notons que, contrairement au théorème 40, nous ne faisons ici *aucune hypothèse sur l'espace Y*.

4.2 Complétude de familles d'espaces de longueur d'entropie majorée

Dans cette partie, nous appliquons les résultats précédents à la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$. En effet, il est montré dans [BCG1] (voir le théorème 2.1) que, sur la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$, la systole est uniformément minorée par $\varepsilon_0 := \frac{1}{N.H}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$ (en fait, le résultat est énoncé dans [BCG1] dans le cas particulier des groupes δ-non-abéliens mais la preuve reste valable si les groupes possèdent la propriété $FSG(N)$ et sont de centre réduit à zéro -voir le théorème 2.0.12 (iv) de [Zu]). Les résultats précédents peuvent donc s'interpréter comme des résultats de rigidité topologique et de complétude sous l'hypothèse “entropie majorée” :

Théorème 42. - *L'ensemble $\mathcal{M}_{N,H,D}$ est complet pour la distance de Gromov-Hausdorff dans la famille des espaces métriques compacts.*
De plus, il existe une constante $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(N, H, D)$ (dont l'expression est donnée ci-dessus) telle que, sur les boules de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$, le groupe des transformations du revêtement universel est constant, le spectre marqué des longueurs est uniformément continu et l'entropie volumique est $\frac{4H}{\varepsilon_0}$-lipschitzienne.

Preuve du théorème 42. - Posons $\varepsilon_0 = \frac{1}{N.H}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$ et $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{4}$.
Considérons une suite $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ qui converge vers un espace métrique (Y, d_Y) au sens de Gromov-Hausdorff. D'après (par exemple) le théorème 6.3 de [Sak], l'espace (Y, d_Y) est compact et, d'après la proposition 3.8 de [Gr], c'est un espace de longueur. De plus, la suite $(\mathrm{diam}(X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{diam}(Y, d_Y)$, qui est alors inférieur ou égal à D.
La systole de chaque espace (X_n, d_n) étant minorée par ε_0, la proposition 36 implique que Y admet un revêtement universel et que sa systole est minorée par ε_0. Le théorème 18 implique alors que, si n est suffisamment grand, le groupe $G(\widetilde{X}_n, X_n)$ est isomorphe à $G(\widetilde{Y}, Y)$. Le groupe $G(\widetilde{Y}, Y)$ est ainsi de centre réduit à zéro et possède la propriété $FSG(N)$. Finalement,

la proposition 41 implique que $\mathrm{Ent}(Y, d_Y)$ est la limite de la suite $(\mathrm{Ent}(X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et est ainsi inférieure à H. L'espace-limite (Y, d_Y) appartient donc à la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$, qui est complète pour la distance de Gromov-Hausdorff. □

Notation : *$\mathcal{M}_{m,N,H,D,V,L}$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ constitué des (classes d'isométries des) variétés riemanniennes compactes de dimension m, dont le volume est majoré par V et dont le revêtement universel ne possède pas de lacets géodésiques de longueur inférieure à L (cette dernière condition est une condition vide dès que la courbure sectionnelle est négative).*

Il est montré dans la proposition 4.1 de [BCG1] que la famille $\mathcal{M}_{m,N,H,D,V,L}$ est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Il découle donc du théorème 42 le corollaire suivant :

Corollaire 43. - *L'adhérence de l'ensemble $\mathcal{M}_{m,N,H,D,V,L}$ est compacte dans $\mathcal{M}_{N,H,D}$ muni de la distance de Gromov-Hausdorff.*

Un problème ouvert est de caractériser les espaces métriques de longueur qui sont dans le bord de cet ensemble.

4.3 Obstructions à ce que la courbure soit arbitrairement petite

Dans les années '80, M. Gromov posait la question suivante : "Existe-t-il des obstructions topologiques ou géométriques au fait qu'une variété M de dimension n admette une métrique riemannienne dont la norme $L^{n/2}$ de la courbure soit arbitrairement petite (i.e au fait que $\inf_g \int_M |courbure(g)|^{n/2} dv_g = 0$, où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes). Dans la version faible de cette conjecture, la courbure invoquée est la courbure sectionnelle et les formules de Allendoerfer-Cher-Weil pour les classes caractéristiques montrent qu'une obstruction est que $\chi(M^n) = 0$. La question de M. Gromov concerne alors les dimensions impaires. Dans la version forte, la notion de courbure invoquée est la courbure scalaire (et la question reste alors ouverte en toute dimension $n \geq 3$), mais la même question est également ouverte lorsque la notion de coubure invoquée est la courbure de Ricci. Une réponse a été donnée par C. Lebrun pour certaines variétés de dimension 4, l'obstruction étant exprimée en terme d'invariants de Seiberg-Witten.
Ici, nous donnons une minoration de la norme $L^{(n+\alpha)/2}$ de la courbure de Ricci sur toutes les boules de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$ de $\mathcal{M}_{N,H,D}$:

Proposition 44. - *Soit (X, d_X) un espace de longueur compact fixé qui admet un revêtement universel et dont la systole est minorée par ε_0 (par exemple un espace de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ pour $\varepsilon_0 = \frac{1}{NH} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$).*

(i) Si $G(\widetilde{X}, X)$ est infini, parmi toutes les variétés riemanniennes compactes, connexes, m-dimensionnelles (Y, g) qui vérifient $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_g)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$, il n'en existe aucune telle que

$$Ricci(Y, g) > -(m-1) \left[\frac{Ent(X, d_X)}{(m-1)} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)\right]^2 g$$

(ii) Pour tout réel ε', il existe une constante (explicite) $C := C(m, \varepsilon', X)$ telle que, parmi toutes les variétés riemanniennes (Y, g) compactes, connexes, m-dimensionnelles qui vérifient $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_g)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{26}$, il n'en existe aucune telle que

$$\frac{1}{Vol(Y, g_Y)} \left(\int_Y r_-(y)^{\frac{(m+\varepsilon')}{2}} dv_g(y) \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}} < \left(1 - \frac{13\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) C(m, \varepsilon', X)\, Ent(X, d_X)$$

où $\widetilde{X}$ désigne le revêtement universel de X, $r(x)$ est la plus petite valeur propre du tenseur de courbure de Ricci sur l'espace tangent $T_x(Y)$ et où $r_-(x) := \max(0, -r(x))$ est sa partie négative.

Preuve de la proposition 44. - Supposons par l'absurde qu'il existe une variété riemannienne (Y, g) vérifiant simultanément $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_g)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ et $Ricci(Y, g) > -(m-1) \left[\frac{Ent(X, d_X)}{(m-1)} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) \right]^2 g$. Le point (ii) du théorème 40 implique que

$$Ent(Y, g) = Ent(Y, d_g) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X)$$

Si $Ent(X, d_X) > 0$, ceci entre en contradiction avec le théorème de R.L. Bishop qui donne

$$Ent(Y, g) < \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X)$$

Si $Ent(X, d_X) = 0$, notre hypothèse implique que $Ricci(Y, g) > 0$ et, comme Y est compacte, le théorème de Myers implique que $\pi_1(Y)$ est fini. Il en découle que $G(Y^\alpha, Y)$ (pour $\alpha \in]5\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon[$) est fini, donc $G(\widetilde{X}, X)$ est fini d'après le théorème 18. Ceci termine la preuve du point (i).

Posons $\alpha_0 = \frac{3\varepsilon_0}{13}$: α_0 appartient alors à $]5\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon[$ et le point (i) du théorème 40 implique que $Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}}) > \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha_0}\right) Ent(X, d_X)$.
Fixons un réel $\varepsilon' > 0$. Le point (ii) du théorème 1 de [Ga] (en posant $H = \{x\}$ et $s = 0$) donne l'existence d'une constante (explicite) $C' := C'(m, \varepsilon')$ telle que, pour tout point y de Y^{α_0},

$$Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g_{\alpha_0}}) \leq C' \limsup_{R \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{Vol(B(y, R))} \int_{B(y,R)} r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_{g^{\alpha_0}} \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}$$

où g^{α_0} désigne la métrique riemannienne relevée de g sur Y^{α_0} et où $d_{Y^{\alpha_0}}$ et $dv_{g^{\alpha_0}}$ désignent la distance et la mesure associées.
Notons $\mathcal{D}_x := \{y \in Y^{\alpha_0} \;/\; \forall \gamma \in G(Y^{\alpha_0}, Y) \setminus \{id\},\ d_{Y^{\alpha_0}}(x, y) < d_{Y^{\alpha_0}}(\gamma.x, y)\}$ le domaine de Dirichlet pour l'action de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$ pointé en x, $\bar{\mathcal{D}}_y$ son adhérence et $\Sigma_R(x)$ le sous-ensemble de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$ défini par

$$\Sigma_R(x) := \{\gamma \in G(Y^{\alpha_0}, Y), d_{Y^{\alpha_0}}(x, \gamma.x) < R\}$$

Si $D = diam(X, d_X)$, comme $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \varepsilon$, pour tout point y de Y^{α_0} on a $diam\,\mathcal{D}_y = diam(Y, d_Y) < D + \varepsilon$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g_{\alpha_0}})\\
&\leq C' \limsup_{R \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{Vol(B(y,R))} \sum_{\gamma \in \Sigma_{R+D+\varepsilon}(y)} \int_{\bar{\mathcal{D}}_{\gamma.y}} r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_{g_{\alpha_0}} \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}\\
&\leq C' \limsup_{R \longrightarrow +\infty} \left(\frac{N_y(R+D+\varepsilon)}{Vol(B(y,R))} \int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_g \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}\\
&\leq C' \limsup_{R \longrightarrow +\infty} \left(\frac{N_y(R+D+\varepsilon)}{N_y(R-D-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}} \left(\frac{1}{Vol(Y,g)} \int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_g \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}},
\end{aligned}$$

la première inégalité provenant du fait que la boule $B(y, R)$ est incluse dans la réunion $\bigcup_{\gamma \in \Sigma_{R+D+\varepsilon}(y)} \bar{\mathcal{D}}_{\gamma.y}$; la deuxième inégalité provenant du fait que le bord d'un domaine de Dirichlet est de mesure nulle (pour la mesure riemannienne) et que la projection de revêtement est une isométrie de chaque domaine de Dirichlet sur son image ; la dernière inégalité provenant du fait que la réunion disjointe $\bigcup_{\gamma \in \Sigma_{R-D-\varepsilon}(y)} \mathcal{D}_{\gamma.y}$ est incluse dans la boule $B(y, R)$ et du fait que tout domaine de Dirichlet a pour volume $Vol(Y, g)$.

Comme l'application $g : R \longrightarrow \log(N_y(R + 2(D + \varepsilon)))$ est sous-additive (c'est une conséquence directe de la proposition 1.4.10 de [Ro] dont une preuve est rappelée dans [Re], lemme 2.6), on a par ailleurs $\frac{N_y(R+D+\varepsilon)}{N_y(R-D-\varepsilon)} \leq N_y(3D)^2$. Il en résulte que

$$Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g^{\alpha_0}}) \leq C' \left(N_y(3D)\right)^{\frac{2}{m+\varepsilon'}} \left(\frac{1}{Vol(Y,g)} \int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_g \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}$$

On montre alors, comme dans la preuve du théorème 40, que

$$N_y(3D) < \sup_{\widetilde{x} \in \widetilde{X}} N_{\widetilde{x}} \left(6D + \frac{\varepsilon_0}{26}\right) := N_{sup}\left(X, 6D + \frac{\varepsilon_0}{26}\right)$$

Par ailleurs, comme d'une part l'action de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$ est discontinue et cocompacte, d'autre part les mesures $dv_{g^{\alpha_0}}$ et $\mu_{Y^{\alpha_0}}$ sont invariantes sous l'action de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$, la propriété 2.3 de [Re] implique que $Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g^{\alpha_0}}) = Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}})$. On obtient ainsi

$$Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}}) \leq C' \left(N_{sup}(X, 6D + \frac{\varepsilon_0}{26})\right)^{\frac{2}{m+\varepsilon'}} \left(\frac{1}{Vol(Y,g)} \int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_{g^{\alpha_0}} \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}$$

Si à présent

$$\frac{1}{Vol(Y, g_Y)} \left(\int_Y r_-(y)^{\frac{(m+\varepsilon')}{2}} dv_g(y) \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}} < \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha_0}\right) \frac{Ent(X, d_X)}{C'\, N_{sup}(X, 6D + \frac{\varepsilon_0}{26})^{\frac{2}{m+\varepsilon'}}},$$

on obtient $Ent(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}}) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha_0}\right) Ent(X, d_X)$, ce qui contredit le point (i) du théorème 40. Ceci termine la preuve du point (iii). $\square$

4.4 Comparaison des volumes et précompacité

Si (X, g_X) et (Y, g_Y) sont deux variétés riemanniennes compactes de courbure sectionnelle strictement négative, elles ont même type d'homotopie dès qu'elles ont des groupes fondamentaux isomorphes. Le théorème 18 associé aux résultats de [BCG2] permet donc d'établir des résultats de comparaison sur le volume de deux variétés suffisamment proches pour d_{GH}.

Notation : *Notons $\mathcal{B}_{m,\varepsilon_0}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$ la boule de centre (M_0, g_0) et de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$ (pour d_{GH}) de l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de dimension m dont la systole est minorée par ε_0.*

Corollaire 45. - *Fixons une variété riemannienne compacte (M_0^m, g_0) de dimension m, dont la systole est minorée par ε_0 et dont la courbure sectionnelle σ_0 vérifie $\sigma_0 \le -k^2$.*
Soit (Y, g_*) une variété compacte de dimension m, de courbure strictement négative et telle que (Y, g_*) appartienne à $\mathcal{B}_{m,\varepsilon_0}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$. Pour n'importe quelle autre métrique g sur Y on a :

$$Ent(Y, g)^m Vol(Y, g) \ge ((m-1)k)^m \, Vol(M_0, g_0)$$

Si, de plus, (Y, g) appartient à $\mathcal{B}_{m,\varepsilon_0}((M_0, g_0), \varepsilon)$ où $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$,

$$Vol(Y, g) \ge \left(\frac{(m-1)k}{Ent(M_0, g_0)}\right)^m \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m Vol(M_0, g_0)$$

Preuve du corollaire 45. - Comme (M_0, g_0) et (Y, g_*) sont deux variétés dont la systole est minorée par ε_0 et qui vérifient $d_{GH}((M_0, g_0), (Y, g_*)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$, le théorème 18 implique que les groupes fondamentaux de Y et M_0 sont isomorphes. Par ailleurs, g_0 et g_* sont deux métriques de courbure strictement négative donc Y et M_0 ont même type d'homotopie. Il existe alors une application de degré un entre Y et M_0. La première inégalité du corollaire 45 découle alors du résultat suivant, démontré mais énoncé de manière moins générale dans le théorème 1.5 de [BCG2] : si (X, g_X) est une variété riemannienne compacte de dimension m dont la courbure sectionnelle vérifie $\sigma \le -k^2$ et si (Y, g_Y) est n'importe quelle variété riemannienne compacte de même dimension m telle qu'il existe une application $f : Y \longrightarrow X$ de degré 1, alors,

$$Ent(Y, g)^m Vol(Y, g) \ge ((m-1)k)^m Vol(M_0, g_0)$$

Si, de plus, (Y, g) appartient à $\mathcal{B}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$, le théorème 40 implique que

$$Ent(Y, g)^m \le \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-m} Ent(M_0, g_0)^m$$

ce qui, à l'aide de la première inégalité du corollaire 45, prouve la deuxième inégalité du corollaire 45. $\square$

Notation : *Notons $\mathcal{B}_{m,k}((M_0, g_0), \varepsilon)$ la boule de centre (M_0, g_0) et de rayon ε (pour d_{GH}) de l'ensemble des classes d'isométrie des variétés riemanniennes de dimension m qui appartiennent à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ et dont la courbure sectionnelle σ est majorée par $-k^2$.*

Corollaire 46. - *Soit M_0^m une variété compacte de dimension m qui admet une métrique g_* de courbure strictement négative et une métrique g_0 (éventuellement différente de g_*) telle que $sys(M_0, g_0) > \varepsilon_0$.*
Alors, pour toute variété (Y, g) qui appartient à $\mathcal{B}_{m,k}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$,

$$Vol(Y, g) \leq \left(\frac{Ent(M_0, g_0)}{(m-1)k}\right)^m Vol(M_0, g_0)$$

Si de plus la courbure de Ricci de (M_0, g_0) est minorée par $-(m-1)k^2$, alors

$$Vol(Y, g) \leq Vol(M_0, g_0)$$

Preuve du corollaire 46. - Ce corollaire est une conséquence quasi-directe du résultat suivant, démontré mais énoncé de manière moins générale dans le théorème 1.4 de [BCG2] : si (Y, g_Y) est une variété riemannienne compacte dont la courbure sectionnelle est inférieure à $-k^2$ et si (X, g_X) est n'importe quelle autre variété riemannienne compacte telle qu'il existe une application continue $f : (X, g_X) \longrightarrow (Y, g_Y)$, alors

$$\left(\frac{Ent(X, g_X)}{(m-1)k}\right)^m Vol(X, g_X) \geq |deg f| Vol(Y, g_Y)$$

Puisque (M_0, g_*) et (Y, g) sont deux variétés riemanniennes de courbure sectionnelle strictement négative dont les groupes fondamentaux sont isomorphes d'après le théorème 18, M_0 et Y sont homotopiquement équivalentes ; il existe alors une application continue de degré un entre ces deux variétés, ce qui termine la preuve du corollaire 46. □

Corollaire 47. - *Si M_0^m est une variété compacte de dimension m qui admet une métrique g_* de courbure strictement négative et une métrique g_0 (éventuellement différente de g_*) telle que $sys(M_0, g_0) > \varepsilon_0$, la boule $\mathcal{B}_{m,k}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$ est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff.*

Preuve du corollaire 47. - Le corollaire 46 donne

$$((m-1)k)^m Vol(Y, g) \leq Ent(M_0, g_0)^m Vol(M_0, g_0) := C$$

Par ailleurs, toute boule de (Y, g) de rayon $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ a un volume supérieur à celui de la boule euclidienne de rayon ε (ceci est vrai pour les boules de rayon ε dans $(\widetilde{Y}, \widetilde{g})$ et, en restriction à une telle boule, la projection de revêtement p est un difféomorphisme qui préserve la métrique riemannienne). Le nombre N de boules disjointes de rayon ε qu'on peut mettre dans Y vérfie donc

$$\begin{aligned} N &\leq \frac{Vol(Y, g)}{\min\{Vol[B(x, \varepsilon)]/x \in Y\}} \\ &\leq \frac{C}{((m-1)k)^m} \frac{1}{Vol\,[B_{eucl}(\varepsilon)]} \\ &\leq \frac{C}{((m-1)k)^m} \frac{\varepsilon^n}{Vol\,[B_{eucl}(1)]} \end{aligned}$$

Il résulte de la proposition 5.2 de [Gr] que la famille $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$ est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. □

On rappelle que le volume de toute variété compacte de dimension m, localement symétrique dont la courbure sectionnelle est comprise entre -4 et -1 est minoré par une constante universelle *que nous noterons* c_m qui ne dépend que de m (voir le théorème 37.1.1 de [BZ]). On établit alors la proposition suivante :

Proposition 48. *Soient N un entier, H et D deux réels positifs et c_m la constante définie ci-dessus. Fixons les valeurs*

$$\begin{array}{rclrcl} H_0 & = & \max\{2m, H\} & \delta_0 & = & \min\left\{\delta, \frac{(m-1)2^{m-2}c_m}{Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2})(\sinh 2D)^{m-1}}\right\} \\ N_0 & = & E[\frac{4}{\delta_0}] & \varepsilon_0 & = & \frac{1}{N_0.H_0}\log\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{5}{2}N_0H_0D}}\right) \end{array}$$

Considérons une variété compacte (X, g_0) de dimension m, localement symétrique de rang 1 (normalisée de sorte que le maximum de sa courbure sectionnelle soit égal à -1), de diamètre majoré par D.
Toute variété riemannienne compacte (Y, g) de même dimension, de courbure sectionnelle négative, qui appartient à $\mathcal{M}_{N,H,\frac{5}{4}D}$ et telle que $d_{GH}((X, g_0),(Y, g)) < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ est homotopiquement équivalente à X et vérifie

$$Vol(Y, g) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m Vol(X, g_0)$$

Si, de plus, la courbure sectionnelle de (Y, g) est majorée par $-k^2$, on a

$$Vol(Y, g) \leq \left(\frac{Ent(X, g_0)}{(m-1)k}\right)^m Vol(X, g_0)$$

Remarque 49. -

(i) La condition $diam(Y, g) \leq \frac{5}{4}D$ est nécessairement vérifiée lorsque $d_{GH}((X, g_0),(Y, g)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$, .

(ii) Rappelons que $Ent(X, g_0)$ est égale à $(m-1)$ (resp. m, resp. $(m+2)$, resp. $(m+6)$) lorsque (X, g_0) est hyperbolique réel (resp. complexe, resp. quaternionnien, resp. de Cayley).

Preuve de la proposition 48. - Commençons par vérifier que le groupe fondamental de (X, g_0) est δ_0'-épais pour $\delta_0' = \frac{(m-1)2^{m-2}c_m}{Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2})(\sinh 2D)^{m-1}}$ (voir la définition 4). Pour cela, il suffit de vérifier que $inj(X, g_0) \geq \delta_0'$:
La courbure sectionnelle de (X, g_0) est supérieure ou égale à -4. Notons l la longueur de la plus courte géodésique périodique de (X, g_0), le théorème de J. Cheeger (voir [BZ], corollaire 34.1.9) donne alors

$$Vol(X, g_0) \leq l.Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2}) \int_0^D \cosh(2t) \left(\frac{\sinh(2t)}{2}\right)^{m-2} dt$$

ce qui assure que

$$c_m \leq \frac{l.Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2})}{(m-1)} \left(\frac{\sinh(2D)}{2}\right)^{m-1}$$

d'où

$$inj(X, g_0) = \frac{l}{2} \geq \frac{2^{m-2}(m-1)c_m}{Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2})(\sinh 2D)^{m-1}} = \delta_0'$$

Le groupe fondamental de (X, g_0) est donc δ_0'-épais, donc, a fortiori, δ_0-épais et possède la propriété $FSG(N_0)$ d'après la proposition 1.14 de [BCG1].
Par ailleurs, l'entropie volumique d'une variété riemannienne compacte localement symétrique de rang 1 est inférieure à $2m$ (voir la remarque 49). On déduit de tout ceci que (X, g_0) appartient à $\mathcal{M}_{N_0,H_0,D}$, qui est inclus dans $\mathcal{M}_{N_0,H_0,\frac{5}{4}D}$. Il est par ailleurs évident que (Y, g) appartient à $\mathcal{M}_{N_0,H_0,\frac{5}{4}D}$ donc le théorème 18 assure que les groupes fondamentaux de X et Y sont isomorphes. Il s'ensuit que Y et X sont homotopiquement équivalentes (car ce sont des $K(\pi, 1)$ de courbure sectionnelle strictement négative). Le théorème 1.4 de [BCG2] assure alors que $Ent(Y, g)^m Vol(Y, g) \geq Ent(X, g_0)^m Vol(X, g_0)$. Comme d'après le théorème 40, $Ent(Y, g) \leq Ent(X, g_0)\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}$, nous en déduisons la minoration recherchée.
Par ailleurs, si la courbure sectionnelle de (Y, g) est majorée par $-k^2$, le corollaire 45 implique $Vol(X, g_0)Ent(X, g_0)^m \geq ((m-1)k)^m Vol(Y, g)$, ce qui prouve la deuxième inégalité de la proposition 48. □

Références

[BBI] D. Burago, Y-D. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, *Grad. Stud. in Math.* **33**. Am. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[BCG1] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Un lemme de Margulis sans courbure et ses applications* Prépublication de l'Institut Fourier **595** p.1-59, 2003.

[BCG2] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Lemme de Schwarz réel et applications géométriques* Acta Math. **183** (1999) p.145-169.

[BZ] Y-D Burago, V-A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Grundlehren der math. Wiss. **285** (1988) Springer-Verlag, Berlin.

[CC1] J. Cheeger, T.H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below I* J. Differential Geom., **46** (1997), p.406-480.

[CC2] J. Cheeger, T.H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below II.* J. Differential Geom. **54** (2000), p.13-35.

[CC3] J. Cheeger, T.H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below III.* J. Differential Geom. **54** (2000), p.37-74.

[CG] J. Cheeger, D. Gromoll, *On the lower bound for the injectivity radius of* 1/4-*pinched Riemannian manifolds* J. Differential Geom., **15** (1981), p.437-442.

[Co1] T.H. Colding, *Aspects of Ricci curvature* Comparison Geometry, MSRI Publications **30** (1997) p.83-98.

[Co2] T.H. Colding, *Ricci curvature and volume convergence* Ann. of Math. **145** (1997) p.477-501.

[CV] Y. Colin de Verdière, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I* Compositio Mathematica **27** (1973) p.83-106.

[Fu] K. Fukaya, *A boundary of the set of the riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters* J. Diff. Geom. **28** (1986) p.1-21.

[Ga1] S. Gallot, *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes* Astérisque **163-164** (1988) p.31-91.

[Ga2] S. Gallot, *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature* Astérisque **157-158** (1988) p.191-216. SMF edit.

[Ga3] S. Gallot, *Volume, courbure de Ricci et convergence de variétés* Séminaire Bourbaki 1997/1998 Astérisque **252** (1998) p.7-32. SMF edit.

[Go] C. Godbillon *Eléments de topologie algébrique.* Hermann, Paris, 1971.

[Gr] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu Progress in Mathematics **152** (2001) Birkhäuser

[KS] A. Karrass, D. Solitar, *The free product of two groups with a malnormal amalgamated subgroup* Can. J. Math, Vol. XXIII, **6** (1971), p.933-959.

[Pa] P. Pansu, *Effondrement des variétés riemanniennes (d'après les travaux de J. Cheeger et M. Gromov)* Séminaire Bourbaki 1983, Astérisque **121-122** (1985) p.63-82.

[Pe] P. Petersen, *Convergence theorem in Riemannian geometry* Comparison geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **30** (1997) p.167-202.

[Pet] P. Petersen, *Gromov-Hausdorff convergence of metric spaces* Differential geometry : Riemannian geometry (Los Angeles 1990) of Proc. Sympos. Pure Math. **54** p.489-504. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[Pl] C. Plaut, *Geometrizing infinite-dimensional locally compact groups* Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996) p.941-962.

[Re] G. Reviron, *Espaces de longueur d'entropie majorée : rigidité topologique, adhérence des variétés, noyau de la chaleur* Thèse (2005)
Version électronique : http ://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00009203

[Ro] G. Robert, *Invariants topologiques et géométriques reliés aux longueurs des géodésiques et aux sections harmoniques de fibrés* Thèse (1994).

[Sak] T. Sakai, Riemannian geometry, Translations of Mathematical Monographs, Am. Math. Soc. **149** (1996).

[Sp] E.-H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York (1966).

[SW] C. Sormani, G. Wei, *Hausdorff convergence and universal covers* Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), p.3585-3602 (electronic).

[Tu1] W. Tuschmann, *Hausdorff convergence and the fundamental group* Math. Zeit. **218** (1995) p.207-211.

[Tu2] W. Tuschmann, *Erratum :"Hausdorff convergence and the fundamental group"* Math. Zeit. **224** (1997) p.493.

[Zu] F. Zuddas, *Quelques relations entre propriétés algébriques des groupes de transformations et géométrie des espaces* Thèse (2005)
Version électronique : http ://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011158