

Unicité des h -mesures admissibles p -adiques données par des valeurs de fonctions L sur les caractères.

Fabienne JORY-HUGUE*

Prépublication de l'Institut Fourier n° 676 (2005)
[http ://www-fourier.ujf.grenoble.fr/prepublications.html](http://www-fourier.ujf.grenoble.fr/prepublications.html)

Résumé

Soit p un nombre premier. On décrit une condition suffisante commode pour l'unicité des mesures p -adiques admissibles sur le groupe \mathbb{Z}_p^\times en termes de caractères de Dirichlet de conducteur p -complet. On donne deux démonstrations : la première étudie les zéros d'une certaine fonction \mathbb{C}_p -analytique ; la seconde utilise des calculs de pentes de polygones de Newton p -adiques.

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 2 |
| 1 h-mesures admissibles et fonctions L | 3 |
| 1.1 h -mesures admissibles sur \mathbb{Z}_p^\times , sur $\text{LocAn}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p)$, et sur $\text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ | 3 |
| 1.2 Distributions, mesures et h -mesures sur \mathbb{Z}_p^\times | 6 |
| 1.3 Exemples de h -mesures admissibles | 11 |
| 1.4 Démonstration du théorème d'unicité dans le cas où $\tilde{\Phi}$ est donnée par une suite finie de distributions bornées (mesures) | 12 |
| 1.5 Distributions selon Amice-Vélu | 15 |
| 2 Le théorème d'unicité | 16 |
| 3 Les polygones de Newton p-adiques | 19 |
| 3.1 Valuation et ordre p -adique | 19 |
| 3.2 Le polygone \mathcal{P}_f^* | 19 |
| 3.3 Le polygone \mathcal{P}_f | 19 |
| 3.4 Le polygone $\tilde{\mathcal{P}}_f$ | 21 |
| 3.5 Le polygone $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ | 22 |

*Dans le cadre du Groupe de Travail "Carrés symétriques des formes modulaires", Institut Fourier Grenoble.
mots-clés : zéros de fonctions p -adiques analytiques, croissance bornée, distribution p -adique, mesure p -adique, polygone de Newton.
classification math. : 11S80, 11M41, 11S40, 11F33, 11F67.

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Liens entre les différents polygones de Newton p-adiques | 23 |
| 5 | Liens entre les zéros d'une série et ses polygones de Newton p-adiques | 23 |
| 5.1 | Démonstration de la proposition 5.1 | 23 |
| 5.2 | Démonstration du corollaire 5.2 | 24 |
| 5.3 | Démonstration de la proposition 5.3 dans le cas d'un polynôme | 24 |
| 5.4 | Démonstration du corollaire 5.4 dans le cas d'un polynôme | 25 |
| 5.5 | Fin des démonstrations dans le cas général | 26 |
| 6 | Le Lemme de Vishik | 26 |
| 6.1 | Le polygone de Newton du logarithme p -adique | 27 |
| 6.2 | L'inégalité sur les pentes | 28 |
| 6.3 | Fin de la démonstration du Lemme de Vishik | 30 |
| 6.4 | Démonstration du théorème d'unicité | 30 |
| 6.5 | Perspectives | 31 |
| | Bibliographie | 32 |

Introduction

Soit p un nombre premier. Depuis le travail de Kubota et Leopoldt ([Ku-Le]), on sait que les valeurs spéciales des séries L de Dirichlet $L(1-k, \chi) = -\frac{B_{k,\chi}}{k}$ définies par des nombres de Bernoulli généralisés, pour $k \geq 1$ entier et χ caractère de Dirichlet de parité $k+1$, admettent un prolongement p -adique analytique sur tous les caractères p -adiques continus du groupe $\varprojlim_v (\mathbb{Z}/Np^v\mathbb{Z})^\times$ à partir des entiers $k \geq 1$ et $\chi \bmod Np^v$ (pour un entier fixé N , et pour toute puissance p^v de p).

Les coefficients de Fourier des formes modulaires possèdent de nombreuses propriétés arithmétiques ; entre autres, ils donnent des valeurs spéciales de fonctions L complexes et on peut les utiliser pour le prolongement p -adique analytique à partir des congruences entre ces coefficients de Fourier. En particulier, on peut voir les nombres de Bernoulli-Leopoldt comme les termes constants des séries d'Eisenstein ([Se]).

Il existe beaucoup d'autres fonctions L utilisées en théorie des nombres, liées par exemple aux formes modulaires ou aux variétés algébriques. On s'intéresse aux méthodes de construction de fonctions L p -adiques à partir de ces valeurs spéciales de fonctions L complexes. On souhaiterait donc avoir une construction analogue à celle de Kubota-Leopoldt pour ces autres fonctions L , pour pouvoir les prolonger sur les caractères p -adiques continus du groupe $\varprojlim_v (\mathbb{Z}/Np^v\mathbb{Z})^\times$.

Une méthode générale pour construire un tel prolongement est basée sur les formules donnant la décomposition d'une telle valeur spéciale comme une forme linéaire appliquée à une forme modulaire dépendant d'un caractère χ , en utilisant une projection canonique ([PaM]). Cette méthode fournit une h -mesure admissible à partir d'une suite finie de distributions modulaires de la forme $\mu_j(\chi) = \ell(\pi(\Phi_j(\chi)))$, où $\Phi_j(\chi) \in \mathbb{Q}[[q]]$, π un projecteur canonique, et ℓ une forme \mathbb{Q} -linéaire sur les formes modulaires. Une telle forme linéaire provient par exemple de l'intégrale de Rankin-Selberg sur une série d'Eisenstein ([Jo], [Pu]) ou sur une série thêta ([Go]). Grâce aux congruences entre ces formes modulaires, on peut construire un prolongement souhaité, donné comme l'application d'une forme linéaire à une mesure à valeurs dans les formes modulaires.

Dans beaucoup de cas, cette construction fournit des mesures de type d'Amice-Velu à valeurs dans les formes modulaires. Cependant, l'évaluation de l'intégrale sur une telle mesure pour un caractère trivial ou de petit conducteur, ne donne pas toujours la valeur L cherchée, bien que les formes modulaires qui interviennent se calculent pour tous les caractères ([PaI], [PaB]).

Ceci explique les motivations du problème suivant : connaissant l'existence et les valeurs d'une mesure p -adique sur tous les caractères sauf quelques-uns, en démontrer l'unicité. Il est bien connu que tout polynôme sur \mathbb{C} qui s'annule en plus de points que son degré est identiquement nul. On montre ici que cette affirmation reste valable pour les fonctions p -adiques analytiques sur le disque unité et dont la croissance est majorée par \log^h , sous la forme suivante : une telle fonction est uniquement déterminée par ses valeurs sur tous les caractères sauf éventuellement quelques-uns.

La première section de cet article est consacrée à l'étude des h -mesures admissibles, des distributions et des mesures. La deuxième section donne une preuve du théorème d'unicité à l'aide des zéros d'une fonction analytique sur le disque unité. Les sections suivantes décrivent quatre types de polygones de Newton, leurs liens, ainsi que les liens entre les zéros d'une série et les polygones de Newton associés à cette série. La dernière section utilise ces résultats et des calculs de pentes pour établir une autre preuve du théorème d'unicité.

1 h -mesures admissibles et fonctions L

1.1 h -mesures admissibles sur \mathbb{Z}_p^\times , sur $\text{LocAn}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p)$, et sur $\text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$

Soit p un nombre premier, et soit $S = \{p_1, \dots, p_r\}$ un ensemble fini de nombres premiers contenant $p = p_1$. Pour $Y = \mathbb{Z}_p^\times$, on rappelle la décomposition canonique $Y = \mathbb{Z}_p^\times = \Gamma \times (\mathbb{Z}_p^\times)^{\text{tors}}$ avec $\Gamma = 1 + p\mathbb{Z}_p$, et où le sous-groupe de torsion est le groupe constitué de tous les éléments d'ordre fini.

On peut aussi écrire : $\Gamma = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}_p$, avec γ un générateur topologique (non canonique) de Γ .

On définit :

$$Y_S = \mathbb{Z}_S^\times \cong \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}_{p_i}^\times = \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \mathbb{Z}_{p_i}^\times$$

$$Y_S = \Gamma \times \left((\mathbb{Z}_p^\times)^{\text{tors}} \times \prod_{i=2}^r \mathbb{Z}_{p_i}^\times \right)$$

muni de la projection canonique $y_p : Y_S \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$. On notera ainsi $a_p = y_p(a)$.

Enfin on définit le groupe des caractères p -adiques continus : $X_S = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times)$.

Définition 1.1 : Pour $h \in \mathbb{N}^\times$, on définit tout d'abord l'espace $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$ des fonctions localement polynômiales de degré en y_p strictement inférieur à h . Ainsi $\mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ est l'espace des fonctions localement constantes (fonctions en escalier), et on a : $\mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p) \subset \mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p) \subset \text{LocAn}(Y, \mathbb{C}_p) \subset \text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$.

Une h -mesure admissible $\tilde{\Phi}$ sur $Y = \mathbb{Z}_p^\times$ est une application \mathbb{C}_p -linéaire définie sur $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$ et à valeurs dans un \mathbb{C}_p -espace vectoriel normé V , avec la condition de croissance : pour $t = 0, 1, \dots, h-1$:

$$\sup_{a \in \mathbb{Z}_p^\times} \left| \int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v(h-t)}\right)$$

lorsque $v \rightarrow +\infty$.

Remarque 1.2 : Toute h -mesure admissible sur Y se prolonge de manière unique en une h -mesure admissible sur $\text{LocAn}(Y, \mathbb{C}_p)$:

Soit $\tilde{\Phi}$ une h -mesure admissible sur Y , et soit $f \in \text{LocAn}(Y, \mathbb{C}_p)$ une fonction localement analytique sur Y .

On choisit un système de représentants : pour $v' \geq v$ fixé, il existe des $b_k \in a + (p^v)$ tels que $a + (p^v) = \bigcup_{k=1}^N b_k + (p^{v'})$, en posant $N = p^{v'-v}$.

Pour chaque b_k , on peut approcher $f(y_p)$ au voisinage de $(b_k)_p$ par un polynôme $P_{b_k} \in \mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$ de degré strictement inférieur à h , qui est le début de la série de Taylor, d'ordre $h-1$ [Vi, section 1] : $P_{b_k}(y_p) = \sum_{i=0}^{h-1} \frac{f^{(i)}(b_k)}{i!} (y - b_k)_p^i$. Alors on définit $\int_{a+(p^v)} f(y_p) d\tilde{\Phi}(y)$ comme la limite des intégrales des sommes de Riemann :

$$\int_{a+(p^v)} f(y_p) d\tilde{\Phi}(y) = \lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \int_{b_k+(p^{v'})} P_{b_k}(y_p) d\tilde{\Phi}(y)$$

Lemme : Cette intégrale est bien définie : en prenant deux subdivisions $b = (b_k)$ et $b' = (b'_k)$, et en posant $S_{b,v'}(f) = \sum_{k=1}^N \int_{b_k+(p^{v'})} P_{b_k}(y_p) d\tilde{\Phi}(y)$, alors $\lim_{v' \rightarrow +\infty} |S_{b',v'}(f) - S_{b,v'}(f)|_p = 0$. Comme

\mathbb{C}_p est un corps complet, la limite $\lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \int_{b_k+(p^{v'})} P_{b_k}(y_p) d\tilde{\Phi}(y)$ existe.

Preuve du lemme :

$$\begin{aligned} & S_{b',v'}(f) - S_{b,v'}(f) \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{b'_k+(p^{v'})} P_{b'_k}(y_p) d\tilde{\Phi}(y) - \sum_{k=1}^N \int_{b_k+(p^{v'})} P_{b_k}(y_p) d\tilde{\Phi}(y) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{h-1} \frac{f^{(i)}(b'_k)}{i!} \int_{b'_k+(p^{v'})} (y - b'_k)_p^i d\tilde{\Phi}(y) - \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{h-1} \frac{f^{(r)}(b_k)}{r!} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y). \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on a $b'_k \in a + (p^v)$ et $b_k \in a + (p^v)$, donc $b'_k \equiv b_k \pmod{p^v}$, et pour tout $v' \geq v$, $b'_k \equiv b_k \pmod{p^{v'}}$. On développe $(y - b'_k)_p^i = (y - b_k + b_k - b'_k)_p^i$ et on remplace $b'_k + (p^{v'})$ par $b_k + (p^{v'})$ dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} S_{b',v'}(f) - S_{b,v'}(f) &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{h-1} \frac{f^{(i)}(b'_k)}{i!} \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} (b_k - b'_k)_p^{i-r} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{h-1} \frac{f^{(r)}(b_k)}{r!} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y) \end{aligned}$$

On échange maintenant l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned}
& S_{b',v'}(f) - S_{b,v'}(f) \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{h-1} \sum_{i=r}^{h-1} \frac{f^{(i)}(b'_k)}{i!} \binom{i}{r} (b_k - b'_k)_p^{i-r} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y) \\
&\quad - \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{h-1} \frac{f^{(r)}(b_k)}{r!} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y) \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{h-1} \left[\frac{f^{(r)}(b'_k)}{r!} + \sum_{i=r+1}^{h-1} \frac{f^{(i)}(b'_k)}{i!} \binom{i}{r} (b_k - b'_k)_p^{i-r} - \frac{f^{(r)}(b_k)}{r!} \right] \times \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y) \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^{h-1} \frac{1}{r!} \left[f^{(r)}(b'_k) - f^{(r)}(b_k) + \sum_{i=r+1}^{h-1} \frac{f^{(i)}(b'_k)}{(i-r)!} (b_k - b'_k)_p^{i-r} \right] \times \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y).
\end{aligned}$$

Dans le premier facteur, on reconnaît un développement limité, et on applique une majoration de Taylor-Lagrange, avec $F = f^{(r)}$, $b = b' - k$, $a = b_k$:

$$\left| F(b) - F(a) + \sum_{s=1}^{h-r-1} \frac{(b-a)^s}{s!} F^{(s)}(b) \right|_p \leq \frac{M}{(h-r)!} |b-a|_p^{h-r}.$$

Rappelons que $f \in \text{LocAn}(Y, \mathbb{C}_p)$. On obtient :

$$\left| f^{(r)}(b'_k) - f^{(r)}(b_k) + \sum_{i=r+1}^{h-1} \frac{f^{(i)}(b'_k)}{(i-r)!} (b_k - b'_k)_p^{i-r} \right|_p \leq \frac{M}{(h-r)!} |b'_k - b_k|_p^{h-r}.$$

De plus, $b'_k - b_k \equiv 0 \pmod{p^{v'}}$, donc $|b'_k - b_k|_p^{h-r} \equiv 0 \pmod{p^{v'(r-h)}}$.

Par ailleurs, pour le deuxième facteur, comme $\tilde{\Phi}$ est une h -mesure admissible sur Y , la condition de croissance de la définition 1.1 est vérifiée ($r = 0, 1, \dots, h-1$) :

$$\left| \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^r d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v'(h-r)}\right)$$

lorsque $v' \rightarrow +\infty$.

On obtient donc :

$$|S_{b',v'}(f) - S_{b,v'}(f)|_p = o\left(p^{v'(r-h+h-r)}\right) = o(1)$$

ce qui prouve que $\lim_{v' \rightarrow +\infty} |S_{b',v'}(f) - S_{b,v'}(f)|_p = 0$.

Remarque 1.3 : h -mesures admissibles sur X_p :

On a l'inclusion suivante : $X_p = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y, \mathbb{C}_p^\times) \subset \text{LocAn}(Y, \mathbb{C}_p)$: tout caractère de X_p est une fonction localement analytique.

Ceci permet de définir la notion de h -mesure admissible sur le sous-espace X_p des caractères.

Le but est de démontrer :

Théorème d'unicité 1.4 : Soit $S = \{p\}$, et soit $\tilde{\Phi}$ une h -mesure admissible sur X_p à valeurs dans \mathbb{C}_p . Alors $\tilde{\Phi}$ est déterminée par les valeurs

$$\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi(y)y_p^j) = \int_{Y_S} \chi(y)y_p^j d\tilde{\Phi}(y) \in \mathbb{C}_p, \text{ où } j = 0, 1, \dots, h-1, \text{ et } \chi \in X_p^{\text{tors}}$$

sauf un nombre fini s de couples $(\chi, j) : \chi y_p^j \neq \psi_\ell y_p^{j_\ell}$, $\ell = 1, \dots, s$.

Remarque 1.5 : h -mesures admissibles et valeurs aux points χy_p^j :

On sait d'après Vishik [Vi, th. 2.3] que si $\tilde{\Phi}$ est une h -mesure admissible sur $Y_S = \mathbb{Z}_S^\times$, alors $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$ est \mathbb{C}_p -analytique sur $X_S = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times)$, et $|\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(x)|_p = o(|\log_p x|_p^h)$ lorsque $|\log_p x|_p \rightarrow +\infty$.

La réciproque a été démontrée par Khoai [Kh, th. 1.2] : si f est \mathbb{C}_p -analytique sur $T = \{z \in \mathbb{C}_p, |z-1|_p < 1\}$ et si $|f(x)|_p = o(|\log_p x|_p^h)$, alors il existe une h -mesure admissible $\tilde{\Phi}$ telle que $f = \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$: Il prouve tout d'abord que la fonction μ définie par $\mu(y_p^t \delta_{a+(p^v)}) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \chi^{-1}(a) f(y_p^t \chi)$ pour $t = 0, 1, \dots, h-1$, est une fonction linéaire sur $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$.

Ensuite à l'aide du Lemme de Lazard [La, Lemme 4, (8.2)] sur la division euclidienne d'une série par un polynôme, il montre que la condition de croissance (de la définition 1.1) est vérifiée :

$$\left| \int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\mu \right|_p = o(p^{v(h-t)})$$

lorsque $v \rightarrow +\infty$, ce qui fait de μ une h -mesure admissible sur Y , et il montre enfin que $f = \mathcal{L}_\mu$.

Par ailleurs, Amice et Vélou [AV, Lemme II.2.5 pour l'unicité et Prop.IV.1 pour la construction] ont étudié les fonctions analytiques sur X_S , c'est-à-dire dont la restriction à T est analytique, en utilisant les isomorphismes

$$X_S = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times) \cong X_S^{\text{modérés}} \times \text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times)$$

et

$$\text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \cong U = \{z \in \mathbb{C}_p, |z|_p < 1\} \cong T = \{z \in \mathbb{C}_p, |z-1|_p < 1\}.$$

Ils ont démontré explicitement que toute fonction analytique sur X_S et de type $o(\log_p^h)$ est définie par la suite de ses polynômes d'interpolation aux points χy_p^j pour $j = 0, 1, \dots, h-1$ et $\chi \in X_p^{\text{tors}}$. C'est aussi un résultat de Vishik [Vi, Lemme 2.10]; voir la démonstration avec les polygones de Newton dans la section 6.

En conclusion, on a la proposition suivante :

Proposition 1.6 : Toute h -mesure admissible $\tilde{\Phi}$ sur X_S est définie par les valeurs de $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$ aux points χy_p^j pour $j = 0, 1, \dots, h-1$ et $\chi \in X_p^{\text{tors}}$.

Le théorème d'unicité 1.4 affirme que l'on peut se passer d'un nombre fini de tels points.

1.2 Distributions, mesures et h -mesures sur \mathbb{Z}_p^\times

Définition 1.7 : Une distribution Φ sur $Y = \mathbb{Z}_p^\times$ à valeurs dans V est une application linéaire définie sur l'espace $\mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ des fonctions localement constantes sur Y .

Cette définition est identique à celle de Katz. Voir la partie 1.5 pour la définition au sens d'Amice et Vêlu.

Définition 1.8 : Une mesure μ sur Y à valeurs dans V est un homomorphisme continu défini sur l'espace $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$ des fonctions continues sur Y .

Remarque 1.9 : La restriction d'une mesure à l'espace $\mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ des fonctions localement constantes définit une distribution. De plus cette mesure est uniquement déterminée par la distribution correspondante (par densité de $\mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ dans $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$).

Au sens d'Amice et Vêlu, une mesure est une distribution bornée (voir partie 1.5).

Une h -mesure admissible n'est donc en général ni une distribution, ni une mesure. Dans le cas où $h = 1$, une 1-mesure admissible définit une distribution (exemple 1.12). Mais pour $h \geq 2$, la restriction d'une h -mesure admissible ne suffit pas pour déterminer une telle h -mesure admissible :

Une forme linéaire sur $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p) = \bigoplus_{j=0}^{h-1} y_p^j \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ est déterminée par toutes les restrictions aux monômes.

Plus précisément, un lien est donné par la proposition suivante :

Proposition 1.10 : La donnée d'une h -mesure admissible $\tilde{\Phi}$ sur Y est équivalente à la donnée d'une suite finie de distributions $\Phi_j : \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p) \rightarrow V$, pour $j = 0, 1, \dots, h-1$, avec la condition de compatibilité (ou croissance bornée) : pour $t = 0, 1, \dots, h-1$:

$$\sup_{a \in \mathbb{Z}_p^\times} \left| \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (p^v)) \right|_p = o(p^{v(h-t)})$$

lorsque $v \rightarrow +\infty$.

Les liens explicites entre $\tilde{\Phi}$ et les Φ_j sont donnés ici :

Proposition 1.11 : Soit $\tilde{\Phi}$ une h -mesure admissible sur Y donnée par une suite finie de distributions Φ_j , $j = 0, 1, \dots, h-1$. On a :

a) $\Phi_j(a + (p^v)) = \Phi_j(\delta_{a+(p^v)}) = \int_Y y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \bar{\chi}(a) \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j)$, où φ est la

fonction d'Euler.

b) Pour $f \in \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$,

$$\Phi_j(f) = \int_Y f(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \left(\sum_{a \bmod p^v} f(a) \bar{\chi}(a) \right) \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j).$$

c) Pour $F \in \mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$, $F = \sum_{j=0}^{h-1} y_p^j f_j$ avec $f_j \in \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$, on a $\tilde{\Phi}(F) = \sum_{j=0}^{h-1} \Phi_j(f_j)$, où

$$\Phi_j(f_j) = \int_Y f_j(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \tilde{\Phi}(y_p^j f_j).$$

d) Pour tout $\chi \bmod p^v$, $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j) = \mathcal{L}_{\Phi_j}(\chi)$.

e) On peut calculer l'intégrale pour tout entier $t \geq 0$:

$$\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = \sum_{j=0}^{\min\{t, h-1\}} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (p^v)).$$

f) La condition de croissance est en fait vérifiée pour tout entier $t \geq 0$ (pas seulement pour $t = 0, 1, \dots, h-1$) :

$$\sup_{a \in \mathbb{Z}_p^\times} \left| \int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v(h-t)}\right)$$

lorsque $v \rightarrow +\infty$.

Preuve de a) : D'après la décomposition $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p) = \bigoplus_{j=0}^{h-1} y_p^j \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$, il est clair que l'on pose :

$$\Phi_j(a + (p^v)) = \Phi_j(\delta_{a+(p^v)}) = \int_{a+(p^v)} y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \int_Y \delta_{a+(p^v)}(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y).$$

L'indicatrice est définie par $\delta_{a+(p^v)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \equiv a \pmod{p^v}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ De plus, si $x \in a + (p^v)$, alors

$\chi(x) = \chi(a)$ donc on peut écrire, en utilisant la fonction φ d'Euler :

$$\delta_{a+(p^v)}(x) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \pmod{p^v}} \chi(x) \bar{\chi}(a).$$

D'où :

$$\Phi_j(a + (p^v)) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \pmod{p^v}} \bar{\chi}(a) \int_Y \chi(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \pmod{p^v}} \bar{\chi}(a) \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j)$$

Preuve de b) : Soit $f \in \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$, f est localement constante, donc $f = \sum_{a \pmod{p^v}} f(a) \delta_{a+(p^v)}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \Phi_j(f) &= \sum_{a \pmod{p^v}} f(a) \Phi_j(\delta_{a+(p^v)}) \\ &= \sum_{a \pmod{p^v}} f(a) \int_{a+(p^v)} y_p^j d\tilde{\Phi}(y) \\ &= \sum_{a \pmod{p^v}} f(a) \int_Y \delta_{a+(p^v)}(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y) \\ &= \int_Y f(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y). \end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_j(f) &= \sum_{a \pmod{p^v}} f(a) \Phi_j(\delta_{a+(p^v)}) \\ &= \sum_{a \pmod{p^v}} f(a) \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \pmod{p^v}} \bar{\chi}(a) \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j) \\ &= \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \pmod{p^v}} \left(\sum_{a \pmod{p^v}} f(a) \bar{\chi}(a) \right) \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j). \end{aligned}$$

Preuve de c) : Une h -mesure admissible $\tilde{\Phi}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$. On décompose $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$ sur les différentes puissances de y_p : $\mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p) = \bigoplus_{j=0}^{h-1} y_p^j \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$. Soit maintenant

$F \in \mathcal{P}^h(Y, \mathbb{C}_p)$, on a $F = \sum_{j=0}^{h-1} y_p^j f_j$ avec $f_j \in \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$.

Pour chaque j , on applique la formule 1.11.b à f_j : $\Phi_j(f_j) = \int_Y f_j(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \tilde{\Phi}(y_p^j f_j)$.

Alors $\tilde{\Phi}(F) = \int_Y F(y) d\tilde{\Phi}(y) = \int_Y \sum_{j=0}^{h-1} y_p^j f_j(y) d\tilde{\Phi}(y) = \sum_{j=0}^{h-1} \Phi_j(f_j)$.

Preuve de d) : C'est immédiat : $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j) = \int_Y \chi(y) y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \mathcal{L}_{\Phi_j}(\chi)$.

Preuve de e) : Soit tout d'abord $t = 0, 1, \dots, h-1$. Développons $(y_p - a_p)^t$:

$$\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \int_{a+(p^v)} y_p^j d\tilde{\Phi}(y) = \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (p^v)).$$

Soit maintenant $t \geq h$. Comme dans la remarque 1.2, on étend $\tilde{\Phi}$ en une h -mesure admissible sur $\text{LocAn}(Y, \mathbb{C}_p)$. Soit la fonction $f \in \text{LocAn}(Y, \mathbb{C}_p)$ définie par $f(y_p) = (y_p - a_p)^t$. On définit l'intégrale $\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = \int_{a+(p^v)} f(y_p) d\tilde{\Phi}(y)$ (qui existe d'après le lemme de cette remarque 1.2), comme la limite des intégrales des sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) &= \lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \int_{b_k+(p^{v'})} P_{b_k}(y_p) d\tilde{\Phi}(y) \\ &= \lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{h-1} \binom{t}{i} (b_k - a)_p^{t-i} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^i d\tilde{\Phi}(y). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) &= \lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \int_{b_k+(p^{v'})} (y - a)_p^t d\tilde{\Phi}(y) \\ &= \lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \int_{b_k+(p^{v'})} [(y - b_k)_p + (b_k - a)_p]^t d\tilde{\Phi}(y) \\ &= \lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} (b_k - a)_p^{t-i} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^i d\tilde{\Phi}(y). \end{aligned}$$

On identifie maintenant les deux écritures de l'intégrale $\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y)$, l'une avec

$\sum_{i=0}^{h-1}$ et l'autre avec $\sum_{i=0}^t$: alors

$$\lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{i=h}^t \binom{t}{i} (b_k - a)_p^{t-i} \int_{b_k+(p^{v'})} (y - b_k)_p^i d\tilde{\Phi}(y) = 0$$

et il ne reste dans le calcul de l'intégrale que la somme $\sum_{i=0}^{h-1}$. En conclusion, les seules puissances de y_p qui interviennent dans $\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y)$ sont les y_p^i pour $i = 0, \dots, h-1$. Il suffit donc de développer $(y_p - a_p)^t = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} (-a_p)^{t-i} y_p^i$ et de ne garder dans l'intégrale $\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y)$ que les termes pour $i = 0, \dots, h-1$:

$$\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = \sum_{i=0}^{h-1} \binom{t}{i} (-a_p)^{t-i} \int_{a+(p^v)} y_p^i d\tilde{\Phi}(y) = \sum_{i=0}^{h-1} \binom{t}{i} (-a_p)^{t-i} \Phi_i(a + (p^v)).$$

Preuve de f) : Par définition d'une h -mesure admissible, la condition de croissance est vérifiée pour $t = 0, \dots, h-1$:

$$\sup_{a \in \mathbb{Z}_p^\times} \left| \int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v(h-t)}\right)$$

lorsque $v \rightarrow +\infty$.

Soit maintenant $t \geq h$. On reprend l'une des écritures utilisées précédemment (dans la preuve de 1.11.e) :

$$\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = \lim_{v' \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{h-1} \binom{t}{i} (b_k - a)_p^{t-i} \int_{b_k+(p^{v'})} (y_p - b_{kp})^i d\tilde{\Phi}(y).$$

Le coefficient $\binom{t}{i}$ est un entier, donc $|\binom{t}{i}|_p \leq 1$.

On a $b_k \in a + (p^v)$, donc pour tout $v' \geq v$, $b_k \equiv a \pmod{p^{v'}}$, donc $p^{v'}$ divise $b_k - a$, et on obtient $|(b_k - a)_p|_p \leq p^{-v'}$, d'où $|(b_k - a)_p|_p^{t-i} \leq p^{-v'(t-i)}$.

Par ailleurs, pour $i = 0, \dots, h-1$, la condition de croissance est vérifiée : pour tout b_k ,

$$\left| \int_{b_k+(p^{v'})} (y_p - b_{kp})^i d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v'(h-i)}\right)$$

lorsque $v' \rightarrow +\infty$.

On a alors $p^{-v'(t-i)+v'(h-i)} = p^{v'(h-t)}$. Il reste à remarquer que $h-t \leq 0$ et $v' \geq v$, donc $v'(h-t) \leq v(h-t)$. On obtient alors le résultat annoncé :

$$\left| \int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v(h-t)}\right)$$

lorsque $v \rightarrow +\infty$.

1.3 Exemples de h -mesures admissibles

Exemple 1.12 (Le cas $h = 1$) : Toute mesure vérifie la condition de compatibilité (croissance bornée) avec $h = 1$ ($j = 0$ et $t = 0$), donc toute mesure définit une 1-mesure admissible. La réciproque est fausse.

En effet, si $h = 1$ et si Φ_0 est une mesure (distribution bornée, voir partie 1.5), alors il existe C tel que pour tout $\phi \in \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ (localement constante) : $|\Phi_0(\phi)|_p \leq C|\phi|_p$. Pour la fonction $\phi = \delta_{a+(p^v)} : |\Phi_0(\delta_{a+(p^v)})|_p \leq C \times 1$ donc $|\Phi_0(\delta_{a+(p^v)})|_p = o(p^v)$ lorsque $v \rightarrow +\infty$; la condition de compatibilité de la proposition 1.10 est vérifiée. En posant $\Phi_0(a + (p^v)) = \int_{a+(p^v)} d\tilde{\Phi}(y)$, on obtient une 1-mesure admissible.

Réciproquement, une 1-mesure admissible $\tilde{\Phi}$ est donnée par une unique distribution $\Phi_0 : \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p) \rightarrow V$ qui vérifie (1.10) : $|\Phi_0(a + (p^v))|_p = o(p^v)$ lorsque $v \rightarrow +\infty$. C'est une distribution dite modérée.

Proposition 1.13 (Le cas $h = 2$) : Pour $h = 2$, il existe une 2-mesure admissible $\tilde{\Phi}$ telle que $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(x) = \log_S x$. De plus, les deux distributions associées à $\tilde{\Phi}$ sont $\Phi_0(a + (p^v)) = 0$ et $\Phi_1(a + (p^v)) = \delta_{1+(p^v)}(a) \log_S(\gamma)$. Enfin, pour tout entier $t \geq 0$: $\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = t(-a_p)^{t-1} \delta_{1+(p^v)}(a) \log_S(\gamma)$.

Preuve : On a : $|\log_S x|_p = o(|\log_S x|_p^2)$. Pour $h = 2$, il existe donc (remarque 1.5) une 2-mesure admissible $\tilde{\Phi}$ telle que $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(x) = \log_S x$. Nous allons expliciter les deux distributions Φ_0 et Φ_1 qui caractérisent $\tilde{\Phi}$. Pour $j = 0$ et $j = 1$, on utilise la formule de la proposition 1.11.a :

$$\begin{aligned} \Phi_j(a + (p^v)) &= \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \bar{\chi}(a) \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j) \\ &= \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \bar{\chi}(a) \log_S(\chi y_p^j) \\ &= \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \bar{\chi}(a) [\log_S(\chi) + j \log_S(y_p)]. \end{aligned}$$

Il reste à calculer $\log_S(\chi)$ et $\log_S(y_p)$. Pour cela, on utilise la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} X_S &= \text{Hom}_{\text{cont}}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times) \cong X_S^{\text{modérés}} \times \text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \\ \chi &= \psi \chi_t \end{aligned}$$

et l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) &\cong \text{disque } U = \{z \in \mathbb{C}_p, |z|_p < 1\} \\ \chi_t &\mapsto t. \end{aligned}$$

La projection y_p a pour image γ un générateur topologique de Γ ; on a $\chi_t(\gamma) = 1 + t$ avec $|t|_p < 1$. On a ainsi $\log_S(\chi) = \log_p(1 + t)$ et $\log_S(y_p) = \log_S(\gamma)$.

Or χ est un caractère de Dirichlet modulo p^v , donc $\chi_t(\gamma)$ est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p . Autrement dit, $\chi_t(\gamma) = 1 + t = \zeta_{p^n}$, et $\log_S(\chi) = \log_p(1 + t) = \log_p(\zeta_{p^n}) = 0$.

On obtient alors :

$$\Phi_j(a + (p^v)) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \bar{\chi}(a) j \log_S(\gamma) = j \delta_{1+(p^v)}(a) \log_S(\gamma).$$

Donc $\Phi_0(a + (p^v)) = 0$ et $\Phi_1(a + (p^v)) = \delta_{1+(p^v)}(a) \log_S(\gamma) = \begin{cases} \log_S(\gamma), & \text{si } a \equiv 1 \pmod{p^v}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Il reste à utiliser la formule de la proposition 1.11.e :

$$\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = \sum_{j=0}^{\min\{t; h-1\}} \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (p^v)).$$

Pour $t = 0$, on obtient $\int_{a+(p^v)} d\tilde{\Phi}(y) = 0$.

Pour $t = 1$: $\int_{a+(p^v)} (y - a)_p d\tilde{\Phi}(y) = \Phi_1(a + (p^v)) = \delta_{1+(p^v)}(a) \log_S(\gamma)$.

Pour $t \geq 2$: $\int_{a+(p^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) = t(-a_p)^{t-1} \Phi_1(a + (p^v)) = t(-a_p)^{t-1} \delta_{1+(p^v)}(a) \log_S(\gamma)$.

On remarque que cette écriture peut être utilisée aussi pour $t = 0$ et $t = 1$.

Remarque 1.14 : Toute famille finie $\{\Phi_j\}$ de distributions modérées (c'est-à-dire qui vérifient $|\Phi_j(a + (p^v))|_p = o(p^v)$ lorsque $v \rightarrow +\infty$) vérifie la condition de compatibilité (croissance bornée) donc définit une h -mesure admissible.

Preuve : Pour $t = 0, 1, \dots, h-1$:

$$\left| \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (p^v)) \right|_p \leq \max_j \binom{t}{j} |a_p|_p^{t-j} |\Phi_j(a + (p^v))|_p.$$

Comme $\binom{t}{j}$ est un entier, alors $\left| \binom{t}{j} \right|_p \leq 1$.

On a : $a_p = y_p(a)$, où y_p est la projection canonique sur \mathbb{Z}_p^\times , donc $a_p \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $|a_p|_p = 1$.

Les Φ_j étant des distributions modérées : $|\Phi_j(a + (p^v))|_p = o(p^v)$ lorsque $v \rightarrow +\infty$.

Il reste à remarquer que $t \leq h-1$ implique $1 \leq h-t$, et on peut alors conclure :

$$\left| \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (p^v)) \right|_p = o(p^{v(h-t)})$$

lorsque $v \rightarrow +\infty$.

1.4 Démonstration du théorème d'unicité dans le cas où $\tilde{\Phi}$ est donnée par une suite finie de distributions bornées (mesures)

Supposons que $\tilde{\Phi}$ soit donnée par une suite finie $\{\Phi_j\}$ de distributions bornées (mesures, voir la partie 1.5). On se place donc dans le cas où il existe un réel C tel que pour tout $j = 0, 1, \dots, h-1$ et pour toute $\varphi \in \mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ (localement constante), on a : $|\Phi_j(\varphi)|_p \leq C|\varphi|_p$.

Toute h -mesure admissible $\tilde{\Phi}$ est définie par les valeurs de $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$ aux points χy_p^j pour $j = 0, 1, \dots, h-1$ et $\chi \in X_p^{\text{tors}}$ (proposition 1.6). De plus, $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^j) = \mathcal{L}_{\Phi_j}(\chi)$ (proposition 1.11.d).

Enfin, pour j fixé, la donnée d'une distribution Φ_j est équivalente à la donnée des valeurs de \mathcal{L}_{Φ_j} sur tous les χ , pour $\chi \in X_p^{\text{tors}}$.

La démonstration du théorème d'unicité se découpe en trois lemmes :

Lemme 1.15 : *Un entier j étant fixé, l'ensemble $\{\chi y_p^j, \chi \in X_p^{\text{tors}}\}$ engendre un \mathbb{C}_p -sous-espace dense dans l'ensemble $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$ des fonctions continues.*

Lemme 1.16 : *Soit E un ensemble formé de tous les caractères de Dirichlet sur X_S sauf un nombre fini. Alors E engendre un sous-espace dense dans $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$: chaque caractère de Dirichlet que l'on a enlevé peut être approché par une combinaison linéaire de caractères de Dirichlet de E .*

Lemme 1.17 : *La donnée des valeurs $\mathcal{L}_{\Phi_j}(\chi)$ pour $\chi \in X_p^{\text{tors}}$ et $j = 0, 1, \dots, h-1$ est équivalente à la donnée des valeurs de $\mathcal{L}_{\Phi_j}(\chi)$ pour $\chi \in X_p^{\text{tors}}$ et $j = 0, 1, \dots, h-1$, sauf un nombre fini s : $\chi y_p^j \neq \psi_\ell y_p^{\ell}$, $\ell = 1, \dots, s$.*

Preuve du lemme 1.15 : Soit $f \in \text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$ une fonction continue sur Y . On peut approcher f par des fonctions localement constantes sur Y . Or toute fonction localement constante sur Y est combinaison linéaire d'indicatrices $\delta_{a+(p^v)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \equiv a \pmod{p^v}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ Considérons maintenant

$$h(x, a) = \frac{1}{\varphi(p^v)} \sum_{\chi \bmod p^v} \bar{\chi}(a) a_p^{-j} \chi(x) x_p^j = \frac{1}{\varphi(p^v)} a_p^{-j} x_p^j \sum_{\chi \bmod p^v} \chi(x a^{-1}).$$

Si $x \equiv a \pmod{p^v}$, alors $\chi(x a^{-1}) = 1$ et $\sum_{\chi \bmod p^v} 1 = \varphi(p^v)$. Dans ce cas, $h(x, a) = 1$.

Si $x \not\equiv a \pmod{p^v}$, alors $\chi(x a^{-1}) \neq 1$ et $\sum_{\chi \bmod p^v} \chi(x a^{-1}) = 0$. Dans ce cas, $h(x, a) = 0$.

En conclusion, $h(x, a) = \delta_{a+(p^v)}(x)$, donc toute indicatrice est combinaison linéaire de χy_p^j . On peut alors approcher f par une combinaison linéaire de χy_p^j .

Preuve du lemme 1.16 : Supposons tout d'abord que $s = 1$ et montrons que pour tout ψ_1 , l'ensemble $E = X_p^{\text{tors}} \setminus \{\psi_1\}$ engendre un sous-espace dense dans $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$:

Soit ψ_1 un caractère de Dirichlet modulo p^v . Pour tout $w \geq v+1$ et pour tout $y \in (\mathbb{Z}/p^w\mathbb{Z})^\times$, les relations d'orthogonalité s'écrivent :

$$\sum_{\chi \bmod p^w} \chi(y) = \varphi(p^w) \delta_{1+(p^w)}(y).$$

Comme $w \geq v+1$, on a $p^v \mid p^w$, donc parmi les χ , il y a ψ_1 , et on peut écrire :

$$\psi_1(y) = - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1}} \chi(y) + \varphi(p^w) \delta_{1+(p^w)}(y).$$

On a donc $\psi_1(y) \equiv - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1}} \chi(y) \pmod{\varphi(p^w)}$.

On fait tendre w vers $+\infty$; alors ψ_1 se trouve dans l'adhérence de $E = X_p^{\text{tors}} \setminus \{\psi_1\}$ dans $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$.

Cas général : $s \geq 1$; montrons que pour tous ψ_1, \dots, ψ_s , l'ensemble $E = X_p^{\text{tors}} \setminus \{\psi_1, \dots, \psi_s\}$ engendre un sous-espace dense dans $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$:

Soient ψ_1, \dots, ψ_s des caractères de Dirichlet. On regarde tous les caractères ψ_ℓ modulo p^v ($v \geq 1$). Pour tout $w \geq v + 1$, on a encore $p^v \mid p^w$ donc parmi les χ , il y a les ψ_ℓ ; alors pour tout $y \in (\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z})^\times$, les relations d'orthogonalité s'écrivent :

$$\psi_1(y) + \dots + \psi_s(y) = - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \chi(y) + \varphi(p^w) \delta_{1+(p^w)}(y).$$

On fixe $a \in Y$, et on effectue le changement de variables $y \mapsto ay$:

$$\psi_1(a)\psi_1(y) + \dots + \psi_s(a)\psi_s(y) = - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \chi(a)\chi(y) + \varphi(p^w) \delta_{1+(p^w)}(ay).$$

On fixe l'un des entiers ℓ entre 1 et s , et on multiplie par $\psi_\ell(a)^{-1}$:

$$\begin{aligned} & \psi_1(a)\psi_\ell(a)^{-1}\psi_1(y) + \dots + \psi_s(a)\psi_\ell(a)^{-1}\psi_s(y) \\ &= - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \chi(a)\psi_\ell(a)^{-1}\chi(y) + \varphi(p^w)\psi_\ell(a)^{-1}\delta_{1+(p^w)}(ay). \end{aligned}$$

Maintenant on effectue la sommation sur tous les représentants a de $(\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z})^\times$. On sait que

$$\sum_{a \bmod p^v} \alpha(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \text{ non trivial;} \\ \varphi(p^v), & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{Alors } \sum_{a \bmod p^v} \psi_i(a)\psi_\ell(a)^{-1} \text{ vaut } 0 \text{ si } i \neq \ell \text{ et vaut } \varphi(p^v) \text{ si } i = \ell. \text{ On obtient :}$$

$$\varphi(p^v)\psi_\ell(y) = - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \sum_{a \bmod p^v} \chi(a)\psi_\ell(a)^{-1}\chi(y) + \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \varphi(p^w)\psi_\ell(a)^{-1}\delta_{1+(p^w)}(ay),$$

$$\begin{aligned} \psi_\ell(y) &= - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \sum_{a \bmod p^v} \chi(a)\psi_\ell(a)^{-1}\chi(y)\varphi(p^v)^{-1} \\ &+ \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \varphi(p^w)\varphi(p^v)^{-1}\psi_\ell(a)^{-1}\delta_{1+(p^w)}(ay), \end{aligned}$$

$$\text{donc } \psi_\ell(y) \equiv - \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \sum_{a \bmod p^v} \chi(a)\psi_\ell(a)^{-1}\chi(y) \pmod{\varphi(p^w)\varphi(p^v)^{-1}}.$$

Or $w > v \geq 1$, $\varphi(p^w) = p^w \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, et de même $\varphi(p^v) = p^v \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, donc $\varphi(p^w)\varphi(p^v)^{-1} = p^{w-v}$.

En posant $\alpha_{\ell, \chi, v, w} = - \sum_{a \bmod p^v} \chi(a)\psi_\ell(a)^{-1}$, on obtient alors :

$$\psi_\ell(y) \equiv \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \chi(y) \pmod{p^{w-v}}.$$

On fait tendre w vers $+\infty$; alors ψ_ℓ se trouve dans l'adhérence de $E = X_p^{\text{tors}} \setminus \{\psi_1, \dots, \psi_s\}$ dans $\text{Cont}(Y, \mathbb{C}_p)$.

Preuve du lemme 1.17 : Si $\psi_\ell \notin E$, la démonstration ci-dessus a prouvé que :

$$\psi_\ell(y) \equiv \sum_{\substack{\chi \bmod p^w \\ \chi \neq \psi_1, \dots, \psi_s}} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \chi(y) \bmod p^{w-v}.$$

Plus précisément : $\psi_\ell(y) = \sum_{\chi \in E} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \chi(y) + p^{w-v} g(y)$, où $g(y) = \sum_{a \bmod p^v} \psi_\ell(a)^{-1} \delta_{1+(p^w)}(ay) = \sum_{a \bmod p^v} \psi_\ell(a)^{-1} \delta_{a^{-1}+(p^w)}(y)$, car $ay \equiv 1 \bmod p^v \iff y \equiv a^{-1} \bmod p^v$.

Calculons maintenant $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\psi_\ell y_p^{j_\ell})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) &= \int_{Y_p} \psi_\ell(y) y_p^{j_\ell} d\tilde{\Phi} \\ &= \sum_{\chi \in E} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \int_{Y_p} \chi(y) y_p^{j_\ell} d\tilde{\Phi} + p^{w-v} \sum_{a \bmod p^v} \psi_\ell(a)^{-1} \int_{Y_p} \delta_{a^{-1}+(p^w)}(y) y_p^{j_\ell} d\tilde{\Phi} \\ &= \sum_{\chi \in E} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^{j_\ell}) + p^{w-v} \sum_{a \bmod p^v} \psi_\ell(a)^{-1} \int_{a^{-1}+(p^w)} y_p^{j_\ell} d\tilde{\Phi} \\ &= \sum_{\chi \in E} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^{j_\ell}) + p^{w-v} \sum_{a \bmod p^v} \psi_\ell(a)^{-1} \Phi_{j_\ell}(a^{-1} + (p^w)). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left| \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) - \sum_{\chi \in E} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^{j_\ell}) \right|_p = p^{v-w} \left| \sum_{a \bmod p^v} \psi_\ell(a)^{-1} \Phi_{j_\ell}(a^{-1} + (p^w)) \right|_p.$$

Les Φ_j sont supposées bornées : $|\Phi_{j_\ell}(a^{-1} + (p^w))|_p \leq C |\delta_{a^{-1}+(p^w)}|_p$. De plus $|\delta_{a^{-1}+(p^w)}|_p = 1$ et $|\psi_\ell^{-1}(a)|_p = 1$. On obtient donc :

$$\max_{a \bmod p^v} |\psi_\ell(a)^{-1}|_p |\Phi_{j_\ell}(a^{-1} + (p^w))|_p \leq C,$$

et

$$\left| \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) - \sum_{\chi \in E} \alpha_{\ell, \chi, v, w} \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^{j_\ell}) \right|_p \leq Cp^{v-w}$$

qui tend vers 0 lorsque w tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\psi_\ell y_p^{j_\ell})$ est déterminée par les $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi y_p^{j_\ell})$ pour $\chi \in E$. Ce qui achève la preuve du théorème d'unicité 1.4 dans le cas où $\tilde{\Phi}$ est donnée par des distributions bornées (mesures).

1.5 Distributions selon Amice-Vélu

Nous rappelons ici les notations et résultats de Yvette Amice et Jacques Vélu ([AV, II] et [AmI]).

Une distribution sur $Y_S = \mathbb{Z}_S^\times$ est une forme linéaire continue sur l'algèbre $\text{LocAn}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times)$. Cette algèbre contient l'espace $\mathcal{P}^1(Y, \mathbb{C}_p)$ des fonctions localement constantes sur Y . Les distributions sur Y utilisées dans le présent article définissent donc chacune de manière unique une

distribution au sens d'Amice-Vélu, en écrivant (voir remarque 1.2) au voisinage d'un point les h premiers termes du développement de Taylor.

On notera que $X_S = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times)$ est un sous-groupe de l'algèbre $\text{LocAn}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times)$.

On a un isomorphisme [AV, Prop. II 2.2] :

$$\{\text{distributions sur } Y_S\} \cong \{\text{fonctions analytiques sur } X_S\}$$

obtenu en prenant pour chaque distribution φ définie sur $\text{LocAn}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times)$, sa restriction à X_S .

La démonstration découle d'une part du théorème de Mahler ([Ma, th. 1], [Bo]) qui établit l'existence et l'unicité des coefficients d'interpolation pour les fonctions continues sur \mathbb{Z}_p , et d'autre part du théorème d'Amice [AmI, th.3 cor.1] qui caractérise les fonctions localement analytiques sur \mathbb{Z}_p par leurs coefficients d'interpolation.

Soit φ une distribution sur Y_S . Alors [AV, Prop. II 2.3] φ est une mesure si et seulement si sa restriction à X_S est une fonction analytique bornée (c'est-à-dire ses coefficients sont bornés). C'est le théorème d'Iwasawa [Co-Pa, th. 1.10 (a)].

Notons comme Vishik [Vi, 1.2], pour $h \geq 1$ entier, $\mathcal{L}^h(Y_S)$ l'ensemble des fonctions sur Y_S , $h - 1$ fois dérivables et dont la dérivée $(h - 1)$ -ième est lipschitzienne. On a la caractérisation suivante [AV, Prop. II 2.4] : Soit φ une distribution sur Y_S . Alors φ se prolonge à $\mathcal{L}^h(Y_S)$ si et seulement si sa restriction à X_S est de type $o(\log_p^h)$ (en utilisant encore le développement de Taylor).

On notera enfin (voir proposition 1.6) que toute fonction analytique sur X_S et de type $o(\log_p^h)$ est caractérisée par ses valeurs aux points χy_p^j pour $j = 0, 1, \dots, h - 1$ et $\chi \in X_p^{\text{tors}}$.

2 Le théorème d'unicité

Rappelons l'objectif :

Théorème d'unicité (1.4) : Soit $S = \{p\}$, et soit $\tilde{\Phi}$ une h -mesure admissible sur X_p à valeurs dans \mathbb{C}_p . Alors $\tilde{\Phi}$ est déterminée par les valeurs

$$\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi(y)y_p^j) = \int_{Y_S} \chi(y)y_p^j d\tilde{\Phi}(y) \in \mathbb{C}_p, \text{ où } j = 0, 1, \dots, h - 1, \text{ et } \chi \in X_p^{\text{tors}}$$

sauf un nombre fini s de couples $(\chi, j) : \chi y_p^j \neq \psi_\ell y_p^{j_\ell}, \ell = 1, \dots, s$.

Nous détaillons ici une première preuve en examinant les zéros d'une fonction analytique sur le disque unité.

Preuve : On se place dans le cas où $S = \{p\}$. On sait (voir proposition 1.6) que si $\tilde{\Phi}$ est une h -mesure admissible, alors $\tilde{\Phi}$ est déterminée par la donnée de toutes les valeurs $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi(y)y_p^j)$ pour $\chi \in X_p^{\text{tors}}$ et $j = 0, 1, \dots, h - 1$; de plus $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$ est \mathbb{C}_p -analytique sur le disque ouvert, et $|\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(x)|_p = o(|\log_p(x)|_p^h)$ lorsque $|\log_p(x)|_p \rightarrow +\infty$.

Soit $\tilde{\Phi}_1$ une h -mesure admissible sur X_p donnée par des $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}_1}(\chi y_p^j)$. Supposons que les valeurs $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi(y)y_p^j)$ et $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}_1}(\chi y_p^j)$ coïncident sauf pour un nombre fini r de couples (χ, j) . On pose $f = \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}} - \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}_1}$. On se ramène donc à l'étude de $f : \mathbb{C}_p$ -analytique, avec $|f(x)|_p = o(|\log_p(x)|_p^h)$ lorsque

$|\log_p(x)|_p \rightarrow +\infty$, et $f(\chi(y)y_p^j) = 0$ sauf pour un nombre fini r de couples $(\chi, j) : \chi y_p^j \neq \psi_\ell y_p^{j_\ell}$, $\ell = 1, \dots, r$.

Il s'agit de montrer que f est identiquement nulle.

On utilise la décomposition de $X_S = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y_S, \mathbb{C}_p^\times)$:

$$X_S \cong X_S^{\text{modérés}} \times \text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times)$$

$$\chi = \psi \chi_t$$

et l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \cong \text{disque } U = \{z \in \mathbb{C}_p, |z|_p < 1\}$$

$$\chi_t \mapsto t.$$

La projection y_p a pour image γ un générateur topologique de Γ ; on a $\chi_t(\gamma) = 1 + t$ avec $|t|_p < 1$. On a ainsi $\log_S(x) = \log_p(1 + t)$ et $\log_S(y_p) = \log_S(\gamma)$.

Nous allons construire différentes fonctions accessoires.

Première étape : on définit une fonction f_0 par :

$$f_0(x) = \frac{\log_S(x)}{x(\gamma) - 1} = \frac{\log_p(1 + t)}{t} = \sum_{n \leq 0} (-1)^n \frac{t^n}{n + 1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \dots$$

La fonction f_0 est \mathbb{C}_p -analytique sur le disque ouvert isomorphe à U . Les zéros de f_0 sont les x tels que $1 + t$ soit une racine p^n -ième de 1, sauf $t = 0$ ($x = 1$) : $t = \zeta - 1$ avec $\zeta^{p^n} = 1$ sauf $t = 0$. De plus, $f_0(x = 1) = f_0(t = 0) = 1$.

Deuxième étape : on fixe $\ell = 1, \dots, r$ et on définit une fonction f_ℓ par :

$$f_\ell(x) = f_0((\psi_\ell y_p^{j_\ell})^{-1}x) = \frac{\log_S((\psi_\ell y_p^{j_\ell})^{-1}x)}{((\psi_\ell y_p^{j_\ell})^{-1}x)(\gamma) - 1} = \frac{\log_p(1 + t) - j_\ell \log_p(\gamma)}{\psi_\ell^{-1} y_p^{-j_\ell} (1 + t) - 1},$$

$$f_\ell(x) = \frac{\log_p(1 + t) - j_\ell \log_p(\gamma)}{a_\ell(1 + t) - 1} \quad \text{en posant } a_\ell = \psi_\ell^{-1} y_p^{-j_\ell}.$$

La fonction f_ℓ est \mathbb{C}_p -analytique. Les zéros de f_ℓ sont les x tels que $t = \gamma^{j_\ell} \zeta - 1$ avec $\zeta^{p^n} = 1$ sauf $x = \psi_\ell y_p^{j_\ell}$. De plus, $f_\ell(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) = f_0(x = 1) = 1$.

Troisième étape : on définit une fonction g_ℓ par :

$$g_\ell(x) = f_\ell(x) \times \prod_{\substack{j'=0 \\ j' \neq j_\ell}}^{h-1} \log_S(y_p^{-j'} x) = \frac{1}{a_\ell(1 + t) - 1} \times \prod_{j'=0}^{h-1} (\log_p(1 + t) - j' \log_p(\gamma)).$$

La fonction g_ℓ est \mathbb{C}_p -analytique. Les zéros de g_ℓ sont ceux de f_ℓ et ceux de $\log_S(y_p^{-j'} x)$ pour $j' \neq j_\ell$, c'est-à-dire d'une part les x tels que $t = \gamma^{j_\ell} \zeta - 1$ sauf $x = \psi_\ell y_p^{j_\ell}$ et d'autre part les x tels que $t = \gamma^{j'} \zeta - 1$ pour $j' \neq j_\ell$. On peut résumer ainsi : les zéros de g_ℓ sont les x tels que $t = \gamma^{j'} \zeta - 1$ avec $\zeta^{p^n} = 1$, $j' = 0, 1, \dots, h - 1$ sauf $x = \psi_\ell y_p^{j_\ell}$. En particulier $g_\ell(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) \neq 0$, et $g_\ell(\psi_{\ell'} y_p^{j_{\ell'}}) = 0$ pour $\ell' \neq \ell$.

Quatrième étape : on pose $\beta_\ell = \frac{1}{g_\ell(\psi_\ell y_p^{j_\ell})}$. Soit $h_\ell(x) = \beta_\ell g_\ell(x)$.

La fonction h_ℓ est \mathbb{C}_p -analytique. Les zéros de h_ℓ sont les zéros de g_ℓ . De plus, $h_\ell(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) = 1$.

On désigne désormais par $\gamma_\ell = f(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) \neq 0$ les r valeurs non nulles de f données par l'hypothèse.

Cinquième étape : soit $F(x) = \sum_{\ell=1}^r \gamma_\ell h_\ell(x)$.

La fonction F est \mathbb{C}_p -analytique. Par ailleurs, pour tout entier $\ell = 1, \dots, r$, on a $F(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) = \gamma_\ell = f(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) \neq 0$.

On peut écrire $F(x) = \left[\sum_{\ell=1}^r \frac{\gamma_\ell \beta_\ell}{a_\ell(1+t) - 1} \right] \times \prod_{j'=0}^{h-1} (\log_p(1+t) - j' \log_p(\gamma))$.

Les zéros de F sont d'une part les zéros du polynôme $\sum_{\ell=1}^r \gamma_\ell \beta_\ell \prod_{\ell' \neq \ell} (a_{\ell'}(1+t) - 1)$, et d'autre part

les x tels que $t = \gamma^{j'} \zeta - 1$ avec $\zeta^{p^n} = 1$, $j' = 0, 1, \dots, h-1$ sauf $x = \psi_\ell y_p^{j_\ell}$. Enfin $|F(x)|_p = \mathcal{O}(|\log_p^h(1+t)|_p)$ lorsque $|\log_p(1+t)|_p \rightarrow +\infty$.

Sixième étape : soit $G(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$.

La fonction G est méromorphe avec des pôles simples (parmi les zéros de F), notés g_i . Pour tout $\ell = 1, \dots, r$: $G(\psi_\ell y_p^{j_\ell}) = 1$.

Lorsque $|\log_p(x)|_p \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $|\log_p(1+t)|_p \rightarrow +\infty$, $|t|_p \rightarrow 1^-$, t se rapproche du bord du disque unité U : alors on a par hypothèse $|f(x)|_p = o(|\log_p(x)|_p^h)$, mais aussi $|F(x)|_p = \mathcal{O}(|\log_p^h(1+t)|_p)$; donc $|G(x)|_p = o(1)$ ce qui entraîne que $|G(x)|_p \rightarrow 0$ lorsque $|\log_p(x)|_p \rightarrow +\infty$.

Septième étape : soit $H(x) = G(x) \times \prod_i (x - g_i)$. Alors H est \mathbb{C}_p -analytique sur le disque unité ouvert U , et s'annule partout sur le bord : $|H(x)|_p \rightarrow 0$ lorsque $|\log_p(x)|_p \rightarrow +\infty$ c'est-à-dire lorsque $|t|_p \rightarrow 1^-$.

On fixe n'importe quel disque fermé $D(O; p^\lambda) \subset U$. Rappelons le principe du maximum (voir par exemple [KoN, p.100]) :

Théorème 2.1 (Principe du maximum) : *Si une série $f(x) \in \mathbb{C}_p[[x]]$ converge sur un disque fermé $D(O; p^\lambda)$, alors le maximum $\max_{x \in D} |f(x)|_p$ est atteint sur le bord : $\max_{x \in D} |f(x)|_p = |f(x_0)|_p$ pour un x_0 tel que $|x_0|_p = p^\lambda$.*

On applique ce théorème à H : pour tout λ tel que $D(O; p^\lambda) \subset U$, il existe un x_λ avec $|x_\lambda|_p = p^\lambda$ tel que $\max_{x \in D(O; p^\lambda)} |H(x)|_p = |H(x_\lambda)|_p$.

On fait tendre le rayon p^λ vers 1^- ; on a vu plus haut que l'on a alors $|H(x)|_p \rightarrow 0$. Par ailleurs H est continue sur le disque ouvert U . On obtient donc $\max_{x \in U} |H(x)|_p = 0$, d'où $H = 0$, $G = 0$ et $f = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème d'unicité.

Dans la section 6, une autre démonstration du théorème d'unicité sera donnée, en utilisant les polygones de Newton.

3 Les polygones de Newton p -adiques

Après des rappels sur la valuation et l'ordre p -adique, on dressera un inventaire des différents polygones de Newton.

3.1 Valuation et ordre p -adique

Rappelons les définitions usuelles : $\text{ord}_p 0 = +\infty$. Pour $x \in \mathbb{Z}^\times$, $v_p(x) = \text{ord}_p x =$ le plus grand entier m tel que $p^m \mid x$. Ainsi $|p|_p = p^{-1}$ et $|x|_p = p^{-v_p x}$. Pour $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^\times$, $|x|_p = p^{\text{ord}_p a - \text{ord}_p b}$. Le corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques est le complété de \mathbb{Q} pour la norme p -adique $|\cdot|_p$. On étend enfin ord_p à \mathbb{C}_p^\times par : $\text{ord}_p x = -\log_p |x|_p$, où \log_p est le logarithme de base p sur \mathbb{R}_+^\times : $\log_p(y) = \frac{\log(y)}{\log(p)}$. Pour $x \in \mathbb{C}_p^\times$, $x = p^{v_p x} \times u$, $u \in \mathbb{C}_p^\times$, $(p, u) = 1$.

3.2 Le polygone \mathcal{P}_f^*

Yvette Amice en 1960 (voir [AmA, p.4-35]) définit, pour une série de Laurent $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$, avec des coefficients $a_n \in \mathbb{C}_p$, le polygone de Newton ¹ \mathcal{P}_f^* comme l'enveloppe convexe inférieure des points $(n; \log_p |a_n|_p) = (n; -\text{ord}_p a_n)$ pour $a_n \neq 0$ (ou par dualité : l'intersection des demi-plans supérieurs contenant ces points). En fait, il s'agit seulement de la frontière de cette enveloppe convexe. Chaque point représente le monôme (non nul) $a_n x^n$ de f . Observons que si les coefficients sont nuls au-delà (et/ou en dessous) d'un certain rang, le polygone se termine (et/ou commence) par une (deux) demi-droite(s) parallèle(s) à l'axe des y dirigée(s) vers le haut.

Exemple (\mathcal{P}_f^*) :

Pour $f(t) = 1 + pt$: les points sont $(0; 0)$ et $(1; -1)$:

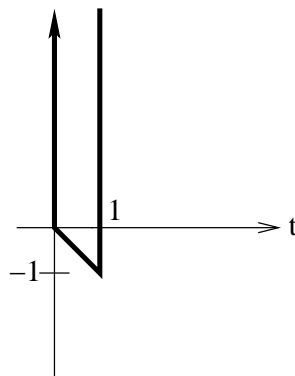


FIG. 1 – Exemple de \mathcal{P}_f^*

3.3 Le polygone \mathcal{P}_f

Michel Lazard en 1962 (voir [La, p.49]) définit, pour une série de Laurent $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$, le polygone de Newton ² \mathcal{P}_f en chaque réel t par : $\mathcal{P}_f(t) = \sup_{m \in \text{Conv}(f)} \{v(f, m) - mt\}$ où $\text{Conv}(f)$

¹Y. Amice le note $\mathcal{P}(f)$

²M. Lazard le note $Nw(f, t)$

est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ défini pour un réel m par : $m \in Conv(f) \iff \text{ord}_p a_n + nm \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow \pm\infty$; $+\infty \in Conv(f) \iff a_n = 0$ pour tout entier $n < 0$; $-\infty \in Conv(f) \iff a_n = 0$ pour tout entier $n > 0$. De plus, $v(f, m) \in \overline{\mathbb{R}}$ est défini pour un réel m par : $v(f, m) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \{\text{ord}_p a_n + nm\}$; et si $\pm\infty \in Conv(f)$, $v(f, \pm\infty) = \text{ord}_p a_0$.

Sur l'intervalle $Conv(f)$, les fonctions $t \mapsto n(f, t) = \min\{i \in \mathbb{Z}, v(f, t) = \text{ord}_p a_i + it\}$ et $t \mapsto N(f, t) = \max\{i \in \mathbb{Z}, v(f, t) = \text{ord}_p a_i + it\}$ sont décroissantes.

De plus, sur l'intervalle $Conv(f) \cap \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto v(f, t)$ est concave. Sa dérivée à droite est égale à $n(f, t)$, sa dérivée à gauche est égale à $N(f, t)$.

Enfin sur chaque segment (éventuellement infini) $[n(f, \mu); N(f, \mu)]$, $\mathcal{P}_f(t) = v(f, \mu) - \mu t$.

Exemple (\mathcal{P}_f) :

Pour $f(t) = 1 + pt$: les points sont $(0; 0)$, $(1; -1)$ et $(n; +\infty)$ pour les autres $n \in \mathbb{Z}$:

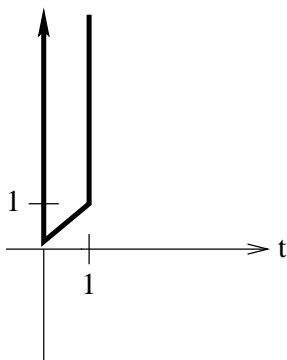


FIG. 2 – Exemple de \mathcal{P}_f

Remarque : On pourra trouver sur le site de Michael Filaseta ([Fi]) le tracé immédiat de ce polygone \mathcal{P}_f pour n'importe quel polynôme à coefficients entiers et n'importe quel nombre premier p .

Yvette Amice en 1975 (voir [AmN, p.122]), montre que \mathcal{P}_f ³ est la frontière de l'enveloppe convexe inférieure des points $(n; v_p(a_n))$ c'est-à-dire $(n; \text{ord}_p a_n)$, pour tous les $n \in \mathbb{Z}$ (la frontière de l'intersection des demi-plans supérieurs contenant ces points)⁴.

Neal Koblitz en 1977 (voir [KoN, p.89]) reprend cette idée pour un polynôme de terme constant 1 : $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^N a_n x^n$, le polygone de Newton \mathcal{P}_f est l'enveloppe convexe des points $(n; \text{ord}_p a_n)$ pour $a_n \neq 0$

Il montre que \mathcal{P}_f est le polygone le plus haut joignant le point $(0; 0)$ au point $(N; \text{ord}_p a_N)$ et qui passe par ou au-dessus des points $(n; \text{ord}_p a_n)$.

Il donne aussi une approche géométrique : on peut construire \mathcal{P}_f par rotation d'une demi-droite d'origine $(0; 0)$ vers le bas, autour de $(0; 0)$, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce qu'elle atteigne un point $(n; \text{ord}_p a_n)$ (ou plusieurs tels points alignés). Le premier segment de \mathcal{P}_f joint alors $(0; 0)$ à $(n_1; \text{ord}_p a_{n_1})$ avec n_1 le plus grand de ces n . En continuant à

³Y. Amice le note $\mathcal{P}(f, t)$
⁴confusion dans le texte original

tourner, la demi-droite passe par d'autres points $(n; \text{ord}_p a_n)$, et le deuxième segment de \mathcal{P}_f joint $(n_1; \text{ord}_p a_{n_1})$ à $(n_2; \text{ord}_p a_{n_2})$. . .

Et ensuite [KoN, p.91] pour une série de terme constant 1 : $f(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n x^n$, le polygone

de Newton \mathcal{P}_f est défini par passage à la limite : $\mathcal{P}_f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_{f_N}$ où $f_N = 1 + \sum_{n=1}^N a_n x^n$.

Neal Koblitz en 1980 (voir [KoS, p.19]) généralise le polygone de Newton \mathcal{P}_f au cas d'un polynôme de terme constant quelconque : pour $f(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$, \mathcal{P}_f est ⁵ l'enveloppe convexe des points $(n; \text{ord}_p a_n)$ pour les $0 \leq n \leq d$ tels que $a_n \neq 0$.

Et de même pour une série $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, \mathcal{P}_f est l'enveloppe convexe des points $(n; \text{ord}_p a_n)$ pour les n entiers tels que $a_n \neq 0$.

3.4 Le polygone $\tilde{\mathcal{P}}_f$

Mikhail M. Vishik en 1976 (voir [Vi, p.219]) définit, pour une série $f(u) = \sum_{n \geq 0} a_n (u-1)^n$ définie sur le disque unité décalé $T = \{u \in \mathbb{C}_p^\times, |u-1|_p < 1\}$, le polygone de Newton ⁶ $\tilde{\mathcal{P}}_f$ pour chaque réel t par : $\tilde{\mathcal{P}}_f(t) = \log_p \sup_{|u-1|_p < p^t} |f(u)|_p$.

Il prouve que sur chaque segment l'ordonnée y des points vérifie la relation : $y = \log_p |a_n|_p + nt$ (ou $y = -\text{ord}_p a_n + nt$) pour tous les entiers n tels que $a_n (u-1)^n$ est un terme dominant de f , c'est-à-dire le maximum en module.

En fait Y. Amice l'étudie déjà en 1960 [AmA, p.4-53] mais ne parle pas de polygone de Newton ⁷ : pour un polynôme $f(x) = \sum_{n=0}^s a_n x^n$, $\tilde{\mathcal{P}}_f(t) = \max_n \{-\text{ord}_p a_n + nt\}$, et [AmA, p.4-56]

pour un quotient de deux polynômes P et Q , $f = \frac{P}{Q}$, $\tilde{\mathcal{P}}_f(t) = \tilde{\mathcal{P}}_P(t) - \tilde{\mathcal{P}}_Q(t)$.

Exemple ($\tilde{\mathcal{P}}_f$) :

Pour $f(t) = 1 + pt$: les équations des segments sont $y = 0$ et $y = -1 + t$: $\tilde{\mathcal{P}}_f(t) = \max\{0; -1 + t\}$:

⁵N. Koblitz le note M_f

⁶M. M. Vishik le note $M_f(t)$

⁷Y. Amice le note $\mu_f(t)$

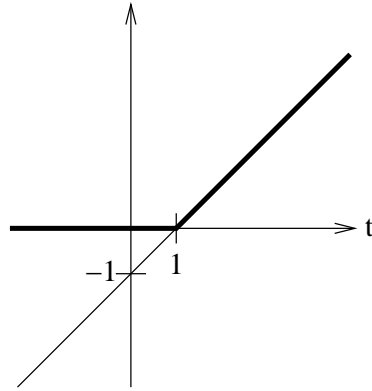


FIG. 3 – Exemple de $\tilde{\mathcal{P}}_f$

3.5 Le polygone $\tilde{\mathcal{P}}_f$

Ha Huy Khoai en 1980 (voir [Kh, p.79]) définit, pour une série $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sur le disque $U = \{x \in \mathbb{C}_p, |x|_p < 1\}$, le polygone de Newton ⁸ $\tilde{\mathcal{P}}_f$ en chaque réel t comme la frontière de l'intersection des demi-plans $y \leq \text{ord}_p a_n + nt$, c'est-à-dire $\tilde{\mathcal{P}}_f(t) = \min_n \{\text{ord}_p a_n + nt\}$.

Exemple ($\tilde{\mathcal{P}}_f$) :

Pour $f(t) = 1 + pt$: $\tilde{\mathcal{P}}_f(t) = \min\{0; 1 + t\}$:

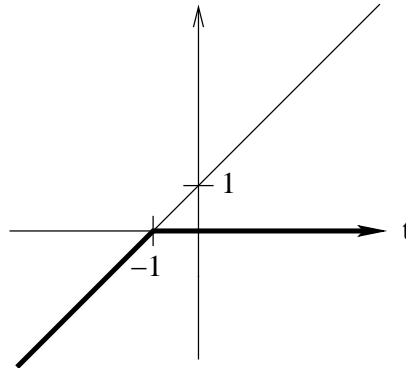


FIG. 4 – Exemple de $\tilde{\mathcal{P}}_f$

Remarque : Alexei A. Panchishkin (voir [Co-Pa, p.20]) cite trois catégories de polygones de Newton : $(n; \text{ord}_p a_n)$: c'est \mathcal{P}_f .

$\min_n \{\text{ord}_p a_n + nt\}$: c'est $\tilde{\mathcal{P}}_f$.

Et enfin on trouve $\tilde{\mathcal{P}}_f$ ⁹ : $\log_p \sup_{|x-1|_p < p^t} |f(x)|_p$, avec les segments d'équation $y = \log_p |a_n|_p + nt$ c'est-à-dire $y = -\text{ord}_p a_n + nt$.

⁸H. H. Khoai le note $v(f, t)$

⁹et non $\tilde{\mathcal{P}}_f$ comme mentionné...

4 Liens entre les différents polygones de Newton p -adiques

Tout d'abord il existe un lien évident entre \mathcal{P}_f^* et \mathcal{P}_f : les deux polygones sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, mis à part pour les éventuelles extrémités verticales.

Ensuite, on a un lien très simple entre $\tilde{\mathcal{P}}_f$ et $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$. En effet : $\tilde{\mathcal{P}}_f(-t) = \max_n \{-\text{ord}_p a_n - nt\} = -\min_n \{\text{ord}_p a_n + nt\} = -\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(t)$. Par conséquent les deux polygones $\tilde{\mathcal{P}}_f$ et $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ sont symétriques par rapport à l'origine, les abscisses de leurs sommets sont opposées, et leurs pentes sont les mêmes.

Le lien entre \mathcal{P}_f et $\tilde{\mathcal{P}}_f$ est plus fin : l'abscisse n d'un sommet de \mathcal{P}_f correspond à la pente n d'un segment de $\tilde{\mathcal{P}}_f$ ou $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$; la pente t d'un segment de \mathcal{P}_f correspond à l'abscisse t d'un sommet de $\tilde{\mathcal{P}}_f$ ou à l'opposé de l'abscisse d'un sommet de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$.

H. H. Khoai [Kh] appelle points critiques de f les abscisses des sommets de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$; Y. Amice [AmA] appelle valeurs exceptionnelles de f les abscisses des sommets de $\tilde{\mathcal{P}}_f$.

5 Liens entre les zéros d'une série et ses polygones de Newton p -adiques

Proposition 5.1 : *Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$, on a : $\text{ord}_p f(x) \geq \tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(\text{ord}_p x)$, et si $\text{ord}_p x$ n'est pas l'abscisse d'un sommet de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$, alors $\text{ord}_p f(x) = \tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(\text{ord}_p x)$.*

Corollaire 5.2 : *Si x est un zéro de f , alors $\text{ord}_p x$ est l'abscisse d'un sommet de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ ($-\text{ord}_p x$ est la pente d'un segment de \mathcal{P}_f).*

Proposition 5.3 : *Le nombre de zéros de f d'ordre p -adique supérieur ou égal à t , comptés avec multiplicité, est égal à la pente de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ à gauche du sommet d'abscisse t (ou encore égal à l'abscisse du sommet de droite sur le segment de \mathcal{P}_f de pente $-t$).*

Corollaire 5.4 : *Le nombre de zéros de f d'ordre p -adique t , comptés avec multiplicité, est égal à la différence des pentes de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ au sommet d'abscisse t (ou encore égal à la différence entre les abscisses des extrémités du segment de \mathcal{P}_f de pente $-t$; on dit parfois la longueur horizontale du segment de \mathcal{P}_f de pente $-t$).*

5.1 Démonstration de la proposition 5.1

Soit $x \in \mathbb{C}_p$ et soit $t = \text{ord}_p x : |x|_p = p^{-t}$. Pour $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, on a $|f(x)|_p \leq \max_n |a_n x^n|_p$, avec égalité si ce maximum n'est atteint que pour un seul indice.

Soit n_0 un entier qui réalise ce maximum : pour tout n , $|a_n x^n|_p \leq |a_{n_0} x^{n_0}|_p$, autrement dit : $p^{-\text{ord}_p a_n - tn} \leq p^{-\text{ord}_p a_{n_0} - tn_0}$; donc $\text{ord}_p a_n + tn \geq \text{ord}_p a_{n_0} + tn_0$ et par conséquent n_0 réalise le min de $\{\text{ord}_p a_n + tn\}$ et on a $\text{ord}_p a_{n_0} + tn_0 = \tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(t)$.

Par ailleurs : $|f(x)|_p \leq |a_{n_0} x^{n_0}|_p$, c'est-à-dire $p^{-\text{ord}_p f(x)} \leq p^{-\text{ord}_p a_{n_0} - tn_0}$.

Finalement on obtient : $\text{ord}_p f(x) \geq \tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(t)$.

Supposons maintenant que t ne soit pas l'abscisse d'un sommet de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$; alors on sait que $\min_n \{\text{ord}_p a_n + tn\}$ est atteint pour un seul indice, donc $\max_n |a_n x^n|_p$ l'est aussi et on a l'égalité

$|f(x)|_p = \max_n |a_n x^n|_p$; d'où pour les exposants : $\text{ord}_p f(x) = \min_n \{\text{ord}_p a_n + tn\}$ et on a bien $\text{ord}_p f(x) = \tilde{\mathcal{P}}_f(t)$.

Remarque 5.5 : Parmi les valeurs de n qui réalisent le $\max_n |a_n x^n|_p$, la plus petite et la plus grande donnent les pentes de $\tilde{\mathcal{P}}_f$ autour de ce sommet, la plus grande pente étant à gauche.

5.2 Démonstration du corollaire 5.2

Si x est un zéro de f , alors $\text{ord}_p f(x) = \text{ord}_p 0 = +\infty$ donc on n'est pas dans le cas de l'égalité de la proposition 5.1, et t est l'abscisse d'un sommet de $\tilde{\mathcal{P}}_f$.

5.3 Démonstration de la proposition 5.3 dans le cas d'un polynôme

Dans le cas où f est un polynôme, on peut écrire $f(X) = \lambda \prod_j (X - z_j)$, les z_j étant les zéros de f . On choisit $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $t' = \text{ord}_p x$ ne soit pas l'abscisse d'un sommet de $\tilde{\mathcal{P}}_f$. On peut alors appliquer la proposition 5.1 : $\tilde{\mathcal{P}}_f(t') = \text{ord}_p f(x) = \text{ord}_p \lambda + \sum_j \text{ord}_p(x - z_j)$.

Fixons j . On peut aussi appliquer la proposition 5.1 à $\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j} : \tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}(t') = \text{ord}_p(x - z_j)$ et l'égalité précédente devient : $\tilde{\mathcal{P}}_f(t') = \text{ord}_p \lambda + \sum_j \tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}(t')$. La pente de $\tilde{\mathcal{P}}_f$ est donc égale à la somme des pentes des $\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}$.

$\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}(t') = \min_n \{\text{ord}_p a_n + nt'\} = \min\{\text{ord}_p z_j; t'\}$. Le polygone $\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}$ est donc constitué de deux segments, de pentes 1 et 0.

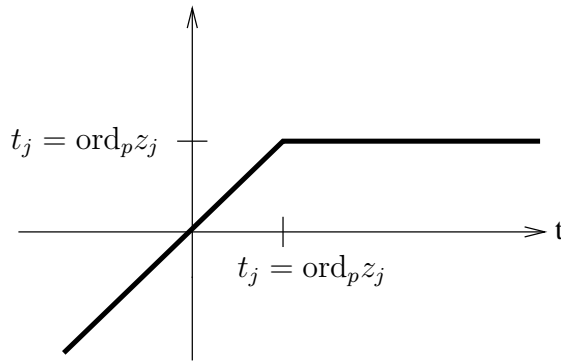


FIG. 5 - $\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}$

On classe maintenant les abscisses des sommets de $\tilde{\mathcal{P}}_f$ (les ordres p -adiques des zéros de f), sans écrire les répétitions : $t_0 > t_1 > \dots$

A chaque $t_i = \text{ord}_p(z_i)$ correspondent deux pentes :

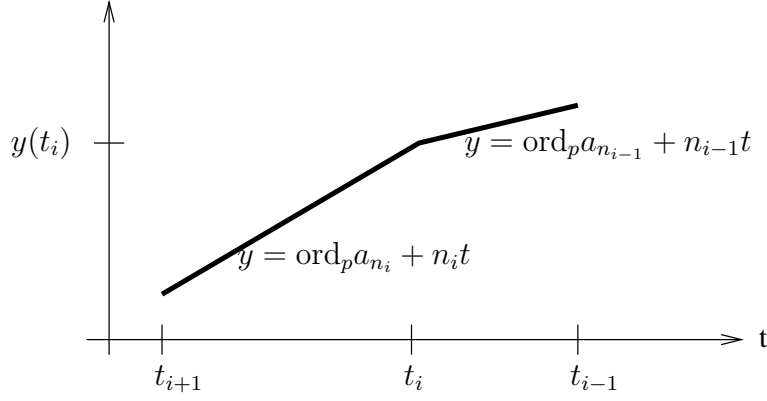


FIG. 6 – Un sommet de $\tilde{\mathcal{P}}_f$

On a pris t' non égal à l'abscisse d'un sommet donc il existe un i tel que $t_{i+1} < t' < t_i$. Donc la pente de $\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}$ vaut n_i .

De plus, pour tout $j \geq i + 1$, $t' > t_j$ donc $\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}(t') = \text{ord}_p(z_j)$ et la pente est nulle; pour tout $j \leq i$, $t' < t_j$ donc $\tilde{\mathcal{P}}_{X-z_j}(t') = t'$ et la pente vaut 1.

Par conséquent, n_i est égal au nombre de z_j tels que $t_j \geq t_i$, soit encore $\text{ord}_p(z_j) \geq t_i$; autrement dit, le nombre de zéros de f d'ordre p -adique supérieur ou égal à t_i , comptés avec multiplicité, est égal à la pente de $\tilde{\mathcal{P}}_f$ à gauche du sommet d'abscisse t_i .

5.4 Démonstration du corollaire 5.4 dans le cas d'un polynôme

C'est immédiat :

n_i est égal au nombre de z_j tels que $\text{ord}_p(z_j) \geq t_i$ et n_{i-1} est égal au nombre de z_j tels que $\text{ord}_p(z_j) \geq t_{i-1}$; $n_i - n_{i-1}$ est donc bien égal au nombre de z_j tels que $\text{ord}_p(z_j) = t_i$.

Remarque :

On peut aussi calculer sur $\tilde{\mathcal{P}}_f$ l'ordonnée de t_i : $y(t_i) = \text{ord}_p a_{n_i} + n_i t_i = \text{ord}_p a_{n_{i-1}} + n_{i-1} t_i$ d'où $n_i - n_{i-1} = \frac{\text{ord}_p a_{n_{i-1}} - \text{ord}_p a_{n_i}}{t_i}$.

Ce que l'on retrouve sur \mathcal{P}_f :

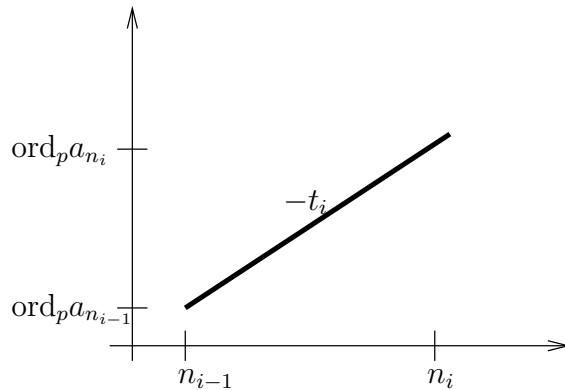


FIG. 7 – Un segment de \mathcal{P}_f

$n_i - n_{i-1}$ est la différence des abscisses des sommets, donc le quotient de la différence des ordonnées des sommets par la pente : $n_i - n_{i-1} = \frac{\text{ord}_p a_{n_i} - \text{ord}_p a_{n_{i-1}}}{-t_i}$.

5.5 Fin des démonstrations dans le cas général

Dans le cas d'une série f , on se contente d'appliquer le théorème de préparation de Weierstrass (voir [KoN, Lemme 5 p.93 ou p.97] ou encore [KoS, p.21]) :

Lemme 5.6 : *Soit b la dernière pente de \mathcal{P}_f , alors le rayon de convergence de f est p^b (si b est infinie, f est un polynôme et converge sur \mathbb{C}_p).*

Théorème 5.7 : *Si f converge sur le disque fermé $D(p^\lambda)$ de rayon p^λ , alors il existe une série inversible g convergeant sur $D(p^\lambda)$, et un polynôme h tels que $f = \frac{h}{g}$ sur $D(p^\lambda)$, et de plus les polygones de Newton \mathcal{P}_f et \mathcal{P}_h coïncident pour $t \leq N$; de plus h est de degré inférieur ou égal à N , et N est défini de la manière suivante :*

N est l'abscisse du sommet le plus à droite sur les segments de \mathcal{P}_f de pente inférieure ou égale à λ , si ce nombre N est fini ;

Si ce n'est pas le cas, λ est le dernier et est infini, et qu'il n'y a qu'un nombre fini de points $(n; \text{ord}_p a_n)$ sur ce segment et l'on pose $N =$ le plus grand de ces n .

$\mathcal{P}_f = \mathcal{P}_h$ (pour $t \leq N$), et les résultats 5.3 et 5.4 ont été démontrés précédemment pour le polynôme h ; d'où ces mêmes résultats pour f .

6 Le Lemme de Vishik

Rappelons ici le résultat énoncé par Vishik [Vi, Lemme 2.10] :

Lemme (Vishik) : *F une fonction \mathbb{C}_p -analytique sur X_S , de type $o(\log^h)$ avec $F(\chi y_p^j) = 0$ pour tout $\chi \in X_p^{\text{tors}}$ et $j = 0, \dots, h-1$. Alors $F = 0$.*

La démonstration donnée par Vishik est très succincte : *On peut se ramener à une fonction F sur le disque $T = \{z \in \mathbb{C}_p^\times, |z-1|_p < 1\}$, avec $F(\zeta \gamma^j) = 0$ pour tout ζ racine p^n -ième de 1 et $j = 0, \dots, h-1$, où $\gamma = 1+p$, $\langle \gamma \rangle = \Gamma$. On note $\tilde{\mathcal{P}}_F$ le polygone de Newton de F , et $G = \log_p^h$. Supposons $F \neq 0$. Alors $\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} \geq \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_G(t)}{dt}$, ce qui contredit l'hypothèse sur la croissance de F . Le lemme est démontré.*

Nous allons dans un premier temps étudier le polygone de Newton du logarithme p -adique. Puis nous établirons l'inégalité sur les pentes donnée ci-dessus. Ensuite nous expliquerons la contradiction qui en découle. Enfin nous appliquerons ce lemme à la démonstration du théorème d'unicité 1.4.

6.1 Le polygone de Newton du logarithme p -adique

Le logarithme p -adique est défini pour $|x|_p < 1$ par : $f(x) = \log_p(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \geq 1$.

Examinons tout d'abord le polygone de Newton \mathcal{P}_f , qui est la frontière de l'enveloppe convexe supérieure des points $(n; \text{ord}_p a_n)$ (voir 3.3). On a : $\text{ord}_p a_n = -\text{ord}_p n$. On peut écrire $n = p^{\text{ord}_p n} \times u$ avec $(p, u) = 1$. Pour $k \geq 0$ fixé, si $u > 1$, les points $(p^k u; -k)$ sont à droite de $(p^k; -k)$ et plus haut que $(p^{k+1}; -k+1)$. Donc les sommets du polygone \mathcal{P}_f sont les points $(p^k; -k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

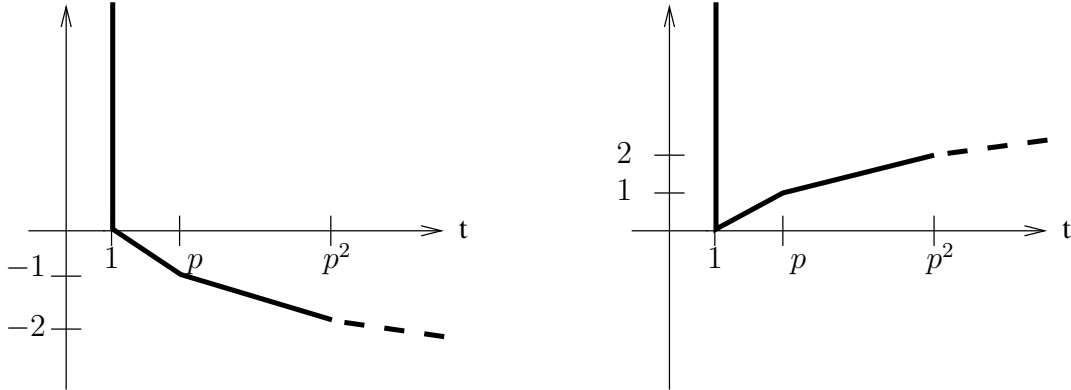


FIG. 8 - Polygones \mathcal{P}_f et \mathcal{P}_f^* pour $f(x) = \log_p(1+x)$

On peut calculer la pente de \mathcal{P}_f à droite de $(p^k; -k)$: $\frac{-1}{p^{k+1} - p^k} = \frac{-1}{\varphi(p^{k+1})}$, pour $k \in \mathbb{N}$.

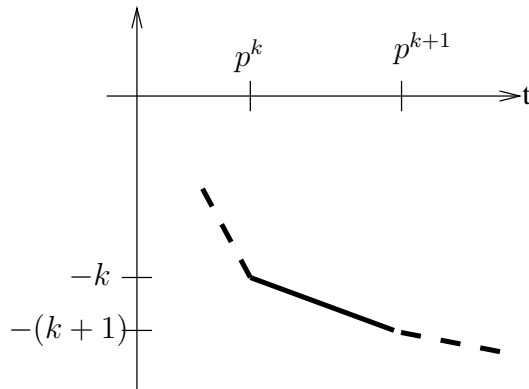


FIG. 9 - Pente de \mathcal{P}_f pour $f(x) = \log_p(1+x)$

Examinons maintenant le polygone $\tilde{\mathcal{P}}_f$, défini comme la frontière de l'intersection des demi-plans $y \leq \text{ord}_p a_n + nt$, c'est-à-dire $\tilde{\mathcal{P}}_f(t) = \min_n \{\text{ord}_p a_n + nt\}$ (voir 3.5).

Les sommets du polygone \mathcal{P}_f sont les points $(p^k; -k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, et les pentes de \mathcal{P}_f sont les $\frac{-1}{\varphi(p^k)}$ pour $k \geq 1$. D'après les liens entre les différents polygones de Newton (voir section 4), on

en déduit que les pentes du polygone $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ sont les p^k pour $k \in \mathbb{N}$, et que les abscisses des sommets de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ sont les $\frac{1}{\varphi(p^k)}$ pour $k \geq 1$.

Un segment de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ de pente $n = p^k$ a pour équation : $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(t) = \text{ord}_p a_n + nt$ c'est-à-dire $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(t) = -k + p^k t$. On calcule $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f\left(\frac{1}{\varphi(p^k)}\right) = -k + \frac{p^k}{\varphi(p^k)} = -k + \frac{p}{p-1}$. On obtient ainsi les coordonnées des sommets du polygone $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f : \left(\frac{1}{\varphi(p^k)}; -k + \frac{p}{p-1}\right)$ pour $k \geq 1$.

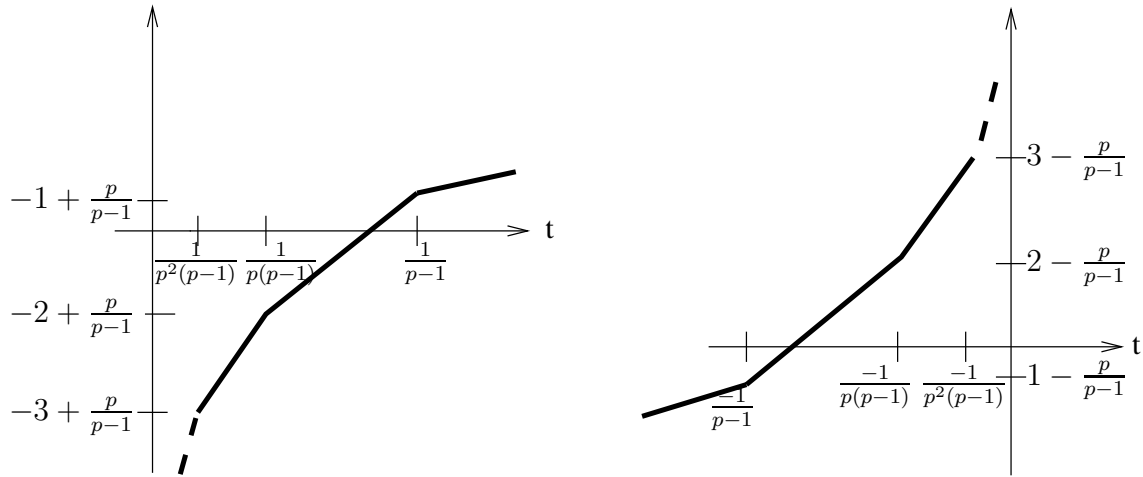


FIG. 10 – Polygones $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ et $\tilde{\mathcal{P}}_f$ pour $f(x) = \log_p(1+x)$

On connaît les zéros de la fonction $g(x) = \log_p(x)$: ce sont les racines de l'unité : $x = \zeta x'$, avec ζ racine p^n -ième de 1 ($\zeta^{p^n} = 1$), et x' racine de 1 d'ordre premier à p . Les zéros de g sur $U = \{x \in \mathbb{C}_p, |x|_p < 1\}$ sont ainsi les ζ , racines p^n -ièmes de 1. Donc ce sont les zéros de f sur $T = \{x \in \mathbb{C}_p, |x-1|_p < 1\}$ avec la notation de Vishik.

Appliquons maintenant les corollaires 5.2 et 5.4 qui donnent le lien entre les zéros de f et leurs ordres p -adiques :

Les zéros de f ont pour ordre p -adique les abscisses des sommets de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f : \frac{1}{\varphi(p^k)}$, $k \geq 1$. Et pour chaque k , le nombre de zéros de f d'ordre p -adique $\frac{1}{\varphi(p^k)}$ est égal à la différence des pentes de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f$ au sommet d'abscisse $\frac{1}{\varphi(p^k)}$: $p^k - p^{k-1} = \varphi(p^k)$.

6.2 L'inégalité sur les pentes

Soit $G(x) = \log_p^h(x) = f^h(x)$ avec la notation de Vishik. On a :

$$\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_G(t) = \log_p \sup_{|x-1|_p < p^t} |f^h(x)|_p = \log_p \left(\sup_{|x-1|_p < p^t} |f(x)|_p \right)^h = h \tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_f(t).$$

Donc en particulier les pentes de $\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_G$ sont les hp^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Prenons t qui ne soit l'abscisse d'un sommet ni de $\tilde{\mathcal{P}}_F$ ni de $\tilde{\mathcal{P}}_G$. Calculons

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} = \text{pente de } \tilde{\mathcal{P}}_F \text{ en } t = \text{pente de } \tilde{\mathcal{P}}_F \text{ en } -t.$$

Si l'on note t_j les abscisses des sommets de $\tilde{\mathcal{P}}_F$ (voir section 5.3), alors il existe un i tel que $t_{i+1} < -t < t_i$, donc $-t_i < t < -t_{i+1}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} &= \text{pente de } \tilde{\mathcal{P}}_F \text{ à gauche du sommet d'abscisse } t_i \\ &= \text{le nombre de zéros de } F \text{ d'ordre } p\text{-adique } \geq t_i \\ &= \text{le nombre de zéros de } F \text{ d'ordre } p\text{-adique } > t_{i+1} \\ &= \#\{u \mid F(u) = 0, \text{ord}_p(u) > t_{i+1}\} \end{aligned}$$

Suivons les notations de Vishik : $1+x = u$, $\tilde{\mathcal{P}}_F(t) = \log_p \sup_{|u-1|_p < p^t} |F(u)|_p$ et $t(u) = \log_p |u-1|_p$.

On obtient :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} = \#\{u \mid F(u) = 0, t(u) < -t_{i+1}\}.$$

Par hypothèse, parmi les zéros de F , il y a les $\zeta\gamma^j$ pour tous les $\zeta^{p^n} = 1$ et $j = 0, \dots, h-1$ (où $\gamma = 1+p$, $\langle \gamma \rangle = \Gamma$). Donc parmi les zéros de F il y a tous les zéros des fonctions $u \mapsto \log_p(u\gamma^{-j})$, pour $j = 0, \dots, h-1$. D'où :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} \geq \#\{u \mid \log_p(u\gamma^{-j}) = 0, t(u) < -t_{i+1}, j = 0, \dots, h-1\}.$$

On effectue un changement de variable :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} \geq \#\{u \mid \log_p(u) = 0, t(u\gamma^j) < -t_{i+1}, j = 0, \dots, h-1\}.$$

Fixons j . On a $t(u\gamma^j) = \log_p |u\gamma^j - 1|_p$. On écrit : $u\gamma^j - 1 = (u-1)\gamma^j + (\gamma^j - 1)$, ainsi $|u\gamma^j - 1|_p \leq \max\{|u-1|_p |\gamma|_p^j; |\gamma^j - 1|_p\}$.

Or $\gamma = 1+p$ est un entier premier avec p , donc $|\gamma|_p = 1$. De plus, $\gamma^j - 1 = (1+p)^j - 1$ est un entier divisible par p , donc $|\gamma^j - 1|_p \leq |p|_p$, c'est-à-dire $|\gamma^j - 1|_p \leq p^{-1}$. Ce qui entraîne : $\max\{|u-1|_p |\gamma|_p^j; |\gamma^j - 1|_p\} = \max\{|u-1|_p; p^{-1}\}$.

Par ailleurs $\log_p(u) = 0$, et on a démontré (voir 6.1) que les zéros de la fonction f définie par $f(x) = \log_p(1+x)$, ont pour ordre p -adique $\frac{1}{\varphi(p^k)}$. Donc on peut calculer $|u-1|_p = p^{\frac{1}{\varphi(p^k)}} = p^{\frac{1}{p^k-1(p-1)}} \geq p^{-1}$. D'où $\max\{|u-1|_p; p^{-1}\} = |u-1|_p$, $\log_p |u\gamma^j - 1|_p \leq \log_p |u-1|_p$, et $t(u\gamma^j) \leq t(u)$.

Reprenons le calcul des pentes :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} &\geq \#\{u \mid \log_p(u) = 0, t(u\gamma^j) \leq t(u) < -t_{i+1}, j = 0, \dots, h-1\} \\ &\quad + \#\{u \mid \log_p(u) = 0, t(u\gamma^j) < -t_{i+1} \leq t(u), j = 0, \dots, h-1\}. \end{aligned}$$

A fortiori :

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} \geq \#\{u \mid \log_p(u) = 0, t(u\gamma^j) \leq t(u) < -t_{i+1}, j = 0, \dots, h-1\}.$$

L'inégalité $t(u\gamma^j) \leq t(u)$ est toujours vérifiée, donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} &\geq h \times \#\{u \mid \log_p(u) = 0, t(u) < -t_{i+1}\} \\ \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} &\geq h \times \#\{u \mid \log_p(u) = 0, \text{ord}_p(u) > t_{i+1}\} \\ \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} &\geq h \times \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_{\log_p}(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_F(t)}{dt} &\geq \frac{d\tilde{\mathcal{P}}_G(t)}{dt} \quad \text{où } G(x) = \log_p^h(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\tilde{\mathcal{P}}_F$ croît plus vite que $\tilde{\mathcal{P}}_G$.

6.3 Fin de la démonstration du Lemme de Vishik

A multiplication par une constante près, on peut supposer que le premier sommet de $\tilde{\mathcal{P}}_F$ est au-dessus de celui de $\tilde{\mathcal{P}}_G$. On a démontré que la pente de $\tilde{\mathcal{P}}_F$ est plus forte que celle de $\tilde{\mathcal{P}}_G$. On a alors pour tout t : $\tilde{\mathcal{P}}_F(t) \geq \tilde{\mathcal{P}}_G(t)$, c'est-à-dire $\log_p \sup_{|u-1|_p < p^t} |F(u)|_p \geq \log_p \sup_{|u-1|_p < p^t} |G(u)|_p$, donc

$$\sup_{|u-1|_p < p^t} |F(u)|_p \geq \sup_{|u-1|_p < p^t} |G(u)|_p.$$

F et G sont \mathbb{C}_p -analytiques, donc par le principe du maximum (voir théorème 2.1), le sup est atteint sur le bord (pour tout t) : il existe u_1 et u_2 tels que $\sup_{|u-1|_p < p^t} |F(u)|_p = |F(u_1)|_p$, avec $|u_1 - 1|_p = p^t$, et $\sup_{|u-1|_p < p^t} |G(u)|_p = |G(u_2)|_p$, avec $|u_2 - 1|_p = p^t$. On a alors : $|F(u_1)|_p \geq |G(u_2)|_p$.

On a aussi supposé que $F = o(G)$: $F = G \times \varepsilon$, $|\varepsilon(u)|_p \rightarrow 0$ quand $|u - 1|_p \rightarrow 1^-$ ($t \rightarrow 0^-$). Donc il existe un t tel que pour tout u vérifiant $|u - 1|_p \geq p^t$: $|\varepsilon(u)|_p < \frac{1}{2}$, $|F(u)|_p < \frac{1}{2}|G(u)|_p$.

En particulier :

$$|F(u_1)|_p < \frac{1}{2}|G(u_1)|_p \leq \frac{1}{2} \sup_{|u-1|_p < p^t} |G(u)|_p = \frac{1}{2}|G(u_2)|_p \leq \frac{1}{2}|F(u_1)|_p,$$

ce qui est la contradiction recherchée, et ce qui termine la preuve du Lemme de Vishik.

6.4 Démonstration du théorème d'unicité

Le Lemme de Vishik admet les deux corollaires suivants :

Corollaire 6.1 : *Si F est \mathbb{C}_p -analytique de type $o(\log^h)$ avec $F(\chi y_p^j) = 0$ pour tout $\chi \in X_p^{\text{tors}}$ et $j = 0, \dots, h-1$ sauf un nombre fini s de couples $(\chi, j) : \chi y_p^j \neq \psi_{\ell} y_p^{j_{\ell}}, \ell = 1, \dots, s$, alors $F = 0$.*

Preuve : On construit $F_1(X) = F(x) \times \prod_{\ell=1}^s (X - \psi_{\ell} y_p^{j_{\ell}})$ et on applique le Lemme de Vishik à F_1 : on obtient $F_1 = 0$ et par conséquent $F = 0$.

Comme dans la première démonstration du théorème d'unicité (section 2), si $\tilde{\Phi}$ est une h -mesure admissible, on sait que $\tilde{\Phi}$ est déterminée par la donnée de toutes les valeurs $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi(y)y_p^j)$ pour $\chi \in X_p^{\text{tors}}$ et $j = 0, 1, \dots, h-1$; de plus $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}$ est \mathbb{C}_p -analytique sur le disque ouvert, et $|\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(x)|_p = o(|\log_p(x)|_p^h)$ lorsque $|\log_p(x)|_p \rightarrow +\infty$.

Si $\tilde{\Phi}_1$ est une h -mesure admissible sur X_p donnée par des $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}_1}(\chi y_p^j)$, et si les valeurs $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi(y)y_p^j)$ et $\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}_1}(\chi y_p^j)$ coïncident sauf pour un nombre fini r de couples (χ, j) , on pose $f = \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}} - \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}_1}$. On a alors f \mathbb{C}_p -analytique, avec $|f(x)|_p = o(|\log_p(x)|_p^h)$ lorsque $|\log_p(x)|_p \rightarrow +\infty$, et $f(\chi(y)y_p^j) = 0$ sauf pour un nombre fini r de couples $(\chi, j) : \chi y_p^j \neq \psi_\ell y_p^{j_\ell}, \ell = 1, \dots, r$.

Le corollaire 6.1 ci-dessus permet d'établir que f est identiquement nulle. On en déduit alors :

Théorème d'unicité (1.4) : *Soit $S = \{p\}$, et soit $\tilde{\Phi}$ une h -mesure admissible sur X_p à valeurs dans \mathbb{C}_p . Alors $\tilde{\Phi}$ est déterminée par les valeurs*

$$\mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(\chi(y)y_p^j) = \int_{Y_S} \chi(y)y_p^j d\tilde{\Phi}(y) \in \mathbb{C}_p, \text{ où } j = 0, 1, \dots, h-1, \text{ et } \chi \in X_p^{\text{tors}}$$

sauf un nombre fini s de couples $(\chi, j) : \chi y_p^j \neq \psi_\ell y_p^{j_\ell}, \ell = 1, \dots, s$.

On a ainsi une deuxième démonstration du théorème d'unicité.

6.5 Perspectives

Il serait intéressant d'étendre ce résultat à des mesures p -adiques admissibles sur le groupe $\mathbb{Z}_S^\times = \varprojlim_{M|S(M) \subset S} (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times \cong \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}_{p_i}^\times$ pour un nombre premier p et $S = \{p_1, \dots, p_r\}$ un ensemble fini de nombres premiers contenant $p = p_1$, en termes de caractères de Dirichlet de conducteur S -complet.

La difficulté provient du fait que dans ce cas, l'ensemble des caractères dont le conducteur n'est pas S -complet n'est pas fini, bien qu'il reste beaucoup plus petit que l'ensemble des caractères de conducteur S -complet.

C'est pourquoi on peut espérer utiliser un raisonnement par récurrence.

De plus, l'espace à considérer naturellement est celui formé par les caractères du groupe adélique $X_{\mathbb{A}} = \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ (voir à ce sujet [Pu]).

Alors $X_S = \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_S^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ est une partie de $X_{\mathbb{A}}$ (par la projection $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{Z}_S^\times$). On peut aussi montrer que $X_{\mathbb{A}}$ est la limite inductive des $X_S : X_{\mathbb{A}} = \varprojlim_S X_S$.

Enfin tous ces objets apparaissent dans la théorie des corps de nombres algébriques : voir par exemple l'article de Deligne et Ribet [De-Ri] pour les corps totalement réels, ou celui de Katz [Ka] sur les fonctions p -adiques de type CM .

Bibliographie

- [AmA] Yvette AMICE, *Analyse p -adique*, Séminaire Delange-Pisot 4 (1959-1960) 4-01–4-63.
- [AmI] Yvette AMICE, *Interpolation p -adique*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964) 117–180.
- [AmN] Yvette AMICE, *Les nombres p -adiques*, Presses universitaires de France (1975).
- [AV] Yvette AMICE, Jacques VÉLU, *Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke*, Soc. Math. France, Astérisque **24–25** (1975) 119–131.
- [Bo] Ranko BOJANIC, *A simple proof of Mahler's theorem on approximation of continuous functions of a p -adic variable by polynomials*, J. Number Theory **6** (1974) 412–415.
- [Co-Pa] Michel COURTIEU, Alexei A. PANCHISHKIN, *Non archimedean L -functions and arithmetical Siegel modular forms (2nd ed.)*, Lect. Notes in Math. **1471** Springer (2004).
- [De-Ri] Pierre DELIGNE, Kenneth A. RIBET, *Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. **59** (1980) 227–286.
- [Fi] Michael FILASETA,
<http://www.math.sc.edu/~filaseta/newton/newton.html>
- [Go] Bertrand GORSSE, *Familles de formes modulaires, carrés symétriques et intégration p -adique*, thèse de doctorat, Inst. Fourier Grenoble (2005) (en préparation).
- [Jo] Fabienne JORY, *Familles de symboles modulaires et fonctions L p -adiques*, thèse de doctorat, Inst. Fourier Grenoble (1998).
- [Ka] Nicholas M. KATZ, *p -adic L -functions for CM -fields*, Invent. Math. **48** (1978) 199–297.
- [Kh] Ha Huy KHOAI, *p -adic interpolation and the Mellin-Mazur transform*, Acta Math. Vietnam. **5-1** (1980) 77–99.
- [KoN] Neal KOBLITZ, *p -adic numbers, p -adic analysis and zeta-functions*, Graduate Texts in Math. **58**, Springer-Verlag (1977).
- [KoS] Neal KOBLITZ, *p -adic numbers analysis : a short course on recent work*, London Math. Soc. Lect. Notes series **46** (1980).
- [Ku-Le] T. KUBOTA, H. W. LEOPOLDT, *Une théorie p -adique des fonctions zeta (en allemand)*, J. Reine und Angew. Math. **214-215** (1964) 328–339.
- [La] Michel LAZARD, *Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet*, Publ. Math. IHES **14** (1962) 47–75.
- [Ma] Kurt MAHLER, *An interpolation series for continuous functions of a p -adic variable*, J. Math. Bd. **199** (1958) 23–34; erratum in J. Reine und Angew. Math. **208** (1961) 70–72.
- [PaB] Alexei A. PANCHISHKIN, *Sur une condition suffisante pour l'existence de mesures p -adiques admissibles*, J. Théorie des Nombres Bordeaux **15** (2003) 1–24.
- [PaI] Alexei A. PANCHISHKIN, *Two variable p -adic L -functions attached to eigenfamilies of positive slope*, Invent. Math. **154-3** (2003) 551–615.
- [PaM] Alexei A. PANCHISHKIN, *A new method of constructing p -adic L -functions associated with modular forms*, Moscow Math. J. **2-2** (2002) 313–328.
- [Pu] Julien PUYDT, *Valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires adéliques*, thèse de doctorat, Inst. Fourier Grenoble (2003).
- [Se] Jean-Pierre SERRE, *Formes modulaires et fonctions zeta p -adiques*, Modular functions of one variable III, Lect. Notes in Math. **350** (1973) 191–268; erratum in Lect. Notes in Math. **476**, 149–150.

[Vi] Mikhail M. VISHIK, *Non archimedean measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR Sbornik **28-2** (1976) 216–228.

Fabienne JORY-HUGUE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
fabienne.hugue@ac-grenoble.fr