

# Inégalités de Milnor-Wood géométriques

G. Besson, G. Courtois et S. Gallot

Prépublication de l'Institut Fourier n° 666 (2005)

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

## 1 Introduction

La célèbre inégalité de Milnor-Wood ([35] et [49]) affirme que, si

$$E \longrightarrow \Sigma$$

est un fibré plat en fibres  $S^1$  sur la surface compacte  $\Sigma$  de genre  $\gamma \geq 2$ , alors la caractéristique d'Euler de ce fibré, notée  $\chi(E)$  vérifie,

$$|\chi(E)| \leq |\chi(\Sigma)| = 2\gamma - 2,$$

l'égalité ayant lieu si  $E$  est le fibré tangent de  $\Sigma$ .

Un fibré plat étant défini par une représentation de  $\Pi_1(\Sigma)$ , l'inégalité ci-dessus est en fait une restriction imposée à cette représentation à valeurs dans le groupe des homéomorphismes du cercle. Les valeurs possibles de la caractéristique d'Euler de  $E$  sont décrites dans [27].

Dans cet article nous envisageons une généralisation, en dimension supérieure de cette inégalité. Pour cela nous définissons le volume d'une représentation. Plus précisément, soit  $M$  une variété différentielle fermée de dimension  $n$  et soit  $\rho$  une représentation de son groupe fondamental dans le groupe d'isométries d'une variété symétrique de courbure négative de dimension  $n$  et simplement connexe, notée  $\tilde{X}$ . Considérons une application  $\tilde{f}$  du revêtement universel de  $M$  dans  $\tilde{X}$  équivariante par rapport à  $\rho$ , alors, si  $\omega$  désigne la forme volume de  $\tilde{X}$ , la forme  $\tilde{f}^*\omega$  passe au quotient sur  $M$ .

**Definition 1.1** *On appelle volume de la représentation  $\rho$  le nombre,*

$$\text{vol}(\rho) = \int_M \tilde{f}^*\omega.$$

Dans certains cas ce nombre peut-être interprété comme la classe d'Euler d'un fibré plat. Des bornes supérieures de  $\text{vol}(\rho)$  existent. Elles reposent souvent sur le choix d'une famille de sections particulières du fibré plat. Dans [16], par exemple, K. Corlette utilise des sections harmoniques pour démontrer un théorème de rigidité sur les représentations de volume maximal. Le cas où  $\tilde{X}$  est hyperbolique réel est abordé par A. Reznikov dans [41]; l'auteur y prouve

une inégalité optimale et c'est ce type de résultats que nous étendons dans le présent travail. Le cas d'égalité dans l'inégalité de A. Reznikov est prouvé par N. Dunfield dans [20] et dans [17], il consiste à montrer que, si le volume est maximal, la représentation est fidèle et discrète. Signalons l'article [30] dans lequel l'auteur décrit une autre notion de volume de représentations et construit de nouveaux invariants numériques.

Rappelons la définition de l'entropie volumique d'une variété Riemannienne  $(Y, g)$ . Pour  $x \in \tilde{Y}$ , on désigne par  $B(x, R)$  la boule géodésique de centre  $x$  et de rayon  $R$ , alors on définit

$$\text{Ent}(Y, g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log(\text{vol}(B(x, R))).$$

Dans ce qui suit  $\tilde{X} = \prod_1^p \tilde{X}_i$  est le produit des espaces symétriques simplement connexes de courbure strictement négative,  $\tilde{X}_i$ . Chacune des variétés  $\tilde{X}_i$  est munie d'une métrique  $\alpha_i g_0^i$ , où  $g_0^i$  est symétrique normalisée (de courbure comprise entre  $-4$  et  $-1$ , par exemple) et  $\alpha_i$  est un réel strictement positif. Parmi tous les choix de nombres  $\alpha_i$  il en est un qui donne une entropie volumique minimale (voir la proposition 2.4); nous noterons  $g_0$  la métrique correspondante sur  $\tilde{X}$  qui est de dimension  $n$ . Son entropie volumique est un nombre calculable. Nous prouvons

**Théorème 1.2** *Soit  $Y$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  et  $\rho$  une représentation de  $\Pi_1(Y)$  dans  $\text{Isom}(\tilde{X})$ , alors*

- i)  $\text{vol}(\rho) \leq \left( \frac{\text{Ent}(Y, g)}{\text{Ent}(\tilde{X}, g_0)} \right)^n \text{vol}(Y, g)$ .*
- ii) L'égalité dans l'inégalité ci-dessus a lieu si, et seulement si, la représentation  $\rho$  est injective,  $X = \tilde{X} / \rho(\Pi_1(Y))$  est une variété compacte et  $(Y, g)$  est homothétique à  $(X, g_0)$*

La preuve se fait en exhibant une famille d'applications  $\rho$ -équivariantes de  $\tilde{Y}$  sur  $\tilde{X}$  construites par la méthode introduite dans [7]. Elles sont particulièrement adaptées à l'étude du volume et conduisent à des résultats optimaux comparables, dans un cadre plus général, à ceux de N. Dunfield.

Ce résultat était annoncé en 1997 et énoncé en 1998 dans [17]. Il contient le cas où la représentation a une image discrète et cocompacte, c'est-à-dire l'analogue des théorèmes de [7] pour le cas où l'espace localement symétrique compact est localement un produit d'espaces symétriques de rang 1. Ce dernier résultat est énoncé par Ch. Connell et B. Farb dans [15], toutefois l'égalité n'est pas traitée de manière satisfaisante. Nous reprenons ici la preuve de l'inégalité dans ce cadre là, qui est une variante du travail de [7], et prouvons le cas d'égalité dans le cadre des représentations, qui est plus difficile car  $\text{Im}(\rho)$  n'est en général pas un ensemble discret.

Signalons également un travail récent de S. Francaviglia et B. Klaff [25] dans lequel les auteurs utilisent une intéressante variante de la construction de [8] pour étudier le cas où  $Y$  est une variété hyperbolique de volume fini.

Enfin, l'inégalité ci-dessus peut s'interpréter agréablement dans le cadre de la cohomologie bornée (voir [28]). Le récent travail de M. Burger, A. Iozzi et

A. Wienhard ([14]) développe ce point de vue et aboutit à de très jolis résultats concernant les représentations du groupe fondamental des surfaces.

Dans le cas où  $\tilde{X}$  est l'espace hyperbolique réel nous prouvons que le volume des représentations est constant sur les composantes connexes de l'espace des représentations. C'est un résultat évident lorsque la dimension est paire car, dans ce cas, le volume est aussi un nombre d'Euler, mais nouveau dans le cas de dimension impaire. Plus précisément nous prouvons le

**Théorème 1.3** *Soit  $M$  une variété différentielle fermée et orientée et  $\rho_t : \Pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\tilde{X})$  une famille de représentations qui dépend de manière  $C^1$  du paramètre  $t \in \mathbf{R}$ , alors le volume  $\text{vol}(\rho_t)$  est constant.*

La méthode employée consiste à utiliser la formule de Schläfli (voir aussi [11]). Un corollaire frappant est une preuve très simple du résultat suivant de T. Soma ([45]),

**Théorème 1.4 (T. Soma)** *Soit  $Y$  une variété différentielle fermée de dimension 3. L'ensemble des variétés hyperboliques fermées  $X$ , de dimension 3 telles qu'il existe une application continue de degré non nul de  $Y$  sur  $X$ , est fini.*

Nous tenons à remercier A. Reznikov, M. Boileau, D. Cooper et S. Francaviglia pour leur aide et leurs commentaires lors de la rédaction de cet article.

## 2 Géométrie des espaces produits

À titre d'exemple, nous décrivons la géométrie de l'espace  $(\tilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2) = (\mathbf{H}^{n_1} \times \mathbf{H}^{n_2}, g_0^1 \oplus g_0^2)$  muni de la métrique produit où  $(\mathbf{H}^{n_1}, g_0^1)$  (resp.  $(\mathbf{H}^{n_2}, g_0^2)$ ) désigne l'espace hyperbolique simplement connexe de dimension  $n_1$  (resp.  $n_2$ ) (de courbure constante égale à  $-1$ ). Pour un exposé général sur les espaces symétriques, nous renvoyons à [29].

### 2.1 Géodésiques

Soient  $x = (x_1, x_2) \in \tilde{X}$  et  $u = (u_1, u_2) \in T_{(x_1, x_2)}\tilde{X}$  tels que  $\|u\|_{g_0^1 \oplus g_0^2}^2 = \|u_1\|_{g_0^1}^2 + \|u_2\|_{g_0^2}^2 = 1$ , alors la géodésique de  $X$ , notée  $c_u$ , partant de  $x$  et de vitesse initiale  $u$  est  $c_u(t) = (c_1(t), c_2(t))$ , où  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ) est la géodésique de  $\mathbf{H}^{n_i}$  partant de  $x_i$  et de vitesse initiale  $u_i$ . Une géodésique définie par un vecteur  $u = (u_1, u_2)$  telle que  $u_1 = 0$  ou bien  $u_2 = 0$  est dite singulière ; ces cas correspondent à

$$c_u(t) = (x_1, c_2(t)) \quad \text{ou} \quad c_u(t) = (c_1(t), x_2) .$$

Une géodésique définie par un vecteur  $u = (u_1, u_2)$  tel que  $u_i \neq 0$ , pour  $i = 1, 2$ , est dite régulière.

### 2.2 Courbures et plats

La courbure sectionnelle de  $(\tilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2)$ , qui se calcule aisément, est négative ou nulle. Soit alors  $x = (x_1, x_2) \in X$ ,  $u = (u_1, u_2) \in T_x\tilde{X}$ , un vecteur régulier,

alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \tilde{X} \\ (t, s) &\longmapsto (c_1(t/\alpha_1), c_2(s/\alpha_2)) \end{aligned}$$

où  $\alpha_1 = \|u_1\|_{g_0^1}$  et  $\alpha_2 = \|u_2\|_{g_0^2}$  réalisent un plongement isométrique de  $\mathbf{R}^2$  muni de sa métrique euclidienne dans  $(\tilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2)$ . On peut vérifier par le calcul que l'image de cette application est totalement géodésique (voir [29], pp. ) ou bien constater que, si  $\sigma_i$  désigne la symétrie orthogonale par rapport à la géodésique  $c_i$  dans  $(\mathbf{H}^{n_i}, g_0^i)$ , l'image de l'application ci-dessus est l'ensemble des points fixes de  $\sigma_1 \times \sigma_2$  dans  $\tilde{X}$ ; il s'agit donc d'un sous-espace totalement géodésique plat et qui est, de plus, de dimension maximale avec ces propriétés :  $(\tilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2)$  est un espace symétrique de rang 2. **Nous noterons désormais  $\tilde{g}_0$  la métrique  $g_0^1 \oplus g_0^2$ .**

**Remarque.** D'une manière générale, si  $\tilde{X}$  est le produit riemannien de  $p$  espaces symétriques de courbure strictement négative, alors  $X$  est de rang  $p$ .

### 2.3 Métriques localement symétriques

On peut munir la variété différentielle  $\tilde{X}$  d'autres métriques localement symétriques; en effet, pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux nombres réels strictement positifs, on définit :

$$g_{\alpha_1, \alpha_2} = \alpha_1^2 g_0^1 \oplus \alpha_2^2 g_0^2 .$$

Contrairement aux espaces symétriques irréductibles, les espaces symétriques produits sont flexibles.

### 2.4 Groupe d'isométries

On détermine aisément le groupe d'isométries de  $(\tilde{X}, g_{\alpha_1, \alpha_2})$ . En effet, si  $n_1 \neq n_2$

$$\text{Isom}(\tilde{X}, g_{\alpha_1, \alpha_2}) = \text{Isom}(\mathbf{H}^{n_1}, g_0^1) \times \text{Isom}(\mathbf{H}^{n_2}, g_0^2) .$$

Si  $n_1 = n_2$  et  $\alpha_1 = \alpha_2$ , l'échange des deux facteurs est une isométrie supplémentaire qui est involutive; le groupe d'isométries de  $(\tilde{X}, g_{\alpha_1, \alpha_1})$  est donc une extension de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  par le groupe  $\text{Isom}(\mathbf{H}^{n_1}, g_0) \times \text{Isom}(\mathbf{H}^{n_2}, g_0)$ .

### 2.5 Fonctions de Busemann

On rappelle que, si  $(M, g)$  est une variété riemannienne complète et si  $c : \mathbf{R} \rightarrow M$  est une géodésique minimisante sur toute sa longueur et paramétrée par l'abscisse curviligne (c'est-à-dire,  $c$  est un plongement isométrique), alors on définit la fonction de Busemann associée à  $c$ ,

$$B_c(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, c(t)) - t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (d(x, c(t)) - d(c(0), c(t))) .$$

On montre que la limite existe (voir [2], p. 23). Si  $(M, g)$  est une variété simplement connexe de courbure négative ou nulle son bord à l'infini (voir [2], p. ) s'identifie à une sphère de dimension  $n - 1$ , où  $n = \dim M$ , grâce au choix d'un point  $O \in M$  qui sert d'origine. Chaque point  $\theta \in \partial M$ , le bord à l'infini de  $M$ , détermine une géodésique minimisante sur toute sa longueur, à savoir, l'unique géodésique  $c$  qui passe par  $O$  et telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = \theta$ . La fonction de Busemann correspondante est notée  $B(\cdot, \theta)$ . Remarquons qu'elle dépend du choix de l'origine.

Dans notre situation, il est souhaitable de travailler sur une partie du bord qui reflète mieux la structure produit. Pour la variété  $\tilde{X}$  ci-dessus le bord à l'infini s'identifie à  $S^{n_1+n_2-1}$  (pour toutes les métriques  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ ) après le choix d'une origine. Nous utiliserons  $S^{n_1-1} \times S^{n_2-1} \subset S^{n_1+n_2-1}$  qui s'identifie dans  $\partial \tilde{X}$  à  $\partial \mathbf{H}^{n_1} \times \partial \mathbf{H}^{n_2}$ . Plus précisément, considérons, par exemple, la métrique  $\tilde{g}_0 = g_0^1 \oplus g_0^2$ , appelons  $O = (O_1, O_2)$  une origine de  $\tilde{X} = \mathbf{H}^{n_1} \times \mathbf{H}^{n_2}$ , le bord de  $\tilde{X}$  s'identifie aux rayons géodésiques paramétrés par longueur d'arc et partant de  $O$ ; nous ne considérerons que les géodésiques  $c = (c_1, c_2)$  où  $c_i$  est une géodésique de  $\mathbf{H}^{n_i}$ , telle que, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\|\dot{c}_1(t)\|_{g_0^1} = \|\dot{c}_2(t)\|_{g_0^2}$ ; nous les appellerons géodésiques diagonales. Elles sont donc paramétrées par un point  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  où  $\theta_i \in S^{n_i-1} = \partial \mathbf{H}^{n_i}$ . Il s'agit du bord de Furstenberg (voir [2]), mais nous n'utiliserons pas sa description probabiliste. Nous le noterons  $\partial_F \tilde{X}$ . Il est important de noter que nous utiliserons toujours ce bord; en effet, si nous changeons la métrique en  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ , nous pouvons considérer des  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ -géodésiques  $c = (c_1, c_2)$  telles que  $\frac{1}{\alpha_1} \|\dot{c}_1(t)\|_{g_{\alpha_1}} = \frac{1}{\alpha_2} \|\dot{c}_2(t)\|_{g_{\alpha_2}}$ , où  $g_{\alpha_i} = \alpha_i^2 g_0^i$ ; elles définissent un bord qui s'identifie à  $\partial_F \tilde{X}$ .

**Remarque.** Lorsque  $n_1 = n_2 = 2$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , le bord de Furstenberg de  $\tilde{X}$ ,  $S^1 \times S^1 \subset S^3 = \partial \tilde{X}$ , s'identifie naturellement à un tore de Clifford dans  $S^3$ .

Maintenant, pour  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^{n_1-1} \times S^{n_2-1}$ , on note  $\overline{B}_0(\cdot, \theta)$  la fonction de Busemann de  $(X, \tilde{g}_0)$  correspondante (l'origine  $O = (O_1, O_2)$  étant fixée), et  $B_i(\cdot, \theta_i) = B_{O_i}(\cdot, \theta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , la fonction de Busemann de  $(\mathbf{H}^{n_i}, g_0^i)$ , on a :

**Lemme 2.1** Avec les notations ci-dessus, si  $x = (x_1, x_2) \in \tilde{X}$

$$\overline{B}_0(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_1(x_1, \theta_1) + B_2(x_2, \theta_2)) .$$

*Preuve.* Soit  $c$  la géodésique paramétrée par l'abscisse curviligne définie par  $\theta$  et telle que  $c(0) = O = (O_1, O_2)$ . Alors, si  $c = (c_1, c_2)$ , on a  $\|\dot{c}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \|\dot{c}_2\|$ , d'où

$$d_i(x_i, c_i(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} t + B_i(x_i, \theta_i) + \varepsilon_i(t), \quad i = 1, 2$$

avec  $\varepsilon_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ici,  $d_i$  désigne la distance dans le facteur  $i = 1, 2$ .

Le lemme se déduit alors du développement limité de

$$d(x, c(t)) - t = (d_1^2(x_1, c_1(t)) + d_2^2(x_2, c_2(t)))^{1/2} - t .$$

□

De même, si  $B_{\alpha_1, \alpha_2}(\cdot, \theta)$  désigne la fonction de Busemann de  $(\tilde{X}, g_{\alpha_1, \alpha_2})$  où  $\theta$  est dans le bord défini ci-dessus, on a :

**Lemme 2.2** Avec les notations ci-dessus, si  $x = (x_1, x_2) \in \tilde{X}$

$$B_{\alpha_1, \alpha_2}(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} (\alpha_1 B_1(x_1, \theta_1) + \alpha_2 B_2(x_2, \theta_2)) .$$

La preuve de ce lemme se fait comme celle du lemme 2.1.

## 2.6 Élément de volume

Si on note  $dv_g$  l'élément de volume d'une métrique riemannienne  $g$ , il est immédiat que

$$dv_{g_{\alpha_1, \alpha_2}} = \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} dv_{g_0^1} \otimes dv_{g_0^2}$$

où  $dv_{g_0^i}$  désigne l'élément de volume de  $(\mathbf{H}^{n_i}, g_0^i)$  pour  $i = 1, 2$ .

## 2.7 Entropie

On rappelle la définition de l'entropie (volumique) d'une variété riemannienne  $(M, g)$  que nous supposons compacte pour simplifier. Soit  $m \in \tilde{M}$  un point du revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$  alors la quantité suivante existe et ne dépend pas de  $x$ ,

$$\text{Ent}(g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log (\text{vol}(B_{\tilde{M}}(x, R)))$$

où  $B_{\tilde{M}}(x, R)$  désigne la boule métrique de centre  $x$  et de rayon  $R$  dans  $\tilde{M}$  muni de la métrique relevé de  $g$ .

Par définition  $\text{Ent}(g)$  est l'entropie de la variété riemannienne  $(M, g)$ , elle ne dépend de  $M$  qu'à travers la relevée de  $g$  à  $\tilde{M}$ . Par abus de langage, nous parlerons de l'entropie de  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$  sur  $\tilde{X}$ .

**Proposition 2.3** Pour tous  $\alpha_1, \alpha_2$  positifs

$$\text{Ent}(g_{\alpha_1, \alpha_2}) = \sqrt{\frac{(n_1-1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(n_2-1)^2}{\alpha_2^2}} .$$

*Preuve.* Le calcul de l'entropie des espaces symétriques est fait dans [7]. Rappelons que l'entropie d'un produit vérifie

$$\text{Ent}(g_{\alpha_1, \alpha_2})^2 = \frac{\text{Ent}(\mathbf{H}^{n_1}, g_0^1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{\text{Ent}(\mathbf{H}^{n_2}, g_0^2)^2}{\alpha_2^2} .$$

□

Dans cet article on se propose de prouver un théorème d'entropie minimale (voir l'introduction) c'est-à-dire de minimum de l'entropie à volume fixé. Dans ce paragraphe nous examinons cette question pour la famille de métrique  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ .

Plus précisément, soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret cocompact de  $\text{Isom}(\mathbf{H}^{n_1}, g_0^1) \times \text{Isom}(\mathbf{H}^{n_2}, g_0^2)$ , agissant sans points fixes sur  $\tilde{X}$ . Ce groupe agit par isométries sur  $\tilde{X}$  pour toutes les métriques  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ , on peut donc munir le quotient  $X = \tilde{X}/\Gamma$  des métriques induites que nous noterons encore  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ . Par ailleurs,

$$\text{vol}(X, g_{\alpha_1, \alpha_2}) = \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \text{vol}(X, \bar{g}_0) .$$

**Proposition 2.4** *Pour tous  $\alpha_1, \alpha_2$  strictement positifs tels que  $\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} = 1$ , on a*

$$\begin{aligned} \text{Ent}(g_{\alpha_1, \alpha_2}) &\geq \sqrt{n_1 + n_2} \left( \left( \frac{n_1 - 1}{\sqrt{n_1}} \right)^{n_1} \left( \frac{n_2 - 1}{\sqrt{n_2}} \right)^{n_2} \right)^{\frac{1}{n_1 + n_2}} \\ &= \text{Ent}(g_{a_1, a_2}) \end{aligned}$$

$$\text{où } a_1 = \left[ \left( \frac{(n_1 - 1) \sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1} (n_2 - 1)} \right)^{n_2} \right]^{\frac{1}{n_1 + n_2}}, \quad a_2 = \left[ \left( \frac{(n_2 - 1) \sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2} (n_1 - 1)} \right)^{n_1} \right]^{\frac{1}{n_1 + n_2}} .$$

*L'égalité, dans l'inégalité ci-dessus, a lieu si et seulement si  $\alpha_i = a_i$ .*

**Remarque.** Lorsque les espaces symétriques sont complexes, quaternioniens ou de Cayley, les calculs sont comparables et sont laissés au lecteur.

Dans la suite nous noterons  $g_0$  la métrique  $g_{a_1, a_2}$ .

*Preuve.* On a

$$\text{Ent}(g_{\alpha_1, \alpha_2})^2 = (n_1 + n_2) \left( \frac{n_1 \left( \frac{n_1 - 1}{\sqrt{n_1} \alpha_1} \right)^2 + n_2 \left( \frac{n_2 - 1}{\sqrt{n_2} \alpha_2} \right)^2}{n_1 + n_2} \right)$$

la fonction  $x \mapsto x^2$  étant strictement log-concave

$$\text{Ent}(g_{\alpha_1, \alpha_2})^2 \geq (n_1 + n_2) \left( \frac{n_1 - 1}{\sqrt{n_1}} \right)^{\frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \left( \frac{n_2 - 1}{\sqrt{n_2}} \right)^{\frac{2n_2}{n_1 + n_2}} \left( \frac{1}{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}} \right)^{\frac{2}{n_1 + n_2}}$$

d'où le résultat

$$\text{Ent}(g_{\alpha_1, \alpha_2}) \geq \sqrt{n_1 + n_2} \left( \left( \frac{n_1 - 1}{\sqrt{n_1}} \right)^{n_1} \left( \frac{n_2 - 1}{\sqrt{n_2}} \right)^{n_2} \right)^{\frac{1}{n_1 + n_2}} .$$

De plus, par stricte log-concavité, l'égalité n'a lieu que si et seulement si

$$\frac{n_1 - 1}{\sqrt{n_1} \alpha_1} = \frac{n_2 - 1}{\sqrt{n_2} \alpha_2}$$

c'est-à-dire si  $a_i = \alpha_i$ . □

**Remarques.**

- i) Si  $n_1 = n_2$ , alors la métrique minimisante est homothétique à  $\bar{g}_0$  (le facteur d'homothétie étant calculé de sorte à avoir un volume 1).

ii) La courbure de Ricci de la métrique  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$  est

$$\text{Ricci}(g_{\alpha_1, \alpha_2}) = (n_1 - 1)g_0^1 \oplus (n_2 - 1)g_0^2 .$$

La métrique  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$  n'est donc d'Einstein que si

$$\frac{n_1 - 1}{\alpha_1^2} = \frac{n_2 - 1}{\alpha_2^2} .$$

Par conséquent, en général, la métrique qui minimise la fonctionnelle Ent, parmi les  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ , n'est pas d'Einstein. Par contre, elle l'est si et seulement si  $n_1 = n_2$ .

De même, si  $X$  est un espace produit général, c'est-à-dire, si  $(X, \bar{g}) = (X_1, g_1) \times \cdots \times (X_p, g_p)$ , où  $(X_k, g_k)$  est un espace symétrique de courbure strictement négative, de dimension  $n_k$  et d'entropie notée  $E_k$ , on considère les métriques,

$$g_\alpha = \alpha_1^2 g_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_p^2 g_p$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  avec  $\alpha_k > 0$ . Alors, on a la

**Proposition 2.5** *Pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  réels strictement positifs tels que  $\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_p^{n_p} = 1$ , on a*

$$\text{Ent}(g_\alpha) \geq \sqrt{n} \left( \prod_{i=1}^p \left( \frac{E_i}{\sqrt{n_i}} \right)^{\frac{n_i}{n}} \right)$$

où  $n = n_1 + \cdots + n_p = \dim(X)$ .

L'égalité, dans l'inégalité ci-dessus, a lieu si, et seulement si, pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$

$$\alpha_i = a_i = \frac{E_i}{\sqrt{n_i}} \left( \prod_{k=1}^p \left( \frac{\sqrt{n_k}}{E_k} \right)^{\frac{n_k}{n}} \right) .$$

## 2.8 Mesure de Patterson-Sullivan

Sur le revêtement universel d'une variété de courbure strictement négative,  $(M, g)$ , on peut définir une famille de mesures qui est appelée (par abus de langage) la mesure de Patterson-Sullivan. Elle consiste à associer à chaque point  $m \in \widetilde{M}$  (le revêtement universel de  $M$ ) une mesure borélienne positive sur  $\partial \widetilde{M}$ , notée  $\mu_m$ . Cette famille est entièrement caractérisée par les deux propriétés suivantes :

i)  $\frac{d\mu_m}{d\mu_{m'}}(\theta) = \exp(-\text{Ent}(g)(B(m, \theta) - B(m', \theta)))$  (on a choisi ici une origine

$O \in \widetilde{M}$  afin de définir  $B$ ). Cette propriété affirme que pour  $m \neq m'$  les mesures  $\mu_m$  et  $\mu_{m'}$  sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et la densité s'exprime comme ci-dessus.



ii)  $\forall \gamma \in \text{Isom}(\widetilde{M})$ ,  $\gamma$  agit par homéomorphisme sur  $\partial\widetilde{M}$ , et

$$\mu_{\gamma(m)} = \gamma_*(\mu_m)$$

(voir [31]).

Dans le cas où  $\widetilde{M}$  est un espace symétrique de courbure négative ou nulle (et pas strictement négative) une construction est possible (voir [1], [39] et [33]). Dans notre situation, c'est-à-dire

$$(\widetilde{M}, g) = (\widetilde{X}, \widetilde{g}_0) = (\mathbf{H}^{n_1}, g_0^1) \times (\mathbf{H}^{n_2}, g_0^2)$$

la famille de mesures suivante, portées par  $\partial H^{n_1} x \partial H^{n_2}$  vérifie des propriétés analogues aux précédentes : pour  $x = (x_1, x_2) \in \widetilde{X}$  et  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \partial \mathbf{H}^{n_1} \times \partial \mathbf{H}^{n_2}$

$$d\mu_x = e^{-(n_1-1)B_1(x_1, \theta_1) - (n_2-1)B_2(x_2, \theta_2)} d\theta_1 \otimes d\theta_2 .$$

**Remarque.** Remarquons que la mesure ci-dessus est différente de celle utilisée dans les références [1], [39] et [33].

En effet,

i) Pour  $O$  et  $x \in \widetilde{X}$ ,  $d\mu_O$  et  $d\mu_x$  sont absolument continues, mais la densité n'a plus la forme précédente, elle vaut :

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_O} = \exp(-[(n_1-1)B_1(x_1, \theta_1) + (n_2-1)B_2(x_2, \theta_2)]) .$$

On remarque que  $\mu_{x_i}^i = e^{-(n_i-1)B_i(x_i, \theta_i)} d\theta_i$  est la mesure de Patterson-Sullivan de  $(\mathbf{H}^{n_i}, g_0^i)$ .

ii) Si  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \text{Isom}(\mathbf{H}^{n_1}, g_0^1) \times \text{Isom}(\mathbf{H}^{n_2}, g_0^2)$  alors

$$\mu_{\gamma(x)} = \gamma_*(\mu_x)$$

car

$$\begin{aligned} \gamma_*(\mu_x) &= (\gamma_1, \gamma_2)_*(\mu_{x_1}^1 \otimes \mu_{x_2}^2) = (\gamma_1)_*(\mu_{x_1}^1) \otimes (\gamma_2)_*(\mu_{x_2}^2) \\ &= \mu_{\gamma_1(x_1)}^1 \otimes \mu_{\gamma_2(x_2)}^2 = \mu_{\gamma(x)} . \end{aligned}$$

De même, si  $n_1 = n_2$ , on vérifie aisément que l'isométrie supplémentaire

$$\zeta(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

satisfait cette contrainte.

Dans la suite nous travaillerons donc avec cette famille  $\mu_x$  qui est le produit des mesures de Patterson-Sullivan de chaque facteur. Terminons en remarquant que si  $B_i^{\alpha_i}$  désigne la fonction de Busemann de  $(\mathbf{H}^{n_i}, \alpha_i^2 g_0^i)$ , alors

$$\text{Ent}(\alpha_i^2 g_0^i) B_i^{\alpha_i}(\cdot, \cdot) = \frac{1}{\alpha_i} (n_i - 1) \alpha_i B^i(\cdot, \cdot) ;$$

de sorte que la famille  $\mu_x$  ne dépend ni de  $\alpha_1$ , ni de  $\alpha_2$ .

## 2.9 Barycentre

Nous construisons ici une application inverse de  $x \mapsto \mu_x$ , c'est-à-dire une application qui associe à la plupart des mesures sur  $\partial_F \tilde{X}$  un point de  $\tilde{X}$  qui est son centre de masse ou barycentre. La construction est analogue à celle de [7] et [8] à l'utilisation près de  $\partial_F \tilde{X}$  au lieu de  $\partial \tilde{X}$ .

Soit  $\mathcal{V}$  une mesure borélienne positive non nulle sur  $\partial_F \tilde{X}$ , on considère la fonction

$$x \in \tilde{X}, \quad \mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}(x) = \int_{\partial_F \tilde{X}} B_{\alpha_1, \alpha_2}(x, \theta) d\mathcal{V}(\theta) .$$

On définit les mesures marginales sur  $\partial \mathbf{H}^{n_1}$  et  $\partial \mathbf{H}^{n_2}$  par :

i)  $\mathcal{V}_1(A_1) = \mathcal{V}(A_1 \times \partial \mathbf{H}^{n_2}) = \pi_{1*}(\mathcal{V})$ , où  $A_1$  est un borélien de  $\partial \mathbf{H}^{n_1}$  et  $\pi_1$  la projection canonique de  $\partial_F \tilde{X}$  sur  $\partial \mathbf{H}^{n_1}$  ; et de même,

ii)  $\mathcal{V}_2(A_2) = \mathcal{V}(\partial \mathbf{H}^{n_1} \times A_2) = \pi_{2*}(\mathcal{V})$ , où  $A_2$  est un borélien de  $\partial \mathbf{H}^{n_2}$  et  $\pi_2$  la projection de  $\partial_F \tilde{X}$  sur  $\partial \mathbf{H}^{n_2}$  .

**Proposition 2.6** *Si  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont des mesures non nulles et sans atomes, pour tous  $\alpha_1, \alpha_2$  strictement positifs, la fonction  $\mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}$  est  $C^\infty$ , strictement convexe sur  $\tilde{X}$  et tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers l'infini.*

*Preuve.* Par définition de  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  et  $\mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} & \left( \alpha_1 \int_{\partial \mathbf{H}^{n_1}} B_1(x_1, \theta_1) d\mathcal{V}_1(\theta_1) \right. \\ & \left. + \alpha_2 \int_{\partial \mathbf{H}^{n_2}} B_2(x_2, \theta_2) d\mathcal{V}_2(\theta_2) \right) . \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\partial_F \tilde{X}} B_1(x_1, \theta_1) d\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) &= \int_{\partial_F \tilde{X}} B_1(x_1, \pi_1(\theta_1, \theta_2)) d\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) \\ &= \int_{\partial \mathbf{H}^{n_1}} B_1(x_1, \theta) d(\pi_1 * \mathcal{V})(\theta_1) \end{aligned}$$

et de même avec l'autre terme. Alors, on applique les résultats de [19], [7] et [8] qui montrent que  $x_i \mapsto \int_{\partial \mathbf{H}^{n_i}} B_i(x_i, \theta_i) d\mathcal{V}(\theta_i)$  est strictement convexe, pour  $i = 1, 2$ , et tend vers l'infini lorsque  $x_i$  tend vers l'infini dans  $\mathbf{H}^{n_i}$ . On rappelle qu'une fonction est dite strictement convexe si elle l'est en restriction à toute géodésique non constante. Il est alors facile de vérifier que  $\mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}$  est strictement convexe en restriction à toute géodésique non constante de  $\tilde{X} = \mathbf{H}^{n_1} \times \mathbf{H}^{n_2}$ . Les autres conclusions de la proposition sont également évidentes.  $\square$

**Remarque.** L'hypothèse sur la mesure  $\mathcal{V}$  est vérifiée, par exemple, dès que celle-ci est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\partial_F \tilde{X}$ . Par ailleurs, elle peut être affaiblie (voir [7]).

**Corollaire 2.7** *Sous les mêmes hypothèses, la fonction  $\mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}$  admet un unique minimum sur  $\tilde{X}$  que nous appellerons le barycentre de  $\mathcal{V}$ , noté  $\text{bar}(\mathcal{V})$ , qui ne*

dépend pas de  $\alpha_1, \alpha_2$  (à condition qu'ils soient strictement positifs). De plus  $\text{bar}(\mathcal{V}) = (\text{bar}_1(\mathcal{V}_1), \text{bar}_2(\mathcal{V}_2))$ , où  $\text{bar}_i(\mathcal{V}_i)$  désigne le barycentre de la mesure  $\mathcal{V}_i$  dans  $\mathbf{H}^{n_i}$ .

*Preuve.* L'unicité résulte de la stricte convexité de  $\mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}$  ( $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ ) et du fait  $\mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Le point  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  est défini par l'équation vectorielle,

$$\overrightarrow{\nabla \mathcal{B}_{\alpha_1, \alpha_2}}(x^*) = \vec{0}$$

c'est-à-dire  $\alpha_1 \int_{\partial \mathbf{H}^{n_1}} \overrightarrow{\nabla_1 \mathcal{B}_1}(x_1^*, \theta_1) d\mathcal{V}_1(\theta_1) + \alpha_2 \int_{\partial \mathbf{H}^{n_2}} \overrightarrow{\nabla_2 \mathcal{B}_2}(x_2^*, \theta_2) d\mathcal{V}_2(\theta_2) = 0$  (ici  $\nabla_i$  désigne le gradient d'une fonction définie sur  $\mathbf{H}^{n_i}$ ).

Si  $\bar{x}_i = \text{bar}_i(\mathcal{V}_i)$  (voir [8]), alors

$$\int_{\partial \mathbf{H}^{n_i}} \nabla_i B_i(\bar{x}_i, \theta_i) d\mathcal{V}(\theta_i) = \vec{0} \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Par unicité on a donc  $\bar{x}_i = x_i^*$  ( $i = 1, 2$ ), c'est-à-dire

$$\text{bar}(\mathcal{V}_{\alpha_1, \alpha_2}) = (\text{bar}_1(\mathcal{V}_1), \text{bar}_2(\mathcal{V}_2)).$$

□

### 3 Le théorème principal

Dans ce chapitre, nous nous proposons de prouver le théorème principal sur l'entropie, analogue, dans cette situation, des résultats prouvés dans [7] et [8]. Nous donnons l'énoncé et la preuve dans un cas particulier afin d'éviter des lourdeurs dans les notations; le cas général est rigoureusement identique.

Nous considérons, comme précédemment,  $\tilde{X} = \mathbf{H}^{n_1} \times \mathbf{H}^{n_2}$ , où  $n_i \geq 3$  et nous munissons  $X$  de la métrique  $g_0 = g_{a_1, a_2}$ , où les nombres  $a_i$  sont ceux calculés dans la proposition 1.4. La métrique  $g_0$  minimise l'entropie normalisée, sur  $X$ , parmi les métriques  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$  (voir la proposition 2.4). Soit  $\Gamma$  un sous-groupe du groupe d'isométries de  $(\tilde{X}, g_0)$  tel que  $X = \tilde{X}/\Gamma$  est une variété compacte ( $\Gamma$  est un réseau co-compact et sans torsion).

**Théorème 3.1** *Soit  $(Y, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n = n_1 + n_2$  et  $f : Y \rightarrow X$  une application continue, alors*

- i)  $(\text{Ent}(Y, g))^n \text{vol}(Y, g) \geq |\deg f| \text{Ent}(X, g_0)^n \text{vol}(X, g_0)$ ;*
- ii) l'égalité, dans l'inégalité ci-dessus, a lieu si, et seulement si,  $f$  est homotope à un revêtement riemannien.*

**Remarque.** Ce résultat est vrai dans la version générale donnée en introduction. Sa preuve est analogue à celle de [7].

*Preuve de l'inégalité i).*

Nous donnons une preuve inspirée de la technique développée dans [9]. On note  $\Gamma = \pi_1(Y)$ , le groupe fondamental de  $Y$ ,  $\tilde{Y}$  le revêtement universel de  $Y$ . L'application continue  $f : Y \rightarrow X$  induit un morphisme  $\rho : \Gamma \rightarrow \Gamma_0 = \pi_1(X)$ .

On appelle  $\mu_O$  la mesure (canonique)  $d\theta_1 \otimes d\theta_2$  sur  $\partial_F \tilde{X}$  et  $\mathcal{M}(\partial_F \tilde{X})$  l'espace des mesures de Radon positives sur  $\partial_F \tilde{X}$ . Soit  $O \in \tilde{Y}$  un point fixé (une origine); considérons l'application

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &\longrightarrow \mathcal{M}(\partial_F \tilde{X}) \\ y &\longmapsto \mu_{y,\varepsilon} = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\text{Ent}(Y,g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y,\gamma(O))} \rho(\gamma)_*(\mu_O) \end{aligned}$$

où  $\varepsilon > 0$ . Cette application est équivariante; en effet, pour tout  $\alpha \in \Gamma$ ,

$$\mu_{\alpha(y),\varepsilon} = \rho(\alpha)_*(\mu_{y,\varepsilon}) .$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\varepsilon : \tilde{Y} &\longrightarrow \tilde{X} \\ y &\longmapsto \text{bar}(\mu_{y,\varepsilon}) . \end{aligned}$$

Notons que chaque mesure  $\mu_{y,\varepsilon}$  est sans atome. La notion de barycentre étant indépendante des coefficients  $\alpha_i$  servant à définir la métrique, nous utiliserons, pour simplifier, la métrique  $\tilde{g}_0 = g_0^1 \oplus g_0^2$  (voir le corollaire 2.7).

Alors, par équivariance,  $\tilde{F}_\varepsilon$  donne une famille d'applications

$$F_\varepsilon : Y \rightarrow X .$$

Par ailleurs, le barycentre sur  $\tilde{X}$  se décompose (cf. corollaire 2.7) et donc également la fonction  $\tilde{F}_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\varepsilon : \tilde{Y} &\longrightarrow \tilde{X} = \mathbf{H}^{n_1} \times \mathbf{H}^{n_2} \\ y &\longmapsto (\tilde{F}_{1,\varepsilon}(y), \tilde{F}_{2,\varepsilon}(y)) \end{aligned}$$

où  $\tilde{F}_{i,\varepsilon}(y) = \text{bar}_i(\pi_i * (\mu_{y,\varepsilon}))$ .

Nous notons  $F_\varepsilon$ ,  $F_{1,\varepsilon}$  et  $F_{2,\varepsilon}$  les applications correspondantes de  $Y$  dans  $X$ .

**Lemme 3.2** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , les fonctions  $F_\varepsilon$ ,  $F_{1,\varepsilon}$  et  $F_{2,\varepsilon}$  sont lipschitziennes.*

*Preuve.*

i) La série  $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\text{Ent}(Y,g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y,\gamma(O))}$  converge dès que  $\varepsilon > 0$ ; en effet, puisque  $Y$  est compacte, elle est comparable à l'intégrale

$$I_\varepsilon = \int_{\tilde{Y}} e^{-\text{Ent}(Y,g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y,z)} dv_g(z)$$

qui converge. Pour vérifier ce dernier point il suffit d'écrire  $I_\varepsilon$  en coordonnées polaires et d'appliquer la définition de  $\text{Ent}(Y,g)$ .

ii) La fonction  $\tilde{F}_\varepsilon$  est définie par l'équation implicite

$$\int_{\partial_F \tilde{X}} \overrightarrow{\nabla \bar{B}_0|_{(F_\varepsilon(y), \theta)}} \left( \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\text{Ent}(Y, g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y, \gamma(O))} \rho(\gamma)_*(d\mu_O) \right) = \vec{0}$$

où  $\bar{B}_0$  désigne la fonction de Busemann de la métrique  $\bar{g}_0 = g_{1,1}$  sur  $\tilde{X}$ . Ici  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ . L'équation ci-dessus peut se récrire en

$$0 = L(x, y) = \int_{\partial_F \tilde{X}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overrightarrow{\nabla \bar{B}_0|_{(x, \rho(\gamma)\theta)}} e^{-\text{Ent}(Y, g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y, \gamma(O))} d\mu_O$$

où  $x = (x_1, x_2) \in \tilde{X}$ . La fonction  $L$  est  $C^\infty$  en  $x$ , lipschitzienne en  $y$  et chaque différentielle partielle en  $x$  est lipschitzienne en  $y$ . Dans cette situation, on peut utiliser le théorème des fonctions implicites pour conclure que  $\tilde{F}_\varepsilon$  est lipschitzienne en  $y$  (voir [18]). Remarquons que la condition sur la différentielle partielle en  $x$  qui est nécessaire pour appliquer le théorème des fonctions implicites est exactement celle qui prouve l'existence du barycentre (voir le chapitre précédent), c'est-à-dire la stricte convexité de  $B_{1,1}$ .  $\square$

**Lemme 3.3** *Pour  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $y \in \tilde{Y}$ , on a*

$$|\text{Jac } \tilde{F}_\varepsilon(y)| \leq (1 + \varepsilon)^n \left( \frac{\text{Ent}(Y, g)}{\text{Ent}(X, g_0)} \right)^n$$

où  $n = \dim Y = \dim X = n_1 + n_2$  et le Jacobien est calculé à l'aide des métriques  $g$  sur  $Y$  et  $g_0$  sur  $X$ .

*Preuve.* Comme nous l'avons remarqué dans le chapitre précédent la notion de barycentre, et donc la définition de l'application  $\tilde{F}$ , ne dépend pas de  $\alpha_1, \alpha_2$ . Nous pouvons donc utiliser sur  $\tilde{X}$  la métrique  $\bar{g}_0 = g_0^1 \oplus g_0^2$  (on rappelle que  $g_0^i$  désigne ici la métrique de courbure constante égale à  $-1$  sur  $\mathbf{H}^{n_i}$ ). Rappelons également la notation  $g_0 = a_1 g_0^1 \oplus a_2 g_0^2$  où  $a_i$  sont les valeurs calculées dans la section précédente, telles que  $g_0$  minimise l'entropie normalisée parmi les métriques  $g_{\alpha_1, \alpha_2}$ . Nous noterons  $\overline{\det}(D\tilde{F}_\varepsilon(y))$  le déterminant de la différentielle de  $\tilde{F}_\varepsilon$  en  $y$  calculé à l'aide des métriques  $g$  sur  $\tilde{Y}$  et  $\bar{g}_0$  sur  $\tilde{X}$ ; par ailleurs  $\text{Jac } \tilde{F}_\varepsilon(y) = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \overline{\det}(D\tilde{F}_\varepsilon(y))$  est le déterminant de  $D\tilde{F}_\varepsilon(y)$  calculé à l'aide des métriques  $g$  sur  $\tilde{Y}$  et  $g_0$  sur  $\tilde{X}$ . Notons que  $g_0$  est normalisée par  $a_1^{n_1} a_2^{n_2} = 1$ , de sorte que  $\text{Jac } \tilde{F}_\varepsilon(y) = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \overline{\det}(D\tilde{F}_\varepsilon(y)) = \overline{\det}(D\tilde{F}_\varepsilon(y))$ . Nous distinguerons toutefois les deux expressions afin d'éviter les confusions entre les métriques  $g_0$  et  $\bar{g}_0$ .

*Estimation de  $\overline{\det}(D\tilde{F}_\varepsilon(y))$ ;* ici, tous les calculs se font à l'aide de la métrique  $\bar{g}_0$  sur  $\tilde{X}$ . Rappelons que nous désignons par  $B_i$  les fonctions de Busemann sur

$\mathbf{H}^{n_i}$  muni de la métrique  $g_0^i$ . Comme dans [9], page 155, nous posons

$$\begin{aligned} k_{y,\varepsilon}(v, v) &= \int_{\partial_F \tilde{X}} Dd\bar{B}_0|_{(\tilde{F}_\varepsilon(y), \theta)}(v, v) d\mu_{y,\varepsilon}(\theta) = \bar{g}_0(K_{y,\varepsilon}(v), v) \\ h_{y,\varepsilon}(v, v) &= \int_{\partial_F \tilde{X}} \left( d\bar{B}_0|_{(\tilde{F}_\varepsilon(y), \theta)}(v) \right)^2 d\mu_{y,\varepsilon}(\theta) \\ &= \bar{g}_0(H_{y,\varepsilon}(v), v) \end{aligned}$$

où  $v \in T_{\tilde{F}_\varepsilon(y)}\tilde{X}$ . Ici, comme dans la section précédente,

$$\bar{B}_0(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1(x_1, \theta_1) + B_2(x_2, \theta_2)) .$$

Enfin,

$$\begin{aligned} h'_{y,\varepsilon}(u, u) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\partial_F \tilde{X}} \langle \nabla d_{\tilde{Y}|(y, \gamma(O))}, u \rangle^2 e^{-\text{Ent}(Y, g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y, \gamma(O))} d(\rho(\gamma)_* \mu_O)(\theta) \\ &= (\mu_O(\partial_F \tilde{X})) \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle \nabla d_{\tilde{Y}|(y, \gamma(O))}, u \rangle^2 e^{-\text{Ent}(Y, g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y, \gamma(O))} \\ &= g(H'_{y,\varepsilon} u, u) \end{aligned}$$

pour  $u \in T_y \tilde{Y}$ . Nous utiliserons les mêmes notations pour les formes bilinéaires associées. En différenciant l'équation implicite qui définit  $\tilde{F}_\varepsilon$ , nous obtenons, pour  $u \in T_y \tilde{Y}$  et  $v \in T_{\tilde{F}_\varepsilon(y)}\tilde{X}$ ,

$$\begin{aligned} k_{y,\varepsilon}(v, D\tilde{F}_\varepsilon(y)(u)) &= (1 + \varepsilon) \text{Ent}(Y, g) \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\partial_F \tilde{X}} g\left(\nabla d_{\tilde{Y}|(y, \gamma(O))}, u\right) \\ &\quad \cdot \bar{g}_0\left(\nabla \bar{B}_0|_{(\tilde{F}_\varepsilon(y), \theta)}, v\right) e^{-\text{Ent}(Y, g)(1+\varepsilon)d_{\tilde{Y}}(y, \gamma(O))} d(\rho(\gamma)_* \mu_O)(\theta) \end{aligned}$$

et, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(2.5) \quad k_{y,\varepsilon}(D\tilde{F}_\varepsilon(y)(u), v) \leq (1 + \varepsilon) \text{Ent}(Y, g) (h_{y,\varepsilon}(v, v))^{1/2} (h'_{y,\varepsilon}(u, u))^{1/2} .$$

Un lemme élémentaire d'algèbre linéaire (cf. [8], lemme 5.4) donne, à partir de (2.5),

$$\det(K_{y,\varepsilon}) \overline{\det}(D\tilde{F}_\varepsilon(y)) \leq ((1 + \varepsilon) \text{Ent}(Y, g))^{n_1+n_2} (\det H_{y,\varepsilon})^{1/2} (\det H'_{y,\varepsilon})^{1/2} .$$

Nous devons maintenant remarquer que la notion de barycentre ne change pas lorsque l'on multiplie une mesure par un nombre strictement positif, de sorte que

$$\tilde{F}_\varepsilon(y) = \text{bar}(\mu_{y,\varepsilon}) = \text{bar}\left(\frac{\mu_{y,\varepsilon}}{\mu_{y,\varepsilon}(\partial_F \tilde{X})}\right) .$$

On peut donc supposer que la famille de mesures que l'on considère est normalisée (de masse totale égale à 1 pour tout  $y \in \tilde{Y}$  et  $\varepsilon > 0$ ). La trace d'une forme quadratique  $\varphi$  (calculée dans une base orthonormée par rapport à une structure euclidienne  $g$ ) étant notée  $\text{trace}_g \varphi$ , en injectant dans la définition de  $h'_{y,\varepsilon}$  le fait que  $\|\nabla d_{\tilde{Y}}\|_g = 1$ , nous obtenons

$$\text{trace}(H'_{y,\varepsilon}) = \text{trace}_g(h'_{y,\varepsilon}) = 1 ,$$

d'où

$$(\det H'_{y,\varepsilon})^{1/2} \leq \left( \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2}} \right)^{n_1 + n_2} .$$

Maintenant la définition de  $h_{y,\varepsilon}$  (et  $H_{y,\varepsilon}$ ) montre que

$$H_{y,\varepsilon} = \begin{pmatrix} H_1 & * \\ * & H_2 \end{pmatrix}$$

où  $H_i$  désigne la restriction de  $H_{y,\varepsilon}$  à  $\mathbf{H}^{n_i}$ ; plus précisément, pour  $i = 1, 2$  et  $v_i \in T_{\tilde{F}_{i,\varepsilon}(y)} \mathbf{H}^{n_i}$

$$\begin{aligned} g_0^i(H_i v_i, v_i) &= \int_{\partial_{\mathcal{F}} \tilde{X}} \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_\varepsilon(y), \theta)}(v_i) \right)^2 d\mu_{y,\varepsilon}(\theta) \\ &= \int_{\partial_{\mathcal{F}} \tilde{X}} \frac{1}{2} \left( dB_{i|(\tilde{F}_{i,\varepsilon}(y), \theta_i)}(v_i) \right)^2 d\mu_{y,\varepsilon}(\theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{H}^{n_i}} \left( dB_{i|(\tilde{F}_{i,\varepsilon}(y), \theta_i)}(v_i) \right)^2 d(\pi_{i*}(\mu_{y,\varepsilon}))(\theta_i) . \end{aligned}$$

Remarquons que, puisque  $\|dB_i\|_{g_0^i} = 1$  et  $(\pi_i)_* \mu_{y,\varepsilon}$  est une probabilité, nous avons

$$\text{trace}(2H_i) = 1 .$$

De même,

$$K_{y,\varepsilon} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

avec, pour  $i = 1, 2$  et  $v_i \in T_{\tilde{F}_{i,\varepsilon}(y)} \mathbf{H}^{n_i}$ ,

$$g_0^i(K_i v_i, v_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\partial \mathbf{H}^{n_i}} DdB_{i|(\tilde{F}_{i,\varepsilon}(y), \theta_i)}(v_i, v_i) d(\pi_{i*}(\mu_{y,\varepsilon}))(\theta_i) .$$

**Lemme 3.4** *Avec les notations précédentes, nous avons*

- i)  $\det(K_{y,\varepsilon}) = \det(K_1) \det(K_2)$  ;
- ii)  $\det(H_{y,\varepsilon}) \leq \det(H_1) \det(H_2)$ .

L'égalité i) est évidente et l'inégalité ii) est classique (voir [3], p. 63) pour les matrices symétriques.

Par ailleurs, sur les espaces hyperboliques  $\mathbf{H}^{n_i}$ , la relation suivante est vérifiée (voir [7], p. 751), pour  $i = 1, 2$ ,

$$DdB_i = g_0^i - dB_i \otimes dB_i$$

qui se traduit en

$$K_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_i - 2H_i)$$

où  $I_i$  désigne l'identité de  $T_{F_i, \varepsilon}(y)\mathbf{H}^{n_i}$ . En regroupant ces remarques, nous obtenons, à partir de 2.5,

$$\overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_\varepsilon(y)) \leq \left( \frac{(1 + \varepsilon) \text{Ent}(Y, g)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \right)^{n_1 + n_2} \frac{(\text{dét } 2H_1)^{1/2}}{\text{dét}(I - 2H_1)} \frac{(\text{dét } 2H_2)^{1/2}}{\text{dét}(I - 2H_2)}.$$

Alors, un lemme algébrique donne (cf. [7], appendice B),

$$\frac{(\text{dét } 2H_i)^{1/2}}{\text{dét}(I - 2H_i)} \leq \left( \frac{\sqrt{n_i}}{n_i - 1} \right)^{n_i}$$

l'égalité n'ayant lieu que si, et seulement si,  $2H_i = \frac{1}{n_i}I_i$  (on rappelle que  $\text{trace}(2H_i) = 1$ ).

En regroupant ces inégalités, il vient

$$\begin{aligned} \text{Jac } \widetilde{F}_\varepsilon(y) &= a_1^{n_1} a_2^{n_2} (\overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_\varepsilon(y))) \\ &\leq ((1 + \varepsilon) \text{Ent}(Y, g))^{n_1 + n_2} \frac{a_1^{n_1} a_2^{n_2}}{(\sqrt{n_1 + n_2})^{n_1 + n_2}} \left( \frac{\sqrt{n_1}}{n_1 - 1} \right)^{n_1} \left( \frac{\sqrt{n_2}}{n_2 - 1} \right)^{n_2} \\ &= \left( (1 + \varepsilon) \frac{\text{Ent}(Y, g)}{\text{Ent}(X, g_0)} \right)^n \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.4. Ce qui prouve le lemme 3.3.

L'inégalité *i*) du théorème 3.1 s'en déduit par intégration et passage à la limite en  $\varepsilon = 0$ .

Le cas d'égalité sera traité, dans un cadre plus général, dans le paragraphe suivant.

*Remarques sur le cas général.* Si  $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \times \cdots \times \widetilde{X}_p$  et  $\bar{g}_0 = g_1 \oplus \cdots \oplus g_p$  où  $(\widetilde{X}_k, g_k)$  est un espace symétrique de courbure strictement négatif et de dimension  $n_k$ , on munit  $X$  de la métrique  $g_0 = a_1 g_1 \oplus \cdots \oplus a_p g_p$ , où les nombres  $a_i$  sont ceux calculés dans la proposition 2.5. La métrique  $g_0$  minimise l'entropie normalisée parmi les métriques  $g_\alpha$  (voir la proposition 2.5).

Alors, comme ci-dessus, on pose  $\bar{g}_0 = g_1 \oplus \cdots \oplus g_p$ . On suppose de plus que la courbure sectionnelle de  $(\widetilde{X}_k, g_k)$  est normalisée de sorte qu'elle soit égale à  $-1$  si  $(\widetilde{X}_k, g_k)$  est hyperbolique réelle et comprise entre  $-4$  et  $-1$  dans les autres cas. Le calcul de l'entropie d'une telle métrique est donné dans [7], p. 740.

Pour  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \widetilde{X}$  et  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \partial_F \widetilde{X}$  ( $\partial_F \widetilde{X} = \partial \widetilde{X}_1 \times \cdots \times \partial \widetilde{X}_p$ ), la fonction de Busemann de  $(\widetilde{X}, \bar{g}_0)$  est

$$\overline{B}_0(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{p}} \left( B_1(x_1, \theta_1) + \cdots + B_p(x_p, \theta_p) \right)$$



et on a les décompositions

$$H_{y,\varepsilon} = \begin{pmatrix} H_1 & * & * & * \\ * & H_2 & * & * \\ * & * & \ddots & * \\ * & * & * & H_p \end{pmatrix}, \quad K_{y,\varepsilon} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_p \end{pmatrix}$$

avec  $\text{trace}(pH_k) = 1$  pour  $k = 1, 2, \dots, p$ .

La relation qui lie  $K_i$  et  $H_i$  dépend du type d'espace considéré (hyperbolique réel, complexe, quaternionien ou de Cayley) et est décrite dans [7], p. 751. On peut vérifier aisément que

$$\text{trace}(\sqrt{p}K_k) = E_k = \text{entropie de } (\tilde{X}_k, g_k)$$

pour  $k = 1, \dots, p$ .

Dans l'appendice B de [7] nous montrons que

$$\frac{\text{dét}(pH_k)^{1/2}}{\text{dét}(\sqrt{p}K_k)} \leq \left( \frac{\sqrt{n_k}}{E_k} \right)^{n_k}.$$

On conclut, alors, grâce à la proposition 2.5, comme ci-dessus.  $\square$

## 4 Le volume des représentations

Nous donnons dans ce paragraphe une application de la technique introduite dans [9] aux représentations du groupe fondamental d'une variété compacte.

Dans ce qui suit  $\tilde{X}$  est un produit fini d'espaces symétriques simplement connexe de courbure strictement négative. Chaque facteur est supposé de dimension supérieure ou égale à 3. On munit  $\tilde{X}$  de la métrique  $g_0$  décrite dans la proposition 2.4, c'est-à-dire celle qui réalise l'entropie minimale pour tous les quotients compacts de  $\tilde{X}$ . Par ailleurs,  $(Y, g)$  est une variété riemannienne compacte dont le groupe fondamental est noté  $\Gamma$ . On considère

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Isom}(\tilde{X}, g_0)$$

une représentation. Il existe toujours des applications équivariantes  $f : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  car  $\tilde{X}$  est contractile (dans la suite nous donnerons un exemple explicite d'une telle application). Elle vérifie donc

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall y \in \tilde{Y}, \quad f(\gamma(y)) = \rho(\gamma) f(y).$$

On peut toujours la supposer  $C^1$ , quitte à la régulariser. Si on note  $\omega_0$  la forme volume de  $(\tilde{X}, g_0)$  alors,

**Definition 4.1** On appelle volume de la représentation  $\rho$ , le nombre

$$\text{vol}(\rho) = \int_Y f^*(\omega_0).$$

**Remarques.**

- i) La définition ci-dessus a un sens car,  $f$  étant  $C^1$ ,  $f^*(\omega_0)$  est une forme continue sur  $\tilde{Y}$  qui de plus est invariante par  $\Gamma$ . Par ailleurs, il est immédiat de vérifier que  $\text{vol}(\rho)$  ne dépend pas du choix de l'application équivariante  $f$ .
- ii) Il faut interpréter  $\text{vol}(\rho)$  comme l'analogue de la quantité  $|\deg f| \text{vol}(X)$  du théorème 3.1. En effet, lorsque  $\rho(\Gamma)$  est discret et cocompact, agissant sans point fixe, nous nous trouvons dans la situation du paragraphe 3 où  $X = \tilde{X}/\rho(\Gamma)$  et  $\text{vol}(X)|\deg f| = \text{vol}(\rho)$  par définition du degré de l'application  $f$ .

Nous prouvons donc un théorème analogue :

**Théorème 4.2** *Avec les notations ci-dessus :*

- i)  $\text{vol}(\rho) \leq \left( \frac{\text{Ent}(Y, g)}{\text{Ent}(\tilde{X}, g_0)} \right)^n \text{vol}(Y, g)$ .
- ii) *L'égalité, dans l'inégalité ci-dessus a lieu si, et seulement si, la représentation  $\rho$  est injective,  $X = \tilde{X}/\rho(\Gamma)$  est une variété compacte et  $(Y, g)$  est homothétique à  $(X, g_0)$ .*

**Remarques.**

- i) Ce résultat est un premier pas dans la compréhension des représentations des groupes fondamentaux de variétés compactes dans des groupes d'isométries d'espaces symétriques de type non compact.
- ii) Les exemples de telles représentations sont rares et nous discuterons ce point plus loin dans le texte. Plus rares encore sont les exemples dont le volume est non nul.
- iii) Seul le cas de dimension 2, où notre méthode ne s'applique pas, est complètement compris (cf. [27]). En particulier, le théorème 4.2 est une généralisation de la célèbre inégalité de Milnor-Wood (cf. [35], [49] et [41]).

*Preuve.* L'inégalité est élémentaire et sa preuve est celle du théorème 3.1, i). Le cas d'égalité par contre est beaucoup plus difficile car nous ne possédons pas de quotient compact de  $\tilde{X}$  ( $\tilde{X}/\rho(\Gamma)$  n'est même pas un espace séparé, en général) sur lequel s'appuyer afin d'utiliser la théorie du degré (voir la preuve du cas d'égalité de [7]).

Afin de traiter ce cas d'égalité difficile nous devons considérer une autre application équivariante que celle introduite dans le paragraphe 3. Soit  $f$  une première application continue et  $\rho$ -équivariante,

$$f : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X} ,$$

par exemple, nous pouvons prendre comme précédemment

$$\tilde{f}(y) = \text{bar} \left( \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\text{Ent}(Y, g)(1+\varepsilon) d(y, \gamma(O))} \rho(\gamma)_* d\mu \right)$$

les notations étant, ici, celles du paragraphe 2.

On rappelle que si  $\theta \in \partial_F \tilde{X}$  et  $z \in \tilde{X}$ ,  $P_0(z, \theta)$  désigne le noyau de Poisson de  $\tilde{X}$ , normalisé en une origine  $O_0 \in \tilde{X}$  de sorte que

$$P_0(O_0, \cdot) \equiv 1 .$$

Nous construisons une autre application, comme dans [7], définie, pour tout  $c > \text{Ent}(Y, g)$ , par

$$\tilde{F}_c(y) = \text{bar} \left( \left( \int_{\tilde{Y}} e^{-cd(y,z)} P_0(\tilde{f}(z), \theta) dv_g(z) \right) d\theta \right) .$$

La preuve de l'inégalité *i*) du théorème 4.2 est rigoureusement identique à celle donnée dans le paragraphe 3. Nous ne la reproduirons donc pas. Notons qu'elle peut être faite à l'aide de la fonction  $\tilde{f}$  définie e qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser la fonction  $\tilde{F}_c$ ; cette dernière est toutefois beaucoup plus aisée à manipuler dans la preuve du cas d'égalité; elle est, par exemple plus régulière que  $f$ .

Posons comme dans [7], pour  $c > \text{Ent}(Y, g)$

$$\psi(c, y, \theta) = \int_{\tilde{Y}} e^{-cd(y,z)} P_0(f(z), \theta) dv_g(z)$$

et

$$\Phi(c, y, \theta) = \frac{\psi(c, y, \theta)}{\int_{\partial_F \tilde{X}} \psi(c, y, \theta) d\theta}$$

qui est de norme  $L^1(\partial_F \tilde{X}, d\theta)$  égale à 1.

**Lemme 4.3** *L'application  $(c, y) \mapsto \Phi(c, y, \cdot)$  est de classe  $C^1$  de l'intervalle  $]\text{Ent}(Y, g), +\infty[ \times \tilde{Y}$  dans  $L^1(\partial_F \tilde{X})$ .*

*Preuve.* — Il n'est pas possible de montrer le lemme ci-dessus par simple application du théorème de dérivation sous le signe somme. Toutefois, dans [7], nous prouvons, comme corollaire du théorème de convergence dominée, que  $y \mapsto \Phi(c, y, \cdot)$  est de classe  $C^1$  (à  $c$  fixé) et, si  $u \in T_y \tilde{Y}$ , sa différentielle est donnée par

$$(u \cdot \psi)(c, y, \theta) = -c \int_{\tilde{Y}} e^{-cd(y,z)} (u \cdot d)(y, z) P_0(\tilde{f}(z), \theta) dv_g(z)$$

la continuité en  $c$  de cette quantité est évidente en remarquant que  $|u \cdot d| \leq \|u\|_g$ , que  $P_0$  est strictement positif et que, pour  $y$  et  $z$  fixés,  $c \mapsto e^{-cd(y,z)}$  est décroissante en  $c$ ; ceci permet d'appliquer une nouvelle fois le théorème de convergence dominée.

De même, pour  $y$  et  $\theta$  fixés, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme afin de montrer la différentiabilité en  $c$  (à  $y$  et  $\theta$  fixé). En effet,

$$0 \leq d(y, z) e^{-cd(y,z)} \leq e^{-c'd(y,z)}$$

pour tout  $c' < c$ . Ceci montre que

$$\frac{\partial \psi}{\partial c}(c, y, \theta) = - \int_{\tilde{Y}} d(y, z) e^{-cd(y,z)} P_0(\tilde{f}(z), \theta) dv_g(z)$$

existe et, encore grâce au théorème de convergence dominée, est continue en  $(c, y)$ . Ceci prouve le lemme ci-dessus. On remarque que le même type d'argument que ceux utilisés dans [7] montrent que  $\frac{\partial \psi}{\partial c}$  est de classe  $C^1$  comme fonction de  $y$  à valeurs dans  $L^1(\partial_F \tilde{X})$ .

De même  $\psi$  est de classe  $C^\infty$  en  $c$  et chaque dérivée en  $c$  est de classe  $C^1$  en  $y$  comme fonction de  $\tilde{Y}$  à valeurs dans  $L^1(\partial_F \tilde{X})$ . L'assertion du lemme concernant  $\Phi$  s'en déduit.  $\square$

**Lemme 4.4** *L'application*

$$\begin{aligned} \tilde{F} : ]\text{Ent}(Y, g), +\infty[ \times \tilde{Y} &\longrightarrow \tilde{X} \\ (c, y) &\longmapsto \tilde{F}_c(y) \end{aligned}$$

est de classe  $C^1$ .

*Preuve.* Il s'agit d'une simple application du théorème des fonctions implicites (voir [7]). Rappelons la preuve de ce fait. Soit  $\{e_i(x)\}_{i=1, \dots, n}$  une base orthonormée de  $T_x \tilde{X}$  dépendant de manière  $C^\infty$  de  $x \in \tilde{X}$ . Définissons les fonctions

$$G_i(x, c, y) = \int_{\partial_F \tilde{X}} d\bar{B}_0(x, \theta)(e_i(x))\Phi(c, y, \theta) d\theta$$

(on rappelle que  $\bar{B}_0(x, \theta)$  désigne la fonction de Busemann de  $(\tilde{X}, g_0)$  normalisée en  $O_0$  et  $d\theta$  la mesure canonique de  $\partial_F \tilde{X}$ ), et

$$\begin{aligned} G : \tilde{X} \times ]\text{Ent}(Y, g), +\infty[ \times \tilde{Y} &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x, c, y) &\longmapsto (G_1(x, c, y), \dots, G_n(x, c, y)) . \end{aligned}$$

Alors, la fonction  $\tilde{F}$  est définie par l'équation implicite

$$G(\tilde{F}_c(y), c, y) = 0 .$$

Le théorème des fonctions implicites est alors facile à vérifier car la condition qu'il requiert est exactement celle qui assure l'existence du barycentre.

La fonction  $G$  étant  $C^1$  en  $(x, c, y)$  le lemme est prouvé. En fait  $F$  est, pour les mêmes raisons que précédemment,  $C^\infty$  en  $c$ .  $\square$

*Preuve du cas d'égalité ii).* du théorème 4.2—

La preuve commence comme dans le paragraphe 7 de [7]. Pour fixer le facteur d'homothétie supposons que  $g$  est normalisée de sorte que

$$\text{Ent}(Y, g) = \text{Ent}(\tilde{X}, g_0) = E_0 .$$

On suppose donc que  $\text{vol}(\rho) = \text{vol}(Y, g)$ . Le travail porte sur l'étude des formes quadratiques, déjà introduites au paragraphe précédent,

$$\begin{aligned} h_{y,c}(\cdot, \cdot) &= \int_{\partial_F \tilde{X}} \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_c(y), \theta)}(\cdot) \right)^2 \Phi(y, c, \theta) d\theta \\ k_{y,c}(\cdot, \cdot) &= \int_{\partial_F \tilde{X}} Dd\bar{B}_{0|(\tilde{F}_c(y), \theta)}(\cdot, \cdot) \Phi(y, c, \theta) d\theta \end{aligned}$$

et des endomorphismes symétriques et définis positifs correspondants,  $H_{y,c}$  et  $K_{y,c}$  (ici,  $c$  joue le rôle de  $\text{Ent}(Y, g)(1 + \varepsilon) = E_0(1 + \varepsilon)$ ). La plus grande valeur propre de  $H_{y,c}$  est notée  $\mu_n^c(y)$  et vérifie,

$$0 < \mu_n^c(y) < 1 ,$$

en effet, l'endomorphisme symétrique  $H_{y,c}$  est de  $\bar{g}_0$ -trace égale à 1 et est défini positif. On rappelle également que  $\text{trace}(K_{y,c}) = \text{Ent}(\tilde{X}, g_0) = E_0$  (ceci car  $\Phi$  est normalisée).

**1ère étape : convergence presque sûre de  $H_{y,c}$ .**

La preuve de l'inégalité *i*) du théorème 4.2 consiste (comme dans le paragraphe 3) à montrer que,

$$\forall y \in \tilde{Y}, \quad \forall c > E_0, \quad |\text{Jac } \tilde{F}_c(y)| \leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n .$$

**Lemme 4.5** *Il existe une suite  $c_k$  tendant vers  $E_0$ , telle que  $\text{Jac } \tilde{F}_{c_k}(y) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$  presque sûrement sur  $\tilde{Y}$ .*

*Preuve.* Comme dans [7], lemme 7.3, posons  $f_c(y) = \text{Jac } \tilde{F}_c(y) - 1$  et  $f_c^\pm = \sup(0, \pm f_c)$ ; la fonction  $f_c^+$  tend uniformément vers 0 lorsque  $c$  tend vers  $E_0$  car,

$$\forall y \in \tilde{Y}, \quad 0 \leq f_c^+(y) \leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n - 1 .$$

Par ailleurs, pour tout  $c > E_0$ ,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\rho) &= \int_Y \tilde{F}_c^*(\omega_0) = \int_Y \text{Jac } \tilde{F}_c(y) \, dv_g \\ &\leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n \text{vol}(Y, g) - \int_Y f_c^- \, dv_g \end{aligned}$$

l'hypothèse  $\text{vol}(\rho) = \text{vol}(Y, g)$  implique que  $f_c^-$  tend vers 0 dans  $L^1(Y, g)$  lorsque  $c$  tend vers  $E_0$ , d'où l'existence d'une sous-suite  $c_k$  telle que  $f_{c_k}^-$  tende vers zéro presque sûrement.  $\square$

Lorsque  $(\tilde{Y}, \tilde{g}) = (\tilde{X}, \bar{g}_0)$  et la mesure  $\mu_0$  est la mesure canonique du bord de Furstenberg  $\partial_F \tilde{X}$ , alors l'endomorphisme  $H_{y,\varepsilon}$  prend une forme particulière; en effet, pour tout  $x \in \tilde{X}$  et pour  $\varepsilon = 0$

$$H_{x,0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{pn_1} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{pn_2} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{pn_p} I_p \end{pmatrix},$$

où  $x = (x_1, \dots, x_p)$  et  $I_k$  désigne l'identité de  $T_{x_k} \tilde{X}_k$ . Désormais nous noterons  $H_0$  l'endomorphisme  $H_{x,0}$ . De même, les termes  $K_i$  (voir le paragraphe

précédent) qui se calculent en fonctions de  $H_i = \frac{1}{pn_i}I_i$  et valent  $K_i = \frac{E_i}{\sqrt{pn_i}}I_i$ . Nous noterons  $K_0$  l'endomorphisme  $K_{x,0}$  correspondant.

À partir de maintenant nous considérerons une suite  $c_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} E_0$  telle que  $\text{Jac } \tilde{F}_{c_k}(y) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$  presque sûrement en  $y \in \tilde{Y}$ .

**Lemme 4.6** *Pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} H_{y,c_k} = H_0$ .*

*Preuve.* Pour tout  $y \in \tilde{Y}$  et pour tout  $x > E_0$

$$|\text{Jac } \tilde{F}_c(y)| \leq \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{(\det H_{y,c})^{1/2}}{\det(K_{y,c})} \leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n .$$

Soit  $y \in Y$  tel que  $|\text{Jac } \tilde{F}_{c_k}(y)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ , la quantité  $\frac{(\det H_{y,c_k})^{1/2}}{\det(K_{y,c_k})}$  tend vers sa valeur maximale, à savoir  $\left(\frac{\sqrt{n}}{E_0}\right)^n$ . On rappelle que  $\prod_{i=1}^p a_i^{n_i} = 1$  (voir le paragraphe 1).

Par une preuve en tout point analogue à celle donnée dans l'appendice B, proposition B5 de [7], nous montrons l'existence d'une constante  $A > 0$  telle que

$$\frac{(\det H_{y,c})^{1/2}}{\det(K_{y,c})} \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{E_0}\right)^n (1 - A\|H_{y,c} - H_0\|_{\tilde{g}_0}^2)$$

de sorte que

$$\|H_{y,c} - H_0\|_{\tilde{g}_0}^2 \leq \frac{1}{A} \left(1 - \left(\frac{E_0}{c}\right)^n |\text{Jac } \tilde{F}_c(y)|\right)$$

et, si  $|\text{Jac } \tilde{F}_{c_k}(y)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$ , alors

$$H_{y,c_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} H_0 .$$

□

**2ème étape : convergence uniforme de  $H_{y,c_k}$  vers  $H_0$ .**

Nous reprenons les étapes de la preuve du cas d'égalité de [7], paragraphe 7.

Soit  $c_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} E_0$  une sous-suite telle que  $\text{Jac } \tilde{F}_{c_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$  presque sûrement et  $H_{y,c_k}$  tende presque sûrement vers  $H_0$ . Pour simplifier les notations nous utiliserons l'indice  $k$  en lieu et place de l'indice  $c_k$ .

**Lemme 4.7** *Soient  $y$  et  $y'$  deux points de  $\tilde{Y}$  tels que  $\mu_n^k \leq 1 - \frac{1}{n}$  en tout point d'une  $g$ -géodésique minimisante  $\alpha$  qui joint  $y$  à  $y'$ , alors*

$$d_{\tilde{g}_0}(\tilde{F}_k(y), \tilde{F}_k(y')) \leq K_1 d_g(y, y') .$$

*On rappelle que  $\mu_n^k(y) = \mu_n^{c_k}(y)$  est la plus grande valeur propre de  $H_{y,c_k}$ .*

*Preuve.* On tire, comme dans le paragraphe 3, de l'équation implicite qui définit  $\tilde{F}_k$ , pour tous  $u \in T_y \tilde{Y}$  et  $v \in T_{\tilde{F}_k(y)} \tilde{X}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{g}_0(K_{y,k} D_y \tilde{F}_k(u), v) &= \int_{\partial_F \tilde{X}} d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y), \theta)}(v) d\Phi_{k|(y, \theta)}(u) d\theta \\ &= 2 \int_{\partial_F \tilde{X}} d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y), \theta)}(v) \sqrt{\Phi_k(y, \theta)} d\sqrt{\Phi_k|(y, \theta)}(u) d\theta \\ &\leq 2\bar{g}_0(H_{y,k}(v), v)^{1/2} \left( \int_{\partial_F \tilde{X}} (d\sqrt{\Phi_k|(y, \theta)}(u))^2 d\theta \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que

$$\left( \int_{\partial_F \tilde{X}} (d\sqrt{\Phi_k|(y, \theta)}(u))^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \frac{c_k}{2} g(u, u)^{1/2}. \quad (*)$$

Si  $u$  et  $v$  sont de norme 1, dans leur espace respectif, alors

$$\begin{aligned} \bar{g}_0(K_{y,k} D_y \tilde{F}_k(u), v) &\leq c_k \bar{g}_0(H_{y,k}(v), v)^{1/2} \\ &\leq c_k \sqrt{\mu_n^k(y)}. \end{aligned}$$

Maintenant, si  $\tilde{X}$  est un produit d'espaces symétriques de rang 1, de courbure comprise entre  $-1$  et  $-4$ , il est facile de vérifier (voir [7], appendice B) que, au sens des formes quadratiques, pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$ ,

$$K_i \geq I_i - H_i \geq (1 - \mu_n^k(y)) I_i.$$

On rappelle que  $H_i$  (resp.  $K_i$ ) désigne la restriction de  $H_{y,k}$  (resp.  $K_{y,k}$ ) à  $\tilde{X}_i$ . En prenant  $v = \frac{D_y \tilde{F}_k(u)}{\|D_y \tilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0}}$  si  $D_y \tilde{F}_k(u) \neq 0$ , il vient

$$\|D_y \tilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0} \leq c_k \frac{\sqrt{\mu_n^k(y)}}{1 - \mu_n^k(y)} \quad (**)$$

(si  $D_y \tilde{F}_k(u) = 0$ , l'inégalité est trivialement vraie). Soit  $\alpha$  la  $g$ -géodésique de  $y$  à  $y'$  le long de laquelle  $\mu_n^k(\alpha(t)) \leq 1 - \frac{1}{n}$ , on a, pour tout  $u \in T_{\alpha(t)} \tilde{Y}$ , de norme 1

$$\|D_{\alpha(t)} \tilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0} \leq 2nE_0 = K_1$$

(si  $k$  est assez grand pour que  $c_k \leq 2E_0$ ). Par le théorème des accroissements finis

$$d_{\bar{g}_0}(\tilde{F}_k(y), \tilde{F}_k(y')) \leq K_1 d_g(y, y').$$

□

**Lemme 4.8** *Avec les mêmes notations que précédemment, si  $P$  désigne le transport parallèle de  $\tilde{F}_k(y)$  à  $\tilde{F}_k(y')$  le long de la  $\bar{g}_0$ -géodésique minimisante qui les joint, on a*

$$\|h_{y,k} \circ P - h_{y',k}\|_{\bar{g}_0} \leq K_2 [d_g(y, y') + d_{\bar{g}_0}(\tilde{F}_k(y), \tilde{F}_k(y'))].$$

*Preuve.* Nous désignons par  $\beta(t)$  l'unique  $\bar{g}_0$ -géodésique, qui est minimisante, allant de  $\tilde{F}_k(y)$  à  $\tilde{F}_k(y')$  et par  $Z$  un champ de vecteurs parallèle, le long de  $\beta$ , de norme 1. Pour simplifier, posons  $Z_1 = Z(\tilde{F}_k(y))$  et  $Z_2 = Z(\tilde{F}_k(y'))$ . Alors

$$\begin{aligned} & h_{y',k}(Z_2, Z_2) - h_{y,k}(Z_1, Z_1) \\ &= \int_{\partial_F \tilde{X}} \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y'), \theta)}(Z_2) \right)^2 \Phi_k(y', \theta) \, d\theta \\ &\quad - \int_{\partial_F \tilde{X}} \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y), \theta)}(Z_1) \right)^2 \Phi_k(y, \theta) \, d\theta \\ &= \int_{\partial_F \tilde{X}} \left[ \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y'), \theta)}(Z_2) \right)^2 - \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y), \theta)}(Z_1) \right)^2 \right] \Phi_k(y', \theta) \, d\theta \\ &\quad + \int_{\partial_F \tilde{X}} \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y), \theta)}(Z_1) \right)^2 (\Phi_k(y', \theta) - \Phi_k(y, \theta)) \, d\theta . \end{aligned}$$

Des formules explicites de  $Dd\bar{B}_0$  et du fait que  $\|d\bar{B}_{0|(x, \theta)}(\cdot)\|_{\bar{g}_0} \leq 1$ , nous tirons l'inégalité

$$\left| \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y'), \theta)}(Z_2) \right)^2 - \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y), \theta)}(Z_1) \right)^2 \right| \leq K'_2 d_{\bar{g}_0}(\tilde{F}_k(y'), \tilde{F}_k(y)) .$$

De même, comme  $\Phi_k(y, \cdot)$  est de norme 1 dans  $L^1(\partial_F \tilde{X}, d\theta)$  et en utilisant l'inéquation (\*)

$$\begin{aligned} & \int_{\partial_F \tilde{X}} \left( d\bar{B}_{0|(\tilde{F}_k(y), \theta)}(Z_1) \right)^2 \left[ \left( \sqrt{\Phi_k(y', \theta)} \right)^2 - \left( \sqrt{\Phi_k(y, \theta)} \right)^2 \right] d\theta \\ & \leq \left( \|\sqrt{\Phi_k(y, \cdot)} - \sqrt{\Phi_k(y', \cdot)}\|_{L^2(\partial_F \tilde{X})} \right) \left( \|\sqrt{\Phi_k(y, \cdot)} + \sqrt{\Phi_k(y', \cdot)}\|_{L^2(\partial_F \tilde{X})} \right) \\ & \leq c_k d_g(y, y') . \end{aligned}$$

Le lemme découle de l'addition de ces inégalités.  $\square$

**Lemme 4.9** *La suite  $H_{k,y}$  converge uniformément par rapport à  $y \in \tilde{Y}$  vers  $H_0$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .*

*Preuve.* Le comportement de  $H_k$  vis-à-vis de l'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{Y}$  montre qu'il suffit de prouver la convergence uniforme sur un domaine fondamental  $D \subset \tilde{Y}$ . Le théorème d'Egoroff ([24], p. 77) et le lemme 4.6 attestent que, pour tout  $\eta > 0$ , il existe un ensemble mesurable  $K$  tel que

- i)  $\text{vol}_g(D \setminus K) < \eta$ ;
- ii) sur  $K$ , la suite  $y \mapsto H_{k,y}$  converge uniformément vers  $H_0$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$  petit, on peut choisir  $\eta$  tel que  $D \setminus K$  ne contienne aucune  $g$ -boule de rayon  $\varepsilon$ , car, en effet, le volume d'une telle boule sur  $\tilde{Y}$  est minoré (la métrique de  $\tilde{Y}$  est périodique). On choisit aussi  $N \in \mathbf{N}$  de sorte que

- i) pour tout  $k \geq N$ ,  $E_0 < c_k < E_0 + \varepsilon$ ;
- ii) pour tout  $k \geq N$  et pour tout  $y \in K$ ,  $\|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < \varepsilon$ .



Par ailleurs, si  $y \notin K$ ,  $d_g(y, K) < \varepsilon$ . Rappelons que les valeurs propres de  $H_0$  sont les nombres  $\frac{1}{pn_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Posons  $K_3 = K_2(K_1 + 1) + 1$  et supposons  $\varepsilon$  assez petit pour que  $K_3\varepsilon \leq 1 - \sup_i \left(\frac{1}{pn_i}\right) - \frac{1}{n}$ . Nous allons montrer que si  $k \geq N$ , alors

$$\forall y \in D, \quad \|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < K_3\varepsilon .$$

Si ce n'est pas vrai, il existe  $y' \in D$  tel que

$$\|H_{y',k} - H_0\|_{\bar{g}_0} \geq K_3\varepsilon ,$$

soit alors  $y \in K$  tel que  $d_g(y', y) < \varepsilon$ . Par continuité de l'application  $y \mapsto H_{y,k}$ , il existe un premier point  $y''$  sur le segment géodésique  $[y, y']$  tel que  $\|H_{y'',k} - H_0\| = K_3\varepsilon$ . Le choix de  $K_3$  montre que, sur le segment géodésique  $[y, y'']$ ,

$$\mu_n^k \leq \sup_i \left(\frac{1}{pn_i}\right) + K_3\varepsilon \leq 1 - \frac{1}{n} .$$

D'après les lemmes 4.7 et 4.8 ceci conduit à

$$\|h_{y,k} \circ P - h_{y'',k}\|_{\bar{g}_0} \leq K_2(K_1 + 1)\varepsilon$$

et comme  $\|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < \varepsilon$  ceci conduit à

$$\|H_{y'',k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < (K_2(K_1 + 1) + 1)\varepsilon = K_3\varepsilon$$

qui est une contradiction.  $\square$

Remarquons que la convergence uniforme de  $H_{y,k}$  vers  $H_0$  implique la convergence uniforme de  $K_{y,k}$  vers  $K_0$ .

### 3ème étape : convergence uniforme d'une sous-suite de $\tilde{F}_k$ .

**Lemme 4.10** *Il existe une sous-suite de la suite  $\tilde{F}_k$  qui converge uniformément vers une application  $\tilde{F} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  continue et équivariante.*

*Preuve.* Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $M \in \mathbf{N}$  tel que si  $k \geq M$

$$\forall y \in \tilde{Y}, \quad \|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < \varepsilon .$$

D'où

$$H_{y,k} \leq H_0 + \varepsilon I$$

et par une remarque précédente

$$K_{y,k} \geq K_0 - \varepsilon I .$$

Ces deux inégalités étant à comprendre au sens des formes quadratiques. On déduit alors, avec (\*\*), qu'il existe un nombre réel  $C > 0$  tel que, pour tout  $y \in \tilde{Y}$  et  $u \in T_y\tilde{Y}$ ,

$$\|D_y \tilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0} \leq C$$

(si  $\varepsilon$  est assez petit).

La suite d'application  $\tilde{F}_k : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  est donc équicontinue.

Supposons qu'il existe  $y_0$  tel que  $\tilde{F}_k(y_0)$  ne reste dans aucun compact. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\tilde{F}_k(y_0) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \theta \in \partial\tilde{X}$  (le bord géométrique de  $\tilde{X}$ ). Pour tout  $y \in \tilde{Y}$ , alors

$$d_{\tilde{g}_0}(\tilde{F}_k(y), \tilde{F}_k(y_0)) \leq C d_g(y, y_0)$$

de sorte que  $\tilde{F}_k(y) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \theta$  par définition du bord géométrique de  $\tilde{X}$ . L'équivariance de  $\tilde{F}_k$  donne

$$\tilde{F}_k(\gamma y_0) = \rho(\gamma) \tilde{F}_k(y_0)$$

et donc en passant à la limite en  $k$

$$\theta = \rho(\gamma)\theta$$

c'est-à-dire, la représentation  $\rho$  fixe un point de  $\partial\tilde{X}$ .

**Lemme 4.11** *Si  $\rho$  fixe un point  $\theta_0$  de  $\partial\tilde{X}$ , alors  $\text{vol}(\rho) = 0$ .*

*Preuve.* Soit  $\overline{B}_0(\cdot, \theta_0)$  la fonction de Busemann définie par le point  $\theta_0 \in \partial\tilde{X}$ . Supposons d'abord que  $\theta_0$  est dans le bord de Fürstenberg. Posons

$$Z(x) = \nabla \overline{B}_0(x, \theta_0)$$

alors le champ de vecteurs  $Z$  est invariant par  $\rho$ . En effet, l'égalité

$$\overline{B}_0(\alpha(x), \theta_0) = \overline{B}_0(x, \alpha^{-1}(\theta_0)) + \overline{B}_0(\alpha(O_0), \theta_0)$$

pour  $\alpha \in \text{Isom}(\tilde{X})$ , conduit à

$$\overline{B}_0(\rho(\gamma)(x), \theta_0) = \overline{B}_0(x, \theta_0) + \overline{B}_0(\rho(\gamma)(O_0), \theta_0)$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ; ce qui donne en différenciant

$$Z(\rho(\gamma)(x)) = \rho(\gamma)(Z(x)) .$$

Par ailleurs, pour tout  $x \in \tilde{X}$

$$\text{div}(Z)(x) = \Delta(\overline{B}_0(\cdot, \theta)) = E_0 .$$

Donc la forme différentielle  $\omega = \text{div}(Z)\omega_0 = E_0\omega_0$  est invariante par  $\rho(\gamma)$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . En conséquence, pour  $c > E_0$ ,  $\tilde{F}_c^*(\omega)$  est invariante par  $\gamma$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . La définition de la divergence conduit à l'égalité

$$\text{div}(Z)\omega_0 = -d(i(Z) \cdot \omega_0)$$

où  $i(Z) \cdot \omega_0$  désigne le produit intérieur de  $\omega_0$  par le champ de vecteurs  $Z$ . D'où

$$\begin{aligned}\tilde{F}_c^*(\omega) &= -\tilde{F}_c^*(d(i(Z) \cdot \omega_0)) \\ &= -d(\tilde{F}_c^*(i(Z) \cdot \omega_0))\end{aligned}$$

et

$$\text{vol}(\rho) = \int_Y \tilde{F}_c^*(\omega_0) = \frac{1}{E_0} \int_Y \tilde{F}_c^*(\omega) = 0 .$$

Si  $\theta_0$  n'est pas dans le bord de Fürstenberg la même preuve peut être faite car

$$\text{div}(Z)(x) = \Delta(\overline{B}_0(\cdot, \theta)) \neq 0 .$$

□

Puisque nous sommes dans le cas d'égalité,  $\text{vol}(\rho) \neq 0$ , et la suite  $\tilde{F}_k(y_0)$  reste donc dans un compact de  $\tilde{X}$ . On peut alors appliquer le théorème d'Ascoli pour déduire qu'il existe une sous-suite, notée encore  $\tilde{F}_k$ , qui converge uniformément sur  $D \subset \tilde{Y}$  vers une application continue  $F : D \rightarrow \tilde{X}$ . L'équivariance de  $\tilde{F}_k$ , pour tout  $k$ , montre que  $\tilde{F}_k$  converge uniformément sur  $\tilde{Y}$  et que la limite  $F$  est également équivariante.

**4ème étape :  $\tilde{F}$  est une isométrie.**

**Lemme 4.12** *L'application  $\tilde{F} : (\tilde{Y}, \tilde{g}) \rightarrow (\tilde{X}, g_0)$  contracte les distances, c'est-à-dire, pour tout  $y, y'$  dans  $\tilde{Y}$*

$$d_{g_0}(\tilde{F}(y), \tilde{F}(y')) \leq d_g(y, y')$$

et  $D\tilde{F}(y)$  est une isométrie entre  $(T_y \tilde{Y}, g)$  et  $(T_{\tilde{F}(y)} \tilde{X}, g_0)$  pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ .

*Preuve.* Pour  $\varepsilon > 0$  donné, on peut choisir  $k$  assez grand pour que, pour tout  $y \in \tilde{Y}$ ,

$$\begin{aligned}H_{y,k} &\leq H_0 + \varepsilon I \\ K_{y,k} &\geq K_0 - \varepsilon I .\end{aligned}$$

Alors, l'inégalité 2.5 nous conduit à l'estimation suivante, pour  $u \in T_y \tilde{Y}$  et  $v \in T_{\tilde{F}(y)} \tilde{X}$  :

$$\bar{g}_0(K_{y,c}(D\tilde{F}_k(y)(u)), v) \leq (1 + \varepsilon) E_0 (\bar{g}_0(H_{y,c}(v), v))^{1/2} (h'_{y,k}(u, u))^{1/2} .$$

On rappelle que la définition des fonctions  $\tilde{F}_k$  est indépendante des coefficients choisis pour définir la métrique de référence, c'est-à-dire qu'elle donne la même fonction qu'on utilise  $\bar{g}_0 = \bigoplus_{i=1}^p g_0^i$  ou bien  $g_0 = \bigoplus_{i=1}^p a_i^2 g_0^i$ . Nous avons choisi

d'utiliser  $\bar{g}_0$  pour définir le barycentre sur  $\tilde{X}$ , en conséquence les matrices  $H_{y,k}$ ,  $H_0$ ,  $K_{y,k}$  et  $K_0$  sont définies également grâce à la métrique  $\bar{g}_0$ .

On rappelle également que  $G_{i,k}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , désigne la  $i$ -ième composante de  $\tilde{F}_k$  dans la décomposition  $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \times \dots \times \tilde{X}_p$  et que  $H_i$  (resp.  $K_i$ ) désigne la restriction de  $H_{y,k}$  (resp.  $K_{y,k}$ ) à  $T_{\tilde{F}_{i,k}(y)}\tilde{X}_i$  (ici on omet volontairement les indices  $y$  et  $k$  dans  $H_i$  et  $K_i$  afin d'alléger les notations). Si  $v = (v_1, \dots, v_n)$  est tangent à  $\tilde{X}_i$ , c'est-à-dire si  $v_j = 0$  pour tout  $j \neq i$ , alors, grâce à la forme diagonale par blocs de  $K_{y,c}$  nous obtenons

$$\bar{g}_0(K_i(D\tilde{F}_{i,k}(y)(u)), v_i) \leq (1 + \varepsilon)E_0(\bar{g}_0(H_i v_i, v_i))^{1/2} (h'_{y,k}(u, u))^{1/2}$$

(on identifie, par abus de langage  $v$  à sa composante  $v_i$ ).

En utilisant l'inégalité précédente sur  $H_{y,k}$ ,

$$\bar{g}_0^i(K_i(D\tilde{F}_{i,k}(y)(u)), v_i) \leq (1 + \varepsilon)E_0 \left( \frac{1}{pn_i} + \varepsilon \right)^{1/2} \|v_i\|_{g_0^i} (h'_{y,k}(u, u))^{1/2} .$$

En prenant le supremum en  $v_i$  de norme 1, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \|K_{y,c}(D\tilde{F}_{i,k}(y)(u))\|_{\bar{g}_0} &= \|K_i(D\tilde{F}_{i,k}(y)(u))\|_{g_0^i} \\ &\leq \frac{E_0}{\sqrt{p}\sqrt{n_i}} (h'_{y,k}(u, u))^{1/2} (1 + o(\varepsilon)) . \end{aligned}$$

Les inégalités précédentes donnent encore,

$$\frac{E_i}{\sqrt{pn_i}} (1 + o(\varepsilon)) \|D\tilde{F}_{i,k}(y)(u)\|_{\bar{g}_0} \leq \frac{E_0}{\sqrt{p}\sqrt{n_i}} (h'_{y,k}(u, u))^{1/2} (1 + o(\varepsilon)) ,$$

or les coefficients  $a_i$  apparaissant dans la définition de la métrique  $g_0$  valent :

$$a_i = \frac{E_i \sqrt{n}}{\sqrt{n_i} E_0}$$

d'où, pour tout  $u \in T_y \tilde{Y}$

$$a_i \|D\tilde{F}_{i,k}(y)(u)\|_{g_0^i} \leq \sqrt{n} (h'_{y,k}(u, u))^{1/2} (1 + o(\varepsilon))$$

et, pour tout  $u \in T_y \tilde{Y}$

$$\tilde{F}_k^* g_0(u, u) = \|D\tilde{F}_k(y)(u)\|_{g_0}^2 = \sum_{i=1}^p a_i^2 \|D\tilde{F}_{i,k}(y)(u)\|_{g_0^i}^2 \leq n h'_{y,k}(u, u) (1 + o(\varepsilon)) .$$

On peut alors calculer la trace du tenseur symétrique  $\tilde{F}_k^* g_0$  par rapport à la métrique  $g$  sur  $\tilde{Y}$  en  $y \in \tilde{Y}$ .

$$\text{trace}_g(\tilde{F}_k^* g_0) \leq n(1 + o(\varepsilon)) .$$

En effet, on rappelle que  $\text{trace}_g(h'_{y,k}) = 1$  (voir le paragraphe 2).

Par ailleurs le déterminant de  $\tilde{F}_k^* g_0$  relativement à  $g$ , c'est-à-dire  $|\text{Jac } \tilde{F}_k|^2$ , tend presque sûrement vers 1 sur  $\tilde{Y}$ . Alors si  $A_{k,y}$  désigne la matrice de  $\tilde{F}_k^* g_0$  dans une base  $g$ -orthonormée, nous avons, pour  $k$  assez grand,

$$1 - \varepsilon \leq (\det A_{k,y})^{1/n} \leq \frac{1}{n} \text{trace}(A_{k,y}) \leq 1 + \varepsilon$$

ce qui implique que

$$\|A_{k,y} - (\det A_{k,y})^{1/n} Id\| = o(\varepsilon) .$$

En conclusion,  $D\tilde{F}_k$  converge presque sûrement sur  $\tilde{Y}$  vers une isométrie.

Alors, l'application  $\tilde{F}$  est limite uniforme d'une suite d'applications lipschitziennes  $\tilde{F}_k$  dont les différentielles  $D\tilde{F}_k$  sont uniformément bornées et convergent presque sûrement vers une isométrie; le lemme 7.8 de [7] montre que, dans ce cas, l'application  $F$  est 1-lipschitzienne. Nous ne reproduisons pas la preuve de ce fait.

L'application  $\tilde{F}$  est presque partout différentiable par le théorème de Rademacher et, comme elle est 1-lipschitzienne, on a, pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$

$$|\text{Jac } \tilde{F}(y)| \leq 1 .$$

Par ailleurs,

$$\text{vol}(\rho) = \int_Y \tilde{F}^*(\omega_0) = \int_Y (\text{Jac } \tilde{F}(y)) dv_g = \text{vol}(Y, g) .$$

D'où, pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ ,  $\text{Jac } \tilde{F}(y) = 1$ .

Enfin, pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ , pour tout  $u \in T_y \tilde{Y}$ , le caractère 1-lipschitzien de  $\tilde{F}$  implique que

$$\|D_y \tilde{F}(u)\|_{g_0} \leq \|u\|_g .$$

Ceci, combiné au fait que pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ ,  $\text{Jac } \tilde{F}(y) = 1$ , montre que la différentielle de  $\tilde{F}$ ,  $D_y \tilde{F}$ , est presque partout sur  $\tilde{Y}$  une isométrie (entre  $T_y \tilde{Y}$  et  $T_{\tilde{F}(y)} \tilde{X}$ ).

Le lemme est prouvé.  $\square$

**Lemme 4.13** *L'application  $\tilde{F}$  minimise la fonctionnelle*

$$E_p(h) = \frac{1}{\text{vol}(Y)} \int_Y \|Dh\|_{g,g_0}^p$$

*parmi toutes les applications  $h$  de  $\tilde{Y}$  dans  $\tilde{X}$ ,  $\rho$ -équivariantes et lipschitziennes, pour tout  $p \geq n$ . Ici  $\|Dh\|_{g,g_0}^p$  est calculée à l'aide de la métrique  $g$  sur  $\tilde{Y}$  et  $g_0$  sur  $\tilde{X}$ .*

*Preuve.* Notons que, par l'équivariance de  $h$ , l'intégrand dans l'expression de  $E_p(h)$  est invariant par  $\Gamma$  et est donc une quantité définie sur  $Y$ . Si  $\{e_i\}$  est une base  $g$ -orthonormée en  $y \in \tilde{Y}$ .

$$\|Dh(y)\|_{g,g_0} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|Dh(y)(e_i)\|_{g_0}^2 \right)^{1/2}.$$

Cette quantité est définie pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ . On a donc, pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ ,

$$|\text{Jac } h(y)|^{p/n} \leq \|Dh(y)\|_{g,g_0}^p$$

pour tout  $p \geq 0$ . Maintenant si  $p \geq n$

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \frac{\text{vol}(\rho)}{\text{vol}(Y)} \right)^{p/n} = \left( \frac{1}{\text{vol}(Y)} \int_Y \text{Jac } h(y) dv_g(y) \right)^{p/n} \\ &\leq \frac{1}{\text{vol}(Y)} \int |\text{Jac } h(y)|^{p/n} dv_g(y) \leq E_p(h). \end{aligned}$$

Si  $h$  est remplacée par  $\tilde{F}$ , en utilisant le fait que  $D\tilde{F}(y)$  est une isométrie pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ , il vient

$$1 = E_p(\tilde{F}) \leq E_p(h).$$

□

**Corollaire 4.14** *L'application  $\tilde{F}$  est de classe  $C^\infty$ .*

*Preuve.* En fait, nous prouvons que  $\tilde{F}$  est harmonique, la régularité s'en déduit.

De manière heuristique nous pouvons dire que l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle  $E_p$ ,  $p \geq n$  s'écrit

$$\text{div} (\|D\tilde{F}\|_{g,g_0}^{p-2} D\tilde{F}) = 0$$

où la divergence est à comprendre comme celle d'une 1-forme sur  $\tilde{Y}$  à valeurs dans  $T\tilde{X}$  (voir [22], page 6). Mais  $\tilde{F}$  a une différentielle qui est presque partout une isométrie, de sorte que  $\|D\tilde{F}\|_{g,g_0} = 1$  presque partout sur  $\tilde{Y}$ , et l'équation devient

$$\text{div}(D\tilde{F}) = 0$$

c'est-à-dire  $\tilde{F}$  est harmonique.

Plus précisément,  $D\tilde{F}$  est interprétée comme une 1-forme sur  $\tilde{Y}$  à valeurs dans le fibré  $\tilde{F}^{-1}(T\tilde{X})$ , c'est-à-dire un élément de  $C_\rho^0(T^*(\tilde{Y}) \otimes \tilde{F}^{-1}(T\tilde{X}))$ , qui est de plus  $\rho$ -équivariante (voir [22], page 8); soit alors  $Z$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  le long de  $\tilde{F}$ , qui satisfait également la relation de  $\rho$ -équivariance adéquate, c'est-à-dire qui est un élément de  $C_\rho^\infty(\tilde{Y}, \tilde{F}^{-1}(T\tilde{X}))$ ; alors il existe une variation à un paramètre de  $\tilde{F}$ , notée  $\tilde{F}_t$ ,  $\rho$ -équivariante, telle que

$$\forall y \in \tilde{Y}, \quad \frac{d}{dt} \tilde{F}_t(y)|_{t=0} = Z(y)$$

(voir [23], page 397).

Comme  $\tilde{F}$  minimise  $E_p$ , pour  $p \geq n$ , on a

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_p(\tilde{F}_t) = 0$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{1}{\text{vol}(Y)} \int_Y \|D\tilde{F}_t(y)\|_{g, g_0}^p dv_g(y) = 0$$

mais

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\text{vol}(Y)} \int_Y \|D\tilde{F}_t(y)\|_{g, g_0}^p dv_g(y) \right) \\ &= \frac{1}{\text{vol}(Y)} \int_Y \frac{d}{dt} (\|D\tilde{F}_t(y)\|_{g, g_0}^p) dv_g(y) \\ &= \frac{1}{\text{vol}(Y)} \int_Y \frac{p}{2} \|D\tilde{F}_t(y)\|_{g, g_0}^{p-2} \frac{d}{dt} (\|D\tilde{F}_t(y)\|_{g, g_0}^2) dv_g(y). \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , comme  $\|D\tilde{F}(y)\|_{g, g_0} = 1$  pour presque tout  $y \in \tilde{Y}$ , on a

$$0 = \frac{p/2}{\text{vol}(Y)} \int_Y \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\|D\tilde{F}_t(y)\|_{g, g_0}^2) dv_g(y)$$

c'est-à-dire,  $\tilde{F}$  est un point critique de la fonctionne  $E_2$ . L'application  $\tilde{F}$  est donc faiblement harmonique (au sens des distributions, voir [23], page 397). D'après les théorèmes de régularité classiques (voir [23], 3.10, page 397),  $\tilde{F}$  étant continue, elle est de classe  $C^\infty$ .  $\square$

**Remarque.** Nous avons montré que  $\tilde{F}$  est un point critique de  $E_2$ , mais en fait elle minimise cette fonctionnelle car l'espace étant de courbure négative ou nulle la fonctionnelle  $E_2$  est convexe.

Nous pouvons alors terminer la preuve du théorème 4.2 *ii*). L'application  $\tilde{F}$  a une différentielle  $D\tilde{F}(y)$  qui est continue en  $y$  et est donc une isométrie pour tout  $y \in \tilde{Y}$ ; la variété  $\tilde{Y}$  étant connexe et complète,  $\tilde{X}$  étant connexe et simplement connexe nous déduisons de cela que  $\tilde{F}$  est une isométrie surjective de  $\tilde{Y}$  sur  $\tilde{X}$  (c'est en effet un exercice classique, voir [26], 2.108, exercice a), page 97). En particulier  $\rho(\Gamma)$  est un sous-groupe discret cocompact de  $\text{Isom}(\tilde{X})$  agissant sans points fixes et la représentation  $\rho$  est injective.  $\square$

**Remarques.**

i) Le lemme 4.11 peut s'étendre et donne lieu à la proposition suivante :

**Proposition 4.15** *S'il existe une mesure de Radon finie et non nulle  $\mu$ , définie sur  $\partial\tilde{X}$ , invariante par  $\rho(\Gamma)$ , alors  $\text{vol}(\rho) = 0$ .*

*Preuve.* La preuve est identique à celle du lemme 4.11, en posant

$$Z(x) = \int_{\partial\tilde{X}} \nabla B(x, \theta) d\mu(\theta) .$$

$\square$

- ii) Par ailleurs, si  $\text{vol}(\rho) \neq 0$  le groupe  $\rho(\Gamma)$  ne peut pas fixer (globalement) un sous-espace strict et totalement géodésique de  $\tilde{X}$ , car, sinon, nous pourrions choisir une application équivariante  $f$  à valeurs dans ce sous-espace, et la chute de dimension entraînerait que  $\text{vol}(\rho) = 0$ , une contradiction. En utilisant le critère géométrique énoncé dans [32], nous montrons donc (à l'aide de la remarque *ii*) et de la proposition 4.15) que

**Proposition 4.16** *Si  $\text{vol}(\rho) \neq 0$  alors  $\rho(\Gamma)$  est réductif.*

On rappelle que  $\rho(\Gamma)$  est dit réductif si son adhérence de Zariski l'est, c'est-à-dire si cette dernière a un radical unipotent trivial.

Notons que dans [32], la réductivité de  $\rho(\Gamma)$  est prouvée être une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une application harmonique  $\rho$ -équivariante.

Enfin, le théorème 4.2 conduit au

**Corollaire 4.17** *Si  $\rho$  est une représentation de  $\Gamma = \pi_1(Y)$  dans  $\text{Isom}(\tilde{X}, g_0)$ , où  $Y$  est une variété compacte, alors*

$$\text{minvol}(Y) \geq \left( \frac{\text{Ent}(\tilde{X}, g_0)}{n-1} \right)^n \text{vol}(\rho) .$$

*Preuve.* On rappelle que

$$\text{minvol}(Y) = \inf \{ \text{vol}(Y, g) \mid g \text{ métrique sur } Y \text{ telle que } |K_g| \leq 1 \}$$

et que si la courbure sectionnelle  $K_g$  de la métrique  $g$  vérifie  $K_g \geq -1$  alors on a  $\text{Ent}(Y, g) \leq n-1$  (voir [7]).  $\square$

**Remarque.**

*i)* En particulier, s'il existe une représentation  $\rho$  telle que  $\text{vol}(\rho) \neq 0$  alors  $\text{minvol}(Y) > 0$ .

*ii)* On pourrait remplacer le volume minimal  $\text{minvol}(Y)$  par

$$\text{minvol}_{\text{Ricci}}(Y) = \inf \{ \text{vol}(Y, g) \mid \text{Ricci}_g \geq -(n-1)g \} .$$

## 5 Applications

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au cas où  $(\tilde{Y}, \tilde{g})$  est elle-même un produit fini d'espaces symétriques simplement connexe de courbure strictement négative. Comme précédemment un tel espace sera noté  $(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$ , où  $g_0$  est la métrique définie au paragraphe 2 et qui minimise l'entropie. De même,  $\Gamma$  désigne un réseau cocompact et sans torsion de  $\text{Isom}(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$ , et  $\rho$  est un morphisme

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Isom}(\tilde{X}, \tilde{g}_0).$$



Des exemples de telles représentations sont rares et le but de ce paragraphe est, en particulier, de rappeler quelques unes des constructions classiques.

Dans cette situation, le théorème 4.2 s'écrit

$$\text{vol}(\rho) \leq \text{vol}(X, g_0)$$

où  $X = \tilde{X}/\Gamma$ . L'égalité, dans cette inégalité, n'a lieu que si et seulement si  $(\tilde{X}/\rho(\Gamma), g_0)$  est une variété isométrique à  $(X, g_0)$ , c'est-à-dire si  $\rho(\Gamma)$  est un réseau cocompact de  $\text{Isom}(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$ . Nous répondons, dans ce paragraphe à la question :

**Question 5.1** *Existe-t-il des représentations, comme ci-dessus, telles que  $0 < \text{vol}(\rho) < \text{vol}(X, g_0)$  ?*

Rappelons qu'un réseau  $\Gamma$  dans un groupe de Lie  $G$ , semi-simple connexe sans facteur compact est dit réductible si  $G$  possède des sous-groupes normaux  $H$  et  $H'$  tels que  $G = H.H'$ ,  $H \cap H'$  est discret et  $\Gamma/(\Gamma \cap H).(\Gamma \cap H')$  est fini (voir [40] page 86).  $\Gamma$  est dit irréductible s'il n'est pas réductible

Alors, lorsque  $\Gamma$  est irréductible, le théorème de super-rigidité de Margulis ([34], chapitre VII) fournit une réponse négative complète à la question ci-dessus.

**Proposition 5.2** *Avec les notations ci-dessus, si  $\Gamma$  est irréductible et  $\text{vol}(\rho) \neq 0$  alors  $\rho(\Gamma)$  est un réseau cocompact de  $\text{Isom}(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$  et donc  $\text{vol}(\rho) = \text{vol}(X, g_0)$ .*

*Preuve.* On se propose d'appliquer le théorème 6.16 de [34], p. 332. On note  $G = \text{Isom}(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$ , c'est un groupe algébrique défini sur  $\mathbf{R}$  et semi-simple. Pour utiliser le résultat 6.16 de [34] il faut travailler avec des groupes de Lie connexe, or  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $G_+$ , le sous-groupe de  $G$  constitué des isométries préservant l'orientation et  $G_+$  n'est pas nécessairement connexe. En effet, si  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , où  $\gamma_i \in \text{Isom}(\tilde{X}_i, \tilde{g}_0^i)$ , et si un nombre pair de  $\gamma_i$  renverse l'orientation alors  $\gamma \in G_+$ , néanmoins  $\gamma$  ne peut pas être connecté à l'identité.

On rappelle que  $G$  à un nombre fini de composantes connexes car c'est un groupe algébrique. Soit  $G^0$  la composante de l'élément neutre et  $\Gamma^0 = G^0 \cap \Gamma$ .

Il est aisé de vérifier que  $G^0 = \text{Isom}_+(\tilde{X}_1, \tilde{g}_0^1) \times \dots \times \text{Isom}_+(\tilde{X}_p, \tilde{g}_0^p)$  où  $\text{Isom}_+$  désigne le groupe (connexe) d'isométries directes.

Les quatre lemmes qui suivent n'utilisent pas l'irréductibilité de  $\Gamma$ . Cette hypothèse ne sera utilisée que pour appliquer le théorème de super-rigidité.

**Lemme 5.3** *Le groupe  $\Gamma^0$  est un réseau cocompact de  $G^0$  ainsi que de  $G$ .*

*Preuve.* L'application naturelle  $\Gamma/\Gamma^0 \hookrightarrow G/G^0$  est injective,  $\Gamma^0$  est donc d'indice fini dans  $\Gamma$  et est un réseau cocompact de  $G$ . Par ailleurs,  $G^0/\Gamma^0$  est une composante connexe de  $G/\Gamma^0$ , donc est compacte. Un théorème général est prouvé dans [40], p. 23 (théorème 1.13).  $\square$

Pour alléger les notations nous désignerons maintenant par  $\rho$  la représentation restreinte à  $\Gamma^0$ . Soit  $\Gamma^1 = \rho^{-1}(\rho(\Gamma^0) \cap G^0)$ .

**Lemme 5.4** *Le groupe  $\Gamma^1$  est d'indice fini dans  $\Gamma^0$ .*

*Preuve.* L'application  $\Gamma^0/\Gamma^1 \rightarrow G/G^0$  induite par  $\rho$  est injective, d'où le résultat.  $\square$

Le groupe  $\Gamma^1$  est donc un réseau cocompact de  $G$  (et de  $G^0$ ) qui de plus, comme  $\Gamma$ , est irréductible. La restriction de  $\rho$  à  $\Gamma^1$  est un homomorphisme

$$\rho : \Gamma^1 \rightarrow G^0$$

à valeurs dans le groupe semi-simple, connexe  $G^0$ .

**Lemme 5.5** *Les groupes  $G$  et  $G^0$  n'ont pas de centre.*

*Preuve.* Si  $a \in G^0$  est dans le centre de  $G^0$ ,  $a$  doit commuter avec tous les éléments de  $G^0$ ; or, pour  $x \in \tilde{X}$  fixé  $x = (x_1, \dots, x_n)$  les isométries du type  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , où  $\gamma_i$  est une isométrie directe fixant  $x_i$ , sont dans  $G^0$ . L'élément  $a$  doit donc fixer  $x$ , pour tout  $x$ , c'est donc l'identité.  $\square$

Dans la terminologie de [34], le groupe  $G^0$  est adjoint (il n'a pas de centre et est défini sur  $\mathbf{R}$ , voir [34], p. 13).

**Lemme 5.6** *Le groupe  $\rho(\Gamma^1)$  est Zariski-dense dans  $G^0$ .*

*Preuve.* Rappelons que  $\Gamma^1$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ , on voit alors, de manière élémentaire, que

$$\text{vol}(\rho) = [\Gamma : \Gamma^1] \text{vol}(\rho|_{\Gamma^1})$$

de sorte que l'hypothèse de la proposition 5.2 implique que  $\text{vol}(\rho|_{\Gamma^1}) \neq 0$ . La proposition 4.16, qui est un corollaire de la remarque 1.4 *i*) de [32], montre que  $\rho(\Gamma^1)$  est réductif. Soit  $H$  son adhérence de Zariski, alors  $H$  est également réductif. Comme  $H$  est algébrique, quitte à restreindre à un réseau d'indice fini dans  $\Gamma^1$ , on peut supposer que  $H$  est connexe.

L'algèbre de Lie de  $H$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre réductive algébrique de  $\mathfrak{g}^0$ , alors d'après le théorème 4, p. 261 de [37], il existe une involution de Cartan de  $\mathfrak{g}^0$  qui stabilise  $\mathfrak{h}$ . Plus précisément, l'espace symétrique  $\tilde{X}$  est identifié à  $G^0/K^0$  par le choix d'une décomposition de Cartan de  $G^0$  (ici,  $K^0$  désigne un sous-groupe compact maximal de  $G^0$ ); alors, si  $\sigma^0$  désigne l'involution de Cartan correspondante, il existe  $g \in G^0$  tel que l'involution  $g\sigma^0g^{-1}$  préserve  $\mathfrak{h}$ . Soit  $x \in \tilde{X}$  le point correspondant à la classe de  $g$  dans  $G^0/K^0$ , alors d'après la proposition 2.6.2 de [21], la sous-variété  $Hx = Y$  est totalement géodésique dans  $(\tilde{X}, g_0)$  et  $\rho(\Gamma^1)$  invariante.

On peut donc, pour calculer le volume de la représentation  $\rho|_{\Gamma^1}$  ( $\rho$  restreinte à  $\Gamma^1$ ) utiliser une application  $C^1$ ,  $\rho|_{\Gamma^1}$ -équivariante de  $\tilde{X}$  dans  $Y$ . Si  $H \neq G^0$  alors  $\dim Y < \dim \tilde{X}$  ce qui implique  $\text{vol}(\rho|_{\Gamma^1}) = 0$  et  $\text{vol}(\rho) = 0$ . Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de la proposition.  $\square$

Nous sommes maintenant en situation pour appliquer le théorème de super-rigidité 6.16 *b*) de [34], p. 332 (le groupe  $G^0$ , qui est le groupe de départ et d'arrivée n'a aucune composante simple compacte, c'est-à-dire n'a pas de facteur  $\mathbf{R}$ -anisotrope). La représentation  $\rho$  se prolonge en un (unique) homomorphisme continu

$$\tilde{\rho} : G^0 \rightarrow G^0$$

qui est donc analytique ([29], p. 117, théorème 2.6). Le noyau  $\text{Ker } \tilde{\rho}$  est un sous-groupe de Lie de  $G^0$  (car fermé). On rappelle que  $G^0 = \prod_{i=1}^p G_i$ , où  $G_i = \text{Isom}_+(\tilde{X}_i, \tilde{g}_0^i)$  est un groupe simple. Comme  $\text{Ker } \tilde{\rho}$  est normal, il est produit de certains  $G_i$  de la liste précédente :  $\text{Ker } \tilde{\rho} = \prod_{k=1}^q G_k$  pour  $q \leq p$ .

De plus, l'image  $\tilde{\rho}(G^0)$  est un groupe de Lie isomorphe à  $G^0 / \text{Ker } \tilde{\rho}$ , c'est-à-dire isomorphe à  $\prod_{k=q+1}^p G_k$  si  $q < p$ , à  $\{e\}$  sinon. En particulier  $\tilde{\rho}(G^0)$  est un sous-groupe semi-simple de  $G^0$ , invariant par  $\rho(\Gamma^1)$ . L'argument du lemme 5.6 montre que l'hypothèse  $\text{vol}(\rho) \neq 0$  implique que  $\tilde{\rho}(G^0)$  doit être égal à  $G^0$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\rho}$  doit être un automorphisme (analytique). En particulier  $\tilde{\rho}$  est un difféomorphisme et  $\tilde{\rho}(\Gamma^1)$  est un groupe discret et cocompact. Le théorème de Mostow permet de conclure que les variétés localement symétriques  $\tilde{X}/\Gamma^1$  et  $\tilde{X}/\tilde{\rho}(\Gamma^1)$  sont isométriques et donc que

$$\text{vol}(\rho|_{\Gamma^1}) = \text{vol}(\tilde{X}/\Gamma^1) .$$

Comme  $\Gamma^1$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ , on en déduit que

$$\text{vol}(\rho) = \text{vol}(X, g_0) .$$

□

Nous allons maintenant étudier les cas où le réseau  $\Gamma$  est réductible. On rappelle qu'un réseau  $\Gamma^1$  de  $G^0$  qui est réductible vérifie les propriétés suivantes (voir [40], p. 86, 5.22) : il existe une famille finie de sous-groupes normaux et connexes de  $G^0$ ,  $H_1, \dots, H_k$  telle que :

- i)  $H_i \cap \prod_{j \neq i} H_j$  est discret pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ .
- ii)  $G^0 = \prod_{i=1}^k H_i$ .
- iii)  $\Gamma_i^1 = H_i \cap \Gamma^1$  est un réseau irréductible de  $H_i$ .
- iv)  $\prod_{i=1}^k \Gamma_i^1$  est un sous-groupe normal d'indice fini de  $\Gamma^1$ .

Comme précédemment nous pouvons travailler à un sous-groupe d'indice fini près et donc supposer que  $\prod_{i=1}^k \Gamma_i^1 = \Gamma^1$ . De même, chaque  $H_i$  doit être un produit de facteurs simples composant  $G^0$ , c'est-à-dire

$$H_i = \prod_{s=p_i}^{p_i+r_i} G_s .$$

En particulier, si  $i \neq j$ ,  $H_i$  et  $H_j$  commutent.

**Proposition 5.7** *Avec les notations ci-dessus, si  $\Gamma$  est réductible et  $\text{vol}(\rho) \neq 0$  et si, pour tout  $i$ ,  $H_i$  est super-rigide alors  $\rho(\Gamma)$  est un réseau cocompact et donc  $\text{vol}(\rho) = \text{vol}(X, g_0)$ .*

*Preuve.* Par groupe super-rigide nous entendons un groupe auquel nous pouvons appliquer le théorème de super-rigidité, c'est-à-dire, dans notre situation, soit  $H_i$  est de rang supérieur ou égal à 2 ( $r_i \geq 1$ ) ou bien  $H_i$  est le groupe d'isométries directes d'un espace hyperbolique quaternionien ou du plan hyperbolique de Cayley.

Comme précédemment nous travaillons avec le sous-groupe  $\Gamma^1$ . Définissons  $\rho_i = \rho|_{\Gamma_i^1}$ , pour  $i = 1, \dots, k$ ; ici nous commettons un abus de langage et identifions  $\Gamma_i^1$  et  $\{e\} \times \dots \times \{e\} \times \Gamma_i^1 \times \{e\} \times \dots \times \{e\}$ . Définissons les groupes  $K_i = \overline{\rho_i(\Gamma_i^1)}$ , l'adhérence de Zariski de  $\rho_i(\Gamma_i^1)$ ; ce sont des sous-groupes algébriques de  $G^0$  et le théorème 6.15 *i), a)* de [34], p. 332 affirme que, si  $\text{rang } H_i \geq 2$ ,  $K_i$  est un groupe semi-simple. Insistons sur le fait que  $H_i$  est considéré comme un sous-groupe du groupe de départ de la représentation  $\rho$  et  $K_i$  comme un sous-groupe du groupe d'arrivée. Le même résultat pour le cas où  $H_i$  est le groupe d'isométries (directes) de l'espace hyperbolique quaternionien ou du plan hyperbolique de Cayley est prouvé dans [46]. Dans tous les cas, donc,  $K_i$  est un groupe semi-simple.

**Lemme 5.8** *Les groupes  $K_i$  sont sans facteurs compacts et  $\prod K_i$  est semi-simple.*

*Preuve.* Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma_i^1$  nous pouvons supposer que  $K_i$  est un produit de groupes simples. Supposons qu'il contienne un facteur compact, soit

$$K_i = L_i^1 \times \dots \times L_i^{k_i} \times U$$

où  $U$  est un groupe simple compact; alors  $U$  est normal dans  $K_i$ . Par ailleurs  $\rho_i(\Gamma_i^1)$  et  $\rho_j(\Gamma_j^1)$  commutent si  $i \neq j$ , car  $\Gamma_i^1$  et  $\Gamma_j^1$  commutent dans  $G^0$  (nous faisons ici l'abus de langage signalé précédemment); les groupes  $K_i$  et  $K_j$  commutent donc également si  $j \neq i$ . Le groupe  $U$  est donc normal dans le produit  $\prod_{i=1}^k K_i$ ; remarquons que ce produit est défini comme le groupe engendré par les produits d'éléments de  $K_i$ . Il est défini sans ambiguïté car les groupes commutent deux à deux. Par ailleurs  $\prod_{i=1}^k K_i$  est Zariski-dense donc égal à  $G_0$ ; en effet, il contient  $\rho(\Gamma^1)$  qui Zariski dense car  $\text{vol}(\rho) \neq 0$  (voir le lemme 5.6). Le groupe  $U$  est donc normal dans  $G^0$ ; il est alors égal à une des composantes de  $G^0$  ou bien réduit à l'élément neutre; aucune des composantes de  $G^0$  n'étant compacte  $U$  est trivial.

Enfin les arguments précédents montrent que les composantes simples de  $K_i$  et  $K_j$  sont distincts et donc que  $\prod_{i=1}^k K_i$  est semi-simple (c'est le produit de toutes les composantes des groupes  $K_i$ ).  $\square$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de super-rigidité de [34], (6.16 *c)*, p. 332) pour les composantes  $H_i$  de rang  $\geq 2$  et celui de [16] pour les autres et affirmer que les représentations  $\rho_i$  se prolongent en des morphismes continus

$$\varphi_i : H_i \rightarrow K_i .$$

On construit alors un prolongement de  $\rho$  en

$$\begin{aligned} \varphi : G^0 &\longrightarrow \prod_{i=1}^k K_i \subset G^0 \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_k) &\longmapsto (\varphi_1(\gamma_1), \dots, \varphi_k(\gamma_k)) \end{aligned}$$

Les morphismes  $\varphi_i$  commutent et  $\varphi$  est bien défini et est un morphisme continu. On termine donc la preuve de la proposition refreductible par les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition 5.2.  $\square$

Nous nous intéressons maintenant au cas où  $G_0$  possède des composantes simples non super-rigides. Supposons donc que  $\Gamma^1 = \Gamma_1^1 * \Gamma_2^1$  (produit libre) où  $\Gamma_1^1$  est un réseau cocompact d'un groupe  $H_1$  extension finie d'un produit de groupes super-rigides et  $\Gamma_2^1$  est un réseau cocompact de  $H_2$  produit de copies de  $PO(k, 1)$  et  $PU(k', 1)$ . Les arguments qui précèdent s'appliquent pour montrer que

i)  $\rho(\Gamma)$  est Zariski dense dans  $G^0$  si  $\text{vol}(\rho) \neq 0$ .

ii) Soit  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ , l'adhérence de Zariski de  $\rho_i(\Gamma_i^1)$ . La densité de  $\rho(\Gamma)$  implique la densité (pour la topologie de Zariski) de  $K_1 K_2$ ; les deux groupes commutent. En décomposant  $\Gamma_1^1$  en produits de réseaux cocompacts irréductibles on voit, en utilisant les arguments de la preuve du lemme 5.8, que  $K_1$  est semi-simple sans facteurs compacts. Si  $G^0 = \prod_{i=1}^p G_k$ , où les  $G_k$  sont des groupes d'isométries directes d'espaces symétriques de rang 1 et de type non compact, alors  $K_1 = \prod_{k=1}^q G_k$  (par exemple); en effet,  $K_1$  est un sous-groupe normal de  $G^0$ .

Le groupe  $K_2$  est donc inclus dans  $\prod_{q+1}^p G_k$  et comme  $K_1 K_2$  est Zariski dense,

$K_2 = \prod_{q+1}^p G_k$  (en particulier il est semi-simple). On peut choisir une application équivariante  $f_i$  de  $H_i \rightarrow K_i$  et un calcul immédiat montre que

$$\text{vol}(\rho) = \text{vol}(\rho_1) \text{vol}(\rho_2) ,$$

de sorte que  $\text{vol}(\rho_1) \neq 0$ . Le théorème de super-rigidité (appliqué comme précédemment aux composantes irréductibles de  $\Gamma_1^1$ ) permet d'étendre  $\rho_1$  en un morphisme continu

$$\varphi_1 : H_1 \rightarrow K_1$$

et la non nullité de  $\text{vol}(\rho_1)$  montre que  $\varphi_1$  est un isomorphisme et donc montre que  $\rho(\Gamma_1^1)$  est isomorphe à  $\Gamma_1^1$  ce qui conduit à

$$\text{vol}(\rho_1) = \text{vol}(H_1/\Gamma_1^1) .$$

Le groupe  $K_2$  contient les composantes non super-rigides de  $G^0$ , de même que  $H_2$ , ils sont donc isomorphes. C'est la seule composante non triviale de  $\rho$ .

Nous donnons maintenant un exemple de représentation du groupe fondamental d'une variété hyperbolique réelle, de volume non nul et d'image non discrète.

**Exemple : produit amalgamé.**

Soit  $X$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $n \geq 3$ . Supposons qu'il existe dans  $X$  une hypersurface compacte plongée totalement géodésique notée  $\Sigma$  et incompressible, c'est-à-dire telle que l'application induite  $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(X)$  soit une injection. Nous supposons de plus que cette hypersurface sépare  $X$  en deux composantes connexes  $X_A$  et  $X_B$  de groupe fondamental respectif  $A$  et  $B$ . En posons  $C = \pi_1(\Sigma)$ , le théorème de Van Kampen montre que

$$\pi_1(X) = A *_C B$$

produit amalgamé de  $A$  et  $B$  sur  $C$ . Les groupes  $\pi_1(X)$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des sous-groupes de  $PO(n, 1)$  et agissent donc sur l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}^n$ . Choisissons un relevé  $\tilde{\Sigma}$  de  $\Sigma$  dans  $\mathbf{H}^n$ ;  $\tilde{\Sigma}$  est une hypersurface totalement géodésique. On identifie  $C$  au sous-groupe de  $\pi_1(X)$  qui fixe  $\tilde{\Sigma}$ . Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $\tilde{\Sigma}$ , on définit

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(X) &\longrightarrow PO(n, 1) \\ a \in A &\longmapsto a \\ b \in B &\longmapsto sbs^{-1} . \end{aligned}$$

**Lemme 5.9** *L'application  $\rho$  définit une représentation de  $\pi_1(X)$  dans  $PO(n, 1)$ .*

*Preuve.* Le groupe  $\pi_1(X)$  est le quotient du produit libre  $A * B$  par les relations qui consistent à identifier un élément de  $C$  dans  $A$  avec le même élément dans  $B$ . Comme  $\rho$  est un morphisme en restriction à  $A$  et à  $B$  respectivement, il suffit de vérifier la compatibilité avec les relations. Or, si  $c \in C$

$$scs^{-1} = c$$

d'où le résultat. □

Afin de calculer le volume de cette représentation il faut trouver une application lipschitzienne  $f : \mathbf{H}^n \rightarrow \mathbf{H}^m$ ,  $\rho$ -équivariante.

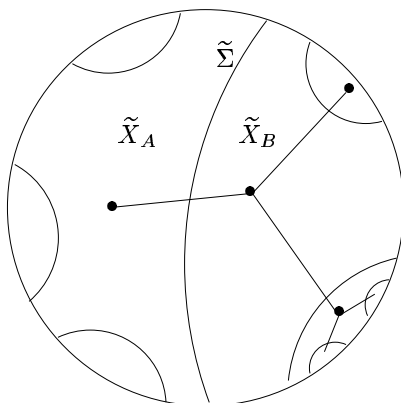
**Proposition 5.10** *Avec les notations ci-dessus on a,*

$$\text{vol}(\rho) = \text{vol}(X_A) - \text{vol}(X_B) .$$

*Preuve.* Nous allons décrire  $f$  de manière précise et le calcul du volume s'en suivra. Le fait que  $\pi_1(X)$  soit un produit amalgamé est équivalent ([44], p. 48) à l'existence d'un arbre  $T$ , sur lequel  $\pi_1(X)$  opère (sans inversion) en sorte que le quotient soit un segment (deux sommets joints par une arête). Les sous-groupes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alors les stabilisateurs respectifs des deux sommets et de l'arête de l'arbre quotient. Nous allons donner une description géométrique de cet arbre  $T$ . Nous avons choisi un relevé  $\tilde{\Sigma}$  de l'hypersurface compacte  $\Sigma$  plongée dans  $X$ ;  $\Sigma$  étant une sous-variété plongée, sans auto-intersection, les translats  $\gamma\tilde{\Sigma}$  de  $\tilde{\Sigma}$  par les éléments  $\gamma \in \pi_1(X)$  sont deux à deux disjoints; ils séparent donc  $\mathbf{H}^n$  en une infinité de composantes connexes. Les deux composantes connexes

dont l'adhérence contient  $\tilde{\Sigma}$  sont des revêtements universels de  $X_A$  et  $X_B$  respectivement, que nous noterons  $\tilde{X}_A$  et  $\tilde{X}_B$ . Les autres composantes connexes sont les translatés par les éléments de  $\pi_1(X)$  de  $\tilde{X}_A$  et  $\tilde{X}_B$ . Les sous-groupes  $A$  et  $B$  préservent  $\tilde{X}_A$  et  $\tilde{X}_B$  respectivement (après un choix convenable d'un point base et d'un de ses relevés).

Maintenant, choisissons un point  $x_a \in \tilde{X}_A$  et un point  $x_b \in \tilde{X}_B$ , les sommets de l'arbre  $T$  sont les  $\gamma(x_a)$  et  $\gamma(x_b)$ , où  $\gamma$  parcourt  $\pi_1(X)$ ; on joint deux sommets  $\gamma(x_a)$  et  $\gamma'(x_b)$  (de type différent) si, et seulement si, les composantes connexes correspondantes  $\gamma\tilde{X}_A$  et  $\gamma'\tilde{X}_B$  sont telles que  $\overline{\gamma\tilde{X}_A} \cap \overline{\gamma'\tilde{X}_B} \neq \emptyset$ .



Soit alors  $x \in \tilde{X}$ , il appartient à une composante connexe du complémentaire de  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\tilde{\Sigma}$  qui correspond à un sommet de l'arbre précédent. Dans cet arbre il

existe un unique chemin joignant la composante  $\tilde{X}_A$  à celle de  $x$ ; ce chemin est une succession d'arêtes  $e_1, e_2, \dots, e_k$  prises dans l'ordre, de la composante  $\tilde{X}_A$  à celle de  $x$ . Chacune de ces arêtes correspond à une image de  $\tilde{\Sigma}$  et nous noterons  $s_{e_i}$  la symétrie orthogonale hyperbolique par rapport à cette hypersurface totalement géodésique.

**Definition 5.11** On pose  $f(x) = s_{e_1} \circ s_{e_2} \circ \dots \circ s_{e_k}(x)$

L'application  $f$  est bien définie. Elle est  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux et continue; en effet, la seule ambiguïté dans la formule ci-dessus est lorsque  $x$  est sur l'hypersurface définie par  $e_k$ , mais dans ce cas  $s_{e_k}(x) = x$ .

**Lemme 5.12** L'application  $f$  est  $\rho$ -équivariante.

*Preuve.* Il suffit de vérifier l'équivariance pour les éléments de  $A$  et ceux de  $B$  qui engendrent le groupe fondamental de  $X$ .

a) Si  $a \in A$ , le chemin dans l'arbre joignant la composante  $\tilde{X}_A$  à celle de  $ax$  est constitué des arêtes  $ae_1, \dots, ae_k$ ; en effet, puisque  $a \in A$ ,  $a\tilde{X}_A = \tilde{X}_A$  et

l'arête  $ae_1$  a son origine dans  $\tilde{X}_A$ . D'où

$$\begin{aligned} f(ax) &= s_{ae_1} \cdots s_{ae_k}(ax) \\ &= as_{e_1}a^{-1} \cdots as_{e_k}a^{-1}(ax) \\ &= af(x) = \rho(a)f(x) \end{aligned}$$

b) si  $b \in B$ , le chemin joignant la composante  $\tilde{X}_A$  à celle de  $bx$  est constitué du chemin dans l'arbre joignant  $\tilde{X}_A$  à  $b\tilde{X}_A$  suivi de l'image par  $b$  du chemin précédent. Rappelons que les sommets de l'arbre sont les éléments de  $\Gamma/A$  et  $\Gamma/B$  et les arêtes sont les éléments de  $\Gamma/C$  (voir [44]). Par exemple, la composante connexe  $\tilde{X}_A$  correspond à  $eA$  (classe de l'élément neutre  $e$ ), celle de  $\tilde{X}_B$  à  $eB$ ; elles sont

$$\begin{array}{c} eA \qquad \qquad eB \qquad \qquad bA \\ \bullet \qquad \qquad \bullet \qquad \qquad \bullet \\ \xrightarrow{\quad eC \quad} \xrightarrow{\quad bC \quad} \end{array}$$

reliées par l'arête  $eC$ . Par ailleurs  $b\tilde{X}_A$  correspond à la classe  $bA$  reliée à  $eB$  par l'arête  $bC$ . En conclusion, nous avons

$$f(bx) = s \circ s_{be} \circ (bs_{e_1} \cdots s_{e_k} b^{-1})(bx)$$

où  $e$  désigne par abus de langage l'arête  $eC$  et  $s_e = s$ . D'où

$$\begin{aligned} f(bx) &= (sbsb^{-1}) \circ (bs_{e_1} \cdots s_{e_k} b^{-1})(bx) \\ &= \rho(b)f(x) . \end{aligned}$$

□

*Fin de la preuve de la proposition .* La fin de la preuve est évidente; en effet  $f$  renverse l'orientation sur  $\tilde{X}_B$  et est l'identité sur  $\tilde{X}_A$ , il suffit donc de choisir un domaine fondamental dans la réunion  $\tilde{X}_A \cup \tilde{X}_B$  pour lequel  $\Sigma$  se relève sur  $\tilde{\Sigma}$ . □

Pour être complet, il faut construire des variétés  $X$  hyperboliques admettant une hypersurface connexe séparante qui sépare la variété en deux parties de volume distinct. Cette construction nous a été suggérée par N. Bergeron. Soit  $M_1$  une variété compacte de dimension 3, hyperbolique à bord totalement géodésique qui est une surface compacte connexe notée  $\Sigma$ . De tels exemples existent (voir [38], [12], th. 4.3 et [5]). Considérons le double  $M$  obtenu par recollement de deux copies de  $M_1$  le long de  $\Sigma$ . La variété compacte  $M$  sans bord est hyperbolique car  $\Sigma$  est totalement géodésique. Le théorème 2 de [6] montre que l'on peut construire un revêtement fini  $\widehat{M}$  de  $M$  tel que  $\Sigma$  se relève isométriquement à  $\widehat{M}$  en une sous-variété totalement géodésique  $\widehat{\Sigma}$  non séparante. On découpe alors  $\widehat{M}$  le long de  $\widehat{\Sigma}$  pour obtenir une variété à bord dont les deux composantes du bord, notée  $\widehat{\Sigma}_1, \widehat{\Sigma}_2$ , sont isométriques à  $\widehat{\Sigma} \simeq \Sigma$  et on recolle à chacune de ces composantes une copie de  $M_1$ . Alors,  $\widehat{\Sigma}_1$  (et  $\widehat{\Sigma}_2$ ) découpe la nouvelle variété hyperbolique en deux composantes l'une de volume égal à  $\text{vol}(M_1)$  et l'autre de volume égal à  $\text{vol}(\widehat{M}) + \text{vol}(M_1) > \text{vol}(M_1)$ . □



Il serait intéressant de disposer de tels exemples en dimension  $n \geq 4$ . Remarquons, par ailleurs, que l'ensemble des valeurs de  $\text{vol}(\rho)$  ainsi obtenu est discret (pour une variété donnée); une explication précise à ce phénomène est fournie par le chapitre suivant.

## 6 Volume et déformations

Nous avons déjà remarqué que, lorsque la dimension de  $X$  est paire, le volume d'une représentation ( $\tilde{X}$  est supposée symétrique) est le nombre d'Euler du fibré plat correspondant. En particulier, ce nombre est constant le long des déformations continues de représentations. Nous allons prouver un résultat analogue dans le cas où la dimension de  $X$  est impaire. De telles déformations existent en dimension 3 ([4]) et nous en donnons des exemples. La constance du volume est prouvée en dimension 3 par S. Reznikov [42]; nous donnons ici une preuve, valable en toute dimension, qui repose sur la formule de Schläfli. Dans ce qui suit  $M$  désigne une variété riemannienne fermée et orientée de dimension  $n$  et  $\tilde{X}$  l'espace hyperbolique réel simplement connexe de dimension  $n$ .

**Théorème 6.1** *Soit  $M$  une variété différentielle fermée et orientée et  $\rho_t : \Pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\tilde{X})$  une famille de représentations qui dépend de manière  $C^1$  du paramètre  $t \in \mathbf{R}$ , alors le volume  $\text{vol}(\rho_t)$  est constant.*

La preuve repose sur un lemme technique dont le but est de construire une application équivariante affine par morceaux particulière. Par application affine nous entendons une application affine le long de toute géodésique.

**Lemme 6.2** *Sous les hypothèses du théorème 6.1, il existe une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $\tilde{M}$  et une application continue et affine par morceaux  $\tilde{f}_0 : \tilde{M} \rightarrow \tilde{X}$  qui est  $\rho_0$ -équivariante et non dégénérée au sens où l'image par  $\tilde{f}_0$  d'un simplexe de la triangulation  $\mathcal{T}$  est un simplexe géodésique de  $\tilde{X}$  non dégénéré.*

*Preuve.* Un théorème classique affirme que toute variété lisse compacte  $M$  est homéomorphe à un complexe simplicial  $K$ ; plus précisément  $K$  est un espace triangulé muni d'une métrique euclidienne par morceaux (que l'on peut réaliser dans  $\mathbf{R}^n$ ). Cet homéomorphisme peut, de plus, être choisi Lipschitzien. Le volume de toute représentation de  $\Pi_1(M) = \Pi_1(K)$  peut donc se calculer en intégrant sur  $M$  ou bien sur  $K$ . Dans la suite nous noterons également  $M$  ce complexe euclidien par morceaux et toute triangulation sera une subdivision de la décomposition de  $K$  en simplexes.

Choisissons alors une triangulation suffisamment fine de  $M$  et appelons  $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$  la triangulation invariante par  $\Pi_1(M)$  sur  $\tilde{M}$  qui s'en déduit par image réciproque. Soit  $D$  un domaine fondamental (de Dirichlet) dans  $\tilde{M}$  pour l'action de  $\Pi_1(M)$ . Quitte à modifier un peu  $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$  ou bien  $D$  on peut supposer qu'aucun sommet de la triangulation n'est sur  $\partial D$ .

Notons  $(m_1, \dots, m_N)$  la liste des sommets de  $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$  qui sont dans l'intérieur de  $D$ ,  $N$  est alors le cardinal des sommets de la triangulation de départ sur  $M$ . Choisissons maintenant  $N$  points dans  $\tilde{X}$ , notés  $(y_1, \dots, y_N)$  de sorte que

si  $(m_{i_1}, \dots, m_{i_{k+1}})$  est un  $k$ -simplexe de  $\mathcal{T}$  alors le simplexe géodésique de  $\tilde{X}$  de sommets  $(y_{i_1}, \dots, y_{i_{k+1}})$  est non dégénéré pour tout  $k \leq \dim M + 1$ . Ceci est toujours possible car, pour chaque sommet  $y_j$ , la réunion des conditions de dégénérescence des simplexes contenant  $y_j$  est un ensemble fermé d'intérieur vide (une réunion finie de  $k - 1$ -plans). Ces choix étant fait, il existe autour de chaque point  $y_j$  un petit voisinage  $V_j$  en sorte que, pour n'importe quel choix de points  $y'_1, \dots, y'_N$  avec  $y'_j \in V_j$ , la propriété de non dégénérescence ci-dessus soit encore vérifiée. Par la suite nous aurons également besoin de choisir les point  $y_j$  de sorte que

$$\forall \gamma \in \Pi_1(M), \forall j \neq i, \quad y_i \neq \rho_0(\gamma)y_j,$$

ceci est toujours possible car la réunion des points de l'orbite des  $y_j$ , pour  $j \neq i$ , qui sont dans  $V_i$  est un ensemble dénombrable. On procède donc par récurrence,  $y_1$  étant fixé on choisit  $y_2 \in V_2$  dans l'ensemble partout dense qui est le complémentaire de l'orbite de  $y_1$ , puis  $y_3$  dans le complémentaire des orbites de  $y_1$  et  $y_2$  et ainsi de suite.

On définit alors  $\tilde{f}_0$  par :

$$\forall \gamma \in \Pi_1(M), \forall i = 1, \dots, N \quad \tilde{f}_0(\gamma m_i) = \rho_0(\gamma)y_i,$$

et on étend  $\tilde{f}_0$  à l'intérieur d'un simplexe  $(m_{i_1}, \dots, m_{i_N})$  en une application affine sur le simplexe géodésique engendré par les points  $y_{i_1}, \dots, y_{i_N}$ ; on utilise pour cela la métrique euclidienne sur les simplexes de  $\tilde{M}$  et la métrique hyperbolique sur ceux de  $\tilde{X}$ . Par le choix des points  $y_i \in \tilde{X}$ , tous les simplexes dont les sommets sont dans l'intérieur de  $D$  sont transformés par  $\tilde{f}_0$  en des simplexes non dégénérés. Considérons maintenant le cas où certains sommets sont dans l'intérieur de  $D$  et d'autres à l'extérieur. Soit  $(m_{i_1}, \dots, m_{i_p}, \gamma_{j_1} m_{j_1}, \dots, \gamma_{j_q} m_{j_q})$  un tel simplexe et supposons que son image par  $\tilde{f}_0$ , c'est-à-dire le simplexe noté  $(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}, \rho(\gamma_{j_1})y_{j_1}, \dots, \rho(\gamma_{j_q})y_{j_q})$ , soit dégénéré; cela signifie qu'il existe  $1 \leq k \leq q$  tel que  $\rho(\gamma_{j_k})y_{j_k}$  appartienne au sous-espace totalement géodésique  $E$  engendré par les points  $(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}, \rho(\gamma_{j_1})y_{j_1}, \dots, \rho(\gamma_{j_{k-1}})y_{j_{k-1}})$  (rappelons que, par construction,  $(y_{i_1}, \dots, y_{i_p})$  est un  $(p-1)$ -simplexe non dégénéré); on déplace alors  $y_{j_k}$  à l'intérieur de  $V_{j_k}$  pour le séparer de  $\rho(\gamma_{j_k})^{-1}E$ ; ceci est possible si  $E$  reste fixe lorsque l'on déplace  $y_{j_k}$ , c'est-à-dire si aucun des points  $y_{i_1}, \dots, y_{i_p}, \rho(\gamma_{j_1})y_{j_1}, \dots, \rho(\gamma_{j_{k-1}})y_{j_{k-1}}$  n'est dans l'orbite de  $y_{j_k}$ . Par le choix des  $y_i$  ceci ne peut se produire que si  $y_{j_k} = y_{j_l}$  avec  $l = 1, \dots, q$  et  $l \neq k$  ou bien  $y_{i_k} = y_{i_l}$ ,  $l = 1, \dots, p$ . Les points  $y_i$  étant en bijection avec les points  $m_i$  cela impliquerait que dans le simplexe  $(m_{i_1}, \dots, m_{i_p}, \gamma_{j_1} m_{j_1}, \dots, \gamma_{j_q} m_{j_q})$  deux des points  $m_l$  coïncident et donc qu'au quotient sur  $M$  il se projette sur un simplexe dégénéré ce qui est impossible. On peut donc séparer  $y_{j_k}$  du sous-espace totalement géodésique  $\rho(\gamma_{j_k})^{-1}E$ . On utilise ensuite l'argument de densité pour choisir le nouveau point  $y_{j_k}$  disjoint de la réunion des orbites par  $\rho(\Pi_1(M))$  des autres points  $y_l$ . On procède alors par récurrence sur les simplexes considérés qui sont en nombre fini.

Les autres simplexes sont des images par un élément  $\rho(\gamma)$ , pour  $\gamma \in \Pi_1(M)$  des simplexes d'un des deux types précédents. Ceci prouve le lemme 6.2.  $\square$

**preuve du théorème**

Nous noterons  $\mathcal{T}_{\tilde{X}}$  la collection des simplexes de  $\tilde{X}$  ainsi obtenue. Soit  $F$  une face de codimension 2 de  $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$  et  $F'$  son image dans  $\mathcal{T}_{\tilde{X}}$ . L'étoile de  $F$  dans  $\mathcal{T}_{\tilde{M}}$  contient un nombre fini de  $n$ -simplexes  $s_1, \dots, s_k$  dont les images sont notées  $s'_1, \dots, s'_k$ . Le link autour de  $F$  est un cercle. Précisément, considérons un voisinage tubulaire de rayon assez petit, noté  $\text{Tub}(F)$ , de cette face  $F$  de codimension 2. Alors le bord de  $\text{Tub}(F)$  est difféomorphe à  $F \times S^1$ . La variété  $M$  est supposée orientée, et donc aussi  $\tilde{M}$ . Sur le bord de  $\text{Tub}(F)$  nous choisissons une courbe  $\mathcal{C}$  générateur de  $H_1(\partial\text{Tub}(F), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ ; nous pouvons, par exemple, prendre l'intersection de  $\partial\text{Tub}(F)$  avec un hyperplan orthogonal à  $F$  en un point (on peut définir un tel hyperplan bien que la métrique sur  $\tilde{M}$ , qui est euclidienne sur chaque simplexe, soit singulière en  $F$ ). Si nous choisissons arbitrairement une orientation sur chaque face de codimension 2, donc en particulier sur  $F$ , cela fournit une orientation du cercle  $\mathcal{C}$  compatible avec celle de  $\tilde{M}$ .

L'application  $\tilde{f}_0$ , linéaire par morceaux, envoie  $F$  sur  $F'$  (par construction) et donc  $\partial\text{Tub}(F)$  sur un cylindre topologique que l'on peut projeter, à partir de  $F'$ , sur le bord  $\partial\text{Tub}(F')$  d'un petit voisinage tubulaire de  $F'$  (pour la métrique hyperbolique). Cela induit une application,

$$\tilde{f}_0 : H_1(\partial\text{Tub}(F), \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\partial\text{Tub}(F'), \mathbf{Z})$$

et on appelle degré transverse de  $\tilde{f}_0$  en  $F$ , l'image par  $\tilde{f}_{0*}$  du générateur de  $H_1(\partial\text{Tub}(F), \mathbf{R})$ ; cette classe est un multiple entier de la classe fondamentale de  $H_1(\partial\text{Tub}(F'), \mathbf{Z})$  et nous pouvons donc, par abus de langage, identifier le degré transverse à un nombre entier relatif. On peut également définir ce degré en utilisant le cercle  $\mathcal{C}$  tracé sur  $\partial\text{Tub}(F)$  et un cercle  $\mathcal{C}'$  analogue sur  $\partial\text{Tub}(F')$  sur lequel on projette  $\tilde{f}_0(\mathcal{C})$ .

Soit  $\theta(F, s)$  (resp.  $\theta'(F', s')$ ) l'angle diédral (euclidien) du simplexe  $s \in \mathcal{T}_{\tilde{M}}$  en la face  $F$  (resp. du simplexe  $s' \in \mathcal{T}_{\tilde{X}}$  en la face  $F'$ ). Les nombres  $\theta$  et  $\theta'$  sont choisis positifs. L'application  $\tilde{f}_0$  d'un simplexe  $s$  sur un simplexe  $s'$  peut préserver ou renverser l'orientation (on rappelle que cette application est affine en restriction à  $s$ ) et nous poserons  $\epsilon(s) = \epsilon(s') = \pm 1$  suivant le cas considéré.

**Lemme 6.3** *Soit  $F'$  une face de codimension 2 image de  $F$ , le degré transverse de  $\tilde{f}_0$  en  $F$ , noté  $\text{deg}_F \tilde{f}_0$ , vérifie,*

$$2\pi \text{deg}_F \tilde{f}_0 = \pm \sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s') \theta'(F', s').$$

*Preuve.*

Pour  $F$  telle que  $\tilde{f}_0(F) = F'$  et  $s \in \mathcal{T}_{\tilde{M}}$  tels que  $F \subset s$ ,  $\tilde{f}_0(\mathcal{C} \cap s)$  se projette sur  $\mathcal{C}' \cap s'$  (où  $s' = \tilde{f}_0(s)$ ) qui est un arc d'angle de valeur absolue  $\theta'(F', s')$ . On peut choisir les orientations de  $\tilde{X}$  et  $F'$  sont telles que l'angle orienté de la projection de  $\tilde{f}_0(\mathcal{C} \cap s)$  est  $+\theta'(F', s')$  si  $\epsilon(s') = +1$ , et  $-\theta'(F', s')$  si  $\tilde{f}_0$  renverse l'orientation de  $s$ . La quantité  $\sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s') \theta'(F', s')$  représente donc l'angle orienté total de

la projection de  $\tilde{f}_0(\mathcal{C})$  sur  $\mathcal{C}'$ , c'est-à-dire  $2\pi \text{deg}_{F'} \tilde{f}_0$ . Si l'orientation de  $\tilde{X}$  est renversée la relation devient  $2\pi \text{deg}_{F'} \tilde{f}_0 = - \sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s') \theta'(F', s')$ .

Considérons alors une déformation de  $\rho_0$ , soit  $\rho_t$ , que nous supposons  $C^1$  en  $t$ . Nous construisons l'application  $\tilde{f}_t$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, N, \quad \tilde{f}_t(m_i) &= y_i \\ \forall \gamma \in \Pi_1(M), \quad \tilde{f}_t(\gamma m_i) &= \rho_t(\gamma) y_i \end{aligned}$$

et ensuite on étend  $\tilde{f}_t$  de manière affine dans chaque simplexe. La collection des simplexes images et leurs sommets varient de manière  $C^1$  en  $t$ . Nous noterons cette collection  $\mathcal{T}_{\tilde{X}}(t)$ . Tous les simplexes de  $\mathcal{T}_{\tilde{X}}(t)$  sont non dégénérés, pour  $t$  assez petit ; en effet, il suffit de n'en considérer qu'un nombre fini, les autres s'en déduisant par équivariance. Notons également que, par construction,  $\tilde{f}_t$  dépend de manière  $C^1$  en  $t$ , en particulier, le volume hyperbolique d'un simplexe de  $\mathcal{T}_{\tilde{X}}(t)$  est une fonction  $C^1$  de  $t$ . Soit  $F$  une face de codimension 2 de  $\tilde{M}$  et  $F'(t)$  son image par  $\tilde{f}_t$ . Pour  $s \in \mathcal{T}_{\tilde{X}}(t)$ , nous noterons  $\theta'(t; F', s')$  l'angle (positif) diédral de  $s'$  en  $F'$ . Nous ne mentionnerons pas la dépendance en  $t$  des simplexes de  $\mathcal{T}_{\tilde{X}}(t)$  et de leurs faces de codimension 2 s'il n'y a pas d'ambiguïté. Par ailleurs si  $s'(t) = \tilde{f}_t(s)$  et  $t$  est assez petit  $\epsilon(s'(t))$  ne dépend pas de  $t$ .  $\square$

**Lemme 6.4**

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s') \theta'(t; F', s') \right) = 0$$

*Preuve.* Pour  $t$  assez petit, la face  $F'(t)$  est homéomorphe à  $F'(0)$  ; de même  $s'(t)$  est homéomorphe à  $s'(0)$  si  $s'(t) \in \mathcal{T}_{\tilde{X}}(t)$  et ils sont tous non-dégénérés. Les voisinages tubulaires de  $F'(t)$  et  $F'(0)$  sont aussi homéomorphes et on peut définir le degré transverse de  $\tilde{f}_t$  grâce à  $F'(0)$ . Alors, par constance du degré par déformation, pour  $t$  assez petit, on a  $\deg_{F'(t)}(\tilde{f}_t) = \deg_{F'(0)}(\tilde{f}_0)$ .  $\square$

Rappelons la formule de Schläfli (cf. [43]). Soit  $s'$  un simplexe hyperbolique géodésique et  $F'$  une de ses faces de codimension 2 ; si  $s'(t)$  est une déformation de classe  $C^1$  de  $s' = s'(0)$ , alors

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}(s'(t)) = - \sum_{F' \subset s'} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta'(t; F'(t), s'(t))) \text{vol}_{n-2}(F'(t))$$

où  $\text{vol}_{n-2}$  désigne le volume  $(n-2)$ -dimensionnel de la face considéré.

Pour  $\bar{s} \in \mathcal{T}_M$  choisissons un relevé  $s \in \mathcal{T}_{\tilde{M}}$  ; alors  $\tilde{f}_t$  identifie de manière  $C^\infty$  jusqu'au bord  $s$  avec un simplexe hyperbolique de  $\mathcal{T}_{\tilde{X}}$ . L'équivariance de  $\tilde{f}_t$  permet de définir de manière unique une métrique hyperbolique sur  $\bar{s}$  dont la collection produit une métrique  $\bar{g}(t)$  sur  $M$  qui est continue et hyperbolique par morceaux. En particulier le volume des faces de codimension 2 et les angles diédraux en celles-ci sont ceux du simplexe hyperbolique  $\tilde{f}_t(s)$ . Soit  $\omega$  la forme

volume hyperbolique de  $\tilde{X}$ , alors

$$\begin{aligned} \text{vol}(\rho_t) &= \int_M \tilde{f}_t^*(\omega) = \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \int_{\bar{s}} \tilde{f}_t^*(\omega) \\ &= \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \epsilon(s) \text{vol}(\tilde{f}_t(s)) = \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \epsilon(\bar{s}) \text{vol}(\bar{s}, \bar{g}(t)) \end{aligned}$$

en définissant  $\epsilon(\bar{s}) = \epsilon(s) = \epsilon(\tilde{f}_t(s))$ . Ici on a identifié, par abus de langage,  $\tilde{f}_t^*(\omega)$  avec une forme différentielle sur  $M$  grâce à l'équivariance de  $\tilde{f}_t$ . La formule de Schläfli donne,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{vol}(\rho_t) &= \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \frac{d}{dt} (\epsilon(\bar{s}) \text{vol}(\bar{s}, \bar{g}(t))) \\ &= \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \sum_{\bar{F} \subset \bar{s}} \epsilon(\bar{s}) \frac{d}{dt} (\bar{\theta}(t; \bar{s}, \bar{F})) \text{vol}_{n-2}(\bar{F}, \bar{g}(t)) \end{aligned}$$

où  $\bar{\theta}(t; \bar{s}, \bar{F})$  désigne l'angle diédral en  $\bar{F}$  du simplexe  $\bar{s}$  mesuré à l'aide de la métrique  $\bar{g}(t)$ . Il est égal à  $\theta^i(t; \tilde{f}_t(s), \tilde{f}_t(F))$  où  $s$  et  $F$  sont des relevés respectifs de  $\bar{s}$  et  $\bar{F}$ .

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\rho_t) = \sum_{\bar{F}} \left( \sum_{\bar{s}/\bar{F} \subset \bar{s}} \epsilon(\bar{s}) \frac{d}{dt} (\bar{\theta}(t; \bar{F}, \bar{s})) \right) \text{vol}_{n-2}(\bar{F}, \bar{g}(t))$$

La quantité entre parenthèse peut se calculer sur  $M$  ou bien sur  $\tilde{M}$  car elle ne concerne que l'étoile d'une face  $\bar{F}$ ; elle peut également se calculer sur  $\tilde{X}$  par définition de  $\bar{g}(t)$ . Le lemme précédent montre que, pour toute face  $\bar{F}$ ,

$$\sum_{\bar{s} \supset \bar{F}} \epsilon(\bar{s}) \frac{d}{dt} (\bar{\theta}(t; \bar{F}, \bar{s})) = 0$$

Ce qui prouve que  $\frac{d}{dt} \text{vol}(\rho_t) = 0$ .  $\square$

Une conséquence immédiate du théorème 6.1 est le corollaire suivant. Notons  $\mathcal{R}(\Pi_1(M), \text{Isom}(\tilde{X}))$  l'espace des représentations du groupe fondamental d'une variété  $M$  dans le groupe d'isométries de l'espace hyperbolique.

**Corollaire 6.5** *Soit  $M$  une variété différentielle fermée et orientée, alors la fonctionnelle,*

$$\text{vol} : \mathcal{R}(\Pi_1(M), \text{Isom}(\tilde{X})) \rightarrow \mathbf{R}^+$$

*prend un nombre fini de valeurs.*

*Preuve.* Le groupe d'isométries  $\text{Isom}(\tilde{X}) = \text{PO}(n, 1)$  est un groupe algébrique; par ailleurs,  $\Pi_1(M)$  est de présentation finie donc  $\mathcal{R}(\Pi_1(M), \text{Isom}(\tilde{X}))$  est une variété algébrique (avec singularités) et possède un nombre fini de composantes connexes. Le théorème 6.1 affirme que la fonctionnelle  $\text{vol}$  est constante sur chaque composante connexe.  $\square$

**Remarque.** Ce résultat est énoncé dans [42], toutefois la preuve est incomplète sauf, peut-être, en dimension 3. Celle présentée ci-dessus nous a été suggérée par J.-P. Otal (voir [11]).

Considérons alors les variétés hyperboliques fermées de dimension  $n$ . Un théorème de Wang [48] affirme que, pour  $n \geq 4$  et  $V > 0$  le nombre de variétés hyperboliques fermées de volume inférieur à  $V$  est fini. Ce résultat est notoirement faux en dimension 3 et en dimension 2. Si  $X$  désigne une variété hyperbolique fermée et  $M$  une variété différentielle fermée, nous dirons (voir [28]) que  $M$  domine  $X$  s'il existe une application continue de degré non nul de  $M$  sur  $X$ . Le théorème 6.1 permet de donner une preuve très simple du résultat suivant :

**Théorème 6.6 (T. Soma [45])** *Soit  $M$  une variété différentielle fermée de dimension 3, alors il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques de dimension 3 fermées dominées par  $M$ .*

*Preuve.* Désignons par  $f : M \rightarrow X$  l'application continue de degré non nul de  $M$  sur  $X$ , où  $X$  est une variété hyperbolique fermée. L'application  $f$  induit un morphisme  $f_* : \Pi_1(M) \rightarrow \Pi_1(X)$ , c'est-à-dire une représentation  $\rho$  de  $\Pi_1(M)$  dans  $\text{PO}(n, 1)$ . Par définition du degré de  $f$  nous avons,

$$\text{vol}(\rho) = \text{deg}(f) \text{vol}(X) .$$

Par ailleurs, si on munit  $M$  d'une métrique riemannienne quelconque, le théorème 4.2 montre que ce volume est borné par un nombre ne dépendant que de  $M$  (et de cette métrique) que nous noterons  $C(M)$ . Nous avons donc,

$$\text{deg}(f) \text{vol}(X) \leq C(M)$$

c'est-à-dire,  $\text{deg}(f) \leq C(M)/\text{vol}(X)$ . Le volume d'une variété hyperbolique compacte est bornée inférieurement par une constante universelle  $v_n$  ne dépendant que de la dimension  $n$  grâce au lemme de Margulis (voir [13]). En conséquence,

$$\text{deg}(f) \leq C(M)/v_3 .$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs possibles pour le degré de l'application  $f$ . De même  $\text{deg}(f) \text{vol}(X) = \text{vol}(\rho)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs d'après le corollaire 6.5 . Le volume des variétés  $X$  fermées dominées par une variété fermée fixe  $M$  ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui, d'après un résultat de W. Thurston ([47]), montre qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de telles variétés.  $\square$

Nous terminons en donnant un exemple de telles déformations, montrant la pertinence du théorème 6.1. Il nous a été communiqué par Daryl Cooper par l'intermédiaire de Michel Boileau.

**Exemple**(D. Cooper) Soit  $N$  une variété hyperbolique fermée de dimension 3. Considérons la somme connexe de  $N$  avec  $S^1 \times S^2$ , notée  $N \# (S^1 \times S^2)$ , le groupe fondamental de cette variété est le produit libre  $\Pi_1(M) * \mathbf{Z}$ . Soit  $k$  un noeud homotopiquement nul dans  $N \# (S^1 \times S^2)$  qui rencontre  $S^1 \times S^2$  en au moins deux points. D'après R. Myers ([36]) on peut trouver de tels noeuds en sorte qu'une chirurgie de Dehn autour de  $k$  transforme  $N \# (S^1 \times S^2)$  en une variété

hyperbolique fermée  $M$  (voir aussi [10] page 797). La proposition 3.2 de [10] permet de construire une application continue  $f : M \rightarrow N\sharp(S^1 \times S^2)$  de degré 1. Par ailleurs il existe également une application continue,  $h : N\sharp(S^1 \times S^2) \rightarrow N$  de degré 1 qui consiste à écraser  $S^1 \times S^2$  en un point. Nous obtenons donc une application continue de degré 1,

$$h \circ f : M \longrightarrow N$$

et une représentation  $\rho = h_* \circ f_* : \Pi_1(M) \rightarrow \text{Pi}_1(N) \subset \text{PO}(3, 1)$ . Le volume de cette représentation est,

$$\text{vol}(\rho) = \text{vol}(N) > 0$$

car  $h \circ f$  est degré 1 et l'image de  $\rho$  est le groupe fondamental de  $N$ . Par ailleurs  $\rho$  se décompose en,

$$\rho : \Pi_1(M) \xrightarrow{f_*} \Pi_1(M) * \mathbf{Z} \xrightarrow{h_*} \text{PO}(3, 1).$$

Le facteur libre  $\mathbf{Z}$  permet alors de déformer  $h_*$  sans contrainte et donc de produire des déformations non triviales (ce fait est élémentaire et sa vérification est laissée au lecteur). En augmentant le nombre de facteurs  $S^1 \times S^2$  nous pouvons aisément augmenter le nombre de paramètres disponibles pour déformer  $\rho$ .

**Remarque.** Il serait intéressant de construire de telles déformations en dimension supérieure ou égale à 4. Il est facile d'en construire de volume nul, mais des exemples de volume non nul restent à décrire.

## Références

- [1] P. ALBUQUERQUE. Patterson-Sullivan theory in higher-rank symmetric spaces. *G.A.F.A.*, 9(1) :1–28, 1999.
- [2] W. BALMANN, M. GROMOV, and V. SCHRÖDER. *Manifolds of nonpositive curvature*, volume 61 of *Progress in Maths*. Birkhäuser, 1985.
- [3] E. BECKENBACH and R. BELLMAN. *Inequalities*, volume 30 of *Ergebnisse der math. un ihrer grenzgebiete, neue folge*. Springer-Verlag, 1961.
- [4] R. BENEDETTI and C. PETRONIO. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext. Springer-Verlag, 1992.
- [5] N. BERGERON. Communication privée.
- [6] N. BERGERON. Premier nombre de Betti et spectre du Laplacien de certaines variétés hyperboliques. *L'enseignement Mathématique*, 46 :109–137, 2000.
- [7] G. BESSON, G. COURTOIS, and S. GALLOT. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *G.A.F.A.*, 5(5) :731–799, 1995.
- [8] G. BESSON, G. COURTOIS, and S. GALLOT. Minimal entropy and mostow's rigidity theorems. *Ergod. Th and Dynam. Sys.*, 16 :623–649, 1996.
- [9] G. BESSON, G. COURTOIS, and S. GALLOT. Lemme de schwarz réel et applications géométriques. *Acta Mathematica*, 183 :145–169, 1999.
- [10] M. BOILEAU and S. WANG. Non-zero degree maps and surface bundles over  $s^1$ . *J. of Diff. Geom.*, 43 :789–806, 1996.
- [11] F. BONAHOON. A Schläfli-type formula for convex cores of hyperbolic 3-manifolds. *J. of Diff. Geom.*, 50 :25–58, 1998.

- [12] F. BONAHO. *Geometric structures on 3-manifolds*, pages 93–164. North Holland, Amsterdam, 2002.
- [13] Yu.D. BURAGO and V.A. ZALGALLER. *Geometric Inequalities*, volume 194 of *Grundlehren der Math. Wiss.* Springer-Verlag, 1985.
- [14] M. BURGER, A. IOZZI, and A. WIENHARD. Surface group representations with maximal toledo invariant. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris sér. I*, 336 :387–390, 2003.
- [15] Ch. CONNELL and B. FARB. Minimal entropy rigidity for lattices in product of rank one symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.*, 11(5) :1001–1026, 2003.
- [16] K. CORLETTE. Rigid representations of Kählerian fundamental groups. *J. of Diff. Geom*, 33 :239–252, 1991.
- [17] G. COURTOIS. Thèse d’habilitation. Université d’Orsay, 1998.
- [18] J. DIEUDONNÉ. *Éléments d’analyse, tome I*, volume 28 of *Cahiers scientifiques*. Gauthiers-Villars, 1979.
- [19] A. DOUADY and C. EARLE. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Mathematica*, 157 :23–48, 1986.
- [20] N. DUNFIELD. Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds. *Invent. Math.*, 136 :623–657, 1999.
- [21] P. EBERLEIN. *Geometry of non-positively curved manifolds*. Chicago lectures in mathematics. The University of Chicago Press, 1996.
- [22] J. EELLS and L. LEMAIRE. A report on harmonic maps. *Bull. London Math. soc.*, 10(1) :1–68, 1978.
- [23] J. EELLS and L. LEMAIRE. Another report on harmonic maps. *Bull. London Math. soc.*, 20(5) :385–524, 1988.
- [24] H. FEDERER. *Geometric Measure Theory*, volume 153 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1969.
- [25] S. FRANCAVIGLIA and B. KLAFF. Maximal volume representation are Fuchsian. en préparation, 2004.
- [26] S. GALLOT, J. LAFONTAINE, and D. HULIN. *Riemannian Geometry*. Universitext. Springer-Verlag, 2nd edition, 1990.
- [27] W. GOLDMAN. Representations of fundamental groups of surfaces. In J. Alexander and J. Karer, editors, *Geometry and topology*, volume 1167 of *Lecture notes in Maths.*, pages 95–117, 1985.
- [28] M. GROMOV. Volume and bounded cohomology. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 56 :213–307, 1983.
- [29] S. HELGASON. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate studies in math*. Amer. Math. Soc., 2001.
- [30] B. KLINGLER. Volume des représentations sur un corps local. *G.A.F.A.*, 13(5) :1120–1160, 2003.
- [31] G. KNIEPER. Spherical means on compact Riemannian manifolds of negative curvature. *Differential Geom. Appl.*, 4(4) :361–390, 1994.
- [32] F. LABOURIE. Existence d’applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative. *Proceedings of the A.M.S.*, 111(3) :877–882, 1991.
- [33] G. LINK. Hausdorff dimension of limit sets of discrete subgroups of higher rank Lie groups. *G.A.F.A.*, 14(2) :400–432, 2004.
- [34] G.A. MARGULIS. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *A series of modern surveys in mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [35] J. MILNOR. On the existence of a connection with zero curvature. *Comment. Math. Hel.*, 32 :215–223, 1958.
- [36] R. MYERS. Excellent 1-manifolds in compact 3-manifolds. *Topology and its Applications*, 49 :115–127, 1983.
- [37] A.L. ONISHCHIK and E.B. VINBERG. *Lie groups and algebraic groups*. Springer series in soviet maths. Springer-Verlag, Berlin, 1990.



- [38] J.-P. OTAL. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, volume 235 of *Astérisque*. Société Mathématiques de France, 1996.
- [39] J.-F. QUINT. Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur. *G.A.F.A.*, 12(4) :776–809, 2002.
- [40] M.S. RAGHUNATHAN. *Discret subgroups of Lie groups*, volume 68 of *Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [41] A. REZNIKOV. Harmonic maps, hyperbolic cohomology and higher Milnor inequalities. *Topology*, 32(4) :899–907, 1993.
- [42] A. REZNIKOV. Rationality of secondary classes. *J. Diff. Geom.*, 43 :674–692, 1996.
- [43] L. SCHLÄFLI. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Birkhäuser, Basel, 1950.
- [44] J.-P. SERRE. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , volume 46 of *Astérisque*. Société Mathématiques de France, 1977.
- [45] T. SOMA. Non-zero degree maps to hyperbolic 3-manifolds. *J. Diff. Geom.*, 49 :517–546, 1998.
- [46] A. STARKOV. Vanishing of the first cohomologies for lattices in Lie groups. *J. Lie Theory*, 12(2) :449–460, 2002.
- [47] W. THURSTON. *The geometry and topology of 3-manifolds*, volume 1 of *Lecture notes, revised version*. Princeton Univ. Press., 1997.
- [48] H.C. WANG. *Topics on totally discontinuous groups*, volume 8, pages 459–487. Marcel Dekker, New-York, 1972.
- [49] J. WOOD. Bundles with totally disconnected structure group. *Comment. Math. Helv.*, 46 :257–273, 1971.

Gérard BESSON  
 INSTITUT FOURIER  
 Laboratoire de Mathématiques  
 UMR5582 (UJF-CNRS)  
 BP 74  
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)  
 G.Besson@fourier.ujf-grenoble.fr

Gilles COURTOIS  
 ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
 Centre de mathématiques  
 UMR7640 (CNRS)  
 91128 PALAISEAU Cedex (France)  
 Courtois@math.polytechnique.fr

Sylvestre GALLOT  
 INSTITUT FOURIER  
 Laboratoire de Mathématiques  
 UMR5582 (UJF-CNRS)  
 BP 74  
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)  
 Sylvestre.Gallot@fourier.ujf-grenoble.fr