ÉTUDE DU CAS RATIONNEL DE LA THÉORIE DES FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES

ÉRIC GAUDRON

Prépublication de l'Institut Fourier n° 646 (2004)
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé. Dans ce travail, nous établissons des mesures d'indépendance linéaires de logarithmes d'un groupe algébrique commutatif dans le cas rationnel. Plus précisément, soit k un corps de nombres et v_0 une place quelconque de k. Soit G un groupe algébrique commutatif défini sur k et H un sous-groupe algébrique connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(H)$. Soit $u \in \mathrm{Lie}(G(\mathbf{C}_{v_0}))$ un logarithme d'un point p de $G(k)$. Sous une hypothèse de type Lehmer sur p, nous obtenons des minorations de la distance de u à $\mathrm{Lie}(H) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$ qui généralisent en partie les mesures déjà connues dans le cas d'un groupe linéaire. Les principales caractérisques de ces résultats sont d'une part d'améliorer la dépendance en la hauteur $\log a$ du point p, en supprimant une puissance de $\log\log a$, et, d'autre part, d'être valides dans un contexte très général.

Abstract. We establish new measures of linear independence of logarithms on commutative algebraic groups in the so-called *rational case*. More precisely, let k be a number field and v_0 be an arbitrary place of k. Let G be a commutative algebraic group defined over k and H be a connected algebraic subgroup of G. Denote by $\mathrm{Lie}(H)$ its Lie algebra at the origin. Let $u \in \mathrm{Lie}(G(\mathbf{C}_{v_0}))$ a logarithm of a point $p \in G(k)$. Assuming (essentially) that p is not a torsion point modulo proper connected algebraic subgroups of G, we obtain lower bounds for the distance from u to $\mathrm{Lie}(H) \otimes_k \mathbf{C}_{v_0}$. For the most part, they generalize the measures already known when G is a linear group. The main feature of these results is to provide a better dependence in the height $\log a$ of p, removing a polynomial term in $\log\log a$. The proof relies on sharp estimates of sizes of formal subschemes associated to H (in the sense of J.-B. Bost) as well as an absolute Siegel lemma and, in the ultrametric case, a recent interpolation lemma by D. Roy.

MSC 2000: 11J86 (11J61, 11J13)

Mots clefs: formes linéaires de logarithmes, cas rationnel, méthode de Baker, groupe algébrique commutatif, taille de sous-schéma formel, lemme d'interpolation p-adique, lemme de Siegel absolu.

Notations et conventions

Soit g un entier naturel ≥ 1. Pour $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_g)\in\mathbf{N}^g$, on désigne par $|\mathbf{t}|$ la longueur $t_1+\cdots+t_g$ de $\mathbf{t}$, et, si $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_g)$ est un g-uplet de variables (ou d'objets mathématiques plus généraux, tels des opérateurs différentiels), on note $\mathbf{X}^{\mathbf{t}}=X_1^{t_1}\cdots X_g^{t_g}$. Si x un nombre réel, on note $\log^+(x)=\log\max\{1,x\}$ et $[x]$ la partie entière de x.

Si G est un schéma en groupes sur un corps commutatif, t_G ou $\mathrm{Lie}(G)$ désigne son espace tangent à l'origine. Si E est un espace vectoriel, $\mathbf{S}(E)$ (*resp.* $S^g(E)$) est l'algèbre symétrique de E (*resp.* la composante de degré g de E) et $\mathbf{P}(E)$ désigne le schéma projectif $\mathrm{Proj}\,\mathbf{S}(E)$.

Lorsque k est un corps commutatif, on note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit dorénavant k un corps de nombres, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_k$, et v une place de k.

Normes et valeurs absolues.

- Soit v une place ultramétrique de k, qui correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_k$, et p le nombre premier qui engendre l'idéal $\mathfrak{p}\cap\mathbf{Z}$. On note k_v (*resp.* $\mathcal{O}_v$) le complété $\mathfrak{p}$-adique de k en $\mathfrak{p}$ (*resp.* son anneau de valuation). On munit k_v de l'unique valeur absolue $|\cdot|_v$ qui vérifie $|p|_v=p^{-1}$. Cette valeur absolue s'étend (de manière unique) à $\overline{k}_v$ et, en particulier, aux extensions finies de k_v. Soit $\mathbf{C}_v=\mathbf{C}_p$ le complété du corps valué $(\overline{k}_v,|.|_v)$. Si E_v est un $\mathbf{C}_v$-espace vectoriel de dimension g, alors toute base $(e_1,\dots,e_g)$ de E_v définit une norme v-adique $\|\cdot\|_v$ sur E_v par
$$\left\|\sum_{i=1}^{g}x_ie_i\right\|_v:=\max_{1\leq i\leq g}\{|x_i|_v\}\ .$$
Ainsi, lorsque $E_v=\mathbf{C}_v^g$ muni de sa base canonique, on note $\|\mathcal{F}\|_v$ ou $|\mathcal{F}|_v$ la norme d'un vecteur $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_g)\in\mathbf{C}_v^g$:
$$\|\mathcal{F}\|_v=|\mathcal{F}|_v=\max_{1\leq i\leq g}\{|f_i|_v\}\ .$$
- Soit v une place archimédienne de k. On munit $\mathbf{C}_v=\mathbf{C}$ de la valeur absolue usuelle. Si $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_g)\in\mathbf{C}^g$, on note
$$|\mathcal{F}|_v:=\max_{1\leq i\leq g}\{|f_i|_v\}\quad\text{et}\quad\|\mathcal{F}\|_v:=\left(\sum_{i=1}^{g}|f_i|^2\right)^{1/2}\ .$$

Avec ces conventions, la formule du produit s'écrit, $\forall\,\alpha\in k\setminus\{0\}$, $\prod_v|\alpha|_v^{[k_v:\mathbf{Q}_v]}=1$ où v parcourt l'ensemble des places de k et $[k_v:\mathbf{Q}_v]$ est le degré local $1,2$ ou $[k_v:\mathbf{Q}_p]$ selon le caractère réel, complexe ou p-adique de la place v.

Hauteurs. Soit $\mathcal{F}\in k^g\setminus\{0\}$. La hauteur de Weil (logarithmique absolue*) de $\mathcal{F}$ est
$$h(\mathcal{F})=\sum_v\frac{[k_v:\mathbf{Q}_v]}{[k:\mathbf{Q}]}\log|\mathcal{F}|_v\ \cdot$$
C'est une hauteur projective ($\forall\,\alpha\in k\setminus\{0\}$, $h(\alpha\mathcal{F})=h(\mathcal{F})$) et elle se prolonge naturellement aux points de $\mathbf{P}^{g-1}(k)$. La hauteur L^2 de $\mathcal{F}$ est
$$h_{\mathrm{L}^2}(\mathcal{F})=\sum_v\frac{[k_v:\mathbf{Q}_v]}{[k:\mathbf{Q}]}\log\|\mathcal{F}\|_v\ \cdot$$
On a $h(\mathcal{F})\leq h_{\mathrm{L}^2}(\mathcal{F})\leq h(\mathcal{F})+\frac{1}{2}\log(\#\mathcal{F})$ et l'inégalité de Liouville $\log|\alpha|_v\geq-[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]h(\{1,\alpha\})$ (pour toute place v de $\mathbf{Q}(\alpha)$). Soit $v_1,\dots,v_d$ des vecteurs linéairement indépendants de $\overline{\mathbf{Q}}^g$ (muni de sa base canonique $e_1,\dots,e_g$). La hauteur de Schmidt de $(v_1,\dots,v_d)$ est la hauteur L^2 de l'ensemble des coordonnées de Plücker du produit extérieur $v_1\wedge\cdots\wedge v_d$ dans la base $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}$ ($1\leq i_1<\cdots<i_d\leq g$). Cette définition ne dépend en réalité que de l'espace vectoriel V sur $\overline{\mathbf{Q}}$ engendré par les vecteurs $v_1,\dots,v_d$ et induit la hauteur de Schmidt $h(V)$ de V (et, par convention, $h(\{0\})=0$).

*Comme le seront toutes les hauteurs de ce texte.

1. Introduction

L'objectif de ce travail est d'établir des résultats généraux — archimédiens et ultramétriques — de la *théorie des formes linéaires de logarithmes* dans le cas particulier où le lieu des zéros des formes linéaires est une algèbre de Lie *algébrique*.

Avant d'entrer plus en détail dans la problématique et la signification de cette hypothèse, introduisons quelques données. Soit G un groupe algébrique commutatif de dimension g défini sur un corps de nombres k et v_0 une place (quelconque) de k. Le groupe de Lie $G(\mathbf{C}_{v_0})$ possède une application exponentielle $\exp_{v_0} : \mathscr{T}_{v_0} \to G(\mathbf{C}_{v_0})$ définie sur un voisinage ouvert $\mathscr{T}_{v_0}$ de 0 dans l'algèbre de Lie de $G(\mathbf{C}_{v_0})$ (notée $\mathrm{Lie}\, G(\mathbf{C}_{v_0})$ ou $t_G(\mathbf{C}_{v_0})$ dans la suite). Considérons un élément $u \neq 0$ de $\mathscr{T}_{v_0}$ d'exponentielle $p := \exp_{v_0}(u)$ *k-rationnelle* et donnons-nous par ailleurs une norme $\|\cdot\|_{v_0}$ sur $\mathscr{T}_{v_0}$ (de distance associée d_{v_0}) ainsi qu'une fonction hauteur $h \geq 0$ sur $G(\overline{\mathbf{Q}})$ (provenant par exemple d'une hauteur de Weil sur un espace projectif dans lequel G se plonge).

La théorie des formes linéaires de logarithmes consiste, dans son aspect quantitatif, à fournir des minorations de la distance $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$ entre u et une sous-k-algèbre de Lie V de $\mathrm{Lie}(G)$, en fonction des invariants liés aux données introduites (hauteur des quantités algébriques, norme de u, degré de k, etc.). Pour qualifier une minoration de $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$, on parle aussi de *mesure d'indépendance linéaire de logarithmes.* Mais avant même de traiter le cas d'un espace V général, remarquons que l'hypothèse d'algébricité de p rigidifie considérablement la situation et empêche notamment le logarithme u d'être trop petit. De manière plus précise, une conséquence des résultats présentés au § 1.2 est l'existence d'une fonction $c_1 = c_1(G, k, v_0, \|.\|_{v_0}) \geq 1$, indépendante de p, telle que

$$\log \|u\|_{v_0} \geq -c_1 \max\{1, h(p)\} \tag{1}$$

pourvu que le sous-groupe engendré par p ne rencontre aucun sous-groupe strict de $G(\overline{k})$. La caractéristique importante de cette minoration est d'être optimale en la hauteur de p, comme on peut le voir immédiatement en se plaçant sur le groupe additif $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. De l'inégalité (1) (sur G^n), nous déduisons l'existence d'une fonction $c_2 = c_2(G, n, k, v_0, \|.\|_{v_0}) \geq 1$ telle que, si $b_1, \ldots, b_n$ sont des entiers relatifs non tous nuls et si $b := \max\{e, |b_1|, \ldots, |b_n|\}$, alors

$$\log \|b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n\|_{v_0} \geq -c_2 b^2 \max\{1, h(p_1), \ldots, h(p_n)\} \tag{2}$$

où $p_i := \exp_{v_0}(u_i)$ désigne un élément de $G(k)$ et si le sous-groupe engendré par $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ne rencontre aucun sous-groupe strict de G^n. De la sorte, nous avons fait apparaître g formes linéaires $(b_1 z_1^{(j)} + \cdots + b_n z_n^{(j)})_{1 \leq j \leq g}$ sur $\mathrm{Lie}(G^n)$, et si nous appelons V la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Lie}(G^n)$ qu'elles définissent, la norme $\|b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n\|_{v_0}$ correspond à la distance entre u et V (à une fonction des b_i près). Notons au passage que les nombres b_i peuvent tout aussi bien appartenir à l'anneau des endomorphismes de G, l'élément $b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$ étant toujours le logarithme d'un point algébrique de G. Ce point de vue élémentaire est malheureusement trop naïf et, en dépit d'une excellente dépendance en la hauteur des p_i, le terme en b^2 est trop mauvais (même s'il peut être remplacé par b dans le cas d'un groupe linéaire) pour d'éventuelles applications, telles que la résolution d'équations diophantiennes par exemple. En réalité, l'inégalité (2) est une variante sophistiquée de l'inégalité de Liouville, comme nous l'avons déjà expliqué dans [22]. Aujourd'hui, nous savons démontrer l'existence d'une fonction $c_3 \geq 1$, qui ne dépend pas de b, telle que

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geq -c_3 \log b$$

où, ici, $\log b$ est un majorant ≥ 1 de la hauteur de V (voir [14,21]). Et cette borne est optimale. Mais dans cet énoncé, la dépendance en $h(p)$ (p étant $\exp_{v_0}(u)$, revenons au cas $n=1$) est de la forme $h(p)^{g/t+\epsilon}$ où t est la codimension de V dans $\mathrm{Lie}(G)$ et ϵ un nombre réel >0 (le terme $h(p)^{\epsilon}$ peut être remplacé par une puissance entière >0 du logarithme de $h(p)$). Quoi qu'il en soit, lorsque V est quelconque, c'est-à-dire défini par des équations à coefficients dans k et pas nécessairement dans $\mathrm{End}(G)$, on ne sait pas à l'heure actuelle supprimer cet ϵ tout en conservant une dépendance polynomiale en $\log b$. En revanche, il est connu depuis le milieu des années quatre-vingt, grâce aux travaux de P. Philippon & M. Waldschmidt [37] d'une part et ceux de G. Wüstholz [51] d'autre part, que si G est une puissance du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ et si V est définie par des équations à coefficients *entiers relatifs*, cela est possible (avec de petites restrictions évoquées ci-après). Ils obtiennent une minoration de la forme

$$\log|b_1u_1+\cdots+b_nu_n|_{v_0}\geq -c_4(\log b)\prod_{i=1}^{n}\max\{1,h(p_i)\} \tag{3}$$

où $c_4=c_4(n,k,v_0,(|u_i|)_i)$ et $b_i\in\mathbf{Z}$. Dans les articles cités, les énoncés concernent le cas d'une forme linéaire ($t=1$) et d'une place v_0 archimédienne. Néanmoins, un certain nombre de travaux ultérieurs (citons*, parmi les résultats récents, ceux de Baker & Wüstholz [3], K. Yu [55], E.M. Matveev [32], M. Waldschmidt [49]) ont permis d'améliorer cette mesure et d'élargir l'étendue de sa validité (en restant dans le cadre d'un groupe linéaire). Par contre, la littérature contient peu d'énoncés avec plusieurs formes linéaires simultanément (*i.e.* avec un espace V de codimension ≥ 2), citons [26, 38], mais ces derniers résultats sont des théorèmes très généraux qui ne tiennent pas compte de la spécificité de la situation de Baker, à savoir que les b_i sont des entiers relatifs. En conséquence, ils contiennent tous un $\epsilon>0$. Toutefois, dans le cas d'un groupe linéaire, la quasi-absence d'énoncé avec $t\geq 2$ formes linéaires est probablement une anomalie historique et il ne fait guère de doute qu'en adaptant la méthode de Baker l'on puisse démontrer le résultat suivant.

Énoncé 1.1. *Soit $(b_1^{(j)},\dots,b_n^{(j)})$, $1\leq j\leq t$, des vecteurs de $\mathbf{Z}^n$ linéairement indépendants. Pour $1\leq i\leq n$, soit u_i un logarithme de $p_i\in\overline{\mathbf{Q}}\setminus\{0\}$. Posons $\Lambda_j:=b_1^{(j)}u_1+\cdots+b_n^{(j)}u_n$ et $\Lambda:=\max_{1\leq j\leq t}\{|\Lambda_j|_{v_0}\}$. Alors il existe une fonction $c_5=c_5(n,k,v_0,(|u_i|)_i)$ telle que, si $\Lambda\neq 0$, on a*

$$\log\Lambda\geq -c_5(\log b)\prod_{i=1}^{n}\max\{1,h(p_i)\}^{1/t} \tag{4}$$

où, dans ce cas, $\log b$ est un majorant de $\log\max\{|b_i^{(j)}|,\ 1\leq j\leq t,\ 1\leq i\leq n\}$.

En supposant que les p_i sont *multiplicativement indépendants*, P. Dong a obtenu une telle estimation dans le cadre p-adique (avec une fonction c_5 entièrement explicite) [17], et, sous cette même hypothèse, nous déduirons cet énoncé des résultats du § 1.2 (avec v_0 quelconque). Notons que l'hypothèse $b_i^{(j)}\in\mathbf{Z}$ se traduit en termes plus géométriques comme l'existence d'un sous-groupe de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ dont l'espace tangent est défini par les équations

$$b_1^{(j)}z_1+\cdots+b_n^{(j)}z_n=0,\quad 1\leq j\leq t.$$

De la sorte, la généralisation naturelle de cette hypothèse à un groupe algébrique (commutatif) quelconque consiste à se donner un sous-groupe algébrique H de G (de codimension t) et à s'intéresser à la distance entre u et $V=\mathrm{Lie}(H)$. Notre article se consacre précisément à l'étude de ce problème, qui porte également l'appellation

*Vu la grande richesse de la littérature sur ce thème, il serait vain d'essayer d'entrer dans tous les détails sans augmenter de manière exponentielle cette introduction ; le lecteur intéressé pourra se reporter au livre de M.Waldschmidt [49] dont, en particulier, le § 10.4 « The state of the Art » ainsi que les pages 545 à 547 qui retracent les principales étapes de l'histoire du sujet.

de *cas rationnel*, afin d'obtenir des équivalents de l'énoncé 1.1 dans un cadre un peu plus général. Dans la perspective décrite précédemment en terme du ϵ dans $h(p)^{g/t+\epsilon}$, nous obtenons le résultat suivant (qui sera rendu plus précis au § 1.2).

Énoncé 1.2. *Soit $G, k, v_0, \|.\|_{v_0}, p, u, V, t$ les données générales introduites ci-dessus. Il existe une fonction $c_6 = c_6(G, k, v_0, \|u\|_{v_0})$ ayant la propriété suivante. Supposons d'une part que le sous-groupe de G engendré par p ne rencontre aucun sous-groupe algébrique strict de G et, d'autre part, que V est* l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique *H de G, de hauteur $\leq \log b$ (avec un nombre réel $b \geq e$). Alors*

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geq -c_6(\log b)^{1+\frac{g+1}{t}} \max\{1, h(p)\}^{g/t} . \tag{5}$$

La disparition de ϵ en exposant de la hauteur de p s'accompagne d'une dépendance polynomiale (non linéaire) en la hauteur du sous-espace V. Bien qu'il soit extrêmement probable que la minoration (5) reste vraie en supprimant le terme $(g+1)/t$ dans l'exposant de $\log b$, il s'avère que les méthodes employées ici pour démontrer cette inégalité ne sont pas suffisantes pour obtenir cela, hormis, comme nous l'avons vu ci-dessus, dans le cas où G est une puissance de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Signalons cependant que si G est une puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe, il est possible d'adapter notre preuve pour obtenir un analogue de la mesure (4) (voir [2] pour une place v_0 archimédienne).

Quelques mots sur la démonstration. Nous n'allons pas expliquer ici le schéma de la preuve, somme toute assez classique, fondé sur la méthode de Baker revisitée par P. Philippon & M. Waldschmidt [36]. La démarche est rappelée au début du § 3. Nous voulons plutôt dégager de façon élémentaire *la* difficulté technique sur laquelle achoppaient les preuves de l'énoncé 1.1 concernant le passage à un groupe algébrique quelconque. Nous en profiterons également pour mettre en lumière certaines modifications techniques de la preuve, qui la simplifient (dans une certaine mesure), mais au prix, il est vrai, de l'hypothèse sur le point p déjà rencontrée dans l'énoncé 1.2.

Commençons donc par expliquer l'idée fondamentale du cas rationnel usuel dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ qui conduit à de meilleures mesures d'indépendances linéaires de logarithmes. Pour cela, simplifions la situation au maximum et ne conservons que $G = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$, la forme linéaire $z_2 - bz_1$ ($b \in \mathbf{Z}$, z_1, z_2 coordonnées sur $\mathrm{Lie}(G)$) et le point $p = (\alpha_1, \alpha_2) \in (k \setminus \{0\})^2$ de logarithme (u_1, u_2). Autrement dit, nous nous intéressons à la forme linéaire en deux logarithmes $\Lambda = u_2 - bu_1$. Les preuves « classiques » qui mènent à une minoration de $|\Lambda|_{v_0}$ reposent sur l'étude des dérivées (divisées) le long de la droite $z_2 = bz_1$ d'un certain polynôme exponentiel $(z_1, z_2) \to P(e^{z_1}, e^{z_2})$ ($P \in k[X, Y]$) en les points $s\cdot(u_1, u_2)$, $s \in \mathbf{N}$. Par translation sur le groupe G, l'on peut se ramener à $s = 0$ et le résultat clef qui permet d'exploiter l'hypothèse $b \in \mathbf{Z}$ est le suivant.

Fait 1.3. *Soit $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$ et ℓ un entier naturel. Supposons que l'application $z \mapsto P(e^z, e^{bz})$, analytique au voisinage de 0, s'annule à l'ordre ℓ en 0. Alors le nombre*

$$\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} P(e^z, e^{bz})_{|z=0} \tag{6}$$

est un entier relatif.

Il y a au moins deux preuves assez différentes de ce résultat. La première utilise les polynômes binomiaux

$$\Delta_0(X) := 1, \quad \Delta_n(X) := \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} \ (n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}) \tag{7}$$

qui prennent des valeurs entières aux points entiers. En considérant un monôme X^iY^j qui intervient dans P (avec le coefficient $p_{i,j} \in \mathbf{Z}$), la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ de $z \mapsto e^{(i+jb)z}$ en 0 vaut $(i+jb)^\ell/\ell!$. On note alors que ce terme est la somme de $\Delta_\ell(i+jb)$ et d'une combinaison linéaire de $(i+jb)^h$ avec $h < \ell$ dont les coefficients ne dépendent que de ℓ. L'hypothèse sur P se traduit alors par l'égalité entre le coefficient (6) et

$$\sum_{i,j} p_{i,j}\Delta_\ell(i+jb) \ , \tag{8}$$

manifestement un entier, ce qui conclut la preuve. Aussi astucieux soit-il, ce procédé comporte néanmoins une limitation consubstantielle puisque b ne peut être qu'un entier (ou au pire un nombre rationnel), faute de quoi il est difficile d'envisager une généralisation*. La seconde preuve du fait 1.3 que nous connaissons est basée sur un changement de variables. On pose $T = e^z - 1$. Comme $b \in \mathbf{Z}$, chacune des fonctions $e^{(i+jb)z} = (1+T)^{i+jb}$ appartient à l'anneau de séries formelles $\mathbf{Z}[[T]]$. Il en est donc de même pour $P(e^z, e^{bz})$ et l'hypothèse sur P signifie que le coefficient (6) est également le coefficient de T^ℓ dans ce développement. C'est donc un entier. Contrairement à la démonstration précédente, cette méthode peut être généralisée à un groupe algébrique quelconque. D'ailleurs, rappelons que ce passage de la variable z (sur $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$) à la variable T (sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$) et ses répercussions arithmétiques constituent la cheville ouvrière des récentes avancées dans le domaine des formes linéaires de logarithmes (voir [14, 21]), mais aussi dans les questions liées à l'algébricité de feuilles formelles [9, 24]. C'est cette observation qui apporte l'essentiel des résultats nouveaux de cet article.

Il me faut signaler cependant qu'une difficulté technique échappe à l'analyse du cas d'un tore telle que nous venons de la faire. Dans le cas général, nous avons besoin de modèles lisses des groupes G et H (rappelons que $V = \mathrm{Lie}(H)$) sur des anneaux de la forme $\mathcal{O}_k[1/m]$, où m est un entier > 0. Si pour le groupe G cela ne pose aucun problème (m dépend de G), le groupe H, quant à lui, admet un modèle lisse mais sur un anneau plus « gros » $\mathcal{O}_k[1/mm']$ où m' est un entier qui dépend de H (et qui exprime en partie l'information en les places de mauvaises réductions de H). Par conséquent, il est important de contrôler l'entier m' fonction du modèle de H. Cela revient à avoir des estimations p-adiques de nombres algébriques plus généraux issus de (6) qui soient les plus précises possible et qui tiennent compte du modèle choisi pour H. C'est pourquoi nous emploierons un formalisme particulièrement adapté à cet objectif, décrit par J.-B. Bost au § 3.1 de [9]. Le langage géométrique de ce formalisme, qui s'exprime en termes de « tailles de schémas formels lisses », éclaire le rôle exact joué par le choix du modèle de H. Mais la difficulté technique évoquée ne disparaît pas pour autant dans ce langage. Un théorème† de M. Raynaud, donnant un condition pour que l'inclusion entre variétés abéliennes se prolonge en une *immersion* pour les modèles de Néron correspondants, permet alors de contrôler très précisément l'entier m'. Nous détaillerons tout cela au § 3.2.

Cet argument arithmétique crucial s'accompagne d'une double utilisation d'un lemme de Siegel absolu, à la fois pour bâtir le « classique » polynôme auxiliaire requis par la démonstration de transcendance mais aussi pour fixer une k-base de $V = \mathrm{Lie}(H)$, de « petite » hauteur, qui restera la même à chaque étape de la preuve. Ce dernier point évite le recours à certaines bases orthonormées de $\mathrm{Lie}(G) \otimes_v \mathbf{C}$ et

*Ceci étant, lorsque l'on effectue la démonstration de la minoration $|\Lambda|_{v_0}$ de la sorte, il est possible d'affaiblir la condition sur le paramètre $\log b$ (*grosso modo* en remplaçant b par $b/\max\{1, h(\alpha_2)\}$, voir Theorem 9.1, (ii), de [49]) tout simplement car la valeur (8) de la dérivée peut aussi être utilisée aux places archimédiennes de k, en lesquelles les polynômes binomiaux croissent plus lentement (en un sens à préciser) que les monômes divisées $X^\ell/\ell!$ (voir la discussion du § 2.6).

†Qui nous a été indiqué par J.-B. Bost.

les contrôles de changements de bases subséquents, qui intervenaient auparavant. Quant à construire le polynôme auxiliaire de la sorte, cela procure l'avantage de supprimer la quantité $Dh(\xi_1, \ldots, \xi_D)$, où $\xi_1, \ldots, \xi_D$ est une $\mathbf{Q}$-base de k (*i.e.*, de manière équivalente, le logarithme du discriminant absolu de k, cf. [43]), qui apparaissait dans les mesures de [21]. L'emploi d'un lemme de Siegel absolu dans le contexte des formes linéaires de logarithmes nous avait été communiqué par S. David. Il sera utilisé dans la version complète (en cours de rédaction) de [14] et il est sous-jacent aux résultats présentés dans [2]. Il remplace le lemme de Thue-Siegel dont on se servait d'ordinaire. Nous le présentons au § 2.7 et nous l'appliquons aux § 3.1.3 et 3.4. Tous les bienfaits de ce lemme pour la démonstration (à commencer par la clarté même de l'argumentation) sont malheureusement un peu ternis par une difficulté technique que je ne sais pas surmonter sans supposer que le groupe engendré par le point p ne rencontre aucun sous-groupe strict de $G(\overline{k})$, c'est-à-dire, dans un langage plus imagé, que p est très « général » ou bien que G est très « petit » (simple)*. Nous avions déjà été contraint d'émettre ce type d'hypothèses lorsque nous avions mis en œuvre la méthode des pentes, qui elle, pourtant, ne requiert aucun lemme de Siegel (voir [22]). Le point commun aux deux approches est un certain sous-cas, appelé *cas périodique*, que je ne sais pas intégrer dans les preuves, bien qu'il fût déjà résolu de manière très astucieuse par P. Philippon & M. Waldschmidt dans leur article [36], grâce à une extrapolation (à la manière de Gel'fond) sur les dérivations. Sauf erreur, il semble que l'on puisse éviter cette hypothèse sur le point p lorsque G est un produit de groupes de dimension 1 tels $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ ou une courbe elliptique (voir la preuve à venir de [2]).

Enfin, nous devons mentionner que l'extrapolation p-adique n'a été rendue possible que grâce à un résultat récent de D. Roy [41]. En effet, jusqu'à présent et à ma connaissance, le seul lemme d'interpolation p-adique suffisamment général pour être utilisé dans notre contexte et disponible dans la littérature était dû à P. Robba [40]. D. Bertrand et Yu. Flicker s'en étaient servis dans leur article [6]. Malheureusement, le théorème de P. Robba comporte un terme supplémentaire qui, dans notre cas et avec les notations utilisées dans la suite, se comporte logarithmiquement comme $TS \log S$ au lieu de TS attendu. Avec les méthodes employées ici, ce terme parasite aurait exigé une condition de petitesse (fonction du sous-espace†) sur le logarithme et aurait anéanti du même coup les améliorations en terme de la hauteur du point p, évoquées ci-dessus. En le supprimant, D. Roy obtient alors un énoncé (lemme 3.22) très proche de la version complexe « classique » (telle celle due à M. Waldschmidt, cf. lemme 3.18). Ce qui s'accorde avec nos objectifs‡.

Remerciements. Je remercie G. Diaz et G. Rémond pour leurs remarques et commentaires sur une première version de ce texte, qui m'ont permis d'améliorer la présentation générale et de corriger de nombreux détails. Je remercie également J.-B. Bost pour ses éclaircissements à propos du lemme 3.6 et du théorème de M. Raynaud sous-jacent.

Sommaire. À la suite de la présentation des principales caractéristiques de nos résultats et de leurs démonstrations, nous introduisons au § 1.1 les données précises grâce auxquelles nous pourrons énoncer au paragraphe suivant les théorèmes que nous obtenons. Nous discuterons alors de quelques-uns de leurs aspects techniques

---

*En réalité, la véritable hypothèse faite aux théorèmes 1.4 et 1.5 est plus faible, mais c'est un détail.

†À savoir, avec les notations qui vont suivre, $||u||_{v_0} \ll r_p/\mathfrak{a}$.

‡Enfin presque ! Il y a un petit défaut qui nous oblige à supposer dans le théorème 1.5 que $||u||_{v_0} \leq r_p^2$ (au lieu de r_p). Il se peut que ce détail soit simplement une maladresse de ma part dans l'emploi du théorème de D. Roy ou bien qu'il soit réellement « attaché » à ce théorème. Cf. § 3.5.2.

et des applications possibles. Nous resituerons également l'énoncé p-adique dans son contexte historique. Le § 2 est consacré à la préparation de la preuve qui est commune, pour une large part, aux différents théorèmes. Nous y présentons un certain nombres de résultats préliminaires qui se divisent en deux catégories: ceux — assez techniques — qui sont directement reliés à l'environnement de la preuve (§ 2.1 → § 2.5) et ceux à l'éventail d'utilisation plus large (§ 2.6 et § 2.7). Le § 2.6 est une analyse du rôle joué par la droite affine $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ qui intervient dans la preuve et le § 2.7 est le lemme de Siegel absolu évoqué ci-dessus. La dernière partie (§ 3) concerne la démonstration proprement dite des énoncés du § 1.2 avec, en particulier (§ 3.2), le contrôle arithmétique de certains coefficients de Taylor.

Table des matières

1.1. **Données générales.** Dans ce paragraphe, nous fixons des notations qui seront utilisées tout au long de ce texte. Certains des théorèmes qui vont suivre ne seront valides qu'avec des hypothèses supplémentaires sur les objets introduits ici, hypothèses qui seront alors explicitement mentionnées.

Soit n un entier naturel ≥ 1, k un corps de nombres de degré D et v_0 une place quelconque (archimédienne ou ultramétrique) de k qui sera privilégiée par la suite.

Soit $G_1, \ldots, G_n$ des groupes algébriques (connexes) commutatifs définis sur k et $g_1, \ldots, g_n$ leurs dimensions respectives. Soit $\Phi_i : G_i \hookrightarrow \mathbf{P}_k^{N_i}$ un plongement de G_i dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^{N_i}$, comme variété quasi-projective. En particulier, les degrés et fonctions de Hilbert-Samuel géométriques considérés dans la suite sont relatifs aux faisceaux $\mathcal{O}_{G_i}(1)$, $1 \leq i \leq n$, induits par ces plongements. Nous reviendrons en détails au § 2.1 sur le choix précis de ces plongements mais signalons dès à présent que ces choix simplifient les démonstrations mais n'ont guère d'importance pour énoncer les résultats. Notons G le groupe $G_1 \times \cdots \times G_n$, $g := g_1 + \cdots + g_n$ sa dimension et Φ le plongement de G dans le produit des $\mathbf{P}_k^{N_i}$ induit par les Φ_i.

À partir de l'adhérence de Zariski de G_i dans $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_k}^{N_i}$, il est possible de construire un modèle lisse de G_i au-dessus d'un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ (voir [7]), c'est-à-dire un schéma en groupes $\mathcal{G}_i \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k[1/m_i]$ ($m_i \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$) lisse et dont la fibre générique $\mathcal{G}_i \times \mathrm{Spec}(k)$ est (isomorphe à) G_i. Quitte à restreindre $\mathcal{G}_i$ à un ouvert plus petit, nous pouvons supposer d'une part que m_i est le même entier m pour tous les i et d'autre part que l'anneau $\mathcal{O}_k[1/m]$ est principal*. Soit $\mathcal{G} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k[1/m]$ le modèle lisse de G induit par les $\mathcal{G}_i$.

Fixons v une place de k et $i \in \{1, \ldots, n\}$. Considérons $\exp_{i,v}$ une application exponentielle du groupe de Lie v-adique $G_i(\mathbf{C}_v)$, définie sur un voisinage ouvert de 0 dans $t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$. Lorsque v est une place archimédienne, il est bien connu que cette application se prolonge en un morphisme analytique à tout l'espace tangent $t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$ et définit ainsi une application $\exp_{i,v} : t_{G_i}(\mathbf{C}_v) \to G_i(\mathbf{C}_v)$ surjective. Lorsque v est ultramétrique, ces propriétés ne sont plus vraies en général. Notons alors dans ce cas $\mathscr{T}_{i,v}$ un sous-groupe ouvert maximal de $t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$ tel que $\exp_{i,v}$ réalise un difféomorphisme analytique de $\mathscr{T}_{i,v}$ sur son image $\mathscr{U}_{i,v}$ (ouvert de $G_i(\mathbf{C}_v)$ contenant l'élément neutre). Dans la suite, l'exponentielle $\exp_{i,v}$ sera l'application restreinte $\mathscr{T}_{i,v} \to \mathscr{U}_{i,v}$. Afin d'uniformiser les notations, nous écrirons encore $\mathscr{T}_{i,v} = t_{G_i}(\mathbf{C}_v)$ (*resp.* $\mathscr{U}_{i,v} = G_i(\mathbf{C}_v)$) dans le cas archimédien, bien que l'exponentielle « restreinte » ne soit plus alors un difféomorphisme (en général). L'espace tangent à l'origine $t_{\mathcal{G}_i}$ de $\mathcal{G}_i$ est un $\mathcal{O}_k[1/m]$-module libre (car projectif, voir note de bas de page) de rang g_i et $t_{\mathcal{G}}$ est également libre de rang g. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_g)$ une base sur $\mathcal{O}_k[1/m]$ de $t_{\mathcal{G}}$ obtenue par concaténation de bases des $t_{\mathcal{G}_i}$, $1 \leq i \leq n$. Quitte à multiplier chacun des e_i par une puissance suffisamment grande de m, nous pouvons supposer que, pour toute place ultramétrique v, le disque ouvert

$$D(0, r_p) = \left\{ \mathbf{z} = z_1 e_1 + \cdots + z_g e_g \in t_G(\mathbf{C}_v)\,;\ \max_{1 \leq j \leq g} |z_j|_v < r_p \right\},$$

où $r_p := |p|_v^{1/(p-1)}$, est inclus dans $\mathscr{T}_v := \mathscr{T}_{1,v} \times \cdots \times \mathscr{T}_{n,v}$. En effet, il existe un entier $n_0 \geq 1$, ne dépendant que de $(\mathcal{G}, m)$, pour lequel, en toute place v, le développement en série de l'exponentielle de $G(\mathbf{C}_v)$ au voisinage de 0 s'écrit

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g} \frac{a_{\mathbf{n},v}}{\mathbf{n}!} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$$

avec $a_{\mathbf{n},v} \in \mathcal{O}_v[1/m]$, polynôme en $1/m$ de degré $\leq n_0 |\mathbf{n}|$. Aux places $v \nmid m$, on a $a_{\mathbf{n},v} \in \mathcal{O}_v$ et l'on sait que le disque $D(0, r_p)$ est contenu dans le domaine de convergence strict de cette série. Si $v \mid m$, on se ramène au cas précédent en considérant les coordonnées de $\mathbf{z}$ dans la base $m^{n_0}\mathbf{e}$ de $t_G(\mathbf{C}_v)$.

L'exponentielle $\exp_v := (\exp_{1,v}, \ldots, \exp_{n,v})$ de $G(\mathbf{C}_v)$ munie de la base $\mathbf{e}$ est appelée dans la littérature *exponentielle normalisée* (cela fixe un isomorphisme de $\mathscr{U}_v := \mathscr{U}_{1,v} \times \cdots \times \mathscr{U}_{n,v}$ avec un groupe *standard* selon la terminologie de Bourbaki [11], III, § 7, n°3). La base $\mathbf{e}$ confère également à $t_G(\mathbf{C}_v)$ une structure d'espace vectoriel normé, par transport de la structure hermitienne (v archimédienne) ou de la norme du sup (v ultramétrique) fournie par la base canonique de $\mathbf{C}_v^g$ (voir § Notations et Conventions). Nous notons $\|\cdot\|_v$ (*resp.* d_v) cette norme sur $t_G(\mathbf{C}_v)$ (*resp.* la distance associée à cette norme). L'identification $t_G(k) \simeq k^g$ permet en particulier — si on se donne un sous-espace vectoriel de $t_G(\mathbf{C}_v)$ — d'écrire la distance entre un point x de $t_G(\mathbf{C}_v)$ et cet espace en termes de *formes linéaires* en les coordonnées de x associées à un système d'équations définissant cet espace.

*Si bien qu'un $\mathcal{O}_k[1/m]$-module projectif (de type fini) est nécessairement libre.

Considérons un point* $p = (p_1, \ldots, p_n)$ de $G(k) \cap \mathscr{U}_{v_0}$ ainsi qu'un logarithme $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathscr{T}_{v_0}$ de ce point:

$$\exp_{v_0}(u) = p\ .$$

Soit V un sous-espace vectoriel de l'espace tangent $t_G(k)$, de codimension $t \geq 1$ (ce qui suit est trivial et dénué d'intérêt lorsque $t = 0$, *i.e.* $V = t_G(k)$).

HYPOTHÈSE : **Dans tout ce texte, nous supposerons que V est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique connexe H de G.**

En d'autres termes, l'espace V est une algèbre de Lie *algébrique* au sens de [16] (II, § 6, 2.4, p. 262). Bien que certains des énoncés qui vont suivre puissent être adaptés lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, nous avons délibérement choisi de nous restreindre à ce cas (dit *rationnel*) d'une part pour des raisons techniques (au début de la preuve, le « conditionnement » des données de départ et le choix des paramètres sont radicalement différents du « cas général », tel qu'il est écrit par exemple dans [21, 25]) et d'autre part pour conserver une certaine unité du texte. Il s'avère par ailleurs que c'est le cas le plus utile dans les applications à d'autres problèmes de théorie des nombres (il suffit de se référer par exemple au survol écrit sur ce thème par Fel'dman & Nesterenko, chap. 4, § 2 de [19], pour s'en convaincre; voir aussi l'énoncé 1.7 un peu plus loin).

Nous définissons un paramètre $y \in \{0, 1\}$ par $y = 0$ si G est une variété semi-abélienne et $y = 1$ sinon. Nous avions déjà distingué le cas semi-abélien du cas général dans [21] et nous avions également introduit un tel y dans [22]. Cependant, dans ce dernier cas, la définition de y était plus subtile et non équivalente. Nous verrons la raison de cette simplification au tout début de la preuve des énoncés (§ 2.1), lorsque seront mises en place les « véritables » données avec lesquelles nous travaillerons.

IMPORTANTE CONVENTION. Dans toute la suite, le mot « constante » qualifie un nombre réel ≥ 1 qui ne dépend que de $G, \Phi, \mathcal{G}, m, \mathbf{e}, (d_v)_v$, c'est-à-dire du groupe algébrique G et des données satellites autour de G. Partant, ce nombre réel est indépendant de k (il ne dépend que d'un corps de définition de G), de p, u, V etc. Une telle constante sera systématiquement désignée par la lettre c munie d'un indice (mais la réciproque est fausse).

1.2. **Résultats.** Les théorèmes que nous allons énoncer ici concernent tous le cas rationnel homogène, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction.

Fixons auparavant quelques notations supplémentaires. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, le plongement (en tant qu'espace quasi-projectif) de G_i dans $\mathbf{P}_k^{N_i}$ fournit une hauteur de Weil h sur l'ensemble des points $\overline{\mathbf{Q}}$-rationnels de G_i (dont, en particulier, p_i). Nous noterons encore h la hauteur induite sur $G(\overline{\mathbf{Q}})$. Soit ρ_i l'ordre analytique de G_i défini comme suit : $\rho_i = 1$ si G_i est un groupe linéaire et $\rho_i = 2$ sinon (c'est-à-dire lorsque G_i a une composante abélienne non triviale).

Dans le cas archimédien, l'énoncé le plus général que nous obtenons est le suivant.

Théorème 1.4. *Il existe une constante $c_7 \geq 1$ ayant la propriété suivante. Supposons que v_0 est une place archimédienne. Soit $\mathfrak{e}$ un nombre réel $\geq e$ et $\mathfrak{a}$ un entier*

*La lettre p désigne à la fois ce point et le nombre premier qui divise v_0. Mais cette maladresse ne devrait pas créer d'ambiguïté.

naturel supérieur ou égal à $D\max\{1,h(V)\}/\log\mathfrak{e}$. *Notons* U_0 *le nombre réel*

$$\begin{aligned} U_0 :=&(\mathfrak{a}\log\mathfrak{e})\left(\mathfrak{a}^y+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log\left(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\right)\right)^{1/t} \\ &\times\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{D\max_{0\le s\le c_7\mathfrak{a}}\{h(sp_i)\}+(\mathfrak{e}\mathfrak{a}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{e}}\right)^{g_i/t}. \end{aligned}\tag{9}$$

Supposons que pour tout entier $s\in\{1,\ldots,c_7\mathfrak{a}\}$ *et tout sous-groupe algébrique connexe* G' *de* G *vérifiant* $t_{G'}+V\neq t_G$ *on ait* $sp\notin G'(\overline{k})$. *Alors* $u\notin V(\mathbf{C})$ *et*

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u,V)\ge -c_7U_0\ \cdot\tag{10}$$

Formellement, ce résultat est très proche de celui énoncé avec $t=1$ dans le théorème principal de [21]. Hormis la disparition de la hauteur d'une $\mathbf{Q}$-base de k (voir l'introduction), c'est surtout la définition de l'entier $\mathfrak{a}$ qui change radicalement. Dans l'article en question, cet entier était (en substance) $\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log h(p)$ alors qu'ici il dépend du sous-espace V mais pas du point p. Sachant qu'il existe une constante c_8 pour laquelle $h(sp_i)\le c_8\max\{1,s^{\rho_i}h(p_i)\}$ pour tout entier s, l'on déduit aisément de la définition de U_0 la dépendance standard en $h(p)$ décrite dans l'introduction (énoncés 1.1 et 1.2). Si $n=1$, nous pouvons regarder la dépendance *minimale* en $h(p)$ de U_0, c'est-à-dire choisir $\mathfrak{e}$ (qui est le seul paramètre vraiment « libre » du théorème 1.4) de sorte que U_0, comme fonction uniquement de $h(p)$, soit minimal. Avec des considérations élémentaires, on s'aperçoit que, dans cette optique, le meilleur choix pour $\mathfrak{e}$ est $e\sqrt{\max\{1,h(p)\}}$, ce qui conduit à l'estimation

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u,V)\ge -c_9\left(\frac{\max\{1,h(p)\}}{\log\max\{e,h(p)\}}\right)^{g/t}\tag{11}$$

où c_9 est une fonction des données qui ne dépend pas de la hauteur de p. Si nous comparons cela à la conséquence I.3.3 de [21] (écrite avec $t=1$), nous constatons à nouveau la disparition d'un logarithme de $h(p)$ (qui était au numérateur du membre de droite de (11)). Autrement dit, nous vérifions ainsi que l'amélioration en $h(p)$ est bien une caractéristique intrinsèque de la mesure (10) et non pas le simple effet d'un choix différent de paramètres dans deux énoncés « semblables ». De la même manière, nous observons aussi une amélioration (très légère) en le degré D avec la suppression d'une puissance d'un logarithme de D. En choisissant $\mathfrak{e}=\sqrt{D}$, on a

$$\log \mathrm{d}_{v_0}(u,V)\ge -c_{10}\frac{D^{1+(2g+1)/t}}{(\log(1+D))^{2g/t}}\ ,$$

où c_{10} est une fonction qui ne dépend pas de D. Cela est à comparer à la conséquence I.3.4 de [21] qui, dans le cas où $t=1$, comporte un terme supplémentaire $(\log(1+D))^{g+1}$ au numérateur du membre de droite. Bien que ce dernier progrès soit — il me semble — assez marginal, il reflète néanmoins la possibilité en se focalisant sur une donnée précise ($h(p)$) d'en affaiblir d'autres, par le jeu des paramètres de la démonstration de transcendance qui brassent plusieurs données à la fois.

Nous avons également une version ultramétrique de l'énoncé 1.4, mais, auparavant, évoquons quelques points d'histoire. Si la littérature est assez riche et variée en analogues p-adiques de mesures d'indépendance linéaire de logarithmes lorsque G est un groupe linéaire (en particulier grâce aux travaux de K. Yu [53–55]), elle est en revanche beaucoup plus réduite si G a une partie abélienne, voire même inexistante lorsque, comme ici, G est quelconque. L'essor de la théorie ultramétrique des formes linéaires de logarithmes abéliens remonte à la fin des années soixante-dix avec la série d'articles de D. Bertrand [4–6] (la dernière référence est un article en commun avec Yu. Flicker) qui, en s'appuyant sur les travaux (archimédiens) de Baker, Masser, Coates, Lang [12, 30, 31], a développé et établi diverses mesures p-adiques comparables à celles connues alors dans le cadre de produit de courbes elliptiques ou de variétés abéliennes (souvent, mais pas exclusivement, avec une hypothèse de multiplication complexe). Puis, probablement par suite de difficultés techniques liées à l'absence d'un lemme de multiplicités et d'un lemme d'interpolation ultramétrique adéquats*, les travaux publiés se sont interrompus jusqu'en 1996, date à laquelle G. Rémond et F. Urfels ont obtenu une mesure en *deux* logarithmes elliptiques p-adiques (*i.e.* G est le produit de deux courbes elliptiques) entièrement explicites [39]. Ce dernier résultat, qui peut (selon les auteurs) se généraliser à un produit quelconque de courbes elliptiques, repose sur la méthode des déterminants d'interpolation de M. Laurent [28]. Enfin, signalons que N. Hirata-Kohno a récemment annoncé (2003) une telle généralisation au cas d'un produit quelconque de courbes elliptiques, totalement explicite, qui se présente comme un analogue (amélioré) du théorème de S. David [13]. Le pendant ultramétrique du théorème 1.4 que nous nous proposons d'établir simultanément est le suivant.

Théorème 1.5. *Il existe une constante $c_{11} \geq 1$ ayant la propriété suivante. Supposons que v_0 est ultramétrique et que $\|u\|_{v_0} < r_p^2$ (où, rappelons-le, $r_p = p^{-1/(p-1)}$). Considérons un nombre réel $\mathfrak{r}$ dans l'intervalle ouvert $]r_p^{-1}, r_p/\|u\|_{v_0}[$. Soit $\mathfrak{a}$ un entier naturel vérifiant*

$$\mathfrak{a} \geq \frac{D\max\{1, h(V)\} + \log^+((\log(r_p\mathfrak{r}))^{-1})}{\log \mathfrak{r}}\ .$$

Notons U_1 le nombre réel

$$(12)\quad (\mathfrak{a}\log\mathfrak{r})\left(\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}\log\left(e + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}\right)\right)^{1/t}\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{D\max\limits_{0\leq s\leq c_{11}\mathfrak{a}}\{h(sp_i)\}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{r}}\right)^{g_i/t}\ .$$

Supposons que pour tout entier $s \in \{1, \ldots, c_{11}\mathfrak{a}\}$ et tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$ on ait $sp \notin G'(\overline{k})$. Alors $u \notin V \otimes \mathbf{C}_{v_0}$ et $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \geq -c_{11}U_1$.

Remarques 1.6.

1) Les différences entre les versions archimédienne et ultramétrique résident d'une part dans le changement de $\mathfrak{e}$ par $\mathfrak{r}$ et d'autre part dans une contrainte plus forte sur l'entier $\mathfrak{a}$ dans le cas ultramétrique. Par ailleurs, toujours dans ce cas, la norme $\|u_j\|_{v_0}$ du logarithme u_j n'apparaît plus.
2) Lorsque dans la preuve on choisit de mettre sur la partie $\mathbb{G}_a$ la base des monômes usuels, cela remplace le terme $\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log(e + D/\log\mathfrak{e})$ par $\mathfrak{a}^y + \frac{D\log\mathfrak{a}}{\log\mathfrak{e}}$. Cela rajoute donc dans le cas archimédien un logarithme de la hauteur du sous-espace, et, dans le cas ultramétrique, une dépendance supplémentaire en p.

Le survol historique qui précède a mis en lumière certaines carences de la théorie ultramétrique. Et pourtant les applications des énoncés p-adiques existent bel et bien, notamment en ce qui concerne l'étude des points S-entiers de $G(k)$ (où G est une variété abélienne par exemple), comme le montre D. Bertrand au § 3.2 de [5], à la suite des travaux (archimédiens) de S. Lang [27] et D. Masser [29]. Pour une approche très concrète de ce type d'utilisation des formes linéaires de logarithmes,

*Ces obstacles sont maintenant levés grâce aux travaux de P. Philippon [34, 35], G. Wüstholz [52] et D. Roy [41]. Par exemple, les résultats de [21] pourraient être adapté dans le cas p-adique.

fondée sur la *méthode du logarithme elliptique* de Stroeker, Tzanakis, Zimmer *et al.* [23, 46], on pourra consulter le chapitre XIII du livre de N. Smart [45]. À titre d'exemple, voici un résultat que l'on peut déduire de ces méthodes.

Énoncé 1.7. *Supposons que G est une courbe elliptique, munie d'un modèle de Weierstrass $\mathcal{G}$ (minimal) et notons (x,y) les coordonnées d'un point $Q \in G(k)$ relatives à ce modèle. Il existe une constante $c_{12} = c_{12}(\mathcal{G},k) \geq 1$ (qui n'est pas effective*) et une constante absolue $c_{13} > 0$ telles que, pour tout point $Q \in G(k)$, le plus grand nombre premier qui divise un dénominateur de x est supérieur à*

$$c_{12} \max\{1, h(Q)\}^{\frac{1}{c_{13}[k:\mathbf{Q}]^r}}$$

où r est le rang (de Mordell-Weil) du groupe $G(k)$.

D. Bertrand obtient une estimation de cette forme avec $c_{13} = 13$, r^2 à la place de r et G à multiplication complexe (voir théorème 3 de [5]). Nous n'effectuerons pas ici la démonstration de cet énoncé puisqu'il suffit de reprendre la démarche (déjà très détaillée) de D. Bertrand en substituant les mesures d'indépendance linéaires que nous obtenons à celles qu'il utilisait dans l'article cité (au bas de la page 48, *op. cit.*). Mentionnons seulement que l'hypothèse sur le point p du théorème 1.5 est satisfaite car les composantes de p forment une famille génératrice minimale (sur $\mathbf{Z}$) de $G(k)$.

2. Préparatifs

La démonstration des théorèmes 1.4 et 1.5 requiert plusieurs énoncés d'intérêts indépendants que nous présentons dans cette partie.

2.1. **Mise en place de données supplémentaires.** Les énoncés des théorèmes de la section précédente reposent pour une part importante sur le choix des données avec lesquelles nous commençons la démonstration. Il s'avère que si nous ne modifions pas légèrement les données « naturelles » G, p, V, il est certes encore possible d'obtenir des minorations, mais elles sont plus faibles que celles présentées au § 1.2. C'est pourquoi nous sommes amenés techniquement à rajouter le groupe affine $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ à G en formant $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times G$, puis à considérer le point $q = (1,p) \in (\mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times G)(k)$ et le sous-espace vectoriel W de $t_{\mathbb{G}_{\mathrm{a}}} \oplus t_G$ défini par $t_{\mathbb{G}_{\mathrm{a}}} \oplus V$. L'élément $1 \oplus u \in t_{\mathbb{G}_{\mathrm{a}}}(\mathbf{C}_{v_0}) \oplus \mathscr{T}_{v_0}$ est un logarithme du point q. Pour uniformiser les notations, nous posons $G_0 := \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ et $u_0 := 1$.

Par ailleurs, considérons un entier i compris entre 1 et n. Comme l'a montré J.-P. Serre dans [44]†, le choix d'un diviseur convenable (très ample) sur une compactification lisse de G_i fournit un plongement Φ_i de G_i dans un espace projectif $\mathbf{P}_k^{N_i}$, « compatible » avec la structure de schéma en groupes de G_i, au sens où il est possible d'exprimer les formules d'additions et de multiplications (par un entier $m \neq 0$) en termes de polynômes homogènes de mêmes degrés ($\leq m^2$ lorsqu'il s'agit de la multiplication par m). De manière plus précise, quitte à effectuer un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que l'élément neutre de G_i est représenté par $(1:0:\cdots:0) \in \mathbf{P}^{N_i}$. Soit $x \in G_i(\mathbf{C}_v)$ et $(x_0:\cdots:x_{N_i})$ les coordonnées de $\Phi_i(x)$. On note

$$A_x^{(i)} = (A_{x,0}^{(i)}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) : \cdots : A_{x,N_i}^{(i)}(\mathbf{X},\mathbf{Y})) \tag{13}$$

une famille de polynômes (à coefficients dans $\mathcal{O}_{v_0(k)}$) qui exprime la loi d'addition de G_i au voisinage de x. Dans cette formule, $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont des (N_i+1)-uplets de variables et chacun des $A_{x,j}^{(i)}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $0 \leq j \leq N_i$, est homogène de même degré sur chacune

*Car intervient dans la preuve une base de Mordell-Weil de $G(k)$.

†Et après une éventuelle extension finie du corps de nombres k afin que la partie multiplicative du plus grand sous-groupe linéaire contenu dans G soit déployée.

des variables $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, inférieur à une constante c_{14}, qui peut être choisie uniforme en x (quasi-compacité de G_i) et en i (nombre fini). Cette constante ne dépend que de (G, Φ). Dans la suite, pour ne pas alourdir excessivement les notations, nous omettrons souvent la référence à x en indice et nous écrirons $A_j^{(i)}$ au lieu de $A_{x,j}^{(i)}$. Soit v une place quelconque de K. Il est possible également de représenter l'exponentielle v-adique de $G_i(\mathbf{C}_v)$ par des fonctions $(\theta_{v,i,j})_{0\leq j\leq N_i}$, analytiques et sans zéros communs dans $\mathscr{T}_{i,v}$, telles que $(\theta_{v,i,0}(0), \ldots, \theta_{v,i,N_i}(0)) = (1, 0, \ldots, 0)$:

$$\exp_{i,v}(z) = (\theta_{v,i,0}(z) : \cdots : \theta_{v,i,N_i}(z)), \quad z \in \mathscr{T}_{i,v} .$$

Nous noterons

$$\Theta_{v,i} : z \in \mathscr{T}_{i,v} \mapsto (\theta_{v,i,0}(z), \ldots, \theta_{v,i,N_i}(z)) \in \mathbf{C}_v^{N_i+1}$$

et, si j est un entier naturel inférieur à N_i,

$$\Psi_{v,i,j} : z \in \mathscr{T}_{i,v} \setminus \theta_{v,i,j}^{-1}(\{0\}) \mapsto \left(\frac{\theta_{v,i,0}}{\theta_{v,i,j}}(z), \ldots, \frac{\theta_{v,i,N_i}}{\theta_{v,i,j}}(z)\right) \in \mathbf{C}_v^{N_i+1} .$$

Bien que ce soit un abus de notations, nous nous permettrons d'écrire ces formules pour $z \in \mathscr{T}_v$ au lieu de la $i^{\text{ème}}$ composante de z sur $\mathscr{T}_{i,v}$. Comme nous l'avons vu au § 1.1, lorsque v est ultramétrique, le choix de la base $\mathbf{e}$ permet d'écrire chacune des coordonnées $\theta_{v,i,j}(z)$ sous la forme d'une série $\sum_{\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{n},v,i,j}}{\mathbf{n}!}\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ où $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{g_i})$ sont les coordonnées de z dans la base $\mathbf{e}$ et $a_{\mathbf{n},v,i,j} \in \mathcal{O}_v$. De plus, lorsque v est archimédienne, les fonctions $\theta_{v,i,j}$, $0 \leq j \leq N_i$, sont d'ordre analytique ρ_i et il existe une constante $c_{15} \geq 1$ telle que, pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout vecteur z de $\mathscr{T}_{i,v}$,

$$-c_{15}(1 + \|z\|_v)^{\rho_i} \leq \log \max_{0\leq j\leq N_i} |\theta_{v,i,j}(z)| \leq c_{15}(1 + \|z\|_v)^{\rho_i} . \tag{14}$$

La k-structure de l'espace tangent t_{G_i} entraîne une stabilité par dérivation (selon un vecteur de $t_{G_i}(k)$) de l'anneau $k[(\theta_{v,i,j}/\theta_{v,i,0})_{0\leq j\leq N_i}]$. Ces propriétés seront utilisées aux paragraphes 3.2 et 3.3.

Dans la suite nous noterons $\mathbf{P}$ l'espace multiprojectif $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{N_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{N_n}$ (le corps de base étant k, $\overline{k}$ ou $\mathbf{C}_{v_0}$ selon le contexte). Il est naturellement muni du faisceau canonique $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1, \ldots, 1)$ et, si V est une sous-variété (fermée) de $\mathbf{P}$, l'entier $\deg \mathsf{V}$ (*resp.* le polynôme $H(\mathsf{V}; X_0, \ldots, X_n)$) désigne le degré (*resp.* le polynôme de Hilbert-Samuel) de V relatif à ce faisceau. On considère également

$$\mathscr{H}(\mathsf{V}; X_0, \ldots, X_n) := (\dim \mathsf{V})! \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{H(\mathsf{V}; \alpha.X_0, \ldots, \alpha.X_n)}{\alpha^{\dim \mathsf{V}}}$$

et on étend cette définition aux sous-schémas intègres de $\mathbf{P}$ en prenant l'adhérence de Zariski dans $\mathbf{P}$. Le plongement $G_0 \times G \hookrightarrow \mathbf{P}$ permet alors de définir le polynôme $\mathscr{H}(G'; X_0, \ldots, X_n)$ pour tout sous-schéma en groupes G' de $G_0 \times G$. Rappelons que ses coefficients sont des entiers naturels de somme égale à $\deg G'$.

2.2. **Paramètres et choix d'un sous-groupe.** Dans ce paragraphe, nous introduisons les paramètres qui seront utilisés au cours de la preuve, sans toutefois les définir précisément, afin de conserver des énoncés assez généraux et recyclables ! En effet, bien que les preuves des théorèmes 1.4 et 1.5 soient assez longues et imbriquées, chaque énoncé « local » n'utilise le plus souvent qu'un nombre très restreint de relations entre les paramètres. Il nous apparaît donc plus judicieux de mettre en évidence ces relations pour ensuite expliquer comment choisir les paramètres (ce qui sera fait au § 3.1) au lieu de masquer par un choix prématuré (et nécessairement *imposé*) quelques subtilités qui justifient ce choix. De plus, il est alors possible pour le lecteur de se faire une idée plus précise de l'influence de chaque étape de la preuve sur le résultat final, et, le cas échéant, en modifiant une étape, d'améliorer ledit résultat (voir en particulier les lemmes 3.1 et 3.2).

Soit x, $\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n$, $\widetilde{T}$, C_0 des nombres réels strictement positifs et $0 < S_0 \leq S$ des entiers. Posons, pour chaque entier $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\widetilde{D}_i^{\#} := x\widetilde{D}_i$ et $D_i := [\widetilde{D}_i^{\#}]$, ainsi que $T := [\widetilde{T}]$. Nous supposerons que l'entier T est non nul. En guise de support à l'intuition, mentionnons que x est une variable « d'ajustement », les D_i des degrés de polynômes, T un ordre de dérivation, S un nombre de points (tous multiples de q) et C_0 une constante (que l'on peut prendre dans $\mathbf{N}$) plus grande que toutes celles qui interviendront dans ce texte.

Lorsque G' est un sous-groupe algébrique de $G_0 \times G$, on note $\lambda' := \operatorname{codim}_W W \cap t_{G'}$ et $r' := \operatorname{codim}_G G'$.

Définition 2.1. Soit G' un sous-groupe algébrique connexe de $G_0 \times G$ tel que $t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}$. On définit

$$A(G') := \left(\frac{\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right) \mathscr{H}(G' \,;\, \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)}{C_0 \mathscr{H}(G_0 \times G \,;\, \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)} \right)^{\frac{1}{r'-\lambda'}}$$

et $B(G') := A(G')^{\frac{r'-\lambda'}{r'}} \max\{1, A(G')\}^{\frac{\lambda'}{r'}}$.

Remarquons alors que l'ensemble $\{B(G') \,;\, B(G') \leq B(\{0\}) \text{ et } t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}\}$ est fini. En effet, si $B(G') \leq B(\{0\})$ alors $A(G') \leq B(\{0\})$ donc $\mathscr{H}(G' \,;\, \widetilde{D}_0, \ldots, \widetilde{D}_n)$ et par conséquent $\deg G'$ sont bornés. Le degré de G' étant un entier, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour lui et comme les coefficients du polynôme $\mathscr{H}(G' \,;\, X_0, \ldots, X_n)$ sont des entiers compris entre 0 et $\deg G'$, il n'y en a également qu'un nombre fini. Il est alors clair que $B(G')$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque G' varie (parmi les sous-groupes tels que $B(G') \leq B(\{0\})$). Cette constatation s'avère utile pour la définition qui va suivre, définition qui permet de choisir convenablement x et un sous-groupe algébrique particulier de $G_0 \times G$ en vue à la fois de faciliter l'analyse qui succède à l'utilisation du lemme de multiplicités et en outre de contrôler finement le rang d'un système linéaire considéré ultérieurement (§ suivant). Sans cela, nous aurions été amenés à imposer de « fortes » conditions pour assurer qu'au moins un des paramètres entiers D_i, $1 \leq i \leq n$, est non nul, ce qui se serait répercuté automatiquement sur la qualité des estimations (à savoir le paramètre U_0 du théorème 1.4 par exemple).

Définition 2.2. On définit le nombre réel strictement positif

$$x := \min_{t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}} \{B(G')\}$$

où G' varie parmi les sous-groupes algébriques connexes de $G_0 \times G$ tel que $t_{G'} + W$ est strictement inclus dans l'espace tangent $t_{G_0 \times G}$. On note également $\widetilde{G}$ un sous-groupe parmi les G' en question tel que $x = B(\widetilde{G})$.

Lemme 2.3. *Supposons qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe $H_1 \subseteq G_0 \times G$ tel que $t_{H_1} + W \neq t_{G_0 \times G}$ et $A(H_1) \leq 1$. Alors $x \leq 1$ et pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de $G_0 \times G$ vérifiant $t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}$, on a*

(15)

$$\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right) \mathscr{H}(G' \,;\, D_0^{\#}, \ldots, D_n^{\#}) \geq C_0 \mathscr{H}(G_0 \times G \,;\, D_0^{\#}, \ldots, D_n^{\#}) \cdot$$

De plus, cette inégalité est une égalité pour $G' = \widetilde{G}$.

Démonstration. De l'existence de H_1, on déduit immédiatement que $B(H_1) \leq 1$ et donc $x \leq 1$. Par ailleurs, pour un schéma en groupes G' qui vérifie les hypothèses de l'énoncé, considérons le nombre réel

$$\mho_{G'} := \frac{\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right) \mathscr{H}(G' \,;\, D_0^{\#},\ldots,D_n^{\#})}{C_0\mathscr{H}(G_0\times G\,;\, D_0^{\#},\ldots,D_n^{\#})} \ .$$

On a $x^{r'}\mho_{G'} = A(G')^{r'-\lambda'}$ par homogénéité de $\mathscr{H}$.

- Si $A(G')\geq 1$ on a $\mho_{G'}\geq 1/x^{r'}\geq 1$.
- Si $A(G')\leq 1$ on a $B(G')=A(G')^{\frac{r'-\lambda'}{r'}}\geq x$ donc encore $\mho_{G'}\geq 1$.

Cela démontre l'inégalité (15). De plus comme $A(\widetilde{G})\leq 1$ (sinon $x=B(\widetilde{G})$ serait >1), on a $x=A(\widetilde{G})^{\frac{\tilde{r}-\tilde{\lambda}}{\tilde{r}}}$ puis $\mho_{\widetilde{G}}=1$ et il y a donc bien égalité dans (15) pour $\widetilde{G}$. □

Ce lemme est tout à fait général et ne dépend aucunement des valeurs exactes des $\widetilde{D}_i$, $\widetilde{T}$ etc. qui seront données dans la suite.

2.3. **Rang d'un système d'équations linéaires.** Soit $(P_0=1,P_1,\ldots,P_{D_0})$ une base de $k[X]_{\leq D_0}$ et $\mathbf{D}=(D_0,\ldots,D_n)$. Considérons l'espace vectoriel $k[\mathbf{P}]_{\mathbf{D}}$ des polynômes multihomogènes en les variables $\mathbf{X}_i=(X_0^{(i)},\ldots,X_{N_i}^{(i)})$, $0\leq i\leq n$ (en posant $N_0:=1$), de multidegrés $\mathbf{D}$. Lorsque v est une place de k et

$$P=\sum_{|\lambda_i|=D_i} q_{\boldsymbol{\lambda}}\prod_{i=0}^{n}\mathbf{X}_i^{\lambda_i}\in k[\mathbf{P}]_{\mathbf{D}},$$

$(\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)\in\prod_{i=0}^{n}\mathbf{N}^{N_i+1}$, $p_{\boldsymbol{\lambda}}\in k)$, nous noterons $F_{P,v}$, ou plus simplement F s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'application

$$F_{P,v}: z\mapsto \sum_{\boldsymbol{\lambda}} q_{\boldsymbol{\lambda}}P_{\lambda_0}(z_0)\prod_{i=1}^{n}\Theta_{v,i}^{\lambda_i}(z_i) \tag{16}$$

définie pour $z=(z_0,z_1,\ldots,z_n)\in\mathbf{C}_v\times\mathscr{T}_v$ et à valeurs dans $\mathbf{C}_v$. Dans cette expression, nous avons identifié l'élément $\lambda_0\in\mathbf{N}^2$ de longueur D_0 avec sa projection sur $\{0\}\times\mathbf{N}$, notée aussi λ_0 (nous commettrons souvent cet abus de notation). Nous noterons $(p_{\boldsymbol{\lambda}})$ les coefficients de P dans la base induite par P_{λ_0}, ce qui se traduit pour $F_{P,v}$ par

$$F_{P,v}(z)=\sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}}P_{\lambda_0}(z_0)\prod_{i=1}^{n}\Theta_{v,i}^{\lambda_i}(z_i)\ .$$

Soit E la composante de degré $\mathbf{D}$ de l'espace vectoriel $k[\mathbf{P}]$ quotienté par l'idéal des polynômes identiquement nuls sur $G_0\times G$ (c'est-à-dire tels que F_P soit identiquement nul). Soit $\mathbf{w}=(w_0,\ldots,w_{g-t})$ une base de W et $\mathcal{D}_{w_i}$ l'opérateur différentiel associé à w_i. Soit S_1,T_1 des entiers naturels non nuls. Considérons le système

$$\forall\,(s,\boldsymbol{\tau})\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^{\dim W}\ ;\ 0\leq s\leq S_1,\ |\boldsymbol{\tau}|\leq T_1,\quad \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}F_{P,v_0}(s,su)=0 \tag{17}$$

en les variables $q_{\boldsymbol{\lambda}}$ ou, de manière équivalente, en les variables $p_{\boldsymbol{\lambda}}$. En considérant un sous-groupe algébrique G' de $G_0\times G$, nous allons majorer le rang ρ du système (17) en fonction de G'. Pour cela, nous adoptons la même démarche que celle du lemme 6.7 de [36] (voir aussi la preuve du lemme 6.1 de [13]). Soit $\mathbf{w}'$ une base d'un supplémentaire de $W\cap t_{G'}$ dans W et $\lambda'=\dim W-\dim(W\cap t_{G'})$. Avec ces données, on montre que ρ est inférieur au rang du système

$$\forall\,(s,\boldsymbol{\tau})\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^{\lambda'}\ ;\ 0\leq s\leq S_1,\ |\boldsymbol{\tau}|\leq T_1,\quad \mathcal{D}_{\mathbf{w}'}^{\boldsymbol{\tau}}P(sq+G')=0,$$

ce qui entraîne la majoration

$$\rho\leq\operatorname{card}\{\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{N}^{\lambda'};\ |\boldsymbol{\tau}|\leq T_1\}\times\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S_1)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right)\dim\left(\mathbf{C}_{v_0}[\mathbf{P}]/I(G')\right)_{2\mathbf{D}}\ .$$

En vertu d'un théorème de Yu. Nesterenko (voir [33]), le dernier terme est lui-même contrôlé en fonction de $\mathscr{H}(G')$:

$$\dim\left(\mathbf{C}_{v_0}[\mathbf{P}]/I(G')\right)_{2\mathbf{D}} \leq c_{16}\mathscr{H}(G'; D'_0, \dots, D'_n)$$

où $D'_i := \max\{1, D_i\}$ et c_{16} est une constante (explicite). Nous obtenons ainsi l'existence d'une constante c_{17} telle que

$$\rho \leq c_{17} T_1^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S_1) + G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right) \mathscr{H}(G'; D'_0, \dots, D'_n) \ . \tag{18}$$

En appliquant ce résultat au sous-groupe $G' = \widetilde{G}$ introduit dans la définition 2.2, nous avons la

Proposition 2.4. *Supposons que $sq \notin \widetilde{G}(\overline{k})$ pour tout $s \in \{1, \dots, S\}$. Alors le rang ρ du système* (17) *avec $S_1 := S_0$ et $T_1 := 2(g+1)T$ vérifie*

$$\rho \leq C_0^{3/2} \frac{S_0}{S} \mathscr{H}(G; D'_0, \dots, D'_n) \ .$$

Démonstration. En effet la dernière assertion du lemme 2.3 permet de simplifier la majoration (18) en

$$\rho \leq c_{17} C_0 \frac{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S_0) + \widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})}\right)}{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S) + \widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})}\right)} \mathscr{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)$$

car chacune des applications partielles

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(\widetilde{G}; x_0, \dots, x_n) / \mathscr{H}(G; x_0, \dots, x_n)$$

est décroissante (voir propriété 4.4, p. 414, de [25]) et $D_i^{\#} \leq 2D'_i$. Pour conclure, nous utilisons l'hypothèse faite sur q. □

Remarque 2.5. L'hypothèse sur q correspond à celle faite sur p dans les théorèmes 1.4 et 1.5 et elle n'intervient dans toute la preuve qu'à cet endroit précis.

2.4. **Remarque auxiliaire (non-nullité du** $\max\{D_i\}$**).** Avec la définition du nombre réel x et quelques hypothèses supplémentaires, il est possible de montrer que les entiers D_i, $1 \leq i \leq n$, ne peuvent être tous nuls. Ce point est bien sûr crucial pour la construction d'une fonction auxiliaire (voir le début du § 3.4). Néanmoins, il est exclu de montrer* – sans hypothèses assez fortes (comme par exemple $t = 1$) – que ces entiers sont *tous* non nuls car $\widetilde{D}_i$ peut être ≤ 1 et, si les hypothèses du lemme 2.3 sont vérifiées, $x \leq 1$. Toutefois, lorsqu'au moins un des $\widetilde{D}_i$ n'est pas trop proche de 0, l'entier D_i correspondant est non nul comme l'affirme le

Lemme 2.6. *Supposons que $x \leq 1$ et que $sq \notin \widetilde{G}(\overline{k})$ pour tout $s \in \{1, \dots, C_0 \deg(G_0 \times G)\}$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

(1) $S \geq C_0 \deg(G_0 \times G)$,

(2) $\widetilde{T}(S+1) \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\widetilde{D}_i\} \geq C_0 \deg(G_0 \times G) \widetilde{D}_0$,

alors les entiers D_i, $1 \leq i \leq n$, ne sont pas tous nuls.

Démonstration. Par construction, il s'agit de montrer que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \{x\widetilde{D}_i\} \geq 1$. Comme $x = B(\widetilde{G}) = A(\widetilde{G})^{\frac{\widetilde{r} - \widetilde{\lambda}}{\widetilde{r}}}$ (car précisément $x \leq 1$ par hypothèse), on a

$$\left(x \max_{1 \leq i \leq n} \{\widetilde{D}_i\}\right)^{\widetilde{r}} = \frac{\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S) + \widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}\,; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n) \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\widetilde{D}_i\}^{\widetilde{r}}}{C_0 \mathscr{H}(G_0 \times G\,; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)} \ . \tag{19}$$

---

*Contrairement à la tradition : Remarque p. 307 de [36], Lemme 4.23, p. 421, de [25], Lemme 3.27, p. 91, de [26].

Soit $\pi_0 : G_0 \times G \to G_0$ la projection canonique sur G_0 et $\pi : G_0 \times G \to G$ celle sur G. Si $\pi_0(\widetilde{G}) = \{0\}$ alors $\widetilde{G} = \{0\} \times \pi(\widetilde{G})$ donc

- $\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+\widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})}\right) = S+1$ (car la première composante de q est 1),
- $\widetilde{\lambda} \geq 1$ (car sinon $W \subseteq t_{\widetilde{G}}$ et on aurait $t_{G_0} \subseteq t_{\pi_0(\widetilde{G})} = \{0\}$),
- $\mathscr{H}(\widetilde{G}\,;\widetilde{D}_0,\ldots,\widetilde{D}_n) \geq \min\limits_{\substack{i_1+\cdots+i_n=\dim\widetilde{G}\\ 0\leq i_j\leq g_j}} \{\widetilde{D}_1^{i_1}\cdots\widetilde{D}_n^{i_n}\}$

et de la formule (19) on déduit

$$\left(x\max_{1\leq i\leq n}\{\widetilde{D}_i\}\right)^{\widetilde{r}} \geq \frac{\widetilde{T}(S+1)\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\widetilde{D}_i\}}{C_0\deg(G_0\times G)\widetilde{D}_0} \tag{20}$$

et cette dernière quantité est supérieure à 1 par hypothèse.

Si $\pi_0(\widetilde{G}) = G_0$ on a alors

$$\mathscr{H}(\widetilde{G}\,;\widetilde{D}_0,\ldots,\widetilde{D}_n) \geq \widetilde{D}_0 \min_{\substack{i_1+\cdots+i_n=\dim\widetilde{G}-1\\ 0\leq i_j\leq g_j}} \{\widetilde{D}_1^{i_1}\cdots\widetilde{D}_n^{i_n}\} \tag{21}$$

et

$$\left(x\max_{1\leq i\leq n}\{\widetilde{D}_i\}\right)^{\widetilde{r}} \geq \frac{\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+\widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})}\right)}{C_0\deg(G_0\times G)} \geq 1 \tag{22}$$

par hypothèse.

$\square$

2.5. **Lemme de multiplicités.** Rappelons que si $\mathbf{w} = (w_0,\ldots,w_{g-t})$ désigne une base de W, on note $\mathcal{D}_{w_i}$ l'opérateur différentiel associé à w_i. L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'avec des hypothèses « minimales » (en particulier sans la nécessité d'un choix très précis des paramètres à cette étape) et le « nouveau » lemme de multiplicités de P. Philippon, il est possible d'affirmer que le système

$$\forall\,(m,\mathbf{t}) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}^{\dim W},\ 0\leq m\leq (g+1)S,\ |\mathbf{t}|\leq (g+1)T,\ \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}F_{P,v_0}(m,mu) = 0 \tag{23}$$

n'admet pas de solution polynomiale P non nulle (les notations sont celles du § 2.3).

Lemme 2.7. *Supposons que les entiers $D_1,\ldots,D_n$ ne sont pas tous nuls et que $x \leq 1$. Supposons également que pour tout sous-groupe algébrique G' de G tel que $t_{G'}+V \neq t_G$ on ait $sp \notin G'(\overline{k})$ pour $s \in \{1,\ldots,C_0\}$ et que*

$$\widetilde{T} \geq c_{18}\max\left\{\frac{\widetilde{D}_0}{(S+1)^{1-y}},\widetilde{D}_1,\ldots,\widetilde{D}_n,1\right\} \tag{24}$$

avec $c_{18} = 4^g(\deg G_0\times G)\prod_{i=1}^n \deg G_i$. Alors il n'existe pas de polynôme $P \in E_{v_0}\setminus\{0\}$ tel que la dérivée $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}F_{P,v_0}(m,mu)$ soit nulle pour tout $(m,\mathbf{t}) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}^{\dim W}$, $0\leq m\leq (g+1)S$ et $|\mathbf{t}|\leq (g+1)T$.

Démonstration. Supposons qu'un tel polynôme $P \neq 0$ existe. Alors, d'après le lemme de multiplicités [35], il existe un sous-groupe algébrique propre G' de $G_0\times G$ tel que

$$\begin{aligned} &T^{\lambda'}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right)\mathscr{H}(G'\,;D_0',\ldots,D_n') \\ &\leq 2^g\mathscr{H}(G_0\times G\,;D_0',\ldots,D_n') \end{aligned} \tag{25}$$

où, rappelons-le, $\lambda' = \operatorname{codim}_W W\cap t_{G'}$ et $D_i' = \max\{1,D_i\}$. Nous allons examiner séparément les cas $t_{G'}+W = t_{G_0\times G}$ et $t_{G'}+W \neq t_{G_0\times G}$ afin de conclure que G' ne peut pas exister.

Si $t_{G'}+W=t_{G_0\times G}$ alors $\lambda'=r'=\operatorname{codim}_{G_0\times G}G'$ et l'inégalité (25) entraîne

$$T^{r'}\leq 2^g(\deg(G_0\times G))\max\{D_0,\dots,D_n\}^{r'},$$

ce qui contredit l'hypothèse (24) lorsque y vaut 1 (cas général). Dans le cas semi-abélien ($y=0$), le groupe G' s'écrit $G_0'\times A$ avec $G_0'\subseteq G_0$ et $A\subseteq G$. Si $G_0'=G_0$ alors l'inégalité (25) implique

$$T^{r'}\mathscr{H}(A;D_1',\dots,D_n')\leq 2^g(\deg(G_0\times G))(D_1')^{g_1}\cdots(D_n')^{g_n}$$

ce qui est incompatible avec $\widetilde{T}>4^g(\deg(G_0\times G))\max\{\widetilde{D}_1,\dots,\widetilde{D}_n\}$. Si $G_0'=\{0\}$ alors

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right)=S+1$$

et (25) devient

$$T^{r'}(S+1)\mathscr{H}(A;D_1',\dots,D_n')\leq 2^g(\deg(G_0\times G))D_0'(D_1')^{g_1}\cdots(D_n')^{g_n}$$

ce qui implique $T^{r'}(S+1)\leq 2^g(\deg(G_0\times G))D_0'\max\{D_1,\dots,D_n\}^{r'-1}$, ce qui est encore impossible d'après l'hypothèse (24). Ce cas ne peut donc pas se produire et on a nécessairement $t_{G'}+W\neq t_{G_0\times G}$. Soit alors $1\leq\kappa_1<\cdots<\kappa_h\leq n$ les entiers pour lesquels $D_{\kappa_i}\neq 0$, $1\leq i\leq h$ et notons $\pi_\kappa:G_0\times G\to\prod_{i=1}^h G_{\kappa_i}$ la projection canonique.

Si $D_0'=1$, on a

$$\binom{\dim G'}{\dim\pi_\kappa(G')}\mathscr{H}(\pi_\kappa(G');D_{\kappa_1},\dots,D_{\kappa_h})\leq\mathscr{H}(G';D_0',\dots,D_n') \tag{26}$$

ce qui entraîne *via* (25)

$$T^{\lambda'}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right)\leq c_{19}\frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G);D_{\kappa_1},\dots,D_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G');D_{\kappa_1},\dots,D_{\kappa_h})}$$

avec

$$c_{19}:=\frac{2^g(g+1)!(\dim\pi_\kappa(G'))!(\dim G'-\dim\pi_\kappa(G'))!}{(\dim\pi_\kappa(G))!(\dim G')!}\prod_{\substack{m\neq\kappa_i\\1\leq i\leq h}}\frac{\deg G_m}{g_m!}\,.$$

Comme chacune des applications partielles

$$x_i\mapsto\frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G);D_{\kappa_1},\dots,x_i,\dots,D_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G');D_{\kappa_1},\dots,x_i,\dots,D_{\kappa_h})},\quad 1\leq i\leq h$$

est croissante sur $]0,+\infty[$, on déduit de la majoration $D_i\leq x\widetilde{D}_i$ l'inégalité

$$T^{\lambda'}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right)\leq c_{19}\frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G)\,;\,\widetilde{D}_{\kappa_1},\dots,\widetilde{D}_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G')\,;\,\widetilde{D}_{\kappa_1},\dots,\widetilde{D}_{\kappa_h})}\,x^{\dim\pi_\kappa(G)-\dim\pi_\kappa(G')}. \tag{27}$$

Posons

$$G'':=\pi_\kappa(G')\times\prod_{m\notin\{\kappa_1,\dots,\kappa_h\}}G_m$$

(vu, après permutation éventuelle des facteurs, comme un sous-groupe de $G_0\times G$). Ce groupe algébrique est différent de G sinon $\pi_\kappa(G')=\pi_\kappa(G)$ et l'inégalité (27) entraîne $T^{\lambda'}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right)\leq c_{19}$. Par hypothèse, on a alors $C_0\leq c_{19}$ ce qui est impossible si C_0 est assez grand. Nous allons maintenant obtenir à partir de (27) une inégalité pour G'' qui s'apparente à (25). En effet, observons d'une part que

$$\frac{\mathscr{H}(G_0\times G\,;\,\widetilde{D}_0,\dots,\widetilde{D}_n)}{\mathscr{H}(G''\,;\,\widetilde{D}_0,\dots,\widetilde{D}_n)}=c_{20}\frac{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G)\,;\,\widetilde{D}_{\kappa_1},\dots,\widetilde{D}_{\kappa_h})}{\mathscr{H}(\pi_\kappa(G')\,;\,\widetilde{D}_{\kappa_1},\dots,\widetilde{D}_{\kappa_h})}$$

avec $c_{20} := \frac{(g+1)!\left(\dim \pi_\kappa(G')\right)!}{(\dim G'')!(\dim \pi_\kappa(G))!}$ et, d'autre part, on a

(1) $\dim \pi_\kappa(G) - \dim \pi_\kappa(G') = \operatorname{codim}_{G_0\times G} G'' =: r''$,

(2) $\lambda'' := \operatorname{codim}_W W \cap t_{G''} \leq \operatorname{codim}_W W \cap t_{G'} = \lambda'$ (car $G' \subseteq G''$),

(3) $\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G''(\overline{k})}{G''(\overline{k})}\right) \leq \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G'(\overline{k})}{G'(\overline{k})}\right)$.

L'inégalité (27) devient

$$\frac{T^{\lambda''}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_q(S)+G''(\overline{k})}{G''(\overline{k})}\right)\mathscr{H}(G''\,;\,\widetilde{D}_0,\ldots,\widetilde{D}_n)}{\mathscr{H}(G_0\times G\,;\,\widetilde{D}_0,\ldots,\widetilde{D}_n)} \leq \frac{c_{19}}{c_{20}}x^{r''}\ . \tag{28}$$

En reprenant alors exactement les mêmes arguments que dans la première partie de la preuve et en remplaçant la constante 2^g par c_{19}/c_{20}, on démontre que $t_{G''}+W \neq t_{G_0\times G}$. L'inégalité (28) se lit alors en fonction de $A(G'')$ (en minorant T par $\widetilde{T}/2$) :

$$A(G'')^{r''-\lambda''} \leq \left(\frac{2^{\lambda''}c_{19}}{c_{20}C_0}\right)x^{r''}\ . \tag{29}$$

Comme $C_0 > 2^g c_{19}/c_{20}$ et $x \leq 1$, cette inégalité implique $A(G'') \leq 1$ donc $x \leq B(G'') = A(G'')^{\frac{r''-\lambda''}{r''}}$, ce qui contredit (29). On vient donc de montrer que nécessairement $D_0' = D_0$, *i.e.* $D_0 \geq 1$. À quelques variantes près, la même preuve conduit encore à une contradiction. En effet, considérons $\pi_{0,\kappa}$ la projection $G_0 \times G \to G_0 \times \pi_\kappa(G)$ et posons

$$G^\star = \pi_{0,\kappa}(G') \times \prod_{m\notin\{\kappa_1,\ldots,\kappa_h\}} G_m, \tag{30}$$

vu comme sous-groupe de $G_0 \times G$. Comme

$$\binom{\dim G'}{\dim \pi_{0,\kappa}(G')}\mathscr{H}(\pi_{0,\kappa}(G')\,;\,D_0,D_{\kappa_1},\ldots,D_{\kappa_h}) \leq \mathscr{H}(G'\,;\,D_0',\ldots,D_n'), \tag{31}$$

un raisonnement similaire au précédent (à partir de l'inégalité (26)) conduit encore à une impossibilité à condition de remplacer $\pi_\kappa(G')$ par $\pi_{0,\kappa}(G')$ et G'' par $G^\star$ (dans les constantes c_{19} et c_{20} en particulier).

Conclusion : Dans tous les cas, l'existence de G' aboutit à une contradiction, ce qui démontre ainsi le lemme 2.7. □

2.6. **Poids de la droite affine.** Au § 2.3, nous nous sommes équipés d'une famille libre de polynômes $(P_{\lambda_0})_{\lambda_0\in\{0,\ldots,D_0\}}$ en une variable, qui pourrait être interprétée comme une représentation de l'exponentielle du groupe $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}(\mathbf{C}_v)$ (pour toute place v) dans un espace projectif

$$z \mapsto (P_0(z):\cdots:P_{D_0}(z))\ .$$

Dans ce paragraphe, nous introduisons une quantité mi-arithmétique mi-analytique qui mesure l'influence du choix de cette famille sur les paramètres U_0 et U_1 des théorèmes 1.4 et 1.5. C'est ce que nous voulons évoquer par la terminologie « poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ ».

Définition 2.8. Si v_0 est archimédienne, nous appelons *poids* de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ relatif à la famille (P_{λ_0}), aux paramètres $(T,S,\mathfrak{e})$ et à la place v_0, la quantité

$$\aleph((P_{\lambda_0})) := h\left(\left\{\frac{1}{t_0!}P_{\lambda_0}^{(t_0)}(s),\ \begin{smallmatrix}0\leq\lambda_0\leq D_0\\ 0\leq s\leq S\\ 0\leq t_0\leq T\end{smallmatrix}\right\}\right) + \frac{1}{D}\log\max_{\substack{0\leq t_0\leq T\\ |z|\leq\mathfrak{e}S}}\left|\frac{1}{t_0!}P_{\lambda_0}^{(t_0)}(z)\right|_{v_0}\ .$$

Lorsque v_0 est ultramétrique, le poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ (relatif à $(T,S,\mathfrak{r})$) est la quantité obtenue en remplaçant ci-dessus $\mathfrak{e}S$ (qui est en indice dans le dernier terme) par $\mathfrak{r}$.

Cette définition appelle quelques commentaires. En premier lieu, le degré D qui intervient est relatif à un corps de nombres k contenant tous les coefficients des P_{λ_0}. Il ne joue un véritable rôle que lorsque k est le corps de définition des P_{λ_0} (comme, du reste, la place v_0) et doit donc être interprété simplement comme un coefficient pondérateur. Le poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ est le terme résiduel qui provient de l'introduction même du groupe $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ dans la preuve des théorèmes 1.4 et 1.5. Il se manifeste — tous calculs faits — à travers la condition $U \gg D\aleph((P_{\lambda_0}))$, où U représente U_0 ou U_1 selon le cas et $\gg$ signifie supérieur ou égal à un constante près. Cet inconvénient s'avère largement compensé par au moins deux avantages que procurent $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. D'une part, il s'accompagne d'un paramètre D_0 qui facilite la construction du polynôme auxiliaire en rendant la condition de Siegel plus simple à satisfaire. D'autre part, il permet de modifier le point p en un point $q = (1, p)$ moins vulnérable aux phénomènes de torsion modulo des sous-groupes particuliers de $G_0 \times G$ (à commencer par le sous-groupe nul, q n'étant alors jamais de torsion). Cela est particulièrement important pour le lemme de multiplicité qui fait intervenir le cardinal du quotient $(\Sigma_q(S) + G'(\overline{k}))/G'(\overline{k})$, G' étant un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times G$ (voir à cet égard le § 2.5).

Il me semble que le poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ tel qu'il est défini* est sous-jacent à un grand nombre de résultats sur les aspects quantitatifs de la théorie des formes linéaires de logarithmes, du moins pour ceux d'entre eux dont la preuve repose sur la méthode de Baker. À ma connaissance, il n'existe pas de procédé pour construire une base (P_{λ_0}) qui soit la mieux adaptée aux données en minimisant le poids de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$. Toutefois, à la fin des années soixante et à la suite des premiers travaux de Baker, N.I. Fel'dman a remarqué qu'il existait au moins une famille de tels polynômes qui convenaient mieux que les polynômes de la base canonique [18]. Elle provient des polynômes binomiaux que nous avons déjà rencontrés dans l'introduction (voir (7)) et se trouve à mi-chemin entre ces polynômes et ceux de la base canonique†. Nous allons nous servir d'une variante de ces polynômes, imaginée par E.M. Matveev, qui s'avère plus maniable au moment du choix des paramètres, tout en conservant les avantages de la base de Fel'dman. Étant donné $\lambda_0, D_0^\flat \in \mathbf{N}$, le polynôme de Matveev $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)$ est $\Delta_{D_0^\flat}(X)^q \Delta_r(X)$ où les entiers q et r sont respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de λ_0 par $D_0^\flat$. Le degré de $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)$ est λ_0. Par conséquent, lorsque $D_0^\flat$ est fixé, la famille $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)$, $\lambda_0 = 0, \ldots, D_0$, forme une base de $k[X]_{\leq D_0}$. Si $t_0 \in \mathbf{N}$, notons $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0, t_0)$ la dérivée divisée $\frac{1}{t_0!}\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)^{(t_0)}$. L'intérêt d'une telle base peut se comprendre à partir du

Lemme 2.9. *Avec les notations ci-dessus, il existe une constante absolue $c_{21} \geq 1$ pour laquelle nous disposons des estimations suivantes.*

- *Si v_0 est archimédienne alors*

$$\begin{aligned} &\aleph\left(\left(\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)\right)_{\lambda_0}\right) \\ &\leq c_{21}\left(D_0 \log\left(e + \frac{S}{D_0^\flat}\right) + \min(D_0, T) D_0^\flat + \frac{D_0}{D}\log\left(1 + \frac{\mathfrak{e}S}{D_0^\flat}\right)\right) \end{aligned} \tag{32}$$

*Il existe des variantes, comme, par exemple, lorsque G est une variété abélienne à multiplication complexe. Dans ce cas, il est plus judicieux de choisir non pas $s \in \mathbf{N}$ mais $s \in \mathrm{End}(G)$ et d'imposer $|s| \leq S$. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ce cas particulier à l'article [1] ainsi qu'à la preuve (à venir) du résultat annoncé dans [2].

†Étant donné deux entiers α et β, la famille des polynômes de Fel'dman en question est $1, \Delta_\alpha(X + x)^y$, $0 \leq x < \alpha$, $1 \leq y \leq \beta$. On vérifie qu'elle forme une base de l'espace des polynômes de degré $\leq \alpha\beta + 1$.

- *Si v_0 est ultramétrique alors l'inégalité ci-dessus reste vraie en remplaçant le dernier terme par $\frac{1}{D}\log^+(\mathfrak{r}/r_p)$, où $r_p = p^{-\frac{1}{p-1}}$.*

Dans le cas archimédien la démonstration de cette majoration découle des estimations sur les polynômes de Matveev qui sont données dans le livre de M. Waldschmidt [49], p. 269 et suivantes. Dans le cas ultramétrique, l'évaluation de la dérivée $\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0,t_0)$ pour $t_0 \leq T$ et $|z| \leq \mathfrak{r}$ repose sur la formule de Leibniz et la minoration $|D_0^\flat!|_{v_0} \geq r_p^{D_0^\flat}$. Notons par ailleurs qu'en choisissant $D_0^\flat = 1$ l'on retrouve une estimation du poids de la famille $(X^{\lambda_0})_{0\leq\lambda_0\leq D_0}$:

$$\aleph((X^{\lambda_0})) \leq c_{21} D_0 \left(\log S + \frac{\log \mathfrak{e}}{D}\right)$$

(et $\mathfrak{r}$ à la place de $\mathfrak{e}$ dans le cas ultramétrique).

Quoi qu'il en soit, les choix de $D_0^\flat$ et D_0 qui minimisent le membre de droite de (32) semblent dépendre pour une large part du contexte qui « fixe » la valeur des paramètres T et S, en particulier vis-à-vis de la hauteur du sous-espace V. Avec des considérations élémentaires, il est pourtant possible de préciser le « meilleur » choix pour $D_0^\flat$. Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas archimédien et mettons à l'écart le paramètre $\mathfrak{e}$ (souvent constant dans la pratique). Le raisonnement qui suit est valide aux constantes numériques près. Ceci étant, nous constatons de prime abord que, si $T \geq D_0$, il est préférable de choisir la base canonique (*i.e.* $D_0^\flat = 1$) car ou bien $D_0^\flat \geq \log S$ et alors $\min\{T, D_0\} D_0^\flat \geq D_0 \log S$, ou bien $D_0^\flat \leq \log S$ et $D_0 \log\left(e + \frac{S}{D_0^\flat}\right) \gtrsim D_0 \log S$. Dans les deux cas le majorant du poids de la base de Matveev contient celui de la base canonique. Inversement, si $T \leq D_0$, la condition

$$U \gg D\aleph\left(\left(\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0)\right)\right)$$

se scinde en trois inégalités

1. $U \gg DD_0 \log(e + S/D_0^\flat)$,
2. $U \gg \log(1 + \mathfrak{e}S/D_0^\flat)$,
3. $U \gg DTD_0^\flat$.

Ce sont les seules conditions où $D_0^\flat$ apparaît « indépendamment » de D_0. Nous sommes alors conduit naturellement à opter pour un entier $D_0^\flat$ maximal, inférieur à U/DT, afin que les deux premières conditions soient plus simples à remplir. Ces principes ont guidé les choix de $D_0^\flat$ et D_0, proposés au § 3.1.

Remarque 2.10. Bien que tous les théorèmes énoncés reposent sur le même choix de la base $(P_i)_i$ (base des polynômes de Matveev en l'occurrence), il nous semble préférable de conserver une base indifférenciée jusqu'à la toute fin de la démonstration (§ 3.6). Outre une justification *a posteriori* du choix des paramètres, cela permet également d'obtenir d'une part des variantes d'énoncés à moindre frais et d'autre part une meilleure compréhension du rôle joué par ce facteur $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ supplémentaire au cours de la preuve, comme nous venons de le voir. Ce procédé a déjà été mis en oeuvre (sous une forme très légèrement différente) par M. Waldschmidt (voir [49], pp. 477 – 480).

2.7. **Lemme de Siegel absolu.** Trouver une (base de) solution(s) de « petite » hauteur d'un système linéaire à coefficients algébriques est bien souvent une étape imposée au cours d'une démonstration de transcendance (à l'exception, bien sûr, de celles qui reposent sur la méthode des déterminants d'interpolation ou la méthode des pentes). Dans [42], D. Roy et J. Thunder ont mis en évidence la différence de petitesse de la hauteur d'une base de solutions que l'on peut espérer selon que cette base est à coefficients dans un corps de nombres fixé à l'avance (auquel cas la borne dépend du discriminant absolu de ce corps) ou que cette base est seulement à coefficients algébriques (auquel cas seule la hauteur du système intervient dans la majoration). Dans cette seconde perspective, on parle de lemme de Siegel *absolu*. Par ailleurs, intervient également dans ces bornes le rang du système linéaire, rang qui revêt une importance non négligeable pour une des deux applications de ce type de lemme que nous avons en vue dans cet article. C'est pourquoi nous n'utiliserons pas tel quel l'énoncé de Roy & Thunder mais plutôt le raffinement suivant, décrit par S. David et P. Philippon dans [15], § 4.2, et qui repose sur une inégalité de S. Zhang relative aux minima successifs d'une variété arithmétique.

Lemme 2.11. *Soit m un entier naturel ≥ 1 et V un sous-espace vectoriel de $\overline{\mathbf{Q}}^{m+1}$, de dimension $d \geq 1$. Il existe une base $(v_1, \ldots, v_d)$ de V telle que*

$$\sum_{i=1}^{d} h_{\mathrm{L}^2}(v_i) \leq h(\mathsf{V}) + d\log(d) \tag{33}$$

où $h(\mathsf{V})$ est la hauteur (logarithmique absolue) de Schmidt de V.

Remarque 2.12. Le résultat précédemment cité de Roy & Thunder conduit à une majoration de ce type mais avec un terme linéaire en d^2 en lieu et place du $d\log(d)$.

Démonstration. On démontre un résultat un peu plus fort : pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe une base $(v_1, \ldots, v_d)$ de V (qui dépend de cet ϵ) telle que

$$\sum_{i=1}^{d} h_{\mathrm{L}^2}(v_i) \leq h(\mathsf{V}) + \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2i} + \epsilon \cdot \tag{34}$$

Pour cela, nous reprenons l'argumentation donnée dans la preuve du lemme 4.7 de [15] et la remarque qui la suit. Soit $\overline{\mathcal{O}(1)}$ le fibré en droites hermitien sur $\mathbf{P}^m_{\mathbf{Z}}$ obtenu à partir du faisceau canonique $\mathcal{O}(1)$ muni de la métrique de Fubini-Study. La hauteur relative à $\overline{\mathcal{O}(1)}$ (au sens arakélovien du terme, voir référence ci-après) sur les points de $\mathbf{P}^m_{\mathbf{Z}}(\overline{\mathbf{Q}})$ est la hauteur L^2 introduite dans le paragraphe « Notations et Conventions ». Soit $\overline{L} := \overline{\mathcal{O}(1)}_{|\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)}$ la restriction de ce fibré hermitien à la sous-variété linéaire $\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)$ (de dimension absolue d) définie par V (à l'aide de son dual $\mathsf{V}^\vee$). Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, d\}$, considérons les nombres réels e_i définis par

$$\mathsf{e}_i := \sup_{\operatorname{codim} Y = i} \ \inf_{x \in \mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y} \{h_{\mathrm{L}^2}(x)\}$$

où Y parcourt les sous-variétés (fermées) de $\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)(\overline{\mathbf{Q}})$ de codimension i. Le couple $(\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee), \overline{L})$ satisfait aux hypothèses du théorème 5.2 de [56] (l'hypothèse de semi-amplitude arithmétique de $\overline{L}$ résulte par exemple du théorème 3.5, *ibid.*) qui, en termes des e_i ci-dessus, s'écrit alors*

$$\mathsf{e}_1 + \cdots + \mathsf{e}_d \leq h_F(\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)) \tag{35}$$

où

$$h_F(\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)) := \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{O}(1)}\right)^d |\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)\right)$$

est la hauteur de Faltings de la sous-variété $\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)$, au sens de [10], définition 3.1.1 et § 4.1.2 ($\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}$ est le degré d'Arakelov normalisé). Cette quantité se compare à la hauteur de Schmidt de V *via* la première formule de la proposition 4.1.2 de [10] et la remarque qui lui succède :

$$h_F(\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)) = h(\mathsf{V}) + \sum_{j=1}^{d-1}\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2i} \cdot$$

*Il faut noter ici que le degré géométrique de $\mathbf{P}(\mathsf{V}^\vee)$ vaut 1.

En vertu de l'inégalité de Zhang (35), il ne reste donc plus qu'à prouver l'existence d'une base $v_1, \ldots, v_d$ de V telle que

$$\sum_{i=1}^{d} h_{\mathrm{L}^2}(v_i) \leq \mathsf{e}_1 + \cdots + \mathsf{e}_d + \epsilon \ . \tag{36}$$

Cela résulte presqu'immédiatement de la définition même des e_i. En effet, on a

$$\mathsf{e}_d = \inf\{h_{\mathrm{L}^2}(x) \ ; \ x \in \mathbf{P}(\mathsf{V}^{\mathsf{v}})(\overline{\mathbf{Q}})\}$$

donc il existe $v_1 \in \mathbf{P}(\mathsf{V}^{\mathsf{v}})(\overline{\mathbf{Q}}) = \mathsf{V} \backslash \{0\}$ tel que $h_{\mathrm{L}^2}(v_1) \leq \mathsf{e}_d + \epsilon/d$. Soit Y_1 l'adhérence de Zariski de $\{v_1\}$ dans $\mathbf{P}(\mathsf{V}^{\mathsf{v}})(\overline{\mathbf{Q}})$. On a

$$\mathsf{e}_{d-1} \geq \inf\{h_{\mathrm{L}^2}(x); x \in \mathbf{P}(\mathsf{V}^{\mathsf{v}})(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y_1\}$$

donc il existe $v_2 \in \mathbf{P}(\mathsf{V}^{\mathsf{v}})(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y_1$ (c'est-à-dire que v_1 et v_2 — vus comme vecteurs de V — sont linéairement indépendants) tel que $h_{\mathrm{L}^2}(v_2) \leq \mathsf{e}_{d-1} + \epsilon/d$. De même, la minoration $\mathsf{e}_{d-2} \geq \inf\{h_{\mathrm{L}^2}(x); x \in \mathbf{P}(\mathsf{V}^{\mathsf{v}})(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Y_2\}$ où Y_2 est le sous-espace linéaire de $\mathbf{P}(\mathsf{V}^{\mathsf{v}})$ provenant de $\overline{\mathbf{Q}}.v_1 \oplus \overline{\mathbf{Q}}.v_2$ entraîne l'existence de v_3 etc. Nous avons ainsi construit une base $v_1, \ldots, v_d$ de V qui satisfait à l'inégalité (36) et donc à (34). Dans cette dernière inégalité, la double somme est majorée par $d\log(d)/2$ comme cela se voit facilement par comparaison avec des intégrales. La démonstration du lemme 2.11 se termine en choisissant $\epsilon = d\log(d)/2$ (même si $d = 1$). $\square$

Les premières étapes qui ont conduit à la mise en place des paramètres s'achèvent ici. Les paragraphes suivants forment le noyau dur de la démonstration. Ils concernent pour l'essentiel des estimations de nature arithmétique et analytique sur certains coefficients de Taylor (ou jets) liés aux fonctions F_P introduites précédemment.

3. Démonstrations des théorèmes 1.4 et 1.5

Nous fixons une fois pour toutes un corps de nombres K, qui contient k, de sorte que tous les nombres algébriques considérés au cours de la preuve et qui, bien sûr, sont en nombre fini, appartiennent à K. Il est commode d'introduire un tel corps pour les estimations locales de ces nombres algébriques. Cependant, seules leurs hauteurs (absolues) interviendront réellement au cours de la preuve et non le degré relatif $[K : k]$ de ce corps de nombres (à l'exception notable d'une apparition furtive au début du § 3.6).

Description de la preuve. La démarche suivie est assez classique et elle est commune aux deux théorèmes à démontrer. Il s'agit de construire un élément α de $K \setminus \{0\}$, de « petite » hauteur, et dont toutes les valeurs absolues v-adiques, pour v une place de K au-dessus de v_0, sont majorées par un terme linéaire en la distance $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$. De sorte que de la formule du produit appliquée à α se déduit une minoration de cette distance, ce qui est l'assertion des théorèmes 1.4 et 1.5. Comme cela est fréquent en transcendance, l'élément α en question provient d'un coefficient de Taylor d'une fonction de la forme $P \circ \exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})}$ restreinte à l'espace W. Dans cette expression, P est un certain polynôme à bâtir et $\exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})} := (\exp_{G_0(\mathbf{C}_{v_0})}, \exp_{v_0})$ désigne l'exponentielle (à valeurs dans l'espace multiprojectif $\mathbf{P}$) du groupe de Lie $(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})$. Le polynôme P n'est pas quelconque. Il doit satisfaire à certaines propriétés d'annulations (comme celles déjà vues au § 2.3) et être de hauteur suffisamment petite. Sa construction repose sur le lemme de Siegel absolu énoncé dans le paragraphe précédent. Toute la difficulté consiste à évaluer avec précision la hauteur du système d'équations traduisant les conditions d'annulations de P. En décomposant cette hauteur en somme de termes locaux, on s'aperçoit alors que les bornes sont les mêmes que celles souhaitées pour α. C'est pourquoi, après un premier paragraphe décrivant les paramètres utilisés dans la preuve, nous commençons par démontrer des estimations p-adiques et archimédiennes assez générales de certains coefficients de Taylor, destinées à être appliquées à la hauteur du système (§ 3.4) et à α (§ 3.6). Le nombre α proprement dit est quant à lui défini au début du § 3.5. Nous vérifions dans la foulée qu'il est non nul puis nous obtenons les majorations « fines » souhaitées de ses valeurs absolues aux places v de K qui sont au-dessus de v_0. Une fois celles-ci démontrées, nous pourrons conclure (§ 3.6).

3.1. **Choix des paramètres.** Au début du § 2.2, nous avons introduit des paramètres $\widetilde{D}_0,\ldots,\widetilde{D}_n,\widetilde{T},S,S_0$ avec lesquels nous avons pu établir des énoncés pourvus d'une certaine souplesse d'utilisation, au sens où ils ne dépendaient pas des valeurs précises de ces paramètres mais seulement de quelques relations assez simples entre eux. Nous avons également étudié les effets des choix de certaines familles de polynômes (P_{λ_0}) sur la qualité de la mesure finale (§ 2.6).

Dans ce paragraphe, nous précisons toutes ces données pour la démonstration proprement dite des théorèmes 1.4 et 1.5. Cependant les choix que nous dévoilons ici ne seront véritablement utilisés qu'à l'étape « Extrapolation » (§ 3.5) *via* les lemmes 3.1 et 3.2 qui vont suivre. Ainsi le lecteur qui souhaiterait ne pas entrer trop dans ces détails techniques et, qui plus est, spécifiques à ce texte, est invité à passer directement au point suivant de la démonstration, sans pour autant en perdre le fil conducteur. Qu'il note au préalable la définition de l'ensemble Υ qui interviendra dans la suite :

$$\Upsilon := \left\{(s,\mathbf{t})\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^{\dim W}\ ;\ 0\le s\le S_0 \text{ et } |\mathbf{t}|\le 2(g+1)T\right\}\cdot$$

Dans un souci de clarté, nous distinguons les choix selon que v_0 est une place archimédienne ou ultramétrique.

3.1.1. v_0 *archimédienne.* Rappelons que $\mathfrak{a}$ désigne un entier supérieur ou égal à $D\max\{1,h(V)\}/\log\mathfrak{e}$. Le paramètre C_0 est une constante suffisamment grande par rapport à toutes les constantes c_i qui interviendront dans la suite. Posons alors $S_0 := C_0^3\mathfrak{a}$, $S := C_0^6\mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned} U :=& C_0^{25g}(\mathfrak{a}\log\mathfrak{e})\left(\mathfrak{a}^y+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log\left(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\right)\right)^{1/t} \\ &\times\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{D\max\limits_{0\le s\le(g+1)C_0^6\mathfrak{a}}\{h(sp_i)\}+(\mathfrak{e}\mathfrak{a}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{e}}\right)^{g_i/t}\end{aligned}$$

(il s'agit essentiellement de $C_0^{25g}U_0$ mais où la constante « indéfinie » c_7 qui est en indice du $\max\{h(sp_i)\}$ dans U_0 est remplacée par $(g+1)C_0^6$), $\widetilde{T} := \frac{C_0U}{S_0\log\mathfrak{e}}$,

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0^2\left(D\max_{0\le s\le(g+1)S}\{h(sp_i)\}+(\mathfrak{e}S\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}+S_0\log\mathfrak{e}\right)}$$

si $1\le i\le n$. Soit également

$$D_0^\flat := \left[\frac{S_0\log\mathfrak{e}}{DC_0^3}\right]\quad\text{et}\quad\widetilde{D_0} := \frac{U}{C_0^4\left(D\log\left(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\right)+S_0^y\log\mathfrak{e}\right)}\cdot$$

La définition 2.2 introduit un nombre réel $x>0$ et l'on note $D_0 := [x\widetilde{D}_0]$. Considérons alors pour (P_{λ_0}) la famille des polynômes de Matveev

$$(\delta_{D_0^\flat}(X;\lambda_0))_{0\le\lambda_0\le D_0}$$

définie au § 2.6.

Voici résumées en quelques lignes les principales conditions que satisfont ces paramètres.

Lemme 3.1. *On a*

À $\widetilde{T} \geq C_0^2$, $S/S_0 \geq C_0^2$, $S_0 \geq C_0^2$,

` $\widetilde{T} \geq C_0 \max\left\{\widetilde{D}_0/(S+1)^{1-y}, \widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n\right\}$,

´ $\widetilde{T}^{g-t+1}(S+1) \leq C_0 \widetilde{D}_0 \widetilde{D}_1^{g_1} \cdots \widetilde{D}_n^{g_n}$,

ˆ $U \geq C_0^{3/2} D\aleph((P_{\lambda_0}))$,

˜ $S_0 \log \mathfrak{e} \geq C_0^3 D \max\{1, h(V)\}$,

¯ $U \geq C_0^2 D_i \left(D \max_{0 \leq s \leq (g+1)S}\{h(sp_i)\} + (\mathfrak{e}S\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}\right)$ *pour tout* $1 \leq i \leq n$.

Démonstration. Les points À et ` découlent immédiatement de la définition des paramètres. L'inégalité ´ correspond précisément à la définition de U_0 à une constante près. La condition ˆ découle du lemme 2.9 et les points ˜ et ¯ sont évidents à partir des définitions de $\mathfrak{a}$ et des $\widetilde{D}_i$. □

Accessoirement, on pourra aussi noter que $U \geq C_0^2 D \log(D_0 S)$. La condition ´ et le lemme 2.3 avec $H_1 = \{0\}$ impliquent $x \leq 1$.

3.1.2. v_0 *ultramétrique.* Reprenons les notations $\mathfrak{r}, \mathfrak{a}$ du théorème 1.5. Posons $S_0 := C_0^3 \mathfrak{a}$, $S := C_0^6 \mathfrak{a}$,

$$U := C_0^{25g}(\mathfrak{a}\log\mathfrak{r})\left(\mathfrak{a}^y + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}\log\left(e + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}\right)\right)^{1/t} \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{D \max_{0 \leq s \leq (g+1)C_0^6\mathfrak{a}}\{h(sp_i)\}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{r}}\right)^{g_i/t},$$

puis $\widetilde{T} := C_0 U/(S_0 \log \mathfrak{r})$ et

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0^2\left(D \max_{s \leq (g+1)S}\{h(sp_i)\} + S_0 \log\mathfrak{r}\right)} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Soit

$$D_0^\flat := \left[\frac{S_0 \log \mathfrak{r}}{C_0^3 D}\right] \quad \text{et} \quad \widetilde{D}_0 := \frac{U}{C_0^4\left(D\log\left(e + \frac{D}{\log\mathfrak{r}}\right) + S_0^y \log\mathfrak{r}\right)}.$$

Ensuite, comme dans le cas archimédien, nous prenons le nombre réel $x > 0$ de la définition 2.2 (p. 15), nous formons l'entier $D_0 := [x\widetilde{D}_0]$ et la famille (P_{λ_0}) est la même que celle du cas archimédien.

Les conditions remplies par ces paramètres sont les conditions À, `, ´ du lemme 3.1 (en particulier, on a $x \leq 1$) et celles apportées par le lemme suivant.

Lemme 3.2. *On a*

˝ $U \geq C_0^{3/2} D\aleph((P_{\lambda_0}))$,

˛ $S_0 \log \mathfrak{r} \geq C_0\left(D \max\{1, h(V)\} + \log S_0\right)$,

ˇ $U \geq C_0^2 D D_i \max_{s \leq (g+1)S}\{h(sp_i)\}$.

Démonstration. Ces trois inégalités sont faciles à vérifier à partir du choix des paramètres, la première, par exemple, étant une conséquence de la majoration

$$\aleph((P_{\lambda_0})) \leq 2c_{21}\left(D_0 \log\left(e + \frac{S}{D_0^\flat}\right) + TD_0^\flat + \frac{D_0 \log\mathfrak{r}}{D}\right)$$

induite par le lemme 2.9. □

Remarques 3.3.

(1) La présence du logarithme de S_0 dans la condition ˛ , présence qui sera requise lors de l'extrapolation p-adique*, explique la modification du paramètre $\mathfrak{a}$ par rapport au cas archimédien, avec l'ajout du terme

$$\frac{\log^+\left((\log(r_p\mathfrak{r}))^{-1}\right)}{\log(r_p\mathfrak{r})}\ .$$

(2) Il est facile de vérifier qu'avec ces choix les hypothèses du lemme 2.6 sont satisfaites et, par conséquent, qu'au moins un des entiers $D_1,\ldots,D_n$ est non nul. En revanche, bien que $\widetilde{D}_0$ soit clairement supérieur à 1, il se pourrait que D_0 soit nul†. Cela n'a (paradoxalement) aucune conséquence dans la suite de la démonstration.

3.1.3. *Choix d'une base de W.* Soit w_0 la base canonique de $t_{\mathbb{G}_a}$ et $(w_1,\ldots,w_{g-t})$ une base de $V\otimes\overline{\mathbf{Q}}$ fournie par le lemme 2.11 (l'espace $V\otimes\overline{\mathbf{Q}}$ étant identifié à un sous-espace de $\overline{\mathbf{Q}}^g$ *via* la base $\mathbf{e}$ de t_G introduite au § 1.1). Par définition, nous avons $\|w_0\|_v=1$ pour toute place v de K et $h_{\mathrm{L}^2}(w_1)+\cdots+h_{\mathrm{L}^2}(w_{g-t})\le h(V)+g\log(g)$. Nous supposerons que ces vecteurs sont définis sur K (voir préambule) et que chacune des normes $\|w_j\|_v$ avec $j\in\{1,\ldots,g-t\}$ et v une place de K au-dessus de v_0 est supérieure ou égale à 1. Cela est toujours possible quitte à multiplier w_i par un nombre rationnel convenable et à utiliser l'invariance par homothétie des hauteurs L^2. De cette manière, nous fixons une base $\mathbf{w}:=(w_0,\ldots,w_{g-t})$ de W. Toutefois, il s'avère que tous les énoncés qui vont suivre jusqu'à la fin du § 3.4 restent vrais avec une base quelconque de W.

3.2. **Estimations ultramétriques d'un coefficient de Taylor.** Dans tout ce paragraphe, v désigne une place ultramétrique du corps de nombres K et p la caractéristique résiduelle de v.

Avant d'énoncer un résultat général, oublions momentanément le groupe G_0 et les polynômes (P_{λ_0}) et considérons un polynôme $P=\sum p_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{X}^{\boldsymbol{\lambda}}$ de $K_v[\mathbf{P}^{N_1}\times\cdots\times\mathbf{P}^{N_n}]$. Soit ℓ un entier naturel. Les propos qui suivent ne feront pas intervenir dans un premier temps le fait que V est une sous-algèbre de Lie de t_G. À partir des équations différentielles vérifiées par les composantes de l'exponentielle de $G(\mathbf{C}_v)$, il est facile de montrer qu'il existe une famille finie $\mathcal{F}$ de nombres algébriques, qui ne dépend que de (G,Φ), telle que le coefficient de Taylor

$$\frac{\mathcal{D}_{w_1}^{\tau_1}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1!\cdots\tau_{g-t}!}\left(P\circ\exp_v(z)\right)_{|z=0} \tag{37}$$

pour $(\tau_1,\ldots,\tau_{g-t})\in\mathbf{N}^{\dim V}$ de longueur ℓ, soit majoré par

$$p^{\frac{\ell}{p-1}}|\mathcal{F}|_v^{\ell+\deg P}\max\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\}\prod_{i=1}^{g-t}\|w_i\|_v^{\tau_i}\ . \tag{38}$$

Il est donc exclu *a priori* d'utiliser cette borne en toutes les places ultramétriques de K puisque la somme des $\log(p)/p$ diverge. Nous allons voir que lorsque V est une sous-algèbre de Lie de t_G et si les dérivées (37) d'ordres $<\ell$ sont nulles, c'est précisément cette obstruction qui disparaît.

3.2.1. À cette fin, nous utiliserons la notion de *taille d'un sous-schéma formel lisse* telle qu'elle a été définie par J.-B. Bost au § 3.1 de [9]. Rappelons qu'au § 1.1, nous avons introduit un modèle lisse $\mathcal{G}\to\operatorname{Spec}\mathcal{O}_k[\frac{1}{m}]$ de G. De la sorte, si v ne divise pas m, nous pouvons considérer le complété formel $\widehat{\mathcal{G}}_v$ de $\mathcal{G}\times\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ à l'origine ($\mathcal{O}_v$ étant l'anneau de valuation du complété K_v). C'est un groupe formel lisse sur

*Voir le lemme 3.22 et en particulier le réel κ.

†Je ne sais pas si cette éventualité est possible.

$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ et le choix de coordonnées locales étales au voisinage de l'origine fournit un isomorphisme de groupes formels (sur $\mathcal{O}_v$)

$$\widehat{\mathcal{G}}_v \simeq \widehat{\mathbf{A}}^g_{\mathcal{O}_v} := \mathrm{Specf}\,\mathcal{O}_v[[X_1,\ldots,X_g]]\ .$$

Si $\mathfrak{X}$ est un sous-schéma formel lisse de $\widehat{G}_{K_v} \simeq \widehat{\mathcal{G}}_v \widehat{\otimes} \mathrm{Spec}\,K_v$, on dispose d'un nombre réel $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \in [0,1]$, appelé *taille de $\mathfrak{X}$ relativement au modèle $\widehat{\mathcal{G}}_v$ de $\widehat{G}_{K_v}$*, défini de la manière suivante. Considérons l'image de $\mathfrak{X}$ (notée encore $\mathfrak{X}$) dans $\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v}$ *via* le choix de coordonnées précédent. Le groupe $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v})$ des automorphismes de $\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v}$ s'identifie à l'ensemble des g-uplets de séries formelles $f = (f_1,\ldots,f_g) \in K_v[[X_1,\ldots,X_g]]^g$ tels que $f(0)=0$ et la matrice jacobienne $\mathrm{D}_0 f = (\partial f_i/\partial x_j(0))_{i,j}$ soit inversible. Pour $\varphi = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}^g} a_{\mathbf{n}}\mathbf{X}^{\mathbf{n}} \in K_v[[\mathbf{X}]]$ et $r>0$, on note

$$\|\varphi\|_r := \sup_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}^g} |a_{\mathbf{n}}|_v r^{|\mathbf{n}|} \in [0,+\infty]$$

et

$$G_\omega(r) := \left\{ f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbf{A}}^g_{K_v})\,;\ \mathrm{D}_0 f \in \mathrm{GL}_g(\mathcal{O}_v) \text{ et } \|f\|_r := \max_{1\le i\le g} \|f_i\|_r \le r \right\}\ .$$

Alors, par définition, la taille de $\mathfrak{X}$ est

$$R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) := \sup\left\{ r>0\,;\ \exists\, f \in G_\omega(r)\,;\ f^*(\mathfrak{X}) = \widehat{\mathbf{A}}^d_{K_v} \times \{0\} \right\}$$

où $d := \dim \mathfrak{X}$, et $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) = 0$ si l'ensemble précédent est vide. Dans cette écriture, $f^*(\mathfrak{X})$ désigne l'image inverse de $\mathfrak{X}$ par f. Le nombre $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})$ est strictement positif lorsque $\mathfrak{X}$ est analytique. Il permet de mesurer la « taille » v-adique (minimale) d'un système de paramètres locaux sur $\mathfrak{X}$ exprimés en fonction des paramètres $X_1,\ldots,X_g$ fixés sur $\widehat{\mathcal{G}}_v$, comme nous allons le voir dans un instant avec le lemme 3.4. Signalons qu'il est possible de généraliser immédiatement cette définition à un schéma $\mathcal{G}$ sur un ouvert U de $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ (pas nécessairement un schéma en groupes) auquel on adjoint un point de $\mathcal{G}(U)$. Observons également que si $\mathfrak{X}$ provient d'un sous-schéma (en groupes) de $\mathcal{G}\times\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v$, lisse le long de l'origine, alors $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) = 1$. Lorsque cette dernière condition de lissité n'est pas remplie, nous disposons néanmoins d'une estimation un peu meilleure que seulement $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \ge 0$. Supposons que $\mathfrak{X}$ est le complété formel le long de l'origine d'un sous-groupe algébrique de G_{K_v}. Rappelons que le groupe formel $\widehat{\mathcal{G}}_v$ possède une exponentielle formelle qui, en termes des coordonnées X_i, s'écrit comme un g-uplet $\mathbf{E} = (E_1(\mathbf{X}),\ldots,E_g(\mathbf{X}))$ de séries formelles de $K_v[[\mathbf{X}]]$, telles que les coefficients de $\mathbf{X}^{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n}\in\mathbf{N}^g$) de $E_1,\ldots,E_g$ sont de la forme $\alpha_{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!$ avec $\alpha_{\mathbf{n}} \in \mathcal{O}_v$. On peut normaliser cette exponentielle de sorte que la différentielle à l'origine $\mathrm{D}_0\mathbf{E}$ soit l'identité. Soit $r_p = |p|_v^{1/(p-1)}$ (déjà introduit p. 9). Le g-uplet $\mathbf{E}$ est un élément de $G_\omega(r_p)$ puisque $|\mathbf{n}!|_v \ge r_p^{|\mathbf{n}|-1}$. Au moyen de cette application exponentielle, il est alors aisé de construire un automorphisme $f \in G_\omega(r_p)$ tel que $f^*(\mathfrak{X}) = \widehat{\mathbf{A}}^d_{K_v} \times \{0\}$. Ce qui entraîne la minoration $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \ge r_p$ (pour toute place $v \nmid m$). On notera qu'à l'instar de la majoration (38) du coefficient de Taylor (37), cette estimation n'est vraiment utile qu'en un nombre fini de places v puisque le produit infini $\prod_p r_p$ diverge.

Revenons au cas d'un sous-schéma formel lisse $\mathfrak{X}$ quelconque de $\widehat{G}_{K_v}$. L'espace tangent à l'origine $t_{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$ est muni d'une structure entière en considérant le module

$$t_{\mathfrak{X}} \cap t_{\mathcal{G}_v} = \{ z \in t_{\mathfrak{X}} \subseteq t_G(K_v)\,;\ \|z\|_v \le 1 \}$$

sur l'anneau $\mathcal{O}_v$, ce qui confère à l'espace dual $t_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ puis à l'espace symétrique $S^\ell(t_{\mathfrak{X}}^{\vee})$ de degré $\ell \in \mathbf{N}$ une norme notée $\|.\|_{S^\ell(t_{\mathfrak{X}}^{\vee})}$.

Ces définitions conduisent alors au lemme suivant.

Lemme 3.4 (lemme 3.3 de [9]). *Soit $\ell \in \mathbf{N}$, Ω un sous-schéma ouvert de $\mathcal{G}_v$ contenant la section nulle et s une fonction régulière sur Ω telle que s_{K_v} s'annule à l'ordre $\ell - 1$ le long de $\mathfrak{X}$ en la section nulle de G_{K_v}. Alors le jet $\mathrm{j}^{\ell}_{\mathfrak{X}} s$ d'ordre ℓ le long de $\mathfrak{X}$ — vu comme élément de $S^{\ell}(t_{\mathfrak{X},0})^{\mathsf{v}*}$ — vérifie*

$$\|\mathrm{j}^{\ell}_{\mathfrak{X}} s\|_{S^{\ell}(t_{\mathfrak{X},0})^{\mathsf{v}}} \leq R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})^{-\ell} \ . \tag{39}$$

Démonstration. Notons comme précédemment $d = \dim \mathfrak{X}$ et soit $0 < r \leq R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})$ et $f \in G_{\omega}(r)$ tels que $f^*(\mathfrak{X}) = \widehat{\mathbf{A}}^d_{K_v} \times \{0\}$. L'élément f s'écrit $(f_1, \ldots, f_g)$ où $f_i = \sum a^{(i)}_{\mathbf{n}} \mathbf{X}^{\mathbf{n}}$ avec $|a^{(i)}_{\mathbf{n}}|_v \leq r^{1-|\mathbf{n}|} \leq r^{-|\mathbf{n}|}$. Par définition même, $(f_1, \ldots, f_d)$ (*resp.* $(f_1, \ldots, f_g)$) forme un système de coordonnées locales sur $\mathfrak{X}$ (*resp.* $\widehat{G}_{K_v}$) et l'hypothèse faite sur s signifie que

$$s_{|\mathfrak{X}} \in (f_1, \ldots, f_d)^{\ell} \tag{40}$$

où $(f_1, \ldots, f_d)$ est l'idéal maximal de $K_v[[f_1, \ldots, f_d]]$. Or, puisque $\mathrm{D}_0 f$ appartient à $\mathrm{GL}_g(\mathcal{O}_v)$, l'inverse de f appartient également à $G_{\omega}(r)$, les X_i $(1 \leq i \leq g)$ s'expriment en fonction de $f_1, \ldots, f_g$ et les $\mathbf{n}^{\text{èmes}}$ coefficients sont majorés par $r^{-|\mathbf{n}|}$. En substituant ces expressions dans $s = \sum a_{\mathbf{n}} \mathbf{X}^{\mathbf{n}}$ ($a_{\mathbf{n}} \in \mathcal{O}_v$ par hypothèse), nous déduisons que s s'écrit $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^g} b_{\mathbf{n}} f^{\mathbf{n}}$ avec $|b_{\mathbf{n}}|_v \leq r^{-|\mathbf{n}|}$ et il en est donc de même pour $s_{|\mathfrak{X}} = s(f_1, \ldots, f_d, 0, \ldots, 0)$. En comparant avec (40), on montre ainsi le lemme 3.4. □

Observons par ailleurs que si G est une extension de groupes algébriques

$$0 \to G_1 \to G \to G_2 \to 0$$

et si $\mathcal{G}_i$, $i = 1, 2$, est un schéma en groupes lisse sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[1/m]$ de fibre générique G_i, alors, pour toute place ultramétrique v de K en dehors d'un nombre fini ne dépendant que de (G, k) et pour tout sous-schéma formel $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ de $\widehat{G}_{K_v}$ (avec $\mathfrak{X}_i \subseteq \widehat{G}_{i,K_v}$), on a

$$\min\{R_{\mathcal{G}_1,v}(\mathfrak{X}_1), R_{\mathcal{G}_2,v}(\mathfrak{X}_2)\} \leq R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \leq \max\{R_{\mathcal{G}_1,v}(\mathfrak{X}_1), R_{\mathcal{G}_2,v}(\mathfrak{X}_2)\}. \tag{41}$$

Soit $\widehat{H}_v$ le complété formel à l'origine du schéma $H \times \operatorname{Spec} K_v$. C'est un sous-schéma formel lisse de $\widehat{G}_{K_v}$. En appliquant le lemme à la section de $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_v}$ définie par $(P/\max\{|p_\lambda|_v\}) \circ \exp_v$ au voisinage de 0 et $\mathfrak{X} = \widehat{H}_v$, nous obtenons le

Corollaire 3.5. *Soit P, ℓ les données considérées au début de cette section. Supposons que les dérivées $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}}(P \circ \exp_v)(0)$ soient toutes nulles lorsque $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{N}^{\dim V}$ vérifie $|\boldsymbol{\tau}| < \ell$. Supposons également que v ne divise pas m. Alors la valeur absolue v-adique du coefficient* (37) *(avec $|\boldsymbol{\tau}| = \ell$) est majorée par*

$$R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\} \prod_{i=1}^{g-t} \|w_i\|_v^{\tau_i} \ .$$

La caractéristique de ces majorants est qu'ils ne dépendent pas trop directement de la valeur absolue v-adique de $\ell!$ comme cela était le cas lorsque nous avons « chassé les dénominateurs » assez brutalement dans (38). Toutefois, lorsque $\mathfrak{X}$ est quelconque comme dans le lemme 3.4, ces estimations locales fines (pour $v \nmid m$) ne sont pas la panacée car la somme infinie

$$\sum_{\substack{v \nmid m \\ v \text{ ultramétrique}}} \log R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X}) \tag{42}$$

peut diverger. En fait, le théorème 3.4 de [9] assure précisément que le somme infinie (42) converge si et seulement si $\mathfrak{X}$ provient d'une sous-variété algébrique de

---

*C'est-à-dire, si l'on écrit $s(x) = F(z).s_0(x)$ où $x = \exp_v(z)$ et F analytique dans un voisinage de 0 de $t_G(\mathbf{C}_v)$, on a $\mathrm{j}^{\ell}_{\mathfrak{X}} s = \mathrm{jet}^{\ell}_{t_{\mathfrak{X}}} F(0).s_0$.

G (*i.e.* $t_{\mathfrak{X}}$ est l'espace tangent d'une telle variété*), pourvu que $\mathfrak{X}$ satisfasse au préalable aux conditions de Liouville et d'analycité exigées dans les points ii) et iii) du théorème. Ces dernières conditions sont naturellement remplies dans le contexte des formes linéaires de logarithmes où $\mathfrak{X} = \widehat{\exp}_v(V)$. C'est pourquoi l'hypothèse faite sur V dans ce texte — espace tangent d'un sous-groupe algébrique de G — est la seule condition qui convienne pour utiliser le corollaire 3.5 en toutes les places ultramétriques de K, en dehors d'un ensemble fini qui ne dépend que de G et de son modèle entier. Nous sommes dans le cas de figure idéal pour avoir un dénominateur optimal des nombres algébriques considérés. Désignons par χ_H la somme finie

$$\chi_H := \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\substack{v \nmid m \\ v \text{ ultramétrique}}} \log R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-1} \in \mathbf{R}^+ \, . \tag{43}$$

Nous disposons d'une estimation *uniforme* de χ_H qui nous a été communiquée par J.-B. Bost.

Lemme 3.6. *Il existe une constante $c_{22} \geq 1$ ne dépendant que de G (en particulier indépendante du corps K et du groupe H) telle que $\chi_H \leq c_{22}$.*

Ce résultat est pour l'essentiel une conséquence du théorème suivant de M. Raynaud.

Théorème 3.7 (corollaire du théorème 4, § 7.5, de [7], p. 187)**.** *Soit K un corps de nombres et $A_1 \subseteq A_2$ deux variétés abéliennes sur K. Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ leurs modèles de Néron respectifs sur $\mathcal{O}_K$. Soit v une place finie de K, de caractéristique résiduelle p et d'indice de ramification $e(K_v \mid \mathbf{Q}_p)^{\dagger}$. Si $e(K_v \mid \mathbf{Q}_p) < p-1$ et si $\mathcal{A}_2$ a bonne réduction en v alors $\mathcal{A}_1$ a bonne réduction en v et l'unique morphisme $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ issu de la propriété de modèle de Néron de $\mathcal{A}_2$ est une immersion fermée.*

Démonstration du lemme 3.6. Le groupe algébrique G est connexe par hypothèse. D'après le théorème de décomposition de Chevalley, et après une éventuelle extension finie du corps de nombres de définition de G, il existe des entiers naturels d_0 et d_1 et une variété abélienne A tels que G soit une extension du groupe linéaire $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{d_1}$ par A. Soit $\mathcal{G}_1$ (*resp.* $\mathcal{G}_2$) le schéma en groupes $\mathbb{G}_{\mathrm{a},\mathcal{O}_K}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathcal{O}_K}^{d_1}$ (*resp.* le modèle de Néron de A). Le sous-groupe H de G est alors une extension d'un sous-groupe algébrique T de $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{d_1}$ par une sous-variété abélienne B de A. D'après la propriété (41) appliquée à $\mathfrak{X}_1 := \widehat{\mathsf{T}}_{K_v}$ et $\mathfrak{X}_2 := \widehat{\mathsf{B}}_{K_v}$ (les complétés formels considérés ici sont, comme précédemment, relatifs à l'origine) et pour toute place ultramétrique v de K en dehors d'une nombre fini ne dépendant que de G, on a $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v) \geq \min\{R_{\mathcal{G}_1,v}(\widehat{\mathsf{T}}_{K_v}), R_{\mathcal{G}_2,v}(\widehat{\mathsf{B}}_{K_v})\}$. Comme T_{K_v} est un sous-groupe connexe de $\mathbb{G}_{\mathrm{a},K_v}^{d_0} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m},K_v}^{d_1}$, il se relève en un sous-schéma en groupes lisse de $\mathcal{G}_1 \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ et sa taille vaut alors 1. Par conséquent $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v) \geq R_{\mathcal{G}_2,v}(\widehat{\mathsf{B}}_{K_v})$ et l'on est ramené au cas des variétés abéliennes. Soit $\mathcal{B}$ le modèle de Néron de B_K sur $\mathcal{O}_K$. En vertu du théorème 3.7 et en dehors des places v dont la caractéristique résiduelle est inférieure à $e(K_v \mid \mathbf{Q}_p) + 2 \leq [K_v : \mathbf{Q}_p] + 2$ ou celles de mauvaise réduction de $\mathcal{G}_2$, le schéma $\mathcal{B} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ est un sous-schéma abélien de $\mathcal{G}_2 \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$. Pour ces places, on a donc $R_{\mathcal{G}_2,v}(\widehat{\mathsf{B}}_{K_v}) = 1$. En les autres places, on utilise la minoration « triviale » $R_{\mathcal{G}_2,v}(\widehat{\mathsf{B}}_{K_v}) \geq |p|_v^{1/(p-1)}$ évoquée un peu plus haut et l'existence de la constante c_{22} s'ensuit. □

---

*Et, dans ce cas, les tailles $R_{\mathcal{G},v}(\mathfrak{X})$ sont presque toutes égales à 1, la somme (42) est une somme finie.

†De la sorte, si ϖ est une uniformisante de l'anneau de valuation $\mathcal{O}_v \subseteq K_v$, l'idéal engendré par p est $(\varpi)^{e(K_v \mid \mathbf{Q}_p)}$.

Remarque 3.8. En réalité, il n'est pas nécessaire d'avoir une estimation aussi fine de χ_H pour démontrer les théorèmes 1.4 et 1.5. Lorsque nous laissons χ_H « indéterminé » (ce que nous ferons dans la suite), nous constatons qu'il apparaît dans le facteur $\max\{1, h(V)\}$ (intervenant dans le paramètre $\mathfrak{a}$), qui devient alors $\max\{1, h(V), \chi_H\}$. Autrement dit, il suffirait de montrer l'existence d'une constante c_{23} telle que $\chi_H \leq c_{23} \max\{1, h(V)\}$ pour obtenir exactement les mêmes énoncés que les théorèmes 1.4 et 1.5. Et cela est possible de manière élémentaire sans avoir recours au résultat de M. Raynaud. La démarche consiste à se ramener comme ci-dessus au cas abélien puis à comparer la structure entière sur t_{B} donnée par le modèle de Néron $\mathcal{B}$ de B et celle donnée par le module saturé $t_{\mathsf{B}} \cap t_{\mathcal{G}_2}$, à partir duquel se calcule la norme des jets le long de t_{B}. Le calcul du quotient $(t_{\mathsf{B}} \cap t_{\mathcal{G}_2})/t_{\mathcal{B}}$ (voir, par exemple, p. 33 de [8]) fournit alors une constante c_{24} telle que $\chi_H \leq c_{24} \max\{1, \log \deg \mathsf{B}\}$ où le degré est relatif à un plongement (quelconque) de A dans un espace projectif. Il ne reste plus qu'à observer que $\log \deg \mathsf{B}$ est du même ordre que la hauteur de t_{B} (voir, par exemple, le lemme 4.7 de [22]), elle-même majorée par $c_{25} \max\{1, h(V)\}$ pour une certaine constante c_{25}.

3.2.2. Avant de passer aux estimations archimédiennes, nous aurons besoin d'une conséquence (qui en est aussi une généralisation en quelque sorte) du corollaire 3.5. Soit maintenant P un polynôme de l'espace E, considéré au § 2.3 et $F := P \circ \exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_v)}$ l'application associée à P en la place v, définie par (16). Soit $\ell \in \mathbf{N}$, z un vecteur de $\mathscr{T}_v$ d'exponentielle $v(K)$-rationnelle et z_0 un élément de $t_{G_0,v}(K) \simeq v(K)$. Dans l'énoncé qui va suivre, nous supposerons que F s'annule à l'ordre $\ell - 1$ le long de W au point (z_0, z), ou, en d'autres termes:

$$\forall\, \mathbf{i} = (i_0, \ldots, i_{g-t}) \in \mathbf{N}^{\dim W} \quad |\mathbf{i}| \leq \ell - 1, \quad \mathcal{D}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{w}} F(z_0, z) = 0 \tag{44}$$

(si $\ell = 0$ cette condition est vide). Pour chaque entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous fixons un entier ε_i de l'ensemble $\{0, \ldots, N_i\}$ pour lequel $\theta_{v,i,\varepsilon_i}(z) \neq 0$.

Lemme 3.9. *Dans ces conditions, le coefficient de Taylor tordu*

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \theta_{v,i,\varepsilon_i}(z)^{D_i}} \frac{\mathcal{D}^{\tau_0}_{w_0} \cdots \mathcal{D}^{\tau_{g-t}}_{w_{g-t}}}{\tau_0! \cdots \tau_{g-t}!} F(z_0, z), \tag{45}$$

où l'uplet $(\tau_0, \ldots, \tau_{g-t})$ *est de longueur* ℓ, *appartient à* $v(K)$.

Démonstration. Nous allons utiliser les formules de translations sur le groupe algébrique $G(K_v)$ pour nous ramener en 0*. Soit $\widetilde{Q}$ le polynôme défini par

$$\widetilde{Q}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{P^{(\tau_0)}_{\lambda_0}(z_0)}{\tau_0!} \prod_{i=1}^{n} A^{(i)}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z), \mathbf{X}_i)^{\lambda_i} \tag{46}$$

où $(A^{(i)})_{i=1\cdots n}$ sont les uplets de polynômes représentant les formules d'additions sur G_{K_v} au voisinage de $x = \exp_v(z)$ (voir § 2.1). La formule de Leibniz et l'hypothèse (44) montrent que le coefficient (45) égale

$$\frac{\mathcal{D}^{\tau_0}_{w_0} \cdots \mathcal{D}^{\tau_{g-t}}_{w_{g-t}}}{\tau_0! \cdots \tau_{g-t}!} \left(\frac{F(z_0 + z_0', z + z')}{\prod_{i=1}^{n} \theta_{v,i,\varepsilon_i}(z + z')^{D_i}} \right)_{|(z_0', z') = (0,0)} . \tag{47}$$

Or, par définition,

$$\frac{\theta_{v,i,j}(z + z')}{\theta_{v,i,\varepsilon_i}(z + z')} = \frac{A^{(i)}_j(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z), \Theta_{v,i}(z'))}{A^{(i)}_{\varepsilon_i}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z), \Theta_{v,i}(z'))}$$

*Il s'agit de « l'astuce d'Anderson-Baker-Coates » (voir, par exemple, la preuve du lemme 13 de [21]).

pour z' proche de 0, donc

$$\frac{F(z_0+z_0',z+z')}{\prod_{i=1}^n \theta_{v,i,\varepsilon_i}(z+z')^{D_i}} = \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(z_0+z_0') \prod_{i=1}^n A^{(i)}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z),\Theta_{v,i}(z'))^{\lambda_i}\right) \times \frac{1}{\prod_{i=1}^n A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z),\Theta_{v,i}(z'))^{D_i}}\,.$$

En dérivant par rapport à z_0', on a

$$\frac{\mathcal{D}_{w_0}^{\tau_0}}{\tau_0!}\left(\frac{F(z_0+z_0',z+z')}{\prod_{i=1}^n \theta_{v,i,\varepsilon_i}(z+z')^{D_i}}\right)_{|z_0'=0} = \frac{F_{\widetilde{Q},v}(z')}{\prod_{i=1}^n A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z),\Theta_{v,i}(z'))^{D_i}}\,.$$

Cette égalité implique en particulier que les dérivées $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{i}} F_{\widetilde{Q},v}(0)$ pour $|\mathbf{i}| < \ell - \tau_0$ sont toutes nulles. En appliquant alors l'opérateur

$$\mathcal{D}_{w_1}^{\tau_1}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}/(\tau_1!\cdots\tau_{g-t}!)$$

aux deux membres puis, à nouveau, la formule de Leibniz pour le second, on déduit l'égalité

$$\begin{aligned}(48)\qquad &\frac{1}{\prod_{i=1}^n \theta_{v,i,\varepsilon_i}(z)^{D_i}}\frac{\mathcal{D}_{w_0}^{\tau_0}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_0!\cdots\tau_{g-t}!}F_{P,v}(z_0,z)\\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z),(1:0:\cdots:0)))^{D_i}}\frac{\mathcal{D}_{w_1}^{\tau_1}\cdots\mathcal{D}_{w_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1!\cdots\tau_{g-t}!}F_{\widetilde{Q},v}(0)\,.\end{aligned}$$

Maintenant, par choix de z, chacune des coordonnées de $\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z)$ appartient à $v(K)$, ainsi bien sûr que les coefficients des polynômes $A_{\varepsilon_i}^{(i)}$ et des polynômes des formules différentielles vérifiées par les $\theta_{v,i,j}$ en 0 (rappelons que $\Theta_{v,i}(0) = (1,0,\ldots,0)$). Par suite, le membre de droite de (48) est clairement un élément de $v(K)$, ce qui démontre le lemme. $\square$

Remarque 3.10. L'assertion du lemme 3.9 reste vraie lorsque v est une place archimédienne (avec la même preuve !).

En chemin, nous avons montré que le polynôme $\widetilde{Q}$ satisfaisait aux hypothèses du corollaire 3.5. De l'égalité (48) et d'une estimation immédiate des coefficients de $\widetilde{Q}$ découle alors la

Proposition 3.11. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus et si $v \nmid m$, la valeur absolue v-adique du coefficient* (45) *est majorée par*

$$\begin{aligned}(49)\qquad &\max\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\}\prod_{i=1}^n \max_{0\le j\le N_i}\left\{\left|\frac{\theta_{v,i,j}}{\theta_{v,i,\varepsilon_i}}(z)\right|_v\right\}^{c_{14}D_i}\max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{\tau_0!}P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)\right|_v\right\}\\ &\times\prod_{i=1}^{g-t}\|w_i\|_v^{\tau_i}\times R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell}\times\prod_{i=1}^n\frac{1}{|A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z),(1,0,\ldots,0))|_v^{D_i}}\,.\end{aligned}$$

Si $v \mid m$ la majoration ci-dessus reste vraie en remplaçant $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell}$ par $c_{26}^{\ell+D_1+\cdots+D_n}$ où c_{26} est une constante ≥ 1.

Naturellement, la dernière assertion de cette proposition résulte de la majoration « naïve » (38) et non du corollaire 3.5. Les équivalents de ces estimations pour les places archimédiennes sont plus rudimentaires et font l'objet du paragraphe suivant.

3.3. **Estimations archimédiennes de coefficients de Taylor.** Dans tout ce paragraphe, v est une place archimédienne de K. Nous voulons obtenir ici une majoration du coefficient tordu (45) en la place v. Commençons tout d'abord par noter le

Lemme 3.12. *Il existe une constante c_{27} telle que soit vérifiée la propriété suivante. Soit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{N}^{N_1+1} \times \cdots \times \mathbf{N}^{N_n+1}$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ un vecteur de $t_G(\mathbf{C}_v)$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_g)$ une base de $t_G(\mathbf{C}_v)$ et $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_g) \in \mathbf{N}^g$. Pour chaque entier $i \in \{1, \dots, n\}$, considérons $\varepsilon_i \in \{0, \dots, N_i\}$ un entier (lié à z_i) pour lequel $\theta_{v,i,\varepsilon_i}(z) \neq 0$. Alors la valeur absolue du coefficient de Taylor*

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{f}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}\left(\prod_{i=1}^{n} \Psi_{v,i,\varepsilon_i}^{\lambda_i}\right)(z)$$

est majorée par

$$c_{27}^{|\boldsymbol{\tau}|+|\boldsymbol{\lambda}|}\left(\prod_{j=1}^{g} \|f_j\|_v^{\tau_j}\right)\prod_{i=1}^{n} \max_{0\le j\le N_i}\left\{\left|\frac{\theta_{v,i,j}}{\theta_{v,i,\varepsilon_i}}(z)\right|_v\right\}^{c_{27}|\lambda_i|}.$$

Ce résultat quoique technique ne pose aucune difficulté particulière lorsque l'on se rappelle que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ l'anneau

$$k[\Psi_{v,i,\varepsilon_i}] := k[(\theta_{v,i,j}/\theta_{v,i,\varepsilon_i})_{0\le j\le N_i}]$$

est stable par dérivation le long d'un vecteur de $t_G(k)$. Il faut cependant observer que la constante c_{27} est bien indépendante de la base $\mathbf{f}$ choisie. Mais cela se voit immédiatement en écrivant les vecteurs $f_j/\|f_j\|_v$ dans une base orthonormée quelconque de $t_G(\mathbf{C}_v)$ (qui, elle, ne dépend que G et de la norme sur $t_G(\mathbf{C}_v)$) et en majorant leurs composantes par 1.

Maintenant, considérons une situation semblable à celle du dernier énoncé du paragraphe précédent. Étant donné un polynôme $P \in E$, un entier $\ell \in \mathbf{N}$ et un vecteur $(z_0, z) \in t_{G_0\times G}(\mathbf{C}_v)$ d'exponentielle K-rationnelle, il s'agit, sous l'hypothèse d'annulation (44) de donner une borne du coefficient de Taylor tordu (45). La réponse se trouve aussitôt dans l'égalité (48) (qui repose sur les formules d'additions « explicites » de G) et le lemme 3.12, ce qui conduit à la

Proposition 3.13. *Il existe une constante $c_{28} \geq 1$ ayant la propriété suivante. Pour toute place archimédienne v et avec les notations et hypothèses ci-dessus, la valeur absolue v-adique du nombre* (45) *($|\boldsymbol{\tau}| = \ell$) est majorée par*

$$c_{28}^{T+\log D_0+D_1+\cdots+D_n}\left(\prod_{i=1}^{g-t}\|w_i\|_v^{\tau_i}\right)\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v\}\max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{\tau_0!}P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)\right|_v\right\}$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\left|A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_{v,i,\varepsilon_i}(z),(1:0:\cdots:0))\right|_v^{D_i}}\prod_{i=1}^{n}\max_{0\le j\le N_i}\left\{\left|\frac{\theta_{v,i,j}}{\theta_{v,i,\varepsilon_i}}(z)\right|_v\right\}^{c_{28}D_i}.$$

Remarque 3.14. Le logarithme de D_0 qui apparaît en exposant de c_{28} provient simplement de la dimension de E (qui vaut $H(G_0 \times G; D_0, \dots, D_n)$).

3.4. **Construction du polynôme auxiliaire.** Soit E l'espace vectoriel quotient $(k[\mathbf{P}]/I(G_0 \times G))_{\mathbf{D}}$ introduit au § 2.3 et F le sous-espace de $\overline{\mathbf{Q}}^{\dim E}$ défini par

$$F := \left\{(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}} \in \overline{\mathbf{Q}}^{\dim E}\,;\ \forall\,(s,\mathbf{t}) \in \Upsilon,\ \sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}(\Theta^{\boldsymbol{\lambda}})(s(1,u)) = 0\right\} \tag{50}$$

où $\Theta^{\boldsymbol{\lambda}}$ est une notation abrégée pour

$$P_{\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\Theta_{v_0,i}^{\lambda_i}=P_{\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{N_i}\theta_{v_0,i,j}^{\lambda_{i,j}} \tag{51}$$

($\lambda_i=(\lambda_{i,0},\dots,\lambda_{i,N_i})$ est un uplet de longueur D_i). En d'autres termes, cet espace s'identifie à l'ensemble des polynômes P de $E\otimes_{v_0}\overline{\mathbf{Q}}$ tel que, pour tout $(s,\mathbf{t})\in\Upsilon$, la dérivée $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}F_{P,v_0}(s,su)$ est nulle. Nous savons que F n'est pas réduit à $\{0\}$. En effet, le système linéaire d'équations définissant F a été étudié au § 2.3 et nous avons vu que son rang ρ était majoré par $C_0^{3/2}\frac{S_0}{S}\mathscr{H}(G_0\times G;D_0',\dots,D_n')$. Or, d'une part, le rapport S_0/S est inférieur à $1/C_0^2$ (choix des paramètres) et, d'autre part, comme les paramètres D_i, $0\le i\le n$, ne sont pas tous nuls, il existe une constante c_{29} telle que $\mathscr{H}(G_0\times G;D_0',\dots,D_n')\le c_{29}\dim E$. Nous en déduisons que $\rho\le(\dim E)/2$ (pourvu que C_0 soit assez grand) et donc $\dim F\ge(\dim E)/2$. Dans ces conditions, le lemme de Siegel absolu énoncé au § 2.7 fournit naturellement un élément de $F\setminus\{0\}$ de « petite » hauteur, et, plus précisément, on a la

Proposition 3.15. *Il existe une constante $c_{30}\ge 1$ et une famille $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}\in F\setminus\{0\}$ de hauteur (logarithmique absolue) L^2 majorée par*

$$c_{30}\left(\log D_0+\max_{1\le i\le n}\{D_i\}+\aleph((P_{\lambda_0}))+\sum_{i=1}^{n}D_i\max_{0\le s\le(g+1)S}\{h(sp_i)\}\right.$$
$$\left.+T(1+\chi_H+h_{\mathrm{L}^2}(w_1)+\cdots+h_{\mathrm{L}^2}(w_{g-t}))\right)$$

L'élément $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}$ représente les coefficients du polynôme auxiliaire P que l'on cherchait à construire (ainsi les notations $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}$ et P sont-elles désormais fixées jusqu'à la fin de la preuve des théorèmes 1.4 et 1.5). Par la suite nous supposerons qu'un des coefficients $p_{\boldsymbol{\lambda}}$ vaut 1, si bien que chacun des termes locaux intervenant dans $h_{\mathrm{L}^2}((p_{\boldsymbol{\lambda}}))$ est positif.

Démonstration de la proposition 3.15. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, c'est le lemme 2.11 qui fournit l'élément $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}$ de $F\setminus\{0\}$ recherché. Sa hauteur est majorée par $h(F)/(\dim F)+\log(\dim F)$ (en prenant le vecteur de hauteur minimale parmi ceux de la base apportée par ce lemme). La principale difficulté est d'évaluer soigneusement la hauteur de F, dans laquelle interviennent presque tous les paramètres, en séparant places archimédiennes et ultramétriques. L'écueil serait d'abîmer la « qualité » des estimations v-adiques obtenues aux paragraphes précédents 3.2 et 3.3 (en particulier, en faisant apparaître sous quelque forme que ce soit un terme en $T\log(T)$).

Pour un multi-indice $\boldsymbol{\lambda}$ comme ci-dessus et $(s,\mathbf{t})\in\Upsilon$, considérons un entier $\varepsilon_{i,s}\in\{0,\dots,N_i\}$ pour lequel $\theta_{v,i,\varepsilon_{i,s}}(su)\neq 0$. Posons $\varepsilon_s:=(\varepsilon_{1,s},\dots,\varepsilon_{n,s})$ et désignons par $a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})}$ le nombre algébrique (élément de $v_0(K)$)

$$a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})}:=\frac{1}{\mathbf{t}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}\left(\Psi_{v_0,\varepsilon_s}^{\boldsymbol{\lambda}}\right)(s,su)$$

où $\Psi_{v_0,\varepsilon_s}^{\boldsymbol{\lambda}}$ est une notation condensée pour $P_{\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\Psi_{v_0,i,\varepsilon_{i,s}}^{\lambda_i}$. L'égalité

$$\Theta_{v_0}^{\boldsymbol{\lambda}}=\left(\prod_{i=1}^{n}\theta_{v_0,i,\varepsilon_{i,s}}^{D_i}\right)\times\Psi_{v_0,\varepsilon_s}^{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{52}$$

la formule de Leibniz et le fait que Υ contienne à $(s,\mathbf{t})$ fixé tous les $(s,\mathbf{t}')$ avec $|\mathbf{t}'|<|\mathbf{t}|$ permettent de décrire F avec les équations

$$\forall\,(s,\mathbf{t})\in\Upsilon,\quad\sum_{\boldsymbol{\lambda}}p_{\boldsymbol{\lambda}}a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})}=0\ .$$

Parmi ces équations, choisissons-en $\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$ linéairement indépendantes et formons alors la matrice F à $\dim E$ lignes et $\operatorname{codim} F$ colonnes constituée des $a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})}$ correspondants. De la sorte, F est de rang maximal et les vecteurs colonnes $C_1, \ldots, C_{\operatorname{codim} F}$ de F forment une base de l'orthogonal $F^{\perp}$ de F (pour le produit scalaire usuel). La formule de dualité de Schmidt $h(F) = h(F^{\perp})$ permet alors de calculer la hauteur de F au moyen de ces vecteurs colonnes. Les coordonnées de Plücker (dans la base canonique de $\overline{\mathbf{Q}}^{\dim E}$) des produits extérieurs $C_1 \wedge \cdots \wedge C_{\operatorname{codim} F}$ conduisent à l'égalité

$$h(F) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \left(\sum_{\mathsf{F}_0} |\det \mathsf{F}_0|_{\sigma}^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \nmid \infty} \log \max_{\mathsf{F}_0} \{ |\det \mathsf{F}_0|_v \}$$

où F_0 parcourt les mineurs maximaux $(\operatorname{codim} F \times \operatorname{codim} F)$ de la matrice F. Nous appellerons $h_{\infty}(F)$ (*resp.* $h_f(F)$) la première (*resp.* la seconde) somme du membre de droite de cette égalité.

Étant donné une place archimédienne σ de K et un tel mineur F_0, l'inégalité de Hadamard entraîne

$$|\det \mathsf{F}_0|_{\sigma} \leq \prod_{i=1}^{\operatorname{codim} F} \|C_i\|_{\sigma}$$

(les colonnes de F_0 étant en normes plus petites que celles de F). Comme il y a $\binom{\dim E}{\dim F}$ mineurs maximaux possibles pour F, on obtient

$$h_{\infty}(F) \leq \sum_{(s,\mathbf{t})} h_{\infty,\mathrm{L}^2}((a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})})_{\boldsymbol{\lambda}}) + \frac{1}{2} \log \binom{\dim E}{\dim F} \tag{53}$$

(la notation h_{∞,L^2} signifie que nous n'avons pris que la somme portant sur les places archimédiennes de K des normes L^2 des vecteurs $(a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})})_{\boldsymbol{\lambda}}$). Le lemme 3.12 fournit un majorant de chacun des $|a_{\boldsymbol{\lambda},(s,\mathbf{t})}|_{\sigma}$ et donc une estimation de la somme ci-dessus.

En ce qui concerne l'estimation du déterminant $\det \mathsf{F}_0$ en une place ultramétrique v, nous constatons qu'il n'est pas possible d'utiliser en l'état la proposition 3.11 puisque les coefficients de la matrice F_0 ne proviennent pas (*a priori*) de polynômes qui s'annulent aux ordres de dérivations précédents. Nous allons donc faire apparaître de tels polynômes en procédant de la manière suivante. Considérons une colonne $(s,\mathbf{t})$ de F_0 telle que la longueur de $\mathbf{t}$ soit maximale et notons $L_1, \ldots, L_{\operatorname{codim} F}$ les lignes du mineur F_0, qui, elles-mêmes, correspondent (respectivement) aux lignes $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{\operatorname{codim} F}}$ de F. Si nous supprimons la colonne $(s,\mathbf{t})$ de F_0, les lignes $\widetilde{L}_j$ de la matrice restante (j est un entier compris entre 1 et $\operatorname{codim} F$, et $\widetilde{L}_j := (a_{\lambda_{i_j},(s,\mathbf{t}')})_{\mathbf{t}' \neq \mathbf{t}}$) sont liées sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et il est possible de trouver une relation de dépendance linéaire entre ces lignes sur $K \cap \mathcal{O}_v$ avec au moins un des coefficients égal à 1. Pour cela, il suffit de considérer une relation sur $\mathcal{O}_K$ puis de diviser par le coefficient dont la valeur absolue v-adique est minimale (non nulle). Autrement dit, il existe $j_0 \in \{1, \ldots, \operatorname{codim} F\}$ et $(\alpha_j)_{j \neq j_0} \in (K \cap \mathcal{O}_v)^{\operatorname{codim} F - 1}$ tels que

$$\widetilde{L}_{j_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{\operatorname{codim} F} \alpha_j \widetilde{L}_j \ .$$

Ainsi, en soustrayant $\sum_{j \neq j_0} \alpha_j L_j$ à la $j_0^{\text{ème}}$ ligne de F_0, nous obtenons une matrice de même déterminant que F_0 et dont la $j_0^{\text{ème}}$ ligne est composée de zéros sauf à la position $(s,\mathbf{t})$ où le coefficient est

$$\xi_{(s,\mathbf{t})} := a_{\lambda_{i_{j_0}},(s,\mathbf{t})} - \sum_{j \neq j_0} \alpha_j a_{\lambda_{i_j},(s,\mathbf{t})} \ .$$

Par conséquent, la valeur absolue v-adique de $\det \mathsf{F}_0$ est égale à $|\xi_{(s,\mathbf{t})}|_v$ multiplié par la valeur absolue du déterminant d'un mineur $\widetilde{F}_0$ de taille $\operatorname{codim} F - 1$ de la matrice F à laquelle on a retiré la colonne $(s,\mathbf{t})$ et la ligne j_0. Soit $(q_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}$ l'élément de $K^{\dim E}$ défini par $q_{\lambda_{i_{j_0}}} = 1$, $q_{\lambda_{i_j}} = -\alpha_j$ si $j \in \{1, \ldots, \operatorname{codim} F\} \setminus \{j_0\}$ et $q_{\boldsymbol{\lambda}} = 0$ si $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ n'est pas une ligne de F_0. Le polynôme Q correspondant à ces coordonnées vérifie

$$\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}'}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} q_{\boldsymbol{\lambda}} \Psi_{v_0,\varepsilon_s}^{\boldsymbol{\lambda}}\right)(s, su) = 0$$

pour tout $\mathbf{t}' \in \mathbf{N}^{\dim W}$ de longueur strictement inférieure à $|\mathbf{t}|$ (puisque $|\mathbf{t}|$ a été choisi maximal). En particulier l'égalité (52) et la formule de Leibniz entraînent, pour tout $|\mathbf{t}'| < |\mathbf{t}|$, $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}'} F_{Q,v_0}(s, su) = 0$ et

$$\xi_{(s,\mathbf{t})} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \theta_{v_0,i,\varepsilon_{i,s}}(su)^{D_i}} \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}}{\mathbf{t}!} F_{Q,v_0}(s, su) \cdot$$

La proposition 3.11 peut donc s'appliquer à $\xi_{(s,\mathbf{t})}$, ce qui fournit une majoration de $|\xi_{(s,\mathbf{t})}|_v$ (indépendante de la taille v-adique des coefficients de Q). En opérant de la même manière pour $\widetilde{\mathsf{F}}_0$, nous déduisons par récurrence immédiate que $|\det \mathsf{F}_0|_v$ s'écrit comme un produit $\prod_{i=1}^{\operatorname{codim} F} |\xi_{(s_i,\mathbf{t}_i)}|_v$ où chacun des $\xi_{(s_i,\mathbf{t}_i)}$ est borné comme dans la formule (49) de la proposition 3.11. La majoration du logarithme de $\max_{\mathsf{F}_0}\{|\det \mathsf{F}_0|_v\}$ qui en découle (valable pour toute place ultramétrique v) et l'inégalité archimédienne (53) entraînent alors la proposition 3.15.

□

3.5. **Extrapolation.** Étant donné $(s, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W}$ et P le polynôme construit au paragraphe précédent, nous disposons d'un coefficient de Taylor tordu

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n \theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su)^{D_i}} \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}\left(P \circ \exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})}\right)(s, su) \quad \text{(voir (45))}. \tag{54}$$

Pour une raison technique qui apparaîtra à la fin de la preuve de la proposition 3.20 (p. 38), nous supposerons que $\varepsilon_i \in \{0, \ldots, N_i\}$ est choisi de telle sorte que

$$|\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su)|_{v_0} = \max_{0 \le j \le N_i} \{|\theta_{v_0,i,j}(su)|_{v_0}\}.$$

En particulier $\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su) \neq 0$ mais aussi, pour toute autre place v de K, $\theta_{v,i,\varepsilon_i}(su) \neq 0$. D'après le lemme 2.7 et le choix des paramètres (voir l'inégalité ` du lemme 3.1), il existe un couple $(s, \boldsymbol{\tau})$ avec $0 \le s \le (g+1)S$ et $|\boldsymbol{\tau}| \le (g+1)T$ pour lequel le nombre (54) est non nul. Parmi ces couples, choisissons-en un tel que $(s, |\boldsymbol{\tau}|)$ soit minimal pour l'ordre lexicographique dans $\mathbf{N}^2$, et notons α le terme (54) correspondant. On notera que par construction de P on a nécessairement $s \ge S_0 + 1$ et $\alpha \in K$ (voir lemme 3.9). Les propositions 3.11 et 3.13 apportent des estimations de $|\alpha|_v$ en toutes les places v de K et, par suite, de la hauteur de Weil de α.

Considérons une place *quelconque* de K au-dessus de v_0, place que nous noterons encore v_0. Nous allons donner ici une majoration de $|\alpha|_{v_0}$ qui dépend de la distance $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$ de sorte que si celle-ci est « trop petite », il y aura une contradiction avec la formule du produit.

Inventée par A. Baker, la démarche consiste à déplacer la question sur une droite de W. Plus précisément, si $\widetilde{u}$ est un élément de $V \otimes \mathbf{C}_{v_0}$ tel que $\mathrm{d}_{v_0}(u, V) = \|u - \widetilde{u}\|_{v_0}$, il revient au même — modulo un terme d'erreur linéaire en $\mathrm{d}_{v_0}(u, V)$ — de majorer (54) avec $(s, s\widetilde{u})$ au lieu de (s, su) (sous réserve, dans le cas p-adique, d'avoir vérifié que $\widetilde{u}$ appartenait bien à $\mathscr{T}_{v_0}$). Le point remarquable est alors le suivant. La fonction analytique définie dans le disque unité de $\mathbf{C}_{v_0}$ par

$$f_{\boldsymbol{\tau}}(z) = \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}\left(P \circ \exp_{(G_0 \times G)(\mathbf{C}_{v_0})}\right)(z, z\widetilde{u})$$

admet des dérivées (divisées) qui sont elles-mêmes des combinaisons linéaires très simples des $f_{\boldsymbol{\tau}'}$, avec $|\boldsymbol{\tau}'| = |\boldsymbol{\tau}|$+ordre de dérivation, car $(1, \widetilde{u}) \in W \otimes \mathbf{C}_{v_0}$. Un lemme d'interpolation permet alors de majorer aisément $|f_{\boldsymbol{\tau}}(s)|_{v_0}$ en fonction des valeurs $|f_{\boldsymbol{\tau}'}(s_0)|_{v_0}$ pour $0 \leq s_0 \leq S_0$ et $|\boldsymbol{\tau}'| \leq 2(g+1)T$.

Ce schéma de démonstration ne dépend pas vraiment de la nature, archimédienne ou p-adique, de la place v_0. Néanmoins, il me semble préférable dans un souci de clarté pour la présentation de distinguer ces deux cas.

3.5.1. v_0 *archimédienne.* Avant d'énoncer la proposition principale, commençons par quelques résultats préliminaires usuels dans ce contexte.

Lemme 3.16. *Il existe une constante $c_{31} \geq 1$ ayant la propriété suivante. Soit $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_{v_0}) \oplus t_G(\mathbf{C}_{v_0})$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{N} \times \prod_{i=1}^n \mathbf{N}^{N_i+1}$ et $\mathbf{h} = (h_0, \ldots, h_{g-t}) \in \mathbf{N}^{\dim W}$. Alors la valeur absolue du coefficient $\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}\Theta^{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z})$ est majorée par*

$$c_{31}^{|\mathbf{h}|+|\boldsymbol{\lambda}|}\left(\prod_{j=1}^{g-t}\|w_j\|_{v_0}^{h_j}\right)\max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{h_0!}P_{\lambda_0}^{(h_0)}(z_0)\right|\right\}\exp\left\{c_{31}\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|(1+\|z_i\|_{v_0})^{\rho_i}\right\}$$

(voir (51) *pour la définition de $\Theta^{\boldsymbol{\lambda}}$).*

La preuve de ce lemme est essentiellement la même que celle du lemme 3.12 en tenant compte de l'inégalité (14).

Soit $m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{h} \in \mathbf{N}^{\dim W}$ et $F = F_{P,v_0}$ la fonction associée à P. Soit également (comme dans l'introduction) $\widetilde{u}$ un vecteur de $V \otimes_{v_0} \mathbf{C}$ pour lequel $\mathrm{d}_{v_0}(u, V) = \|u - \widetilde{u}\|_{v_0}$. Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}F(m, mu + xm(\widetilde{u} - u))$$

de la variable réelle $x \in [0, 1]$ entraîne alors immédiatement le

Lemme 3.17. *Il existe une constante $c_{32} \geq 1$ ayant la propriété suivante. Avec les notations ci-dessus, la valeur absolue de la différence*

$$\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}F(m, mu) - \frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}F(m, m\widetilde{u})$$

est majorée par

$$\begin{gathered}c_{32}^{T+\log(D_0)}\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\left(\prod_{j=1}^{g-t}\|w_j\|_{v_0}^{h_j}\right)m\,\mathrm{d}_{v_0}(u,V)\\ \times\max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{1}{h_0!}P_{\lambda_0}^{(h_0)}(m)\right|\right\}\times\exp\left\{c_{32}\sum_{i=1}^{n}D_i(1+m\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}\right\}\end{gathered}$$

pourvu que $\mathrm{d}_{v_0}(u, V) \leq 1$.

Pour plus de détails sur la preuve, le lecteur pourra consulter (par exemple) ma thèse [20], p. 34.

Enfin, nous aurons aussi besoin du lemme d'interpolation suivant, dû à M. Waldschmidt [48]. Si x est un nombre réel positif et f une fonction définie sur le disque fermé $\overline{D}(0, x) = \{z \in \mathbf{C}\,;\ |z| \leq x\}$, nous notons $|f|_x$ la borne supérieure des $|f(z)|$, $z \in \overline{D}(0, x)$.

Lemme 3.18. *Soit S_1, T_1 des entiers naturels strictement positifs et $\mathsf{R} \geq \mathsf{r} \geq 2S_1$ des nombres réels. Soit f une fonction analytique (d'une variable complexe) dans* *le disque* $\overline{D}(0,\mathsf{R})$. *Alors on a*

$$|f|_{\mathsf{r}} \leq 2|f|_{\mathsf{R}}\left(\frac{2\mathsf{r}}{\mathsf{R}}\right)^{T_1S_1} + 5\left(\frac{9\mathsf{r}}{S_1}\right)^{T_1S_1} \times \max_{\substack{0\leq h<T_1\\ 0\leq m<S_1}}\left\{\left|\frac{1}{h!}f^{(h)}(m)\right|\right\} .$$

Remarque 3.19. Jusqu'ici nous avons pu ne remplacer aucun des paramètres $T,S,D_0,\ldots,D_n$ par leurs valeurs données au § 3.1 tout en conservant une (relative) simplicité des estimations. Ce principe s'avère dorénavant presqu'impossible à tenir sans alourdir exagérément certaines inégalités (dont la simple écriture au format de ce papier requerrait alors une page entière). En revanche, nous devons conserver les termes mettant en jeu les coefficients de P et la base $\mathbf{w}$ car ces objets ne sont pas définis sur k (*a priori*) mais sur K et seule une estimation « globale » avec la formule du produit permettra de les contrôler.

De la sorte, le majorant du lemme 3.17 s'écrit plus simplement

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\max_{j}\{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{33}T}e^{c_{33}U}\mathrm{d}_{v_0}(u,V)$$

(pour une certaine constante $c_{33}\geq 1$ et où j parcourt l'ensemble $\{1,\ldots,g-t\}$).

Le résultat central de ce paragraphe est le suivant.

Proposition 3.20. *Supposons que* $\log \mathrm{d}_{v_0}(u,V)\leq -C_0^3U_0$. *Alors*

$$|\alpha|_{v_0}\leq e^{-U}\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\max\{\|w_1\|_{v_0},\ldots,\|w_{g-t}\|_{v_0}\}^{C_0T} .$$

Démonstration. Soit $\mathrm{f}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ la fonction entière définie par

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}F(z,z\widetilde{u}) .$$

Soit $\mathbf{x}:=(x_i)_{0\leq i\leq g-t}$ les coordonnées de $(1,\widetilde{u})$ dans la base $\mathbf{w}$. La hauteur L^2 de w_i est projective et quitte à multiplier w_i par un entier assez grand*, nous pouvons supposer que $|x_i|\leq 1$. Pour tout entier $\ell\geq 0$, la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ de f vérifie la formule

$$\frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(z)}{\ell!}=\sum_{\substack{\mathbf{j}\in\mathbf{N}^{\dim W}\\ |\mathbf{j}|=\ell}}\binom{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}{\mathbf{j}}\mathbf{x}^{\mathbf{j}}\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!}F(z,z\widetilde{u})$$

et donc il existe une constante $c_{34}\geq 1$ telle que

$$\max_{\substack{\ell\leq(g+1)T\\ s_0\leq S_0}}\left\{\left|\frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(s_0)}{\ell!}\right|\right\}\leq c_{34}^T\max_{(s_0,\mathbf{j})\in\Upsilon}\left|\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!}F(s_0,s_0\widetilde{u})\right| . \tag{55}$$

Si l'on remplace $\widetilde{u}$ par u dans le membre de droite de cette inégalité, le terme obtenu est nul par construction de F. Par conséquent, le lemme de comparaison 3.17 entraîne la majoration

$$\max_{\substack{\ell\leq(g+1)T\\ s_0\leq S_0}}\left\{\left|\frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(s_0)}{\ell!}\right|\right\}\leq e^{-C_0^2U}\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}\max_{j}\{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{35}T} .$$

De même, le lemme 3.16 conduit à la majoration

$$\begin{aligned}|\mathrm{f}|_{\mathsf{R}}\leq\max_{\boldsymbol{\lambda}}\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\}e^{\left(U/2+\sum_{i=1}^n C_0D_i(1+\mathsf{R}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}\right)}\times\max_{\substack{\lambda_0\\ |z_0|\leq\mathsf{R}}}\left\{\left|\frac{1}{\tau_0!}P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)\right|\right\}\\ \times\max_{j}\{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{36}T}\end{aligned} \tag{56}$$

valide pour tout nombre réel $\mathsf{R}\in[1,\mathrm{d}_{v_0}(u,V)^{-1}]$. En prenant $\mathsf{R}:=2\mathfrak{e}(g+1)S$, nous constatons que le produit des deux dernières quantités de la première ligne

*Par exemple, $2\max\{1,[|x_1|],\ldots,[|x_{g-t}|]\}$ convient. Cette astuce ne dépend que de la place v_0 sur k (et non du choix de la place de K au-dessus de v_0).

du membre de droite de (56) est inférieure à e^U, ce qui fournit la majoration plus simple

$$|\mathsf{f}|_{\mathsf{R}} \leq \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\} \max_{j} \{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{36}T} e^U \ .$$

Mentionnons que pour cela nous avons utilisé les inégalités $\hat{}$ et $\bar{}$ du lemme 3.1. Choisissons $T_1 := (g+1)T$, $S_1 := S_0$, $\mathsf{r} := s$ et appliquons le lemme d'interpolation 3.18 à ces données et à la fonction f. Il vient

$$|\mathsf{f}(s)| \leq e^{-C_0 U} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|\} \max_{j} \{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{37}T}$$

(rappelons que $\mathsf{r}/S_1 = s/S_0 \leq S/S_0 \leq C_0^4$), puis, par une seconde application du lemme de comparaison 3.17, nous obtenons

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F(s, su)\right| \leq 2\, e^{-C_0 U} \ \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|\} \max_{j} \{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{38}T} \ .$$

La borne pour $|\alpha|_{v_0}$ se déduit de cette inégalité *via* la minoration de $|\theta_{v_0,i,\varepsilon_i}(su)|$ donnée par l'inégalité (14) (p. 14) et grâce au choix de ε_i. □

3.5.2. v_0 *ultramétrique.* Considérons le nombre algébrique α introduit au début du paragraphe 3.5. La condition de minimalité sur $(s, |\boldsymbol{\tau}|)$ implique que α est aussi égal à

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}}{\boldsymbol{\tau}!}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} \Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}\right)(s, su) \tag{57}$$

où, comme dans la démonstration de la proposition 3.15, $\Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}$ désigne

$$P_{\lambda_0}(z_0) \prod_{i=1}^{n} \Psi_{v_0,i,0}^{\lambda_i} \ .$$

Dans la suite, nous noterons $\widetilde{F}$ la somme des $p_{\boldsymbol{\lambda}} \Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}$. L'écriture (57) pour α s'avère plus commode dans le cas ultramétrique car l'on connaît un développement en série de $\Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}$, qui converge sur le disque ouvert $D(0, r_p)$:

$$\forall \boldsymbol{\lambda},\ \exists\, (a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}})_{\mathbf{i}} \in \mathcal{O}_v^{\mathbf{N}^g}\ ; \quad \Psi_{v_0,0}^{\boldsymbol{\lambda}}(z) = P_{\lambda_0}(z_0) \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{N}^g} \frac{a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}}}{\mathbf{i}!} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}\right)$$

lorsque $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_g)$ désigne les coordonnées de $z \in D(0, r_p)$ dans la base $\mathbf{e}$ (rappelons que c'est précisément le choix de cette base qui assure l'intégralité des coefficients $a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}}$, voir § 1.1). Nous avons conservé $P_{\lambda_0}(z_0)$ intact dans ce développement pour des raisons pratiques afin de ne pas mélanger les coefficients de P_{λ_0} (qui n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{O}_v$) avec les $a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}} \in \mathcal{O}_v$. Pour tout uplet $\mathbf{h} = (h_0, \mathbf{h}') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^g$ et tout élément $(z_0, z) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_{v_0}) \times D(0, r_p)$, nous obtenons alors

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!} \widetilde{F}(z_0, z) = \sum_{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{i}} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(z_0)}{h_0!} \frac{a_{\mathbf{i},\boldsymbol{\lambda}}}{(\mathbf{i} - \mathbf{h}')!} \mathbf{z}^{\mathbf{i}-\mathbf{h}'} \tag{58}$$

($\mathbf{i}$ parcourt $\{(i_1, \ldots, i_g) \in \mathbf{N}^g\ ;\ \forall\, j \in \{1, \ldots, g\},\ i_j \geq h_j'\}$). Pour j un entier naturel, notons $\sigma_p(j)$ la somme des chiffres de j écrit en base p. On sait que la valuation p-adique de $j!$ est $(j - \sigma_p(j))/(p-1)$ ce qui entraîne $|j!|_{v_0} \geq r_p^j$ et, plus généralement, pour $\mathbf{i} \in \mathbf{N}^g$, $|\mathbf{i}!|_{v_0} \geq r_p^{|\mathbf{i}|}$ si bien que $|\mathbf{z}^{\mathbf{i}}/\mathbf{i}!|_{v_0} \leq 1$ pour $z \in D(0, r_p)$. De l'égalité (58) et de l'inégalité ultramétrique se déduit la majoration

$$\left|\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!} \widetilde{F}(z_0, z)\right|_{v_0} \leq \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\} \max_{\lambda_0} \left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(z_0)}{h_0!}\right|_{v_0}\right\} \tag{59}$$

valide pour tout $(z_0, z) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_v) \times D(0, r_p)$. Cette inégalité se généralise immédiatement à une base quelconque $\mathbf{e}' = (e'_0, \ldots, e'_g)$ de $t_{G_0 \times G}(\mathbf{C}_{v_0})$ en multipliant le membre de droite par $\prod_{j=0}^{g} \|e'_j\|_{v_0}^{h_j}$. De la même façon, l'estimation

$$|\mathbf{z}^{\mathbf{i}} - \mathbf{z}'^{\mathbf{i}}| \leq \|z - z'\|_{v_0} \max\left\{\|z\|_{v_0}, \|z'\|_{v_0}\right\}^{|\mathbf{i}|-1}$$

conduit au lemme de comparaison suivant.

Lemme 3.21. *Supposons que* $\mathrm{d}_{v_0}(u, V) = \|u - \widetilde{u}\|_{v_0}$ *est strictement inférieur à* r_p. *Alors, pour tout couple* $(m, \mathbf{h}) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^{\dim W}$, *la valeur absolue de la différence* $\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!}\widetilde{F}(m, mu) - \frac{\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{h}}}{\mathbf{h}!}\widetilde{F}(m, m\widetilde{u})$ *est majorée par*

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\left\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\right\} \max_{\lambda_0}\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(m)}{h_0!}\right|_{v_0}\right\} \prod_{j=1}^{g-t} \|w_j\|_{v_0}^{h_j} \times \mathrm{d}_{v_0}(u, V) .$$

La condition $\|u - \widetilde{u}\|_{v_0} < r_p$ équivaut à $\|\widetilde{u}\|_{v_0} < r_p$ (puisque $\|u\|_{v_0} < r_p$) et assure de la sorte la cohérence de l'énoncé.

Enfin, comme dans le cas archimédien, nous aurons besoin d'un lemme d'interpolation (en une variable), dû à D. Roy [41].

Lemme 3.22. *Soit* S_1, T_1 *des entiers* ≥ 1 *et* $\mathsf{R} \geq \mathsf{r} \geq 1$ *des nombres réels. Posons*

$$\kappa := \frac{S_1 - \sigma_p(S_1)}{p - 1} + \left[\frac{\log S_1}{\log p}\right]$$

Soit $f : \overline{D}(0, \mathsf{R}) \to \mathbf{C}_p$ *une fonction analytique. Alors*

$$\frac{|f|_{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}^{(S_1+1)T_1}} \leq p^{\kappa T_1} \max\left\{\max_{\substack{0 \leq m < S_1 \\ 0 \leq h < T_1}}\left\{\left|\frac{f^{(h)}(m)}{h!}\right|\right\}, \left(\frac{1}{\mathsf{R}}\right)^{(S_1+1)T_1} |f|_{\mathsf{R}}\right\} .$$

Démonstration. Il s'agit d'un cas très particulier du corollaire 1.2 de [41] qui avait été conjecturé par P. Robba en 1978. Avec les notations de cet article, choisissons $K = \mathbf{C}_p$, $n = \rho = 1$, $E = \Omega = \{0, \ldots, S_1\}$, $L = M = (S_1 + 1)T_1$. L'énoncé de D. Roy donne le résultat avec $\Delta(E)\delta(E)$ à la place de $p^{-\kappa}$, où $\Delta(E) = \min_{x \in E} \prod_{y \in E \setminus \{x\}} |y - x|_{v_0}$ et $\delta(E) = \min_{x \neq y \in E} |y - x|_{v_0}$. En observant que $\Delta(E) = |S_1!|_{v_0}$, on vérifie aisément que $\Delta(E)\delta(E) = |p|_{v_0}^{\kappa} = p^{-\kappa}$. □

Ces préliminaires à l'extrapolation étant acquis, nous allons être en mesure de démontrer la

Proposition 3.23. *Supposons que* $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \leq -C_0^3 U$. *Alors*

$$|\alpha|_{v_0} \leq e^{-U} \max_{\boldsymbol{\lambda}}\left\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\right\} \max_{j}\left\{\|w_j\|_{v_0}\right\}^{C_0 T} .$$

Démonstration. Elle suit d'assez près celle de la proposition 3.20 en comportant néanmoins quelques variantes liées, en particulier, à la finitude du rayon de convergence de l'exponentielle p-adique. Soit $D_u = \{z \in \mathbf{C}_p, zu \in \mathscr{T}_{v_0}\}$ et $\mathrm{f} : D_u \to \mathbf{C}_p$ la fonction définie par $\mathrm{f}(z) = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}\widetilde{F}(z, z\widetilde{u})$. L'hypothèse $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \leq -C_0^3 U$ entraîne la majoration $\|u - \widetilde{u}\|_{v_0} < \|u\|_{v_0}$ et donc $\|u\|_{v_0} = \|\widetilde{u}\|_{v_0}$, ce qui assure l'analycité de f sur D_u. Les dérivées de cette application vérifient la même formule que dans le cas archimédien et la majoration (55) est vraie avec $c_{34} = 1$. Le lemme 3.21 entraîne alors

$$\max_{\substack{0 \leq s_0 \leq S_0 \\ 0 \leq \ell \leq (g+1)T}}\left\{\left|\frac{\mathrm{f}^{(\ell)}(s_0)}{\ell!}\right|_{v_0}\right\} \leq \max\left\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\right\} \max_{\substack{\lambda_0 \\ h_0 \leq (g+1)T \\ s_0 \leq S_0}}\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}(s_0)}{h_0!}\right|_{v_0}\right\} \mathrm{d}_{v_0}(u, V)$$
$$\times \max\left\{\|w_1\|_{v_0}, \ldots, \|w_{g-t}\|_{v_0}\right\}^{2(g+1)T} .$$

En outre, de l'inégalité (59) et de la remarque qui suit, nous déduisons la majoration

$$|\mathsf{f}|_{\mathsf{R}} \leq \max\{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|_{v_0}\} \max_{\substack{\lambda_0 \\ |z_0| \leq \mathsf{R}}} \left\{ \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}(z_0)}{\tau_0!} \right|_{v_0} \right\} \prod_{j=1}^{g-t} \|w_j\|_{v_0}^{\tau_j}$$

valide pour tout R dans l'intervalle $\left]1, \frac{r_p}{\|u\|_{v_0}}\right[$. En appliquant le lemme d'interpolation 3.22 avec $S_1 := S_0$, $T_1 := (g+1)T$, $\mathsf{r} := 1$ et $\mathsf{R} := \mathfrak{r}$ à la fonction f, nous obtenons une majoration de $|\mathsf{f}(s)|$

$$|\mathsf{f}(s)| \leq |\mathsf{f}|_1 \leq p^{\kappa(g+1)T} e^{-C_0^2 U} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{|p_{\boldsymbol{\lambda}}|\} \max_j \{\|w_j\|_{v_0}\}^{c_{39}T}$$

où $\kappa = (S_0 - \sigma_p(S_0))/(p-1) + [\log S_0 / \log p]$. Le choix des paramètres et la condition $\mathfrak{r} > r_p^{-1}$ entraîne $p^{\kappa(g+1)T} \leq e^{C_0 U}$. Nous concluons avec le lemme 3.21. $\square$

3.6. **Fin de la démonstration.** Comme nous l'avons vu, le nombre algébrique α introduit au paragraphe précédent est non nul et satisfait donc à la formule (du produit) :

$$\sum_{\substack{v \text{ place de } K \\ v \nmid v_0}} \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \log |\alpha|_v = - \sum_{v | v_0} \frac{[K_v : \mathbf{Q}_v]}{[K : \mathbf{Q}]} \log |\alpha|_v \cdot \tag{60}$$

D'après les propositions 3.11 et 3.13 (appliquées avec $(z_0, z) = (s, su)$), il existe une constante c_{40} telle que le membre de gauche soit majoré par

(61)

$$c_{40} \left(T(\chi_H + h_{\mathrm{L}^2}(w_1) + \cdots + h_{\mathrm{L}^2}(w_{g-t})) + h(P) + \sum_{i=1}^{n} D_i h(sp_i) + \aleph((P_{\lambda_0})) \right) \cdot$$

Par construction, nous disposons d'une majoration de la somme des $h_{\mathrm{L}^2}(w_j)$ (voir § 3.1.3) ainsi que de la hauteur de P, donnée par la proposition 3.15. En vertu du lemme 3.6, la quantité χ_H est bornée. Les lemmes 3.1 et 3.2 montrent alors que la quantité (61) est majorée par $U/(C_0 D)$. Quant au membre de droite de l'égalité (60), il est minoré par $U/D - h(P) - c_{41} \sum_j h_{\mathrm{L}^2}(w_j) \geq U/(2D)$ dès lors que $\log \mathrm{d}_{v_0}(u, V) \leq -C_0^3 U$. Nous constatons alors une contradiction avec le majorant $U/(C_0 D)$. Ce qui conclut la démonstration des théorèmes 1.4 et 1.5.

Références

[1] M. Ably. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur une courbe elliptique de type CM. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(1):1–33, 2000.

[2] M. Ably et É. Gaudron. Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 337 (Sér. I):629–634, 2003.

[3] A. Baker et G. Wüstholz. Logarithmic forms and group varieties. *J. reine angew. Math*, 442:19–62, 1993.

[4] D. Bertrand. Sous-groupes à un paramètre p-adique de variétés de groupe. *Invent. Math.*, 40(2):171–193, 1977.

[5] D. Bertrand. Approximations diophantiennes p-adiques sur les courbes elliptiques admettant une multiplication complexe. *Compos. Math.*, 37(1):21–50, 1978.

[6] D. Bertrand et Yu. Flicker. Linear forms on abelian varieties over local fields. *Acta Arith.*, 38(1):47–61, 1980.

[7] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud. *Néron Models*, volume 21 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag Berlin, 1990.

[8] J.-B. Bost. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). In *Séminaire Bourbaki*, volume 237 de *Astérisque*, 115–161. Société Mathématique de France, 1996.

[9] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci*, 93:161–221, 2001.

[10] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(4):903–1027, 1994.

[11] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie*. Hermann, Paris, 1972. Fascicule XXXVII.

[12] J. Coates et S. Lang. Diophantine approximation on Abelian varieties with complex multiplication. *Invent. Math.*, 34(2):129–133, 1976.

[13] S. David. *Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques*, volume 62 de *Mémoire de la Société Mathématique de France*. S. M. F., 1995.

[14] S. David et N. Hirata-Kohno. Recent progress on linear forms in elliptic logarithms. Dans *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, pp. 26–37. Cambridge Univ. Press, Septembre 2002. Éd. par G. Wüstholz.

[15] S. David et P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, XXVIII(4):489–543, 1999.

[16] M. Demazure et P. Gabriel. *Groupes algébriques. Tome 1*. Masson&Cie, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par M. Hazewinkel.

[17] P. Dong. Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes p-adiques de nombres algébriques. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 343:97, 1995. Publié par l'Institut de Mathématiques, Académie des Sciences de Pologne.

[18] N.I. Fel'dman. Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77(119):423–436, 1968. Engl. transl. in Math. USSR Sb., 6 (3), 393 – 406 (1968).

[19] N.I. Fel'dman et Yu.V. Nesterenko. *Number Theory IV. Transcendental numbers*, volume 44 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag Berlin, 1998. A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Éds).

[20] É. Gaudron. Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. Thèse de doctorat de l'université Jean Monnet de Saint-Étienne, décembre 2001. `http://theses-EN-ligne.in2p3.fr/documents/archives0/00/00/11/65/index_fr.html`

[21] É. Gaudron. Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. Prépublication disponible sur `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron`, 2002.

[22] É. Gaudron. Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. Prépublication disponible sur `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron`, 2004.

[23] J. Gebel, A. Pethö et H.G. Zimmer. Computing integral points on elliptic curves. *Acta. Arith.*, 68:171–192, 1994.

[24] P. Graftieaux. Formal subgroups of abelian varieties. *Invent. Math.*, 145:1–17, 2001.

[25] N. Hirata-Kohno. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques. *Invent. Math.*, 104:401–433, 1991.

[26] N. Hirata-Kohno. Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Compos. Math.*, 86:69–96, 1993.

[27] S. Lang. *Elliptic curves: Diophantine analysis*, volume 231 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[28] M. Laurent. Sur quelques résultats récents de transcendance. *Astérisque*, 198-200:209–230 (1992), 1991. Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy, 1989).

[29] D. Masser. *Elliptic functions and transcendence*, volume 437 de *Lecture Notes in Maths.* Springer-Verlag, 1975.

[30] D. Masser. Linear forms in algebraic points of abelian functions. I.(II.). *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77 (79):499–513 (55–70), 1975 (1976).

[31] D. Masser. Diophantine approximation and lattices with complex multiplication. *Invent. Math.*, 45(1):61–82, 1978.

[32] E.M. Matveev. An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers I. (II.). *Izv. Ross. Akad. NaukSer. Math*, 62, (64)(4, (6)):81–136, (125–180), 1998, (2000).

[33] Yu.V. Nesterenko. Estimates for the characteristic function of a prime ideal. *Math. Sb. (N.S.)*, 123(165):11–34, 1984. Math. USSR. Sbornik, vol 51 (1985), pp. 9 – 32.

[34] P. Philippon. Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France*, 114:355–383, 1986. Errata et Addenda, id.115 (1987).

[35] P. PHILIPPON. Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mt. J. Math.*, 26(3):1069–1088, 1996.

[36] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2):281–314, 1988.

[37] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. Lower bounds for linear forms in logarithms. Dans *New advances in transcendence theory (Durham, 1986)*, pp. 280–312. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[38] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. Dans *Séminaire de Théorie des Nombres Paris* 1986−87, volume 75 de *Progress in Mathematics*, pp. 313–347. Birkhäuser Boston, Inc., 1989. Édité par Catherine Goldstein.

[39] G. RÉMOND et F. URFELS. Approximation diophantienne de logarithmes elliptiques p-adiques. *J. Number Theory*, 57(1):133–169, 1996.

[40] P. ROBBA. Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p-adiques en plusieurs variables. *Invent. Math.*, 48:245–277, 1978.

[41] D. ROY. Interpolation sur des perturbations d'ensembles produits. *Bull. Soc. Math. France*, 130(2):387–408, 2002.

[42] D. ROY et J.L. THUNDER. An absolute Siegel's lemma. *J. Reine angew. Math.*, 476:1–26, 1996.

[43] D. ROY et J.L. THUNDER. Bases of number fields with small height. *Rocky Mountain J. Math.*, 26(3):1089–1098, 1996. Symposium on Diophantine Problems (Boulder, CO, 1994).

[44] J.-P. SERRE. *Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs*. Astérisque, 1979. Appendice II de [47].

[45] N.P. SMART. *The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations*, volume 41 de *Student Texts, London Mathematical Society*. Cambridge University Press, 1998.

[46] R.J. STROEKER et N. TZANAKIS. Computing all integer solutions of a general elliptic equation. Dans *ANTS-IV*, volume 1838 de *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 551–561. Springer-Verlag, 2000. W. Bosma (Ed).

[47] M. WALDSCHMIDT. *Nombres transcendants et groupes algébriques*, volume 69/70 d'*Astérisque*. Société Mathématique de France, 1979.

[48] M. WALDSCHMIDT. A lower bound for linear forms in logarithms. *Acta Arith.*, 37:257–283, 1980.

[49] M. WALDSCHMIDT. *Diophantine Approximation On Linear Algebraic Groups*, volume 326 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2000.

[50] M. WALDSCHMIDT. Linear independence measures for logarithms of algebraic numbers. Dans *Diophantine approximation (Cetraro, 2000)*, volume 1819 de *Lecture Notes in Math.*, pp. 250–344. Springer, Berlin, 2003.

[51] G. WÜSTHOLZ. A new approach to Baker's theorem on linear forms in logarithms. III. Dans *New advances in transcendence theory (Durham, 1986)*, pp. 399–410. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[52] G. WÜSTHOLZ. Multiplicity estimates on group varieties. *Ann. of Math. (2)*, 129(3):471–500, 1989.

[53] K. YU. Linear forms in p-adic logarithms. III. *Compos. Math.*, 91(3):241–276, 1994.

[54] K. YU. p-adic logarithmic forms and group varieties. I. *J. Reine angew. Math.*, 502:29–92, 1998.

[55] K. YU. p-adic logarithmic forms and group varieties. II. *Acta Arith.*, 89(4):337–378, 1999.

[56] S. ZHANG. Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(1):187–221, 1995.

Université Grenoble I, Institut Fourier.
UMR 5582, BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.
Courriel : `Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr`
Page internet : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron`