

Sur l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle dans une calotte strictement pseudoconvexe

Christine LAURENT-THIÉBAUT

Prépublication de l'Institut Fourier n° 645 (2004)

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

L'objet de cet article est d'essayer de caractériser géométriquement les ouverts du bord d'un domaine strictement pseudoconvexe relativement compact d'une variété de Stein sur lesquels on peut résoudre l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle en tout bidegré.

Soient Ω un domaine relativement compact, à bord C^∞ d'une variété de Stein X de dimension n , $n \geq 2$, et ω un ouvert connexe de $\partial\Omega$ à bord lisse défini par

$$\omega = \{z \in \partial\Omega \mid \operatorname{Re}\varphi(z) < 0\},$$

où φ est une fonction holomorphe sur X . On pose $E(\omega) = \overline{\Omega} \cap \{z \in X \mid \operatorname{Re}\varphi < 0\}$. Il est alors bien connu que toute fonction CR continue sur ω s'étend en une fonction continue sur $E(\omega)$ et holomorphe dans $E(\omega) \setminus \omega$. Ce résultat est démontré dans [13], lorsque $X = \mathbb{C}^n$, et dans [7] pour une variété de Stein quelconque. Par ailleurs si on considère la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur ω pour les formes différentielles CR de classe C^∞ de bidegré $(0, q)$, $1 \leq q \leq n - 2$, on sait, d'après [16], qu'on peut résoudre sans restreindre le domaine, c'est-à-dire qu'il existe une solution définie sur ω tout entier dans la situation géométrique décrite ici, si Ω est strictement pseudoconvexe.

Il est alors naturel de s'intéresser au problème suivant : est-il nécessaire et suffisant pour pouvoir résoudre l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle en bidegré $(0, q)$, $1 \leq q \leq n - 2$, sur un domaine ω du bord d'un ouvert strictement pseudoconvexe Ω , à bord lisse d'une variété de Stein X , et pour que toute fonction CR continue sur ω s'étende holomorphiquement à un domaine pseudoconvexe contenu dans Ω , que le bord de ω soit contenu dans un ensemble Levi-plat en un sens assez général ? La condition de pseudoconvexité sur ω est justifiée par l'absence de Lemme de Poincaré pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sans hypothèse sur la forme de Levi.

Si X est de dimension 2 et Ω strictement pseudoconvexe, toute fonction continue sur un domaine ω de $\partial\Omega$ s'étend holomorphiquement à un ouvert pseudoconvexe de Ω et le bord de ω est toujours contenu dans un sous ensemble H d'intérieur vide de $\overline{\Omega}$, Levi-plat au sens suivant : $\Omega \setminus H$ est réunion de domaines pseudoconvexes. En effet, on sait que si Ω est un domaine relativement compact, à bord C^∞ d'une variété de Stein X et ω un

Classification math. : 32D10, 32F25, 32F40.

Mots-clés : bord strictement pseudoconvexe, équation de Cauchy-Riemann tangentielle, enveloppe d'holomorphie.

ouvert connexe de $\partial\Omega$, toute fonction CR continue sur ω s'étend holomorphiquement à Ω privé de l'enveloppe holomorphiquement convexe de $\partial\Omega \setminus \omega$ (cf. [7]). Par ailleurs un résultat de Slodkovski [17] affirme que si X est de dimension 2 et Ω strictement pseudoconvexe, Ω privé de l'enveloppe holomorphiquement convexe $\widehat{\partial\Omega \setminus \omega}$ de $\partial\Omega \setminus \omega$ est pseudoconvexe. L'ensemble H cherché est alors le bord de l'enveloppe holomorphiquement convexe de $\partial\Omega \setminus \omega$ privée de $\partial\Omega \setminus \bar{\omega}$, car l'intérieur $\widehat{\partial\Omega \setminus \omega}$ est pseudoconvexe [14].

Si X est de dimension n , $n \geq 3$, nous nous plaçons dans la situation géométrique suivante : Ω est un domaine relativement compact, strictement pseudoconvexe, à bord C^∞ de X , ω un ouvert connexe de $\partial\Omega$ tel que $\bar{\omega} \neq \partial\Omega$ et K un compact de $\bar{\Omega}$ d'intérieur non vide tel que $\partial\Omega \setminus K = \omega$ et $\Omega \setminus K$ est pseudoconvexe.

Nous considérons les hypothèses analytiques suivantes :

- (A1) Toute fonction CR continue sur ω s'étend en une fonction continue sur $E(\omega) = \bar{\Omega} \setminus K$ et holomorphe dans $E(\omega) \setminus \omega$;
- (A2) Pour tout entier q , $1 \leq q \leq n-3$, et toute $(0, q)$ -forme différentielle f de classe C^∞ , CR sur ω , il existe une $(0, q-1)$ -forme différentielle u de classe C^∞ sur ω telle que $\bar{\partial}_b u = f$ sur ω ;
- (A3) Pour toute $(0, n-2)$ -forme différentielle f de classe C^∞ , CR sur ω , qui vérifie $\int_\omega f \wedge \varphi = 0$, pour toute $(n, 1)$ -forme différentielle φ $\bar{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, telle que $\text{supp} \varphi \cap \omega$ soit compact, il existe une $(0, n-3)$ -forme différentielle u de classe C^∞ sur ω telle que $\bar{\partial}_b u = f$ sur ω .

La condition (A1) signifie que l'enveloppe essentielle d'holomorphie de ω est le sous-ensemble $E(\omega) = \bar{\Omega} \setminus K$ de $\bar{\Omega}$; elle est donc plongée dans X . D'après [7], elle implique que K est contenu dans l'enveloppe holomorphiquement convexe $\widehat{\partial\Omega \setminus \omega}$ de $\partial\Omega \setminus \omega$.

Nous prouvons dans cet article (cf. Théorème 2.3) que, sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3), l'intérieur du compact K est pseudoconvexe et que le bord de ω est donc contenu dans un ensemble $H \subset \partial K$ Levi-plat au sens où $\Omega \setminus H$ est réunion de domaines pseudoconvexes. Réciproquement, si de plus K est un compact holomorphiquement convexe, les hypothèses analytiques (A1), (A2) et (A3) sont satisfaites.

L'article est organisé comme suit. Dans une première partie nous prouvons que les hypothèses d'extension des fonctions CR et de résolubilité de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sont équivalentes à des conditions d'annulation et de séparation pour la cohomologie de Dolbeault de l'ouvert $X \setminus K$ et du compact K . Ces conditions étendent les caractérisations cohomologiques données par Lupaccolu dans [12] (voir aussi [2]) sous la seule hypothèse (A1). Dans la seconde partie nous prouvons que si le compact K satisfait les conditions d'annulation de la cohomologie de Dolbeault obtenues dans la première partie alors $\overset{\circ}{K}$ est pseudoconvexe.

L'auteur a débuté ce travail lors de son séjour à l'Université de l'état de Washington à Seattle en mai 2003. Il voudrait remercier ici E.L. Stout pour son chaleureux accueil et pour leurs fructueux échanges mathématiques.

1 Conditions cohomologiques

Soient X une variété de Stein de dimension n , $n \geq 3$, Ω un domaine relativement compact, strictement pseudoconvexe, à bord C^∞ de X et ω un ouvert connexe de $\partial\Omega$. Dans cette section nous allons prouver que les hypothèses analytiques (A1), (A2) et (A3) sont équivalentes à des conditions d'annulation pour la cohomologie de Dolbeault du compact $K = \overline{\Omega} \setminus E(\omega)$.

Nous commençons par caractériser certaines conditions d'annulation et de séparation de la cohomologie de Dolbeault d'une partie compacte L d'une variété de Stein X de dimension n , $n \geq 3$, à l'aide de la cohomologie de Dolbeault de l'ouvert $X \setminus L$, puis nous remarquons que ces conditions sont satisfaites lorsque L est un compact de Stein. Nous les relierons ensuite à la cohomologie de Dolbeault de l'ouvert $X \setminus L$, à support dans la famille Φ des fermés de $X \setminus L$, qui sont relativement compacts dans X .

Proposition 1.1. *Soient X une variété de Stein de dimension n , $n \geq 3$, p un entier, $0 \leq p \leq n$, et L une partie compacte de X telle que $X \setminus L$ soit connexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(C1) \quad H^{n-p,q}(L) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n-1$$

$$(C2) \quad H^{p,q}(X \setminus L) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n-2, \text{ et } H^{p,n-1}(X \setminus L) \text{ est Hausdorff.}$$

Remarque 1.2. L'hypothèse de connexité de $X \setminus L$ n'intervient que pour prouver que (C2) implique $H^{n-p,n-1}(L) = 0$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, par la dualité de Serre [10], (C2) est équivalent à

$$(C2') \quad H_c^{n-p,q}(X \setminus L) = 0, \text{ si } 2 \leq q \leq n-1, \text{ et } H_c^{n-p,n}(X \setminus L) \text{ est Hausdorff.}$$

Montrons que (C2) implique (C1).

Soient f une $(n-p, q)$ -forme différentielle de classe C^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée sur un voisinage U de L et χ une fonction de classe C^∞ sur X , à support dans U et identiquement égale à 1 au voisinage de L . Après prolongement par 0 à $X \setminus U$, la forme différentielle χf est définie sur X et $\bar{\partial}(\chi f) = \bar{\partial}\chi \wedge f$ est une $(n-p, q+1)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée, à support compact dans $X \setminus L$.

Si $1 \leq q \leq n-2$, il résulte de (C2') qu'il existe une $(n-p, q)$ -forme différentielle g à support compact dans $X \setminus L$ telle que $\bar{\partial}g = \bar{\partial}(\chi f)$. Posons $h = \chi f - g$, c'est une $(n-p, q)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée dans X . Comme X est une variété de Stein, il existe une $(n-p, q-1)$ -forme différentielle u de classe C^∞ sur X telle que $\bar{\partial}u = h$. Comme $g \equiv 0$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de L , on a $\bar{\partial}u = f$ au voisinage de L .

Si $q = n-1$, il résulte de (C2') qu'il existe une $(n-p, n-1)$ -forme différentielle g à support compact dans $X \setminus L$ telle que $\bar{\partial}g = \bar{\partial}(\chi f)$ si χf est orthogonale aux $(p, 0)$ -formes différentielles holomorphes sur $X \setminus L$. Soit φ une $(p, 0)$ -forme différentielle holomorphe sur $X \setminus L$. Comme X est une variété de Stein de dimension $n \geq 2$ et $X \setminus L$ est connexe, φ s'étend en une $(p, 0)$ -forme différentielle holomorphe $\tilde{\varphi}$ sur X par le phénomène de Hartogs. On obtient donc

$$\int_{X \setminus L} \bar{\partial}(\chi f) \wedge \varphi = \int_X \bar{\partial}(\chi f) \wedge \tilde{\varphi} = \int_X \bar{\partial}(\chi f \wedge \tilde{\varphi}) = 0,$$

car $\chi f \tilde{\varphi}$ est à support compact dans X . On conclut alors comme précédemment.

Montrons maintenant que (C1) implique (C2). Grâce à la remarque faite en début de démonstration, il suffit de prouver (C2').

Soit f une $(n-p, q)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée, à support compact dans $X \setminus L$, $2 \leq q \leq n-1$. Après prolongement par 0 dans L , f définit une $(n-p, q)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée, à support compact dans X . Comme X est une variété de Stein, il existe une $(n-p, q-1)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , à support compact dans X telle que $\bar{\partial}g = f$. En particulier $\bar{\partial}g = 0$ sur un voisinage U de L et d'après (C1), il existe un voisinage $V \subset U$ de L et une $(n-p, q-2)$ -forme différentielle h de classe \mathcal{C}^∞ sur V telle que $\bar{\partial}h = g$ sur V . Soit χ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans V et identiquement égale à 1 au voisinage de L , on définit χh sur X en la prolongeant par 0. La forme différentielle $u = g - \bar{\partial}(\chi h)$ est alors de classe \mathcal{C}^∞ sur X et identiquement nulle au voisinage de L et sa restriction à $X \setminus L$ est une $(p, q-1)$ -forme différentielle à support compact dans $X \setminus L$ qui vérifie $\bar{\partial}u|_{X \setminus L} = f$.

Il résulte de la dualité de Serre [10] que, pour démontrer la seconde partie de l'assertion (C2'), il suffit de prouver que, pour tout compact K de $X \setminus L$, $\mathcal{D}_K^{n-p, n}(X \setminus L) \cap \bar{\partial}\mathcal{D}^{n-p, n-1}(X \setminus L)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{D}_K^{n-p, n}(X \setminus L)$. Soit f une $(n-p, n)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée à support dans K , telle que $f = \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\partial}g_j$, où $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de $(n-p, n-1)$ -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans $X \setminus L$. Grâce à la formule de Stokes,

$$\int_X f \wedge \varphi = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \bar{\partial}g_j \wedge \varphi = 0, \quad (1.1)$$

pour toute $(p, 0)$ -forme différentielle φ de classe \mathcal{C}^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée dans X . Comme X est une variété de Stein, il existe une $(n-p, n-1)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , à support compact dans X telle que $\bar{\partial}g = f$. On termine alors comme dans le cas précédent. \square

Remarquons que si L est un compact de Stein, il satisfait les conditions équivalentes (C1) et (C2) de la Proposition 1.1. Il s'agit d'un résultat classique, que l'on peut trouver dans [2], et dont nous redonnons une démonstration, qui utilise la Proposition précédente.

Lemme 1.3. *Soit L un compact de Stein d'une variété de Stein X de dimension n , $n \geq 2$. Alors pour tout entier p , $0 \leq p \leq n$,*

$$(C2) \quad H^{p, q}(X \setminus L) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n-2, \text{ et } H^{p, n-1}(X \setminus L) \text{ est Hausdorff.}$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.1, il suffit de prouver (C1). Par définition des compacts de Stein, il existe une suite décroissante $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de voisinages strictement pseudoconvexes de L telle que $\bar{U}_{j+1} \subset U_j$ et $L = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j$, ce qui implique que $X \setminus L$ est connexe.

Soit f une $(n-p, q)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée sur un voisinage U de L , $1 \leq q \leq n-1$. Il existe alors j_0 tel que $U_{j_0} \subset U$ et, puisque U_{j_0} est de Stein, il existe une $(n-p, q-1)$ -forme g de classe \mathcal{C}^∞ sur U_{j_0} telle que $\bar{\partial}g = f$ sur U_{j_0} . \square

Proposition 1.4. *Soient X une variété de Stein de dimension n , $n \geq 3$, p un entier, $0 \leq p \leq n$, et L une partie compacte de X . Considérons les conditions suivantes :*

$$(C2) \quad H^{p, q}(X \setminus L) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n-2, \text{ et } H^{p, n-1}(X \setminus L) \text{ est Hausdorff.}$$

$$(C3) \quad H_{\mathbb{F}}^{p, q}(X \setminus L) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n-2, \text{ et } H_{\mathbb{F}}^{p, n-1}(X \setminus L) \text{ est Hausdorff.}$$

Alors (C2) implique (C3). Plus précisément, pour tout $q \geq 1$, si $H^{p,q}(X \setminus L) = 0$ alors $H_{\Phi}^{p,q}(X \setminus L) = 0$ et si $H^{p,q}(X \setminus L)$ est Hausdorff alors $H_{\Phi}^{p,q}(X \setminus L)$ est également Hausdorff.

Démonstration. Dans [2] (7) p. 50), (voir aussi [8], Chap. V, Th 2.7), Chirka et Stout ont prouvé que, pour $q \geq 1$, l'application naturelle $i : H_{\Phi}^{p,q}(X \setminus L) \rightarrow H^{p,q}(X \setminus L)$ est injective et par conséquent la nullité du groupe $H^{p,q}(X \setminus L)$ implique immédiatement la nullité du groupe $H_{\Phi}^{p,q}(X \setminus L)$.

On note $\mathcal{D}_{\Phi}^{p,q}(X \setminus L)$ l'espace des (p, q) -formes différentielles de classe C^{∞} à support dans la famille Φ et on le munit de sa topologie classique de limite inductive de Fréchet. Nous voulons montrer que, si $\overline{\partial}\mathcal{E}^{p,q-1}(X \setminus L)$ est un sous espace fermé de $\mathcal{E}^{p,q}(X \setminus L)$, alors $\overline{\partial}\mathcal{D}_{\Phi}^{p,q-1}(X \setminus L)$ est un sous espace fermé de $\mathcal{D}_{\Phi}^{p,q}(X \setminus L)$. Puisque l'injection de $\mathcal{D}_{\Phi}^{p,q}(X \setminus L)$ dans $\mathcal{E}^{p,q}(X \setminus L)$ est continue, si f appartient à l'adhérence de $\overline{\partial}\mathcal{D}_{\Phi}^{p,q-1}(X \setminus L)$ alors f appartient à l'adhérence de $\overline{\partial}\mathcal{E}^{p,q-1}(X \setminus L)$. Ce dernier espace étant fermé par hypothèse, la classe de f dans $H^{p,q-1}(X \setminus L)$ est nulle et par l'injectivité de l'application i , la classe de f dans $H_{\Phi}^{p,q-1}(X \setminus L)$ est nulle, ce qui prouve le résultat. \square

Théorème 1.5. *Soient Ω un domaine relativement compact, strictement pseudoconvexe, à bord C^{∞} d'une variété de Stein X de dimension n , $n \geq 3$, ω un ouvert connexe de $\partial\Omega$ tel que $\overline{\omega} \neq \partial\Omega$ et K un compact de $\overline{\Omega}$ tel que $\partial\Omega \setminus K = \omega$ et $\Omega \setminus K$ est pseudoconvexe.*

Considérons les hypothèses analytiques suivantes :

- (A1) *Toute fonction CR continue sur ω s'étend en une fonction continue sur $E(\omega) = \overline{\Omega} \setminus K$ et holomorphe dans $E(\omega) \setminus \omega$;*
- (A2) *Pour tout entier q , $1 \leq q \leq n-3$, et toute $(0, q)$ -forme différentielle f de classe C^{∞} , CR sur ω , il existe une $(0, q-1)$ -forme différentielle u de classe C^{∞} sur ω telle que $\overline{\partial}_b u = f$ sur ω ,*
- (A3) *Pour toute $(0, n-2)$ -forme différentielle f de classe C^{∞} , CR sur ω , qui vérifie $\int_{\omega} f \wedge \varphi = 0$, pour toute $(n, 1)$ -forme différentielle φ $\overline{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, telle que $\text{supp } \varphi \cap \omega$ soit compact, il existe une $(0, n-3)$ -forme différentielle u de classe C^{∞} sur ω telle que $\overline{\partial}_b u = f$ sur ω .*

Les hypothèses analytiques sont satisfaites si et seulement si

$$(C1) \quad H^{n,q}(K) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n-1.$$

Démonstration. Supposons que les hypothèses analytiques sont satisfaites et montrons que

$$(C2) \quad H^{0,q}(X \setminus K) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n-2, \text{ et } H^{0,n-1}(X \setminus K) \text{ est Hausdorff}$$

est vérifiée, ce qui, d'après la Proposition 1.1, implique la condition (C1).

Le domaine Ω étant strictement pseudoconvexe, il existe deux domaines strictement pseudoconvexes D' et D'' tels que $D'' \subset \Omega \subset D'$, $K \subset \overline{D''}$, $\overline{D'} \cap K = K$, $\partial D'' \setminus K \subset \Omega$ et $(\partial D' \setminus K) \cap \Omega = \emptyset$.

Pour prouver la première partie de (C2), on considère une $(0, q)$ -forme différentielle f de classe C^{∞} , $\overline{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, $1 \leq q \leq n-2$. Puisque $\Omega \setminus K = E(\omega) \setminus \omega$ est pseudoconvexe, il en est de même de $D' \setminus K$ et par conséquent il existe une $(0, q-1)$ -forme différentielle u_1 de classe C^{∞} telle que $f = \overline{\partial}u_1$ sur $D' \setminus K$. Par ailleurs comme $\overline{D''}$ est un compact de Stein, il résulte du Lemme 1.3 que $H^{0,q}(X \setminus \overline{D''}) = 0$. Il existe donc une $(0, q-1)$ -

forme différentielle u_2 de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f = \bar{\partial}u_2$ sur $X \setminus \bar{D}$. La restriction à ω de la $(0, q-1)$ -forme différentielle $u_1 - u_2$ définit alors une forme différentielle CR sur ω .

Si $q = 1$, l'hypothèse analytique (A1) implique que $(u_1 - u_2)|_\omega$ s'étend holomorphiquement à $E(\omega)$ en une fonction v qui coïncide avec $u_1 - u_2$ sur $D' \setminus D$. En posant $u = u_1 - v$ sur $D' \setminus K$ et $u = u_2$ sur $X \setminus \bar{D}$, on définit une fonction \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus K$ qui vérifie $\bar{\partial}u = f$ sur $X \setminus K$.

Si $2 \leq q \leq n-2$, l'hypothèse analytique (A2) implique qu'il existe une $(0, q-2)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ sur ω qui vérifie $\bar{\partial}_b v = (u_1 - u_2)|_\omega$. Soit \tilde{v} une extension \mathcal{C}^∞ de v à $D' \setminus K$. En posant $u = u_1 - \bar{\partial}\tilde{v}$ sur $\Omega \setminus K$ et $u = u_2$ sur $X \setminus \bar{\Omega}$, on définit une $(0, q-1)$ -forme différentielle continue sur $X \setminus K$, qui vérifie $\bar{\partial}u = f$ sur $X \setminus K$. Grâce à l'isomorphisme de Dolbeault (régularité du $\bar{\partial}$), il existe une $(0, q-1)$ -forme différentielle \tilde{u} de classe \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus K$, telle que $\bar{\partial}\tilde{u} = f$ sur $X \setminus K$.

Pour prouver la seconde partie de (C2), on considère une $(0, n-1)$ -forme différentielle f de classe \mathcal{C}^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, telle que $f = \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\partial}g_j$, où $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de $(0, n-2)$ -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus K$. Comme ci-dessus, nous obtenons l'existence d'une $(0, n-2)$ -forme u_1 de classe \mathcal{C}^∞ sur $D' \setminus K$ telle que $f = \bar{\partial}u_1$ sur $D' \setminus K$ et d'une $(0, n-2)$ -forme u_2 de classe \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus \bar{D}$ telle que $f = \bar{\partial}u_2$ sur $X \setminus \bar{D}$; La forme différentielle $w = u_1 - u_2$ est alors $\bar{\partial}$ -fermée sur $D' \setminus \bar{D}$ et définit donc une $(0, n-2)$ -forme CR sur ω . Si φ est une $(n, 1)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , $\bar{\partial}$ -fermée à support compact dans $X \setminus K$ telle l'intersection du support de φ avec ω , on a

$$\int_\omega w \wedge \varphi = \int_\omega u_1 \wedge \varphi - \int_\omega u_2 \wedge \varphi = \int_{\Omega \setminus K} f \wedge \varphi + \int_{X \setminus \bar{\Omega}} f \wedge \varphi = \int_X f \wedge \varphi$$

d'après la formule de Stokes, car $f \wedge \varphi = \bar{\partial}u_1 \wedge \varphi = d(u_1 \wedge \varphi)$ sur $\Omega \setminus K$ et $f \wedge \varphi = \bar{\partial}u_2 \wedge \varphi = d(u_2 \wedge \varphi)$ sur $X \setminus \bar{\Omega}$ et donc

$$\int_\omega w \wedge \varphi = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \bar{\partial}g_j \wedge \varphi = 0$$

en appliquant de nouveau la formule de Stokes. La variété X étant de Stein et $\Omega \setminus K$ pseudoconvexe, pour toute $(n, 1)$ -forme différentielle ψ $\bar{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, telle que $\text{supp} \psi \cap \omega$ soit compact, il existe une $(n, 1)$ -forme différentielle φ $\bar{\partial}$ -fermée à support compact dans $X \setminus K$ telle que $\psi = \varphi$ au voisinage de ω . L'hypothèse analytique (A3) nous donne alors l'existence d'une $(0, n-3)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ sur ω qui vérifie $\bar{\partial}_b v = (u_1 - u_2)|_\omega$ et on conclut comme dans le cas précédent.

Pour prouver la condition suffisante, il suffit, d'après les Propositions 1.1 et 1.4, de montrer que la condition cohomologique (C3) implique les hypothèses analytiques (A1), (A2) et (A3).

L'hypothèse analytique (A1) est démontrée dans [12] (voir aussi le Théorème 5.1 du chapitre V de [8] dont les hypothèses topologiques sont satisfaites puisque Ω est pseudoconvexe).

Soit f une $(0, q)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , CR sur ω , $1 \leq q \leq n-3$, d'après le Théorème 3.5 de [9], la nullité du groupe de cohomologie $H_{\mathbb{F}}^{0, q+1}(X \setminus K)$ implique qu'il existe une $(0, q)$ -forme différentielle F , $\bar{\partial}$ -fermée, de classe \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus (K \cup \omega)$, qui s'annule en dehors d'un compact de X et qui possède des extensions de classe \mathcal{C}^∞ , F^+ et F^- , de

chaque côté de ω vérifiant $f = F^+|_\omega - F^-|_\omega$. Supposons que F^- corresponde à l'extension de $F|_{X \setminus \bar{\Omega}}$, le support de F^- est donc relativement compact dans X . Comme $\bar{\Omega}$ est un compact de Stein, il résulte du Lemme 1.3 et de la Proposition 1.4 qu'il existe une $(0, q-1)$ -forme différentielle G^- de classe \mathcal{C}^∞ sur $(X \setminus \bar{\Omega}) \cup \omega$ telle que $\bar{\partial}G^- = F^-$ sur $X \setminus \bar{\Omega}$. La régularité de G^- jusqu'à ω se déduit facilement de la méthode des bosses (cf [5]) car Ω est strictement pseudoconvexe et $q \leq n-1$. Soit \tilde{G}^- un prolongement de classe \mathcal{C}^∞ de G^- à $X \setminus K$. La forme différentielle $\tilde{F} = F^+ - \bar{\partial}\tilde{G}^-$ est alors une $(0, q)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée, de classe \mathcal{C}^∞ sur $(\Omega \setminus K) \cup \omega$ telle que $\tilde{F}|_\omega = f$. Puisque $\Omega \setminus K$ est un domaine pseudoconvexe, \tilde{f} est $\bar{\partial}$ -exacte dans $\Omega \setminus K$ et comme Ω est strictement pseudoconvexe, grâce à la méthode des bosses, il existe une $(0, q-1)$ -forme différentielle U , $\bar{\partial}$ -fermée, de classe \mathcal{C}^∞ sur $(\Omega \setminus K) \cup \omega$ telle que $\bar{\partial}U = \tilde{F}$. La forme différentielle $u = U|_\omega$ satisfait alors la seconde assertion.

Soit f une $(0, n-2)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ , CR sur ω , qui vérifie $\int_\omega f \wedge \varphi = 0$, pour toute $(0, 1)$ -forme différentielle φ $\bar{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, telle que $\text{supp}\varphi \cap \omega$ soit compact. Nous allons nous ramener à l'étude du cas précédent en prouvant que f peut être représentée comme le saut de deux formes différentielles $\bar{\partial}$ -fermées.

Il est bien connu (cf. [1]) que f peut être représentée localement comme le saut de deux formes différentielles $\bar{\partial}$ -fermées. Il existe donc un voisinage W de ω dans $X \setminus K$, relativement compact dans X , un recouvrement localement fini $(W_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de W et des $(0, n-2)$ -formes différentielles F_j , $\bar{\partial}$ -fermées, de classe \mathcal{C}^∞ dans $W_j \setminus \omega$, qui possèdent des extensions de classe \mathcal{C}^∞ , F_j^+ et F_j^- , de chaque côté de $\omega \cap W_j$ vérifiant $f = F_j^+|_{\omega \cap W_j} - F_j^-|_{\omega \cap W_j}$. Posons $W_0 = X \setminus (K \cup \omega)$ et $F_0 = 0$. Les formes différentielles $F_i - F_j$ sont alors des formes différentielles $\bar{\partial}$ -fermées, de classe \mathcal{C}^∞ sur $W_i \cup W_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, et $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ forme un recouvrement localement fini de $X \setminus K$. Soient $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une partition \mathcal{C}^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $H = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k F_k$, H est un $(0, n-2)$ -courant sur $X \setminus K$. En posant $G = \bar{\partial}(F_j - H)$ sur W_j , $j \in \mathbb{N}$, on définit une $(0, n-1)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée, de classe \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus K$ qui s'annule en dehors d'un compact de X . Il reste à montrer que $G = \bar{\partial}E$, où E est une $(0, n-2)$ -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus K$ qui s'annule en dehors d'un compact de X , et $F = E + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k F_k$ donnera le saut cherché. Puisque $H_\Phi^{0, n-1}(X \setminus K)$ est Hausdorff, G est $\bar{\partial}$ -exacte si elle est contenue dans l'adhérence de l'espace $\bar{\partial}_b \mathcal{D}_\Phi^{0, n-2}(X \setminus K)$, c'est-à-dire si pour toute $(n, 1)$ -forme différentielle φ , $\bar{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, telle que $\text{supp}\varphi \cap \text{supp}G$ soit compact, on a $\int_{X \setminus K} G \wedge \varphi = 0$. Par définition de G on a

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus K} G \wedge \varphi &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{X \setminus K} \bar{\partial}(F_j - H) \wedge \chi_j \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{W_j \cap \omega} \chi_j f \wedge \varphi - \langle \bar{\partial}H, \varphi \rangle \\ &= \int_\omega f \wedge \varphi = 0. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.6. Nous venons de démontrer que, dans le contexte géométrique du Théorème 1.5, l'ensemble des conditions analytiques (A1), (A2) et (A3) est équivalent à chacune des

différentes conditions cohomologiques (C1), (C2) et (C3), ce qui généralise les Théorèmes 2.1.2 et 2.3.2 de [2].

On peut également déduire de la démonstration du Théorème 1.5 le corollaire suivant, qui correspond, lorsque $n = 3$, au Théorème 2.1.1 de [2] :

Corollaire 1.7. *Soient Ω un domaine relativement compact, strictement pseudoconvexe, à bord C^∞ d'une variété de Stein X de dimension n , $n \geq 3$, ω un ouvert connexe de $\partial\Omega$ tel que $\bar{\omega} \neq \partial\Omega$ et K un compact de $\bar{\Omega}$ tel que $\partial\Omega \setminus K = \omega$ et $\Omega \setminus K$ est pseudoconvexe. Alors l'ensemble des conditions analytiques (A1) et (A2) est équivalent à chacune des conditions cohomologiques suivantes :*

$$\begin{aligned} H^{0,q}(X \setminus K) &= 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n - 2, \\ H_{\mathbb{F}}^{0,q}(X \setminus K) &= 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n - 2. \end{aligned}$$

2 Conditions géométriques

Dans cette section nous allons donner une propriété géométrique des parties compactes d'une variété de Stein, qui vérifient la condition cohomologique (C1) du Théorème 1.5. Nous en déduirons une condition géométrique de platitude nécessairement vérifiée par le bord de l'ouvert ω de $\partial\Omega$ dans la situation géométrique et analytique décrite dans l'introduction.

Théorème 2.1. *Soit K une partie compacte d'une variété de Stein X d'intérieur non vide et qui vérifie $H^{0,q}(K) = 0$ pour $1 \leq q \leq n - 1$, alors l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K est une variété de Stein.*

Démonstration. La démonstration du théorème est calquée sur la preuve du Théorème 4.1 de [6].

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'une composante connexe D de $\overset{\circ}{K}$ n'est pas une variété de Stein. Il existe alors un point $p \in \partial D$ et un voisinage ouvert U de p dans X tel que toute fonction holomorphe sur D s'étende holomorphiquement à $D \cup U$. Quitte à restreindre U , on peut supposer qu'il est contenu dans un domaine de carte de X . Notons N un polydisque centré en p et contenu dans U , alors $N \setminus K$ est dense dans $N \setminus \overset{\circ}{K}$. On peut donc trouver un point $p_0 \in N \setminus K$ et un polydisque N_0 centré en p_0 , contenant p et contenu dans N . Par un changement affine de coordonnées dans U , on peut se ramener au cas où p_0 est l'origine et la droite passant par p_0 et p est contenue dans $V = \{z_1 = \dots = z_{n-1} = 0\}$. Ces nouvelles coordonnées étant fixées, à chaque multi-indice $I_m = (i_1, \dots, i_m)$ de longueur m , $1 \leq m \leq n$, tel que $1 \leq i_j \leq n$, on associe la forme différentielle de bidegré $(0, m - 1)$

$$\alpha(I_m) = \frac{(m-1)!}{|z|^2} \sum_{j=1}^m (-1)^j \bar{z}_j dz_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dz_{i_j}} \wedge \dots \wedge dz_{i_m}$$

qui est de classe C^∞ dans $U \setminus \{0\}$ et qui est antisymétrique en les éléments de I_m . Les

formes $\alpha(I_m)$ vérifient

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\alpha(I_m) &= \sum_{k=1}^n z_k \alpha(kI_m) \quad \text{si } m \leq n-1, \\ \bar{\partial}\alpha(I_n) &= 0.\end{aligned}$$

Il résulte de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris qu'il existe un isomorphisme de \mathcal{O}_X -module entre $H^{0,q}(X \setminus \{p_0\})$ et $H^{0,q}(N_0 \setminus \{p_0\})$ pour $1 \leq q \leq n$. Cet isomorphisme est induit par l'application restriction sur les formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ .

Notons $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ les fonctions holomorphes globales qui définissent les coordonnées z_1, \dots, z_n que nous avons fixées sur U . Par l'isomorphisme précédent, on peut associer à chaque forme différentielle $\alpha(I_m)$ une $(0, m-1)$ -forme différentielle $\alpha^*(I_m)$ de classe \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus \{p_0\}$, qui est antisymétrique en les éléments de I_m et qui vérifie

$$\bar{\partial}\alpha^*(I_m) = \sum_{k=1}^n f_k \alpha^*(k, I_m) \quad \text{si } m \leq n-1, \quad (2.1)$$

$$\bar{\partial}\alpha^*(I_n) = 0. \quad (2.2)$$

De plus, on peut prouver facilement (cf. [6]) que pour chaque multi-indice $I_{m+1}(n) = (i_1, \dots, i_m, n)$ de longueur $m+1$, $0 \leq m \leq n-1$, tel que $1 \leq i_j \leq n$, il existe une forme différentielle $\beta(I_{m+1}(n))$ de bidegré $(0, m-1)$, de classe \mathcal{C}^∞ dans $N_0 \setminus \{p_0\}$ et antisymétrique en les éléments de $I_{m+1}(n)$, vérifiant

$$\bar{\partial}\alpha^*(I_{m+1}(n)) = \bar{\partial}\alpha(I_{m+1}(n)) + \sum_{k=1}^n f_k \bar{\partial}\beta(k, I_{m+1}(n)) \quad (2.3)$$

sur $N_0 \setminus \{p_0\}$, pour $0 \leq m \leq n-1$ et

$$\alpha^*(I_{m+1}(n)) = \alpha(I_{m+1}(n)) + \sum_{k=1}^n f_k \beta(k, I_{m+1}(n)) + \bar{\partial}\beta(I_{m+1}(n)) \quad (2.4)$$

sur $N_0 \setminus \{p_0\}$, pour $1 \leq m \leq n-1$.

Nous allons construire une fonction Λ holomorphe au voisinage de K , qui est singulière en p_0 , ce qui donnera la contradiction cherchée en considérant la restriction de Λ à D .

Prouvons par récurrence sur l , que pour tout multi-indice $J_{l-2} = (j_1, \dots, j_{l-2})$ de longueur $l-2$, $2 \leq l \leq n$ tel que $1 \leq j_k \leq n-1$, il existe des formes différentielles $\omega_{n-l}(J_{l-2})$ de bidegré $(0, n-l)$, de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de K , qui sont antisymétriques en les éléments de J_{l-2} et qui vérifient

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\omega_{n-2}(\emptyset) &= \alpha^*(1, \dots, n) \\ \bar{\partial}\omega_{n-l-1}(j_1, \dots, j_{l-1}) &= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k f_k \omega_{n-l}(j_1, \dots, \widehat{j_k}, \dots, j_{l-1}) \\ &\quad - (-1)^{l+j_1+\dots+j_{l-1}} \alpha^*(1, \dots, \widehat{j_{l-1}}, \dots, n-1, n) \quad \text{si } 2 \leq l \leq n-1.\end{aligned}$$

On posera alors

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f_k \omega_0(1, \dots, \widehat{k}, \dots, n-1) - (-1)^{n+n(n-1)/2} \alpha^*(I_1(n)).$$

La forme différentielle $\alpha^*(1, \dots, n)$ est $\bar{\partial}$ -fermée sur $X \setminus \{p_0\}$, qui est un voisinage de K et par hypothèse $H^{0, n-1}(K) = 0$. Il existe donc une forme différentielle $\omega_{n-2}(\emptyset)$ de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de K telle que

$$\bar{\partial} \omega_{n-2}(\emptyset) = \alpha^*(1, \dots, n)$$

et de plus grâce à l'antisymétrie des formes relativement aux éléments des multi-indices et à (2.1)

$$-\bar{\partial} f_{j_1} \omega_{n-2}(\emptyset) = (-1)^{2+j_1} \bar{\partial} \alpha^*(1, \dots, \widehat{j_1}, \dots, n-1, n).$$

Soit $2 \leq l \leq n-1$, supposons que $\omega_{n-l}(J_{l-2})$ existe pour tout multi-indice $J_{l-2} = (j_1, \dots, j_{l-2})$ de longueur $l-2$ et que

$$\bar{\partial} \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k f_{j_k} \omega_{n-l}(j_1, \dots, \widehat{j_k}, \dots, j_{l-1}) = (-1)^{l+j_1+\dots+j_{l-1}} \bar{\partial} \alpha^*(1, \dots, \widehat{J_{l-1}}, \dots, n-1, n).$$

Comme $H^{0, n-l}(K) = 0$ par hypothèse, pour chaque multi-indice $J_{l-1} = (j_1, \dots, j_{l-1})$ de longueur $l-1$, il existe des formes différentielle $\omega_{n-l-1}(J_{l-1})$ de bidegré $(0, n-l-1)$, de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de K , qui est antisymétrique en les éléments de J_{l-1} et qui vérifie

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \omega_{n-l-1}(j_1, \dots, j_{l-1}) &= \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k f_k \omega_{n-l}(j_1, \dots, \widehat{j_k}, \dots, j_{l-1}) \\ &\quad - (-1)^{l+j_1+\dots+j_{l-1}} \alpha^*(1, \dots, \widehat{J_{l-1}}, \dots, n-1, n). \end{aligned}$$

De plus grâce à l'antisymétrie des formes relativement aux éléments des multi-indices et à (2.1), un simple calcul (cf. [6]) donne

$$\bar{\partial} \sum_{k=1}^l (-1)^k f_{j_k} \omega_{n-l-1}(j_1, \dots, \widehat{j_k}, \dots, j_l) = (-1)^{l+j_1+\dots+j_l} \bar{\partial} \alpha^*(1, \dots, \widehat{J_l}, \dots, n-1, n).$$

La fonction $\Lambda = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f_k \omega_0(1, \dots, \widehat{k}, \dots, n-1) - (-1)^{n+n(n-1)/2} \alpha^*(I_1(n))$ est alors holomorphe au voisinage de K d'après ce qui précède (cas $l = n-1$) et sur $N_0 \setminus \{p_0\}$ on a

$$\Lambda(0, \dots, 0, z_n) = -(-1)^{n+n(n-1)/2} \alpha^*(I_1(n))(0, \dots, 0, z_n).$$

Par ailleurs, nous déduisons de (2.3) que

$$\Gamma(z_1, \dots, z_n) = \alpha^*(I_1(n))(z_1, \dots, z_n) - \alpha(I_1(n))(z_1, \dots, z_n) - \sum_{\nu=1}^{n-1} z_\nu \beta(\nu, I_1(n))(z_1, \dots, z_n)$$

définit une fonction holomorphe sur $N_0 \setminus \{p_0\}$, qui se prolonge holomorphiquement à N_0 par le phénomène de Hartogs puisque $n \geq 2$. Si $z_n \neq 0$, on a donc

$$\Gamma(0, \dots, 0, z_n) = \alpha^*(I_1(n))(0, \dots, 0, z_n) - \alpha(I_1(n))(0, \dots, 0, z_n).$$

Mais par définition des formes différentielles α , on a $\alpha(I_1(n))(z_1, \dots, z_n) = \frac{\bar{z}_n}{|z|^2}$ et ainsi $\alpha(I_1(n))(0, \dots, 0, z_n) = -\frac{1}{z_n}$. Alors $\Lambda(0, \dots, 0, z_n) = -(-1)^{n+n(n-1)/2}(\Gamma(0, \dots, 0, z_n) - \frac{1}{z_n})$ et la restriction de la fonction Λ à $V = \{z_1 = \dots = z_{n-1} = 0\}$ possède un pôle à l'origine, la restriction de Λ à D ne peut donc pas se prolonger holomorphiquement à $D \cup U$. \square

Définition 2.2. Soit Ω un domaine pseudoconvexe relativement compact d'une variété de Stein X . Un sous ensemble H d'intérieur non vide de $\bar{\Omega}$ sera dit *Levi-plat* si $\Omega \setminus H$ est une réunion de domaines pseudoconvexes.

Théorème 2.3. Soient Ω un domaine relativement compact, strictement pseudoconvexe, à bord C^∞ d'une variété de Stein X de dimension n , $n \geq 3$, ω un ouvert connexe de $\partial\Omega$ tel que $\bar{\omega} \neq \partial\Omega$ et K un compact de $\bar{\Omega}$ d'intérieur non vide tel que $\partial\Omega \setminus K = \omega$ et $\Omega \setminus K$ est pseudoconvexe.

Considérons les hypothèses analytiques suivantes :

- (A1) Toute fonction CR continue sur ω s'étend en une fonction continue sur $E(\omega) = \bar{\Omega} \setminus K$ et holomorphe dans $E(\omega) \setminus \omega$;
- (A2) Pour tout entier q , $1 \leq q \leq n-3$, et toute $(0, q)$ -forme différentielle f de classe C^∞ , CR sur ω , il existe une $(0, q-1)$ -forme différentielle u de classe C^∞ sur ω telle que $\bar{\partial}_b u = f$ sur ω ,
- (A3) Pour toute $(0, n-2)$ -forme différentielle f de classe C^∞ , CR sur ω , qui vérifie $\int_\omega f \wedge \varphi = 0$, pour toute $(n, 1)$ -forme différentielle φ $\bar{\partial}$ -fermée sur $X \setminus K$, telle que $\text{supp} \varphi \cap \omega$ soit compact, il existe une $(0, n-3)$ -forme différentielle u de classe C^∞ sur ω telle que $\bar{\partial}_b u = f$ sur ω ,

alors le bord de ω est contenu dans un ensemble H Levi-plat.

Démonstration. L'ensemble $H = \partial K \setminus (\partial\Omega \setminus \bar{\omega})$ convient. En effet le bord de ω est contenu dans H et H divise Ω en $\Omega \setminus K$, qui est pseudoconvexe par hypothèse, et $\overset{\circ}{K}$, une réunion d'ouverts pseudoconvexes d'après les Théorèmes 1.5 et 2.1. \square

Pour prouver une réciproque partielle de ce théorème nous devons introduire quelques notations et définitions.

On note $\mathcal{O}(U)$ l'algèbre de Fréchet des fonctions holomorphes sur l'ouvert U de X munie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U . Si S est un sous-ensemble localement fermé de X , on définit $\mathcal{O}(S)$ comme la limite inductive des algèbres $\mathcal{O}(U)$, lorsque U décrit l'ensemble des ouverts de X qui contiennent S , et on munit $\mathcal{O}(S)$ de la topologie limite inductive correspondante. On note \tilde{S} le spectre de l'algèbre $\mathcal{O}(S)$, c'est-à-dire l'ensemble des homomorphismes continus, non nuls de l'algèbre $\mathcal{O}(S)$ dans \mathbb{C} et $g : S \rightarrow \tilde{S}$ l'application définie par $g(x)(f) = f(x)$ pour toute $f \in \mathcal{O}(S)$. On munit \tilde{S} de la topologie induite par la topologie faible du dual $\mathcal{O}'(S)$ de $\mathcal{O}(S)$.

Si S est un ouvert de X , on sait (cf. [3]) que g est une application bijective de S sur \tilde{S} si et seulement si S est une variété de Stein.

Lorsque X est une variété de Stein, il est alors habituel d'identifier X et \tilde{X} par l'application g . L'application restriction de $\mathcal{O}(X)$ dans $\mathcal{O}(S)$ induit alors par transposition une application de S dans X , que nous noterons π et qui vérifie $\pi \circ g = id$

Revenons au cas où S est seulement localement fermé. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages de S tel que $U_0 = X$ et $U_{j+1} \subset U_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. L'application restriction de $\mathcal{O}(U_j)$ dans $\mathcal{O}(U_{j+1})$ induit par transposition une application continue $\pi_{j+1,j}$ de \tilde{U}_{j+1} dans \tilde{U}_j . Puisque de manière générale le dual faible d'une limite inductive d'espaces localement convexes est la limite projective des duaux faibles (voir, par exemple, [15]), \tilde{S} est la limite projective de la famille $(\tilde{U}_{j+1}, \pi_{j+1,j})_{j \in \mathbb{N}}$. Les faisceaux ${}_j\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur U_j permettent alors de définir un faisceau structural holomorphe sur \tilde{S} que l'on notera ${}_s\mathcal{O}$. Le résultat suivant est prouvé dans [4].

Proposition 2.4. *Soit S un sous ensemble localement fermé d'une variété de Stein X . Les applications g et π satisfont alors les propriétés suivantes :*

a) *L'application π de \tilde{S} dans X induit un isomorphisme algébrique de $\mathcal{O}_{\pi(x)}$ sur ${}_s\mathcal{O}_x$ pour tout $x \in \tilde{S}$.*

b) *L'application g est un homéomorphisme de S sur $g(S)$, qui induit un isomorphisme de faisceau de ${}_s\mathcal{O}|_{g(S)}$ sur $\mathcal{O}|_S$, si on identifie S avec $g(S)$.*

c) *Si $E(S)$ désigne la composante de \tilde{S} qui rencontre S , l'application restriction $g^* : \Gamma(E(S), {}_{\tilde{S}}\mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O})$ est un isomorphisme algébrique.*

Définition 2.5. Si K est un compact de X , on dit qu'il est *holomorphiquement convexe* si $g(K) = \tilde{K}$.

Dans [4], Harvey et Wells ont donné la caractérisation cohomologique suivante des compacts K holomorphiquement convexes :

Théorème 2.6. *Soit K une partie compacte d'une variété de Stein X . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *K est holomorphiquement convexe,*

(ii) *$H^q(K, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout faisceau analytique cohérent \mathcal{F} sur K .*

Il en résulte grâce à l'isomorphisme de Dolbeault que tout compact K holomorphiquement convexe satisfait la condition

$$(C1) \quad H^{n,q}(K) = 0, \text{ si } 1 \leq q \leq n - 1.$$

Théorème 2.7. *Soient Ω un domaine relativement compact, strictement pseudoconvexe, à bord C^∞ d'une variété de Stein X de dimension n , $n \geq 3$, et ω un ouvert connexe de $\partial\Omega$. On suppose que le bord de ω est contenu dans un ensemble H Levi-plat et on note K le complémentaire dans $\overline{\Omega}$ de la composante connexe de $\overline{\Omega} \setminus H$ contenant ω .*

Si K est un compact holomorphiquement convexe, les hypothèses analytiques (A1), (A2) et (A3) sont satisfaites.

Démonstration. Puisque K est un compact holomorphiquement convexe, la condition cohomologique (C1) est satisfaite et le théorème résulte alors de la condition suffisante du Théorème 1.5. \square

Remarque 2.8. L'ensemble H étant Levi-plat, l'intérieur de la composante connexe de $\overline{\Omega} \setminus H$ contenant ω est pseudoconvexe et par conséquent l'application restriction

$$H^0(K, \mathcal{O}) \rightarrow H^0(K \cap \partial\Omega, \mathcal{O})$$

est bijective d'après [11], ce qui implique que K est contenu dans $\pi(\widetilde{K \cap \partial\Omega})$. L'hypothèse K holomorphiquement convexe se traduit alors par $g(K) = \widetilde{K \cap \partial\Omega}$.

Donnons maintenant quelques exemples de compacts holomorphiquement convexes.

D'après Rossi [14], si K possède un système fondamental dénombrable de voisinages de Stein alors $g(K) = \widetilde{K}$, en particulier si X est une variété de Stein et si K est $\mathcal{O}(X)$ -convexe, i.e. $K = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_K, \forall f \in \mathcal{O}(X)\}$, alors $g(K) = \widetilde{K}$.

Définissons une classe plus générale de compacts.

Définition 2.9. Soit X une variété, on dira qu'un compact K de X possède une base dénombrable de voisinages de Stein étalés s'il existe une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'ouverts de X tels que

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} V_j = K$$

et, si \widetilde{V}_n désigne l'enveloppe d'holomorphie de V_n et π_n la projection naturelle de \widetilde{V}_n dans X ,

$$\pi_1(\widetilde{V}_1) \supset \pi_2(\widetilde{V}_2) \supset \cdots \supset \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \pi_j(\widetilde{V}_j) = K$$

Un contre-exemple donné par B. Stenones [18] dans \mathbb{C}^2 montre que si un compact K possède une base de voisinages de Stein étalés, il ne possède pas nécessairement une base de voisinages de Stein.

Proposition 2.10. Soit X une variété de Stein et K un compact de X tel que $g(K) = \widetilde{K}$, alors K possède une base de voisinages de Stein étalés.

Démonstration. Nous avons vu que si K est un compact de X et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages de K tel que $U_0 = X$ et $U_{j+1} \subset U_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, \widetilde{K} est la limite projective de la famille $(\widetilde{U}_{j+1}, \pi_{j+1,j})_{j \in \mathbb{N}}$. Par conséquent $\pi(\widetilde{K}) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \pi_{0,j}(\widetilde{U}_j)$.

Supposons que $g(K) = \widetilde{K}$. Alors $K = \pi(\widetilde{K}) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \pi_{0,j}(\widetilde{U}_j)$. \square

Références

- [1] A. Andreotti and C. D. Hill. Convexity and the H. Levi problem. Part I : Reduction to the vanishing theorems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 26 :325–363, 1972.
- [2] E.M. Chirka and E.L. Stout. Removable singularities in the boundary. In *Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry*, volume E26 of *Aspects of Mathematics*, pages 43–104, 1994.
- [3] R.C. Gunning and H. Rossi. *Analytiques fonctions of several complex variables*. Prentice-Hall, 1965.
- [4] R. Harvey and R.O. Wells. Compact holomorphically convex subsets of a stein manifold. *Trans. A.M.S.*, 136 :509–516, 1969.
- [5] G. M. Henkin and J. Leiterer. *Andreotti-Grauert theory by integral formulas*, volume 74 of *Progress in Math*. Birkhäuser, 1988.

- [6] H. B. Laufer. On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy. *Ann. of Math.*, 84 :102–118, 1966.
- [7] C. Laurent-Thiébaud. Sur l’extension des fonctions CR dans une variété de stein. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 150 :1–21, 1988.
- [8] C. Laurent-Thiébaud. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*. Savoirs actuels. InterEditions/CNRS Editions, Paris, 1997.
- [9] C. Laurent-Thiébaud and J. Leiterer. The Andreotti-Vesentini separation theorem with C^k estimates and extension of CR-forms. In *Several complex variables, Proceedings of the Mittag-Leffler Institute, 1987-1988*, volume 38 of *Mathematical Notes*, pages 416–439, 1993.
- [10] C. Laurent-Thiébaud and J. Leiterer. On Serre duality. *Bull. Sci. Math.*, 124 :93–106, 2000.
- [11] G. Lupacchiolu. On the envelopes of holomorphy of strictly Levi-convex hypersurfaces. In *Colloque d’analyse complexe and géométrie, Marseille, janvier 1992*, volume 217 of *Astérisque*, pages 183–192, 1993.
- [12] G. Lupacchiolu. Characterization of removable sets in strongly pseudoconvex boundaries. *Ark. Mat.*, 32 :455–473, 1994.
- [13] G. Lupacchiolu and G. Tomassini. Un theorama di estensione per le CR-funzioni. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 137 :257–263, 1984.
- [14] H. Rossi. Holomorphically convex sets in several complex variables. *Annals of Math.*, 74 :470–493, 1961.
- [15] H.H. Schaefer. *Topological vector spaces*. Macmillan, New-York, 1966.
- [16] M.-C. Shaw. L^p estimates for local solutions of $\bar{\partial}_b$ on strongly pseudoconvex CR manifolds. *Math. Ann.*, 288 :35–62, 1990.
- [17] Z. Slodkovski. Analytic set-valued functions and spectra. *Math. Ann.*, 256 :363–386, 1981.
- [18] B. Steniones. Stein neighborhoods. *Math. Zeit.*, 195 :433–436, 1987.

Université de Grenoble
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS/UJF
BP 74
38402 St Martin d’Hères Cedex
France
Christine.Laurent@ujf-grenoble.fr